Plohe drugog reda

Ivanković, Marija Magdalena

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:260635

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Magdalena Ivanković

Plohe drugog reda

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Magdalena Ivanković

Plohe drugog reda

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s plohama drugoga reda. Napravit ćemo klasifikaciju nekih osnovnih ploha drugoga reda. Objasnit ćemo kako ih prikazati pomoću linearnog operatora u prostoru. Nadalje, pokazat ćemo kako iz dane jednadžbe prepoznati o kojoj plohi se radi.

Ključne riječi: ploha drugoga reda, kvadratna forma, svojstveni vektori, svojstvene vrijednosti, elipsoid, hiperboloid, stožac, paraboloid.

Abstract

In this final paper we will get acquainted with quadric surfaces. We will make a classification of some basic quadric surfaces. We will explain how to represent them with the linear operators in the space. Further, we will show how to tell apart different types of surfaces.

Key words: quadric surface, quadratic form, eigenvectors, eigenvalues, ellipsoid, hyperboloid, cone, paraboloid

Sadržaj

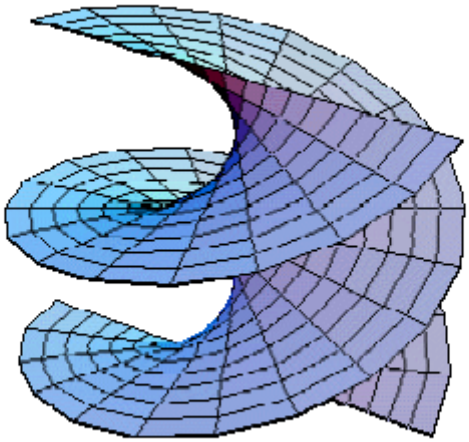
1 Uvod **1**

2 Definicija i klasifikacija ploha drugoga reda **2**
2.1 Elipsoid 2
2.2 Jednokrilni hiperboloid 4
2.3 Dvokrilni hiperboloid 6
2.4 Eliptički stožac 7
2.5 Eliptički paraboloid 8
2.6 Eliptički valjak 9
2.7 Hiperbolički paraboloid 10
2.8 Hiperbolički valjak 11
2.9 Parabolički valjak 12

3 Prepoznavanje ploha drugoga reda **13**
3.1 Prepoznavanje plohi iz dane jednadžbe 14
3.2 Primjer 16

1 Uvod

U ovom radu razmatramo plohe drugoga reda. U prvoj točki ovoga rada navodi se klasifikacija koja razlikuje devet osnovnih oblika ploha drugoga reda, iskazuju se njihove formule, osnovne značajke i prikazuju se njihovi grafovi u koordinatnom sustavu (vidi [5]). Definirat ćemo plohe drugog reda pomoću polinoma drugog stupnja triju varijabli. Objašnjavamo i na primjeru pokazujemo kako linearnom operatoru u prostoru pridružujemo plohu drugog reda(vidi [1], [3]). U idućoj točki opisuje se jedan od načina kako iz formule pomoću determinante pripadne matrice i svojstvenih vrijednosti odrediti o kojoj je plohi riječ. Na kraju ćemo dati primjer prepoznavanja plohi.



Slika 1. Helikoid

2 Definicija i klasifikacija ploha drugoga reda

Plohe drugog reda se u teoriji obično definiraju kao skup svih nultočaka polinoma drugoga reda triju varijabli $\mathcal{P}_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}_2(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 \tag{1}$$

pri čemu su $a_{ij}, a_i, a_0 \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3$, te matrica prisutne kvadratne forme

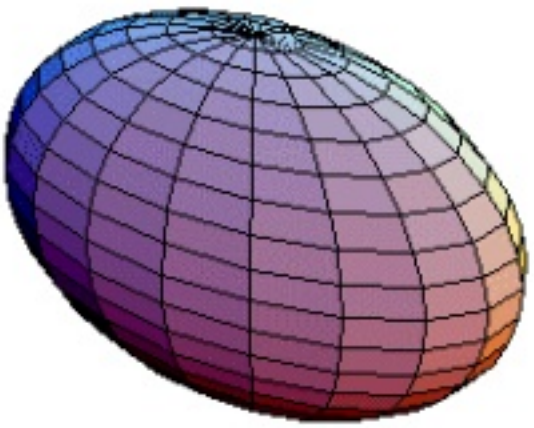
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

nije nul-matrica, što znači da je barem jedan od koeficijenata što stoje uz potencije reda 2 različit od nule.
Sada ćemo napraviti klasifikaciju devet osnovnih ploha drugoga reda, dati njihove formule, opisati ih i prikazati u koordinatnom sustavu.

2.1 Elipsoid

Jednadžba elipsoida čije su glavne osi paralelne s koordinatnim osima x, y, z, a duljine poluosi su a,b, c redom je

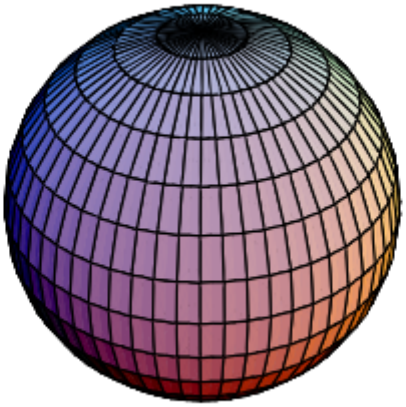
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$



Slika 2. Elipsoid

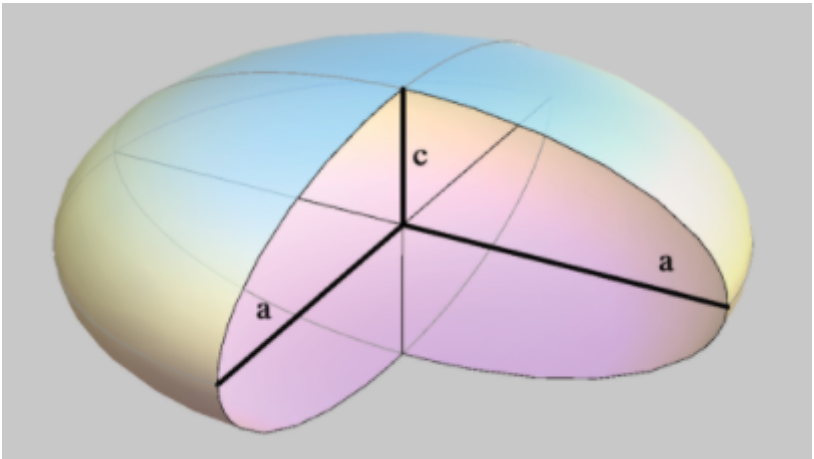
Nivo krivulje elipsoida kao i presjeci s ravninama paralelnim xz- i yz-ravninama su elipse. Sjecišta elipsoida s koordinatnim osima su točke $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Simetričan je obzirom na sve koordinatne ravnine. Omeđen je.

U slučaju a=b=c imamo sferu radijusa a.



Slika 3. Sfera

U slučaju a=b imamo rotacijski elipsoid.

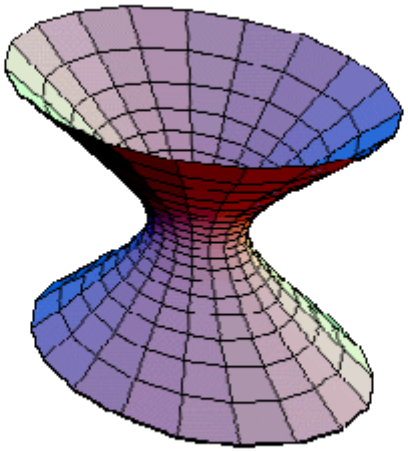


Slika 4. Rotacijski elipsoid

2.2 Jednokrilni hiperboloid

Jednadžba jednokrilnog hiperboloida je

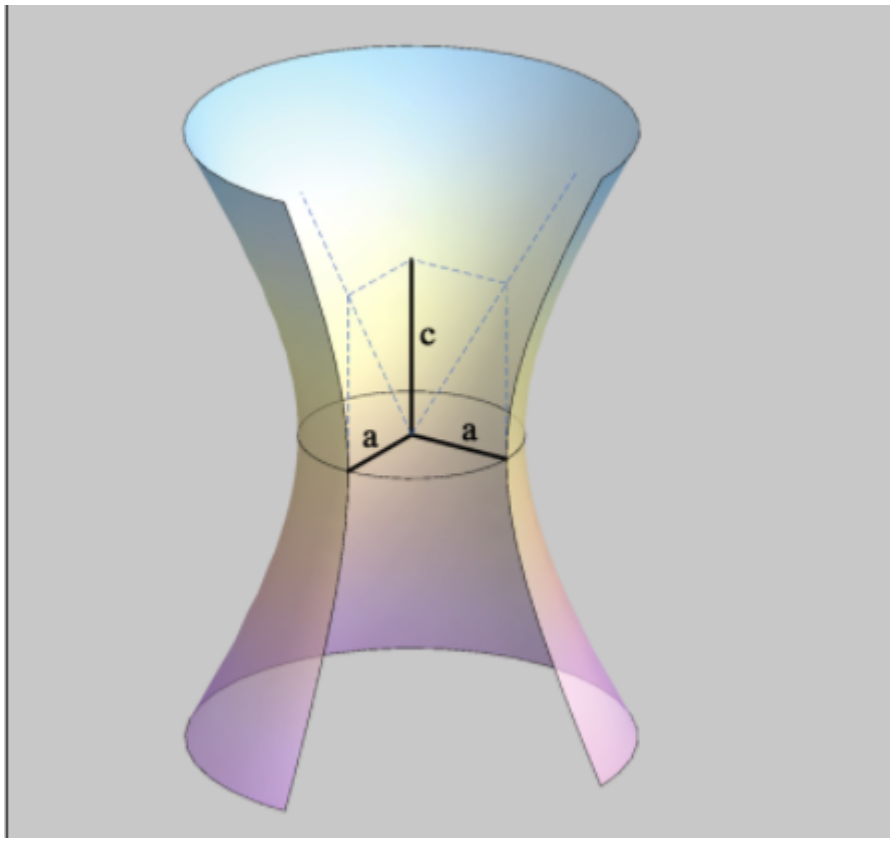
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$



Slika 5. Jednokrilni hiperboloid

Nivo krivulje jednokrilnog hiperboloida su elipse. Presjeci s ravninama paralelnim xz- i yz-ravninama su hiperbole. Sjecišta jednokrilnog hiperboloida s koordinatnim osima su točke $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$. Primijetimo da nema presjeka sa z-osi. Simetričan je obzirom na sve koordinatne ravnine. Nije omeđen.

U slučaju a=b imamo rotacijski jednokrilni hiperboloid.

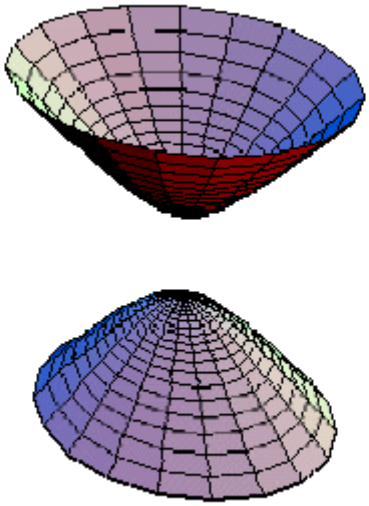


Slika 6. Jednokrilni rotacijski hiperboloid

2.3 Dvokrilni hiperboloid

Jednadžba dvokrilnog hiperboloida je

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$



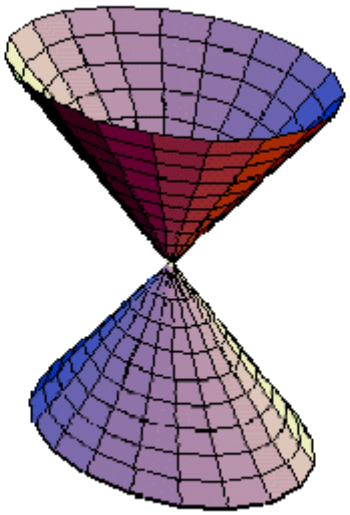
Slika 7. Dvokrilni hiperboloid

Nivo krivulje dvokrilnog hiperboloida su elipse. Presjeci s ravninama paralelnim xz- i yz-ravninama su hiperbole. Jedina sjecišta dvokrilnog hiperboloida s koordinatnim osima su $(0,0,\pm c)$. Primijetimo da nema presjeka sa x- i y-osima. Simetričan je obzirom na sve koordinatne ravnine. Nije omeđen.
U slučaju a=b imamo rotacijski dvokrilni hiperboloid.

2.4 Eliptički stožac

Jednadžba stošca ili konusa je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{5}$$



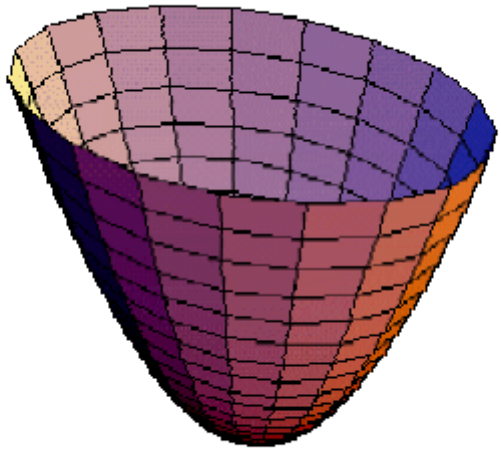
Slika 8. Eliptički stožac

Nivo krivulje eliptičkog stošca su elipse. Presjeci s ravninama x=k i y=k su hiperbole, ako je $k \neq 0$ i parovi pravaca ako je $k = 0$. Jedino sjecište s koordinatnim osima je ishodište $(0, 0, 0)$. Simetričan je obzirom na sve koordinatne ravnine. Nije omeđen.

2.5 Eliptički paraboloid

Jednadžba eliptičkog paraboloida je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{6}$$



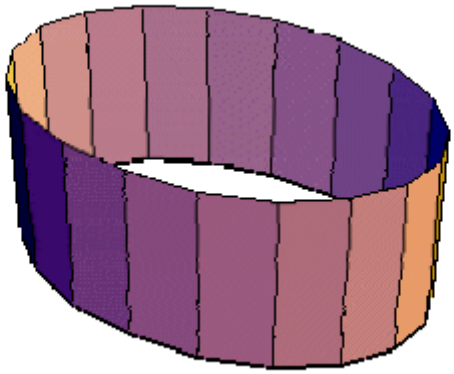
Slika 10. Eliptički paraboloid

Nivo krivulje eliptičkog paraboloida su elipse. Presjeci s ravninama paralelnim xz- i yz-ravninama su parabole. Jedino sjesište s koordinatnim osima je ishodište. Simetričan je obzirom na xz- i yz-ravnine. Nije omeđen odozgo.
U slučaju a=b imamo kružni paraboloid.

2.6 Eliptički valjak

Jednadžba eliptičkog valjka je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$



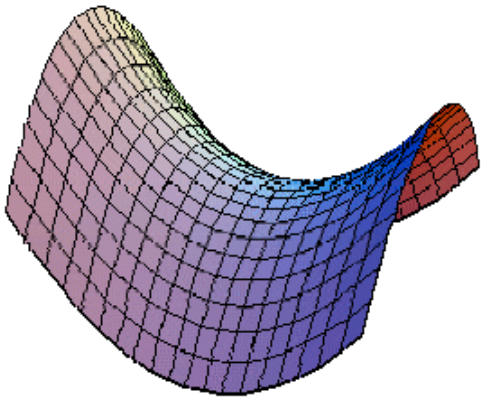
Slika 11. Eliptički valjak

Nivo krivulje su elipse. Kako ne ovisi o z koordinati ova jednadžba je jednostavna. Budući da dana jednadžba opisuje elipsu u xy-ravnini, ploha koju opisujemo je dobivena translacijom elipse po z-osi.

2.7 Hiperbolički paraboloid

Jednadžba hiperboličkog paraboloida je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{8}$$



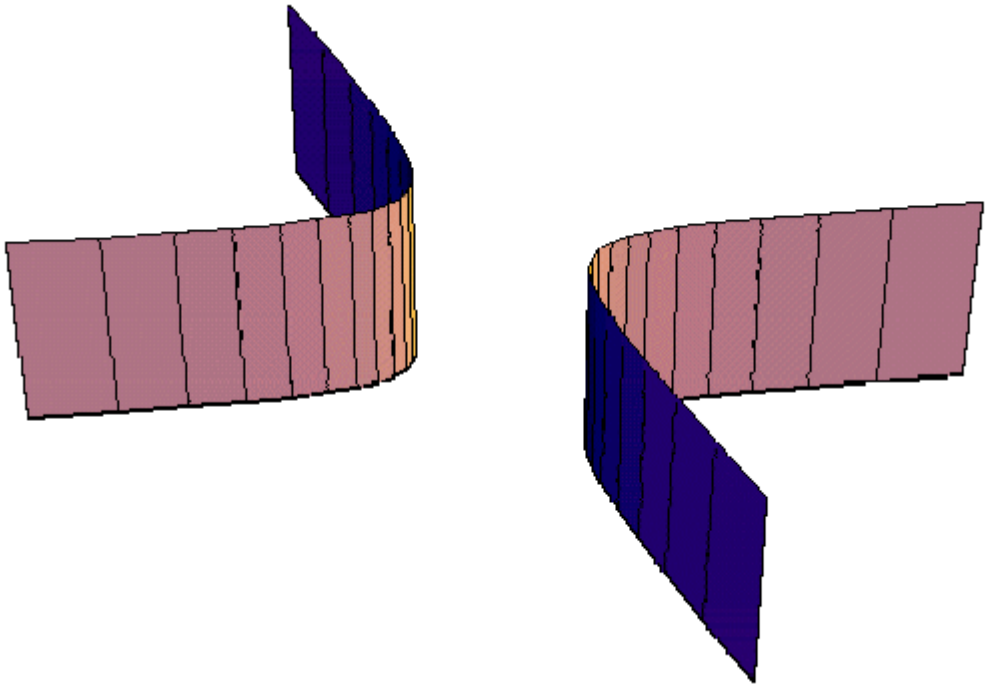
Slika 9. Hiperbolički paraboloid

Hiperbolički paraboloid ima oblik sedla. Nivo krivulje su hiperbole. Presjeci s ravninama paralelnim xz- i yz-ravninama su parabole. Jedino sjecište s koordinatnim osima je ishodište. Simetričan obzirom na xz- i yz-ravnine. Nije omeđen. Centar hiperboličkog paraboloida nazivamo sedlasta točka.

2.8 Hiperbolički valjak

Jednadžba hiperboličkog valjka je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$



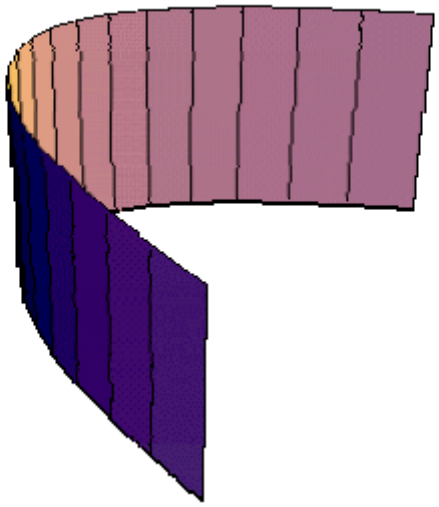
Slika 12. Hiperbolički valjak

Nivo krivulje su hiperbole. Kako ne ovisi o z koordinati ova jednadžba je jednostavna. Budući da dana jednadžba opisuje hiperbolu u xy-ravnini, ploha koju opisujemo je dobivena translacijom hiperbole po z-osi.

2.9 Parabolički valjak

Jednadžba paraboličkog valjka je

$$y^2 = 2px, p \neq 0 \tag{10}$$



Slika 13. Parabolički valjak

Nivo krivulje su parabole. Kako ne ovisi o z koordinati ova jednadžba je jednostavna. Budući da dana jednadžba opisuje parabolu u xy-ravnini, ploha koju opisujemo je dobivena translacijom parabole po z-osi.

3 Prepoznavanje ploha drugoga reda

Plohe drugoga reda zapravo generiraju krivulje drugoga reda poput kružnice, elipse, parabole i hiperbole.
Točka $T_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in E$ je nultočka polinoma $\mathcal{P}_2$ onda ako vrijedi $\mathcal{P}_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$. Skup svih nultočaka S polinoma $\mathcal{P}_2$ je podskup u E. U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2, e_3)$ u prostoru E skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}_2$ identificira se sa skupom svih rješenja jednadžbe

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0 \quad (11)$$

pri čemu su $a_{ij}, a_i, a_0 \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3$.
Neka je nadalje $\mathcal{A}$ simetričan linearni operator kome u bazi $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ pripada matrica $A(e)$. Ako još označimo $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ i $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, tada prethodnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0. \quad (12)$$

Teorem 3.1 *Ako je $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ simetrični linearni operator na vektorskom prostoru $X_0 = X_0(E)$, onda postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ i ortonormirana baza (e_1', e_2', e_3') vektorskog prostora X_0, tako da bude*

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2', \qquad \mathcal{A}e_3' = \lambda_3 e_3'$$

Dokaz: Dokaz teorema se može vidjeti u [1]. ■
Drugim riječima za simetrični linearni operator možemo pronaći takvu desnu ortonormiranu bazu u kojoj tom operatoru pripada dijagonalna matrica.
Sukladno *Teoremu 3.1* postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ i nova ortonormirana baza $(e') = (e_1', e_2', e_3')$ tako da je

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2', \qquad \mathcal{A}e_3' = \lambda_3 e_3'. \quad (13)$$

Ako još u toj novoj bazi prikažemo vektore x i a,

$$x = y_1e_1' + y_2e_2' + y_3e_3', \qquad a = b_1e_1' + b_2e_2' + b_3e_3',$$

onda jednadžba (12), odnosno (11) postaje jednostavnija

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + a_0 = 0. \quad (14)$$

3.1 Prepoznavanje plohi iz dane jednadžbe

U ovoj ćemo točki pokazati kako iz dane jednadžbe prepoznati o kojoj je plohi drugog reda riječ. Radi jednostavnosti napišimo jednadžbu (11) sa sljedećim oznakama

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + px + qy + rz + d = 0.$$

Definirajmo slijedeće matrice

$$F = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & d \end{bmatrix}$$

i uvedimo oznake

D - vrijednost determinante matrice F
Δ - vrijednost determinante matrice E
ρ_3 - rang matrice F
ρ_4 - rang matrice E
k_1, k_2, k_3 - svojstvene vrijednosti matrice e

Želimo izračunati svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice F, a to radimo rješavajući jednadžbu

$$Fx = kx$$

tj,

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

što možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} a-k & h & g \\ h & b-k & f \\ g & f & c-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{15}$$

Pripadna karakteristična jednadžba je oblika

$$\begin{vmatrix} a-k & h & g \\ h & b-k & f \\ g & f & c-k \end{vmatrix} = 0$$

što je ekvivalentno jednadžbi

$$k^3 + Ik^2 + Jk - D = 0, \tag{16}$$

pri čemu je

D - vrijednost determinante matrice F

$I = a + b + c$

$J = ab + ac + bc - f^2 - g^2 - h^2$

Sada želimo riješiti jednadžbu (16). Svako rjješenje te jednadžbe predstavlja jednu svojstvenu vrijednost. Zatim svaku od dobivenih svojstvenih vrijednosti uvrstimo u jednadžbu (15) i riješimo ju po nepoznanici x, pri čemu je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

svojstveni vektor.

Plohe prepoznajemo pomoću četiri podatka: ρ_3, ρ_4, predznaka determinante matrice E i jesu li ili nisu sve svojstvene vrijednosti istog predznaka. U Tablici 1. navodimo kriterij za prepoznavanje nekih ploha drugog reda(vidi [4])

Ploha	ρ_3	ρ_4	Predznak Δ	Isti predznak sv. vrijednosti?
Elipsoid	3	4	-	da
Jednokrilni hiperboloid	3	4	+	ne
Dvokrilni hiperboloid	3	4	-	ne
Stožac	3	3		ne
Eliptički paraboloid	2	4	-	da
Hiperbolički paraboloid	2	4	+	da
Eliptički valjak	2	3	0	da
Hiperbolički valjak	2	3	0	no
Parabolički valjak	1	3	0	

Tablica 1: Prepoznavanje nekih ploha drugog reda

3.2 Primjer

Primjer 3.1 *Treba pronaći skup svih rješenja jednadžbe(vidi [3])*

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1 - 24x_2 + 18x_3, +30 = 0.$$

Kvadratna forma iz gornje jednadžbe ima pridruženu matricu $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.
Svojstveni polinom pridruženog linearnog operatora $\mathcal{A}$ *je* $P(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$. *Nultočke svojstvenog polinoma jednake su svojstvenim vrijednostima linearnog operatora* $\mathcal{A}$

$$\lambda_1 = 9, \qquad \lambda_2 = 6, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Pripadni svojstveni vektori redom su

$$\begin{aligned} v_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3\mathcal{I})e_1 = 4(2e_1 - 2e_2 + e_3), \\ v_2 &= (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3\mathcal{I})e_1 = 2(-2e_1 - e_2 + 2e_3), \\ v_3 &= (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I})(\mathcal{A}\lambda_2\mathcal{I})e_1 = 2(e_1 + 2e_2 + 2e_3), \end{aligned}$$

odakle dobivamo ortonormiranu bazu

$$e_1' = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3), \qquad e_2' = \frac{1}{3}(-2e_1 - e_2 + 2e_3), \qquad e_1' = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3).$$

Vektor a u staroj bazi (e) *je oblika* $a = -6e_1 - 24e_2 + 18e_3$. *Njegove komponente u novoj bazi* (e') *označimo s* b_1, b_2, b_3. *Budući da je* $b_i = a \cdot e_i', i = 1, 2, 3$, *dobivamo prikaz vektora a u novoj bazi* (e')

$$a = (a \cdot e_1')e_1' + (a \cdot e_2')e_2' + (a \cdot e_3')e_3' = 18e_1' + 24e_2' - 6e_3'$$

Zbog toga polazna jednadžba poprima sljedeći oblik

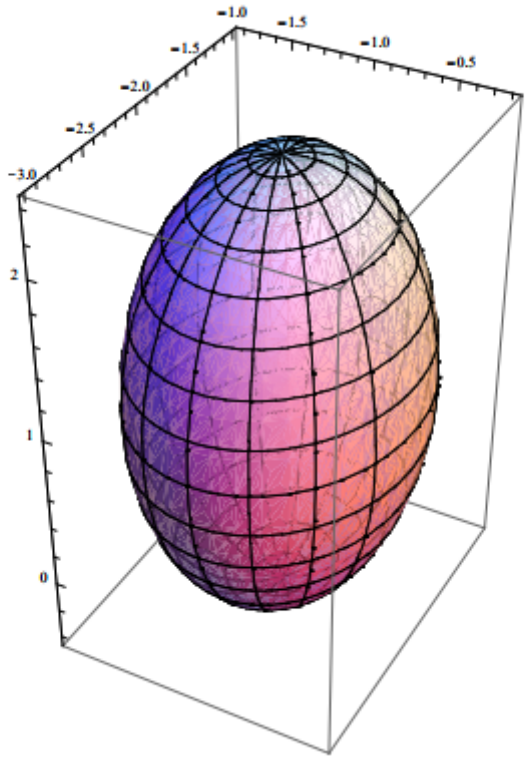
$$9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2 + 18y_1 + 24y_2 - 6y_3 + 30 = 0,$$

što je ekvivalentno

$$\frac{(y_1 + 1)^2}{\frac{2}{3}} + \frac{(y_2 + 2)^2}{1} + \frac{(y_3 - 1)^2}{2} = 1.$$

Dobivena jednadžba predstavlja jednadžbu elipsoida s centrom u točki (-1, -2, 1) s osima paralelnim koordinatnim osima i duljinom poluosi: $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}$.

Koristeći programski sustav Mathematica nacrtat ćemo plohu ovog elipsoida



Slika 14. Elipsoid

Literatura

[1] S.Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1985

[2] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika II, Školska knjiga, Zagreb, 1995

[3] R. Scitovski, I. Kuzmanvić, Z. Tomljanović, Linearni operatori u prostoru, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek

[4] http://www.solitaryroad.com/c413.html

[5] http://www.staff.city.ac.uk/o.castro-alvaredo/teaching/surfaces.pdf

[6] http://www.win.tue.nl/~sterk/Bouwkunde/hoofdstuk3.pdf

[7] http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/ivuksano/plohe.pdf