Klasični fraktali

Sabljak, Antonijo

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:846359

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antonijo Sabljak

Klasični fraktali

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antonijo Sabljak

Klasični fraktali

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod **i**

1 Dimenzija **1**
1.1 Topološka dimenzija 2
1.2 Hausdorffova dimenzija 3

2 Fraktali **6**
2.1 Samosličnost 6
2.2 Nastanak fraktala 7

3 Klasični fraktali **8**
3.1 Cantorov skup 8
3.2 Trokut i tepih Sierpińskog 10
3.3 Mengerova spužva 12
3.4 Pascalov trokut 13
3.5 Kochova krivulja i pahuljica 16
3.6 Pitagorino stablo 18
3.7 Julijini skupovi 19
3.8 Mandelbrotov skup 21
3.9 Beskonačno guste krivulje 23
3.9.1 Peanova krivulja 23
3.9.2 Hilbertova krivulja 24

4 Fraktali i dimenzija **25**
4.1 Dimenzija samosličnosti 25
4.2 Box-counting dimenzija 28

5 Primjena fraktala **30**
5.1 Duljina obale Britanije 30
5.2 Geometrijski red i Kochova pahuljica 32
5.3 Fraktali u računalnoj grafici 34
5.4 Olbersov paradoks 35

Literatura **37**

Sažetak **38**

Summary **39**

Životopis **40**

Uvod

„Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu krugovi, lavež nije gladak niti munja putuje ravnom linijom." Ovom rečenicom Benoit Mandelbrot započinje svoju knjigu *The fractal geometry of nature* kojom daje do znanja da dotad poznata klasična geometrija nije dovoljna za opisivanje svijeta oko nas. Klasična geometrija opisuje svijet idealnih oblika poput krugova, kvadrata, kugli ili kocki, no što je s nepravilnim, različitim oblicima i linijama koje pronalazimo u prirodi. Oblici poput munja, drveća, listova paprati, snježne pahuljice, krvožilnog sustava, planina su nam poznati od davnina, ali ih sada možemo opisati zahvaljujući fraktalima i fraktalnoj geometriji. Riječ fraktal iskovao je 1975. Mandelbrot, a inspiraciju je pronašao u latinskoj riječi *fractus*, što znači slomljen, izlomljen. Iako su mnogi matematičari poput Cantora, Sierpińskog, Kocha imali zasluge u njihovom razvoju i otkrivanju, najzaslužniji za njihovo predstavljanje svijetu je Mandelbrot uz pomoć računalne grafike. Obzirom na to, upravo se on smatra ocem fraktalne geometrije.

U ovom diplomskom radu vidjet ćemo što su fraktali i upoznati neke od njih. Na početku rada definiran je pojam dimenzije te se upoznajemo s dvije vrste dimenzija kako bi shvatili samu definiciju fraktala.

U drugom poglavlju definiramo fraktale te navodimo njihovu podjelu prema nastanku i svojstvu samosličnosti.

Treće poglavlje se temelji na opisivanju najpoznatijih klasičnih fraktala poput Cantorova skupa, trokuta i tepiha Sierpińskog, Mengerove spužve, Pitagorina stabla, Julijina te Mandelbrotova skupa. Upoznajemo se s Pascalovim trokutom, Kochovom krivuljom i pahuljicom te opisujemo najpoznatije beskonačno guste krivulje.

Četvrto poglavlje se odnosi na problem dimenzije do kojeg je došlo pojavom fraktala. Do tada poznat pojam dimenzije nije davao dobre rezultate za fraktale te su otkrivene nove dimenzije, poput dimenzije samosličnosti i box-counting dimenzije, kojima bi se opisala veličina fraktala.

U petom, odnosno posljednjem poglavlju možemo vidjeti neke od najpoznatijih primjena fraktala u računalnoj grafici te problem koji se javio pri određivanje duljine britanske obale. Opisana je primjena geometrijskog reda na Kochovu pahuljicu te pokušaj rješavanja poznatog paradoksa.

1 Dimenzija

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s pojmovima koji će nam omogućiti uvođenje te bolje razumijevanje i shvaćanje definicije fraktala. Jedan od njih je i pojam dimenzije.

Od samih početaka, pojam dimenzije se u matematici upotrebljavao intuitivno, posebice u geometriji. Točka je shvaćena kao objekt dimenzije nula, pravci i krivulje kao jednodimenzionalni objekti, ravnine i plohe kao dvodimenzionalni, a tijela u prostoru kao trodimenzionalni. Na temelju toga mnogi dimenziju definiraju kao minimalan broj parametara (koordinata) potrebnih da se jednoznačno opiše položaj točke u prostoru ili objektu. No, ovakva definicija nije jedinstvena. Razvojem matematike pojam dimenzije je postao jako značajan pa se u različitim granama definira na različite načine. Mnogi intuitivni koncepti kao što su određivanje površine i volumena zahtijevaju točne i precizne definicije te moraju zadovoljavati određene uvijete. Isto možemo reći i za određivanje dimenzije proizvoljnog skupa (promatrat ćemo podskupove n-dimenzionalnog Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$) koje nije uvijek jednostavno.

Za proizvoljan skup $X \subset \mathbb{R}^n$ zahtijevamo da dimenzija skupa X, u oznaci $dim(X)$, zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) Za jednočlani skup $\{p\}$ je $dim(\{p\}) = 0$, za jedinični interval I^1 je $dim(I^1) = 1$ i općenito za $m-$dimenzionalnu hiperkocku $I^m = I \times \cdots \times I$ je $dim(I^m) = m$.

(2) (Monotonost) Ako je $X \subseteq Y$ onda je

$$dim(X) \leq dim(Y).$$

(3) (Prebrojiva stabilnost) Ako je $\{X_j\}$ niz zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$ onda je

$$dim\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\big) = \sup_{j\geq 1} dim(X_j).$$

(4) (Invarijantnost) Za proizvoljnu funkciju ψ iz podfamilije skupa homeomorfizama s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ vrijedi

$$dim(\psi(X)) = dim(X).$$

Iako postoji mnogo različitih definicija dimenzije za nas je najbitnije da vidimo kako su definirane topološka i Hausdorffova dimenzija te u kakvom su one odnosu.

1.1 Topološka dimenzija

Topološka dimenzija je najbliža intuitivnom, prirodnom shvaćanju dimenzije. Odnosno, broju smjerova u kojima bismo mogli ići unutar određenog objekta. Broj smjerova se još naziva i broj „stupnjeva slobode". Tako je svaka linija jednodimenzionalna, bila ravna ili zakrivljena, jer postoji jedan stupanj slobode, a to je dužina. Slično, ravnina je dvodimenzionalna.
Postoje tri uobičajene definicije topološke dimenzije, a to su: mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija i Lebesqueova dimenzija pokrivanja. Ovdje ćemo opisati posljednju navedenu.
Lebesqueova dimenzija pokrivanja definirana je u terminima skupova pokrivača pa se još naziva i dimenzija pokrivanja. Nazvana je po Henryu Lebesqueu, iako je neovisno otkrivena i definirana od strane drugih matematičara.
Prije sam definicije objasnit ćemo pojmove koji su važni za njezino razumijevanje. Za početak ćemo definirati topološki prostor.

Definicija 1. *Za familiju $\mathcal{T} = \{U_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ podskupova nekog skupa X koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(T1) Prazan skup i cijeli skup X su elementi od $\mathcal{T}$, tj. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(T2) $\mathcal{T}$ je zatvorena na uniju, tj. unija bilo koje podfamilije elemenata iz $\mathcal{T}$ i sama je elemnet iz $\mathcal{T}$. Preciznije, ako za svaki $\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda$ vrijedi $U_\lambda \in \mathcal{T}$ onda je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \in \mathcal{T}$.

(T3) $\mathcal{T}$ je zatvoren na konačne presjeke, tj. presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$. Preciznije, ako su $U_i \in \mathcal{T}, i = 1, \ldots, k$, onda je i $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$.

kažemo da je topologija na X, a par $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor.

Definicija 2. *Neka je X topološki prostor, a $U = \{U_\lambda \colon U_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ familija podskupova takva da je $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Kažemo da je U pokrivač za prostor X. Ako je svaki od članova pokrivača U_λ otvoren u X govorimo o otvorenom pokrivaču.*

Definicija 3. *Kažemo da je pokrivač $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ upisan pokrivaču U ako za svaki $\gamma \in \Gamma$ postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je $\mathcal{V}_\gamma \subseteq U_\lambda$. Kaže se još da $\mathcal{V}$ profinjuje U ili da je $\mathcal{V}$ profinjenje pokrivača U.*

Definicija 4. *Lebesqueova dimenzija pokrivanja ili topološka dimenzija definirana je kao minimalna vrijednost n takva da svaki otvoreni pokrivač ima profinjenje u kojem se nijedna točka ne nalazi u više od $n+1$ elemenata.*

Primjer 1. *Odredimo topološku dimenziju kružnice.*
Razmislimo o nekom otvorenom pokrivaču kružnice. Otvoreni pokrivač će imati profinjenje koje se sastoji od kružnih lukova. Prema navedenoj definiciji kružnica ima dimenziju jedan, jer se bilo koji otvoreni pokrivač može profiniti tako da se bilo koja točka na kružnici nalazi u najviše dva kružna luka. Bez obzira koje kružne lukove odaberemo, neki se mogu odbaciti ili smanjiti tako da ostatak i dalje prekriva kružnicu.

Topološku dimenziju skupa X označavamo s $dim_T X$ i vrijednosti koje može poprimiti su $-1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

1.2 Hausdorffova dimenzija

Za početak ćemo reći što su to metrički prostor i mjera.

Definicija 5. *Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje sa Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:*

(1) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a, b \in X$ *(pozitivnost),*

(2) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ *(strogost),*

(3) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall a, b \in X$ *(simetričnost),*

(4) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$, $\forall a, b, c \in X$ *(nejednakost trokuta).*

Kažemo da je funkcija d funkcija udaljenosti, tj. metrika na skupu X, a uređeni par (X,d) nazivamo metrički prostor.

Definicija 6. *Kažemo da je μ mjera na $\mathbb{R}^n$ ako ona svakom podskupu od $\mathbb{R}^n$ dodjeljuje nenegativan broj tako da vrijedi:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) $\mu(A) \leq \mu(B)$ *ako je* $A \subseteq B$,

(3) Ako su $A_1, A_2, A_3, \ldots$ konačni nizovi skupova onda je

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Tada $\mu(A)$ zovemo mjerom skupa $A \subset \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova dimenzija definirana je samo za metričke prostore, jer koristi koncepte kao što su duljina i volumen koji zahtijevaju mjeru. Naziv je dobila po njemačkom matematičaru Felixu Hausdorffu i još je poznata pod nazivom Hausdorff-Besicovith dimenzija. Kako bismo u potpunosti razumjeli pojam Hausdorffove dimenzije potrebno je definirati Hausdorffovu mjeru. S pojmom mjere smo se upoznali i još treba reći da ćemo se ograničiti na definiciju Hausdorffove dimenzije za skupove A koji se nalaze u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.
Prvo ćemo definirati funkciju udaljenosti $d(x, y)$, odnosno Euklidsku udaljenost za proizvoljne x i y iz $\mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ako je $U \neq \emptyset$ podskup od $\mathbb{R}^n$, dijametar od U definiramo kao

$$diam(U) = \sup \{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Još nam preostaje reći kada za skup kažemo da je otvoren. Za skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je otvoren ako za svaki $x \in U$ postoji kugla $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$ radijusa ε koja je cijela sadržana u U.
Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka su s i ε nenegativni realni brojevi. Tada definiramo

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} diam(U_i)^s \right\}$$

gdje je $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ otvoren pokrivač skupa A tako da vrijedi $diam(U_i) < \varepsilon$, odnosno $\{U_i\}$ je ε - pokrivač skupa A. Možemo pisati

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A).$$

Ovaj limes postoji za svaki podskup A od $\mathbb{R}^n$. Za svaki $s > 0$ vrijednosti su mu u $[0, \infty]$ i najčešće su upravo 0 ili ∞. $\mathcal{H}^s(A)$ zovemo s-dimenzionalna Hausdorffova mjera od A. Radi boljeg razumijevanja navest ćemo neke primjere. Hausdorffova

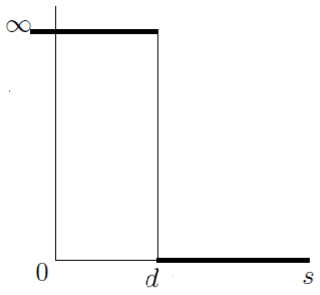
mjera nekog trodimenzionalnog objekta, na primjer kocke, je 3 i ona predstavlja njezin volumen. Za neki geometrijski lik, na primjer krug, dvodimenzionalna Hausdorffova mjera predstavlja njegovu površinu. Ona nam zapravo govori o veličini promatranog objekta. S druge strane, dvodimenzionalna Hausdorffova mjera za kocku bi bila beskonačno, a trodimenzionalna mjera za krug bi bila nula. Hausdorff je pokazao da postoji broj d za koji vrijedi

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} \infty & s < d \\ 0 & s > d \end{cases}$$

Broj d u oznaci $dim_H A$ je definiran kao Hausdorffova dimenzija

$$dim_H A = \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Ako je $s = dim_H A$ onda $\mathcal{H}^s(A)$ može biti $0, \infty$ ili pozitivan realan broj. $dim_H A$ označava kritičnu vrijednost za koju graf od $\mathcal{H}^s(A)$ skoči s ∞ na 0.



Slika 1.1. Graf od $\mathcal{H}^s(A)$ kao funkcije od s

Nakon što smo se upoznali s dvije nove dimenzije, za bilo koji skup X vrijedi nejednakost koja ih povezuje

$$dim_T X \leq dim_H X.$$

Odnosno, vrijedi da je Hausdorffova dimenzija uvijek veća ili jednaka od topološke.

2 Fraktali

Poljsko-francuski matematičar Benoit Mandelbrot (1924.-2010.), za kojeg smo rekli da se smatra ocem fraktalne geometrije, iskoristio je vezu između topološke i Hausdorffove dimenzije kako bi definirao fraktale.

Definicija 7. *Kažemo da je skup X fraktal ako je $dim_T X < dim_H X$.*

Mandelbrot u svojoj knjizi *The Fractal Geometry of nature* Hausdorffovu dimenziju naziva fraktalnom dimenzijom te fraktale još možemo opisati kao geometrijske objekte čije je fraktalna dimenzija strogo veća od topološke.
Fraktalna dimenzija je broj koji nam govori u kojoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi i opisuje "izlomljenost" ili "hrapavost" objekta. Također, fraktale promatramo kao geometrijske objekte koji daju istu razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Svaki njihov dio je sličan cjelini, odnosno čitavom fraktalu. Moguće ih je uvećati beskonačno mnogo puta i pri svakom se uvećanju se vide neki novi detalji, a količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka.

2.1 Samosličnost

Svojstvo koje omogućava da svaki dio fraktala sliči čitavom fraktalu nazivamo samosličnost. Uz fraktalnu dimenziju to je jedno od najvažnijih svojstava fraktala. Samosličan objekt je točno ili aproksimativno sličan dijelu sebe, tj. cjelina ima isti oblik kao jedan ili više dijelova. Samosličnost se može opisati kao svojstvo objekta da je sličan sam sebi, odnosno da u sebi sadrži kopije samog sebe.
Fraktale možemo klasificirati na više načina, a jedan od njih je i prema stupnju samosličnosti. Obzirom na to, fraktale dijelimo na:

(1) **Potpuno samoslične fraktale** - imaju najjači oblik samosličnosti u kojem fraktal sadrži dijelove koji su identični čitavom fraktalu. Jednaki su na svim razinama uvećanja, odnosno bez obzira koji dio uvećamo uvijek dobijemo sliku koja je identična početnoj. Nazivaju se još i geometrijski fraktali. Ovoj skupini pripadaju Cantorov skup, Kochova krivulja, trokut Sierpińskog, ...

(2) **Kvazi-samoslične fraktale** koji su još poznati kao i algebarski fraktali - karakterizira ih slabiji oblik samosličnosti u kojem fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične cijelom fraktalu nego se pojavljuju u iskrivljenom obliku.

Približno su slični na svim razinama uvećanja. U ovu skupinu ubrajamo Julijin i Mandelbrotov skup.

(3) **Statički samosličnе ili stohastičke fraktale** - posjeduju najmanji stupanj samosličnosti pri čemu fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine poput fraktalne dimenzije ostaju iste pri različitim mjerenjima. Neki od primjera ove skupine su Perlinov šum, Lorenzov atraktor, Brownovo gibanje.

2.2 Nastanak fraktala

Osim po stupnju samosličnosti fraktale možemo razvrstati i po načinu nastanka. Osnovni načini nastanka fraktalu su:

(1) **Iterativno**

(a) Iteriranjem generatora - počinjemo oblikom koji se naziva baza. Svaki dio početnog oblika zamijenimo s drugim oblikom koji se naziva motiv ili generator. Dobivši novi oblik, svaki njegov dio zamjenjujemo motivom.

(b) IFS (iterated function system, tj. sustav iteriranih funkcija) - fraktali nastaju unijom kopija sebe koje su transformirane funkcijom. Funkcije koje koristimo nazivamo afinim preslikavanjima i u njih ubrajamo: rotaciju, translaciju, kontrakciju (homotetija za $k \in \langle 0, 1\rangle$) te zrcaljenje (simetriju).

(2) **Rekurzivno** - određeni su rekurzivnom formulom koja određuje pripada li određena točka prostora nekom skupu ili ne.

(3) **Slučajno** - nastaju crtanjem grafova nekih stohastičkih procesa i najčešće ih nalazimo u prirodi (drveće, munje, obale, ...).

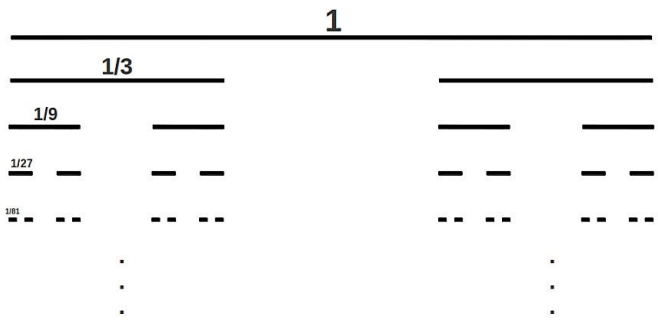
Zanimljivo je da i ova podjela daje iste rezultate kao i podjela po stupnju samosličnosti. Fraktali nastali iterativno su samoslični, rekurzivno su kvazi-samoslični dok su slučajni fraktali statički samoslični.

3 Klasični fraktali

Iako živimo u svijetu koje je prepun oblika koji nas podsjećaju na fraktale u ovom poglavlju ćemo opisati najpoznatije koji se još nazivaju i klasičnim fraktalima.

3.1 Cantorov skup

Upoznavanje s klasičnim fraktalima započinjemo s Cantorovim skupom (C) koji je ujedno i prvi poznati fraktal. Predstavio ga je 1883. godine njemački matematičar Georg Cantor (1845. – 1918.) koji je zaslužan za razvoj teorije skupova. Naziva se i Cantorov trijadski skup te ima izuzetno važnu ulogu u teoriji skupova i analizi. On je beskonačan skup točaka koje pripadaju segmentu $[0, 1]$. Može se reći da je to skup određenih brojeva, poput $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$ Označavanjem tih i drugih točaka ne bi dobili jasnu sliku što je zapravo Cantorov skup, ali je važnije zapamtiti njegovu klasičnu konstrukciju nego ga pokušati zamisliti.
Konstrukciju Cantorova skupa započinjemo jediničnim segmentom $[0, 1]$. Početni segment podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$. Dobijemo dva segment $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ gdje duljina svakog iznosi $\frac{1}{3}$, zatim svaki opet podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval. Dobijemo segmente $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ i $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ duljine $\frac{1}{3^2}$, svaki. Ponovimo postupak. U početku imamo jedan segment, nakon prvog koraka imamo dva, nakon drugog četiri, nakon trećeg imamo osam segmenata. Nakon n-tog koraka imamo 2^n disjunktnih segmenta duljine $\frac{1}{3^n}$.



Slika 3.2. Konstrukcija Cantorova skupa

Osim što je Cantorov skup neprazan, pripadaju mu rubne točke svakog podsegmenta, je i potpuno nepovezan. Odnosno, za svake dvije točke $x, y \in C$ postoji točka $z \notin C$ koja leži između x i y. Ako za x uzmemo da je $\frac{1}{3}$, za $y = \frac{2}{3}$ i $z = \frac{1}{2}$ vidimo da se

z nalazi između x i y, ali nije iz C. Točka z se nalazi unutar intervala $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$ koji je izbačen u prvom koraku.
Ime Cantorov trijadski skup dolazi od činjenice da se Cantorov skup može opisati koristeći zapis brojeva iz segmenta $[0, 1]$ u njihovom trijadskom obliku. Trijadski brojevi su brojevi za čiji se zapis koristi baza 3, odnosno znamenke $0, 1$ i 2. Drugim riječima, bilo koji broj x iz segmenta $[0, 1]$ može se prikazati kao:

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + a_4 \cdot 3^{-4} + \cdots$$

gdje su brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, 2\}$.
Primjerice, $\frac{1}{3}$ je 0.1 u trijadskom zapisu, $\frac{2}{3}$ je 0.2, $\frac{1}{9}$ je 0.01. Kako ovo vrijedi za svaku točku iz Cantorova skupa postoji tvrdnja koja koristeći trijadski zapis opisuje taj skup.
Cantorov skup C je skup svih točaka iz segmenta $[0, 1]$ čiji zapis u trijadskoj bazi ne sadrži znamenku 1. Upravo nam takva definicija Cantorova skupa pomaže u provjeravanju samosličnosti. Uzmemo jedan segment iz C koji se nalazi unutar $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i njega možemo smatrati smanjenim dijelom cijelog skupa. Koristeći prethodnu tvrdnju, svaku točku $\xi \in C$ možemo prikazati u obliku

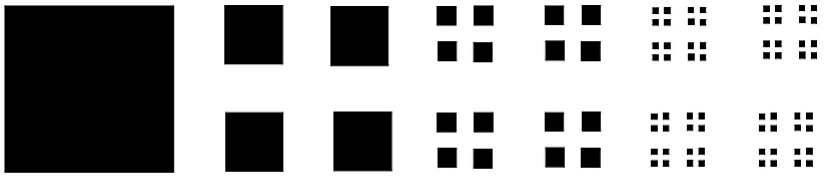
$$\xi = \alpha_1 \cdot 3^{-1} + \alpha_2 \cdot 3^{-2} + \alpha_3 \cdot 3^{-3} + \alpha_4 \cdot 3^{-4} + \ldots,$$

(gdje je $\alpha_i \in \{0, 2\}, \forall i$) i naći odgovarajuću točku u segmentu $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ tako da ξ podijelimo s 3, tj.

$$\frac{\xi}{3} = 0 \cdot 3^{-1} + \alpha_1 \cdot 3^{-2} + \alpha_2 \cdot 3^{-3} + \alpha_3 \cdot 3^{-4} + \ldots$$

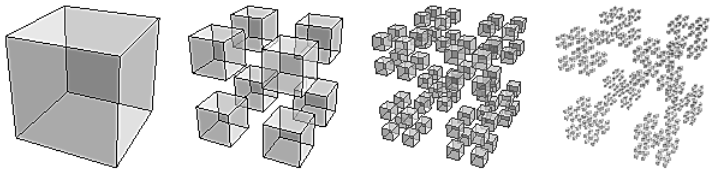
Uistinu, ako je $x = 0.200220...$ i pomnožimo ga s $\frac{1}{3} = 0.1$ zapravo samo radimo pomak znamenki za jedno mjesto u desno i dobijemo 0.02002200... što je opet u C. Iz ovoga možemo vidjeti da je dio Cantorova skupa koji se nalazi unutar segmenta $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ smanjena kopija cijelog skupa smanjena za faktor $\frac{1}{3}$. Za dio skupa C koji leži u segmentu $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ dolazimo do istog zaključka samo još moramo dodati $\frac{2}{3} = 0.2$. Na isti način, bilo koji podsegment unutar Cantorova skupa sadrži cijeli skup C smanjen za odgovarajući faktor $\frac{1}{3^n}$. Drugim riječima, Cantorov skup možemo promatrati kao kolekciju proizvoljno mnogo malih dijelova od kojih je svaki dio umanjeni Cantorov skup. Ovo podrazumijevamo kad kažemo da je Cantorov skup samosličan. Svojstvo skaliranja skupa C odgovara sljedećem pravilu, ako uzmemo bilo koju točku iz C i pomnožimo ju s $\frac{1}{3}$ rezultat će ponovno biti u C. Isto vrijedi i ako prvo pomnožimo

s $\frac{1}{3}$ i onda dodamo $\frac{2}{3}$.
Cantorova prašina i oblak su višedimenzionalni analogoni Cantorova seta. Cantorova prašina nastaje tako da se jedinični kvadrat podijeli na 9 sukladnih kvadrata od kojih se izbace oni koji ne sadrže vrhove početnog. Odnosno, izbaci se 5 kvadrata koji formiraju znak plusa. Postupak se ponavlja s preostala 4 kvadrata beskonačno mnogo puta.



Slika 3.3. Cantorova prašina

Cantorov oblak je trodimenzionalni analogon i kreće se od kocke koja se podijeli na 27 sukladnih kocaka. Izbace se one kocke koje sadrže vrhove, odnosno dijelove sve tri stranice početne kocke. Postupak se ponavlja beskonačno puta s preostalim kockama.

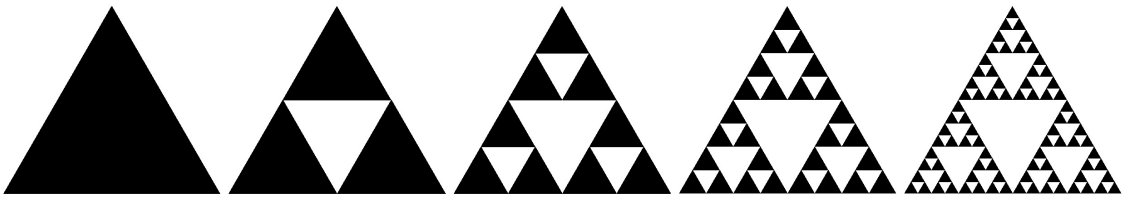


Slika 3.4. Cantorov oblak

3.2 Trokut i tepih Sierpińskog

Sljedeći klasični fraktal kojeg ćemo opisati je trokut Sierpińskog koji je 40 godina mlađi od Cantorova skupa. Predstavio ga je 1916. sjajni poljski matematičar Waclaw Sierpiński (1882. – 1969.). Bio je jedan od najutjecajnijih matematičara svog vremena i stekao je svjetsku reputaciju. U njegovu čast jedan mjesečev krater je nazvan po njemu. Trokut Sierpinskog je jedan od najjednostavnijih fraktala čiji je motiv u umjetnosti bio poznat dugi niz stoljeća.
Konstrukciju trokuta Sierpińskog započinjemo ispunjenim jednakostraničnim trokutom kojem pronađemo polovišta svake stranice te ih spojimo. Spajanjem polovišta dobijemo četiri sukladna trokuta od kojih izbacimo srednji i time završavamo prvi

korak konstrukcije. Postupak ponavljamo na ostala tri trokuta koliko puta želimo. Vidimo da nakon prvog koraka dobijemo tri sukladna trokuta čije su stranice upola manje od početne. Poslije drugog koraka imamo 3^2 trokuta, nakon trećeg 3^3 i tako dalje. Odnosno, nakon n-tog koraka imamo 3^n trokuta.

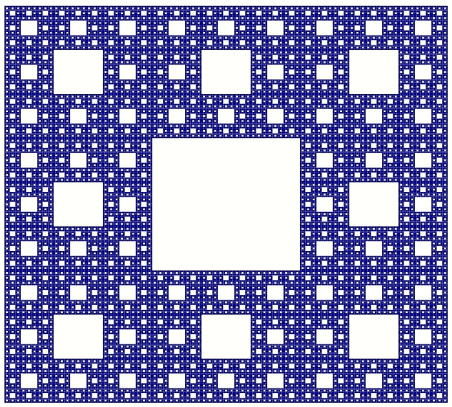


Slika 3.5. Konstrukcija trokuta Sierpińskog

Samosličnost trokuta Sierpińskog se očituje u njegovoj konstrukciji. Svaki od tri dijela u n-tom koraku je umanjena verzija cjelokupne strukture iz prethodnog koraka faktorom 2.

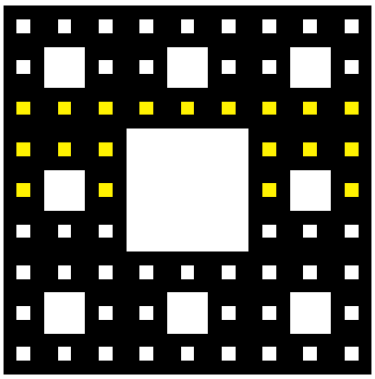
Ponovimo li korak konstrukcije beskonačno mnogo puta možemo se pitati koje će točke ostati unutar skupa. Nakon prvog koraka ostale su stranice početnog trokuta, nakon drugog ostale su stranice tri manja trokuta, nakon trećeg su ostale stranice devet manjih trokuta itd.. Na temelju toga, možemo reći da će u skupu ostati stranice trokuta.

Primijenimo li korake konstrukcije na ispunjeni kvadrat dobit ćemo još jedan klasični fraktal za čije je otkrivanje zaslužan Sierpiński. Riječ je o tepihu Sierpińskog. U ovom slučaju konstrukciju započinjemo ispunjenim kvadratom kojeg podijelimo na 9 sukladnih kvadrata i izbacimo središnji, time završavamo prvi korak. Dalje nastavljamo istim postupkom. Nakon prvog koraka imamo 8 sukladnih kvadrata, nakon drugog 64, a nakon n-tog koraka imamo 8^n kvadrata.



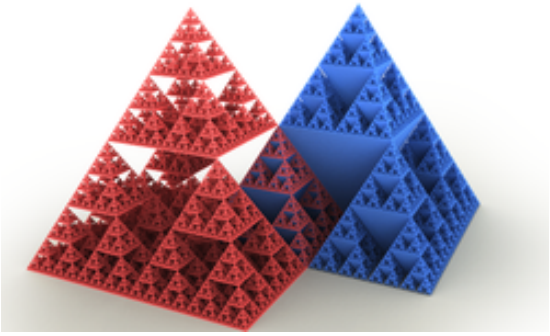
Slika 3.6. Tepih Sierpińskog

Tepih Sierpińskog se često smatra generalizacijom Cantorova skupa. Pogledamo li presjek linije koja je paralelna s bazom početnog kvadrata i prolazi središtem možemo vidjeti preciznu konstrukciju Cantorovog seta. Na slici 3.7. su žutom bojom obojeni kvadratići koji čine Cantorov skup. Skup C ide do drugog koraka, dok je tepih Sierpińskog u kome se nalazi skup C konstruiran do trećeg.



Slika 3.7. Tepih Sierpińskog i Cantorov skup

Nakon što smo se upoznali s trokutom Sierpińskog treba spomenuti i njegov analogon, tetraedar Sierpińskog. Nastaje tako da se trokuti zamijene tetraedrima. No, prilikom konstrukcije se ne oduzima jedan tetraedar iz sredine već se ostavljaju četiri tetraedra i sve ostalo oduzima. Pri svakom koraku konstrukcije nastaju četiri manja tetraedra s dvostruko kraćim duljinama stranica.

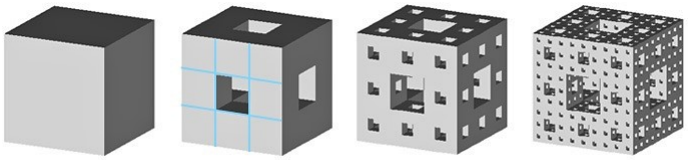


Slika 3.8. Tetraedar Sierpińskog

3.3 Mengerova spužva

Mengerova spužva je trodimenzionalni analogon tepiha Sierpińskog. To je fraktal kojeg je 1926. opisao austrijski matematičar Karl Menger prema kojem je i dobio naziv. Često se naziva i Sierpiński-Mengerovom spužvom. Svaka strana Mengerove

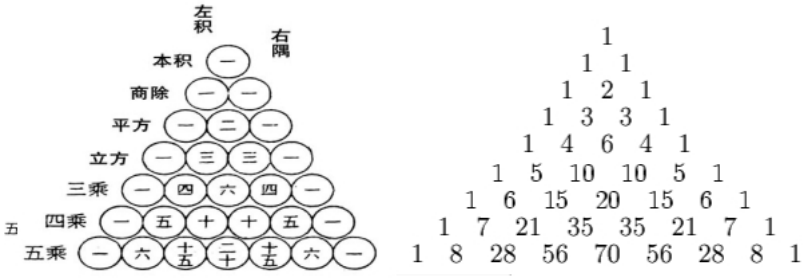
spužve je tepih Sierpińskog.
Dobiva se na sličan način kao i tepih Sierpińskog samo što umjesto kvadrata uzmemo kocku koju podijelimo na 27 kocaka čije su duljine stranica $\frac{1}{3}$ početne. Nakon toga oduzmemo 7 kocaka, odnosno središnju i 6 kocaka koje se nalaze u središtima strana početne točke. Postupak ponavljamo na preostalim kockama.



Slika 3.9. Konstrukcija Mengerove spužve

3.4 Pascalov trokut

Blaise Pascal (1623. – 1662.) je bio francuski matematičar i znanstvenik. S 22 godine izumio je nekoliko mehaničkih naprava za računanje koje su bile preteča današnjih računala. Međutim, ono što poznajemo kao aritmetički ili Pascalov trokut nije njegovo otkriće. Prvi zapisi o aritmetičkom trokutu u Europi datiraju iz 1527., a prvi put se pojavio 1303. u Kini. Pascal je koristio aritmetički trokut kako bi riješio neke probleme u vjerojatnosti koji su se pojavili u kockanju o kojima je raspravljao s Pierre de Fermatom 1654. godine. Taj događaj je kasnije postao temeljem teorije vjerojatnosti.



Slika 3.10. Aritmetički trokut u Kini i danas

Aritmetički trokut, kojeg možemo vidjeti na slici 3.10. desno, je niz brojeva u obliku trokuta koji se sastoji od koeficijenta iz raspisa polinoma $(1+x)^n$. Ovdje n kreće od nule i označava broj retka. Primijetimo kako n-ti redak ima $n+1$ članova. Na primjer, za $n=5$ polinom glasi

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Postoje dva načina za određivanje koeficijenata. Prvi način je da ih odredimo pomoću članova prethodno izračunatog reda. Pretpostavimo da su koeficijenti $a_0, \ldots, a_n$ iz n-tog retka zadani:

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

i koeficijenti $b_0, \ldots, b_{n+1}$ su traženi koeficijenti sljedećeg retka:

$$(1+x)^{n+1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n+1} x^{n+1}.$$

Oni su direktno povezani s poznatim koeficijentima $a_0, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \\
&= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)(1+x) \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1} \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_{n-1} + a_n)x^n + a_n x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Uspoređivanjem koeficijenata dobijemo rezultat

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0, \\
b_k &= a_{k-1} + a_k \quad \textit{za } k\textit{=1,...,n}, \\
b_{n+1} &= a_n.
\end{aligned}$$

Ukoliko znamo kako izgleda redak ispred nama traženog ovaj način je jako jednostavan. Prvi i zadnji koeficijent samo prepišemo i oni su uvijek 1, a preostale koeficijente dobijemo kao sumu dva koeficijenta iz prethodnog retka. Međutim, većinom ne znamo kako izgleda prethodni redak pa je korisno imati direktan pristup. Upravo se na tome temelji drugi način koji koristi binomni poučak:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k.$$

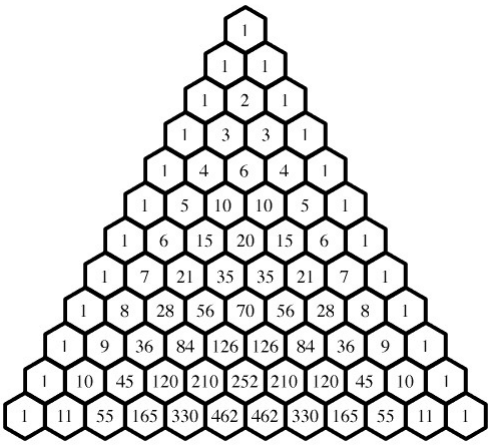
Koeficijenti u raspisu polinoma nazivaju se binomni koeficijenti. Koristeći binomni poučak možemo odmah izračunati k-ti koeficijent b_k n-tog reda Pascalovog trokuta

$$b_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Na primjer, koeficijent za $k = 4$ i $n = 8$ je

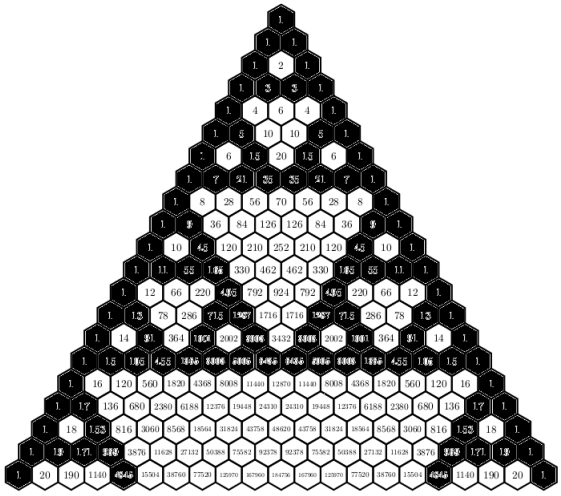
$$b_4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70.$$

Ako u binomnu formulu stavimo $x = y = 1$ dolazimo do zaključka da je suma svih koeficijenata u n-tom retku Pascalovog trokuta 2^n.
Kako bismo postigli bolju preglednost brojeve Pascalovog trokuta stavimo unutar pravilnih šesterokuta kao što je prikazano na slici 3.11.



Slika 3.11. Brojevi Pascalova trokuta unutar pravilnih šesterokuta

Obojimo li parne brojeve u bijelo, a neparne u crno, i povećavanjem broja redaka u jednom trenutku ćemo dobiti strukturu koja nas podsjeća na trokut Sierpińskog koju možemo vidjeti na slici 3.12. Zaigramo li se te brojeve djeljive s $3, 5, 7$ ili 9 obojimo crno, a nedjeljive bijelom dobivamo prekrasne uzorke od kojih svaki opisuje osnovna svojstva Pascalova trokuta.



Slika 3.12. Brojevi Pascalova trokuta djeljivi s 2

3.5 Kochova krivulja i pahuljica

Karl Weierstrass je 1872. dao primjer funkcije kojom je pokušao opisati samosličnost i čiji se graf može smatrati fraktalom. Definirao je neprekidnu funkciju koja nigdje nije diferencijabilna. Švedski matematičar Helge von Koch (1870. – 1924.) je bio nezadovoljan tom definicijom te je htio pronaći još jedan takav primjer. Trebao je pronaći funkciju koja se sastoji od vrhova, jer ako funkcija ima vrh tada u toj točki ne postoji jedinstvena tangenta na graf funkcije.



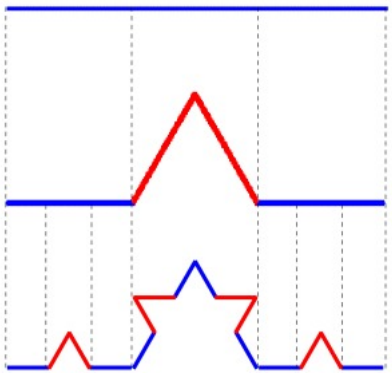
(a) Jedinstvena (b) Nije jedinstvena

Slika 3.13. Problem tangente

U tome je i uspio te je 1904. svijetu predstavio jednu od prvih fraktalnih krivulja koja je danas poznata kao Kochova krivulja. O Kochu je malo poznato, a i njegovi matematički doprinosi nisu imali veliki značaj kao doprinosi Cantora, Peana, Hausdorffa ili Hilberta. No, na području klasičnih fraktala Koch ima posebno mjesto zbog svojih konstrukcija koje su dovele do zanimljivih generalizacija i inspirirale samog Mandelbrota.

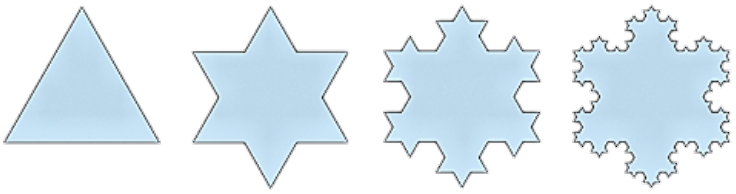
Kochovu krivulju je teže razumjeti nego Cantorov skup ili trokut Sierpińskog. Prvo, problem je već u nazivu koji nam govori da se radi o krivulji. Drugo, ona ne sadrži ravne linije ili segmente koji su glatki u smislu da ih možemo vidjeti kao zaobljene linije. Ona sadrži kompleksnost koju možemo vidjeti u oblicima koji se nalaze u prirodi poput obala.

Iako ju je teže za razumjeti, ima jednostavnu geometrijsku konstrukciju. Počinjemo sa segmentom koji podijelimo na tri jednaka dijela. Srednji dio zamijenimo s dvije stranice jednakostraničnog trokuta iste dužine kao uklonjeni dio. Ovime završava prvi korak. Dobili smo 4 sukladne dužine čije je duljina $\frac{1}{3}$ početne. Postupak se nastavlja dalje na isti način. Svaku od 4 dužine podijelimo na 3 jednaka dijela i srednji dio zamijenimo stranicama jednakostraničnog trokuta. Iterativni postupak pustimo u beskonačnost i dobijemo Kochovu krivulju.



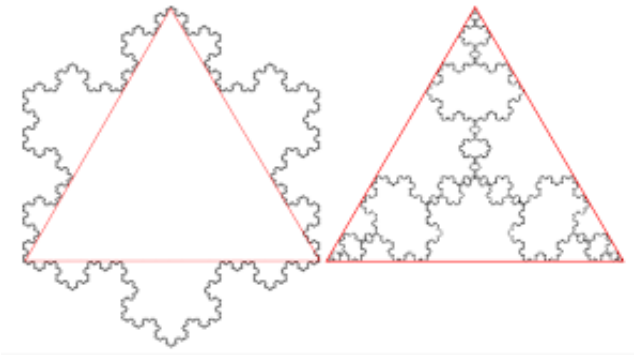
Slika 3.14. Konstrukcija Kochove krivulje

Vidimo da u svakom koraku konstrukcije dobijemo krivulju. Nakon prvog koraka imamo krivulju koja se sastoji od 4 sukladne dužine, nakon drugog imamo $4 \cdot 4$, nakon trećeg $4 \cdot 4 \cdot 4$ sukladne dužine itd. Ako je duljina početne linije L onda je nakon prvog koraka svaka dužina duljine $L \cdot \frac{1}{3}$, nakon drugog $L \cdot \frac{1}{3^2}$, onda $L \cdot \frac{1}{3^3}$ itd. Sad bez problema možemo izračunati duljinu krivulje. Nakon prvog koraka duljina krivulje je $4 \cdot L \cdot \frac{1}{3}$, onda $4^2 \cdot L \cdot \frac{1}{3^2}$ te bi nakon n-tog koraka iznosila $L \cdot \frac{4^n}{3^n}$. Primjećujemo da se nakon svakog koraka duljina poveća za faktor $\frac{4}{3}$.
Samosličnost se očituje u samoj konstrukciji. Svaki od 4 dijela u k-tom koraku je umanjena verzija, faktorom 3, cijele krivulje dobivene u prethodnom koraku.
Spojimo li tri odgovarajuće rotirane kopije Kochove krivulje dobit ćemo Kochovu pahuljicu. Za njezinu konstrukciju potreban nam je jednakostraničan trokut čiju svaku stranicu podijelimo na tri jednaka dijela. Nakon što smo podijelili svaku stranicu srednji dio zamijenimo jednakostraničnim trokutom kojem uklonimo bazu. Postupak ponovimo na dobivenim dužinama.



Slika 3.15. Konstrukcija Kochove pahuljice

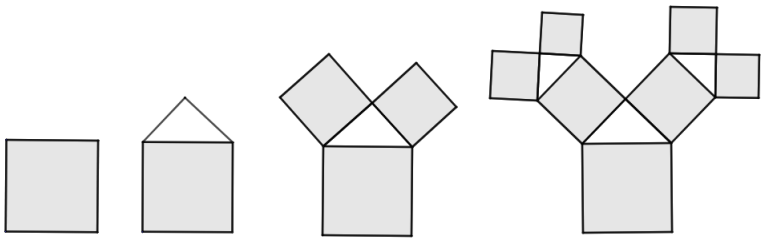
Stavimo li tri kopije Kochove krivulje s vanjske strane jednakostraničnog trokuta dobit ćemo Kochovu pahuljicu, a ako ih stavimo s unutrašnje strane dobije se Kochova antipahuljica.



Slika 3.16. Kochova pahuljica i antipahuljica

3.6 Pitagorino stablo

Ovaj fraktal je 1942. opisao danski matematičar Albert Bosman (1891. – 1961.), a nazvan je po Pitagori jer se njegov početni oblik koristi za predočavanje Pitagorina poučka. Pitagora je bio grčki matematičar i filozof koji je živio u 5. stoljeću prije Krista. U južnoj Italiji je osnovao Pitagorejsku školu koja je dala veliki doprinos matematici. U školi je naglasak bio na tajnosti i zajedništvu pa je danas teško otkriti što je rad samog Pitagore, a što njegovih učenika.
Konstrukcija Pitagorina stabla provodi se sljedećim koracima. Prvo nacrtamo kvadrat, zatim na jednoj stranici kvadrata nacrtamo jednakokračni pravokutni trokut. Na preostale dvije, slobodne stranice trokuta nacrtamo dva kvadrata. Zatim opet nacrtamo dva jednakokračna pravokutna trokuta. U sljedećem koraku nacrtamo četiri kvadrata i na svakom po jedan jednakokračni pravokutni trokut. Svakom trokutu na dvije slobodne stranice nacrtamo kvadrate. Postupak se dalje nastavlja na isti način.

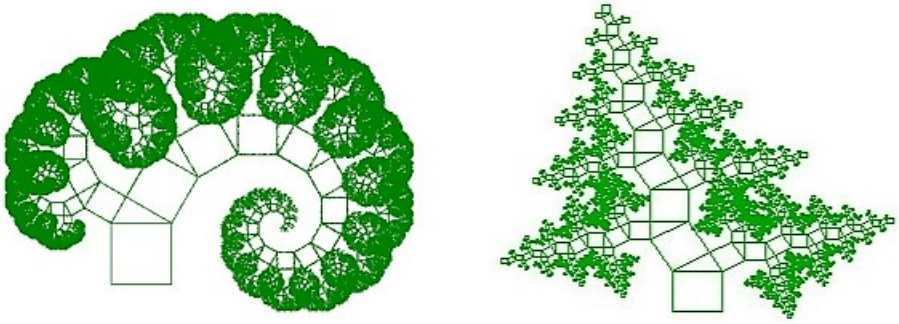


Slika 3.17. Konstrukcija Pitagorina stabla

Na slici 3.17. u trećem koraku možemo vidjeti prikaz Pitagorina poučka po kojem je Pitagora danas najpoznatiji.

Teorem 1. *Površina kvadrata nad hipotenuzom c pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama a i b.*

Slikom 3.18. je prikazano kako modifikacijom nekih elemenata u konstrukciji možemo dobiti drugačiji izgled Pitagorina stabla. Odnosno, pravokutan trokut koji smo koristili ne mora uvijek biti jednakokračan. Možemo koristiti bilo koji pravokutan trokut kojem nakon svakog koraka možemo mijenjati orijentaciju ili ona može biti ista u svakom koraku.



Slika 3.18. Pitagorina stabla

Također, u konstrukciji možemo koristiti bilo koju vrstu trokuta i time otvaramo vrata prekrasnim strukturama koje nas mogu ostaviti bez daha.
Primjeri Pitagorinih stabala su lijepe strukture koje u sebi sadrže samosličnost. Svaka struktura se početkom konstrukcije dijeli na dvije glavne grane, te dvije grane se dijele na druge dvije i tako dalje. Svaka od tih grana je umanjena verzija cijele strukture.

3.7 Julijini skupovi

Gaston Julia (1893. – 1978.) je bio francuski matematičar koji je stekao veliku popularnost objavom djela *Mémoire sur l'itération des fonctios rationnelles* u 25. godini života. Sudjelovao je u Prvom svjetskom ratu kao francuski vojnik te je bio teško ranjen. Jedna od posljedica ranjavanja je bila i gubitak nosa zbog čega je ostatak života nosio crnu kožnu traku preko lica. Matematikom se bavio dok je bio u bolnici između nekoliko teških operacija. Kasnije je postao profesor na *École Polytechnique* u Parizu.
Julijine skupove ne možemo razumjeti bez poznavanja kompleksnih brojeva. Kompleksi brojevi su proširenje skupa realnih brojeva. Kompleksni broj $z = x + iy$

sastoji se od realnog i imaginarnog dijela, tj. $Rez = x$ i $Imz = y$ gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, a $i = \sqrt{-1}$ je imaginarna jedinica. Aritmetičke operacije koje vrijede za realne vrijede i za kompleksne brojeve. Geometrijski, kako realne brojeve smještamo na brojevni pravac tako kompleksne postavljamo u ravninu. Ravnina u kojoj su smješteni kompleksni brojevi naziva se kompleksna ili Gaussova ravnina i sastoji se od realne i imaginarne osi.
Julijini skupovi se nalaze u kompleksnoj ravnini i određeni su rekurzivnom funkcijom $f_c(z) = z^2 + c$ gdje je c fiksan kompleksan broj, a z proizvoljan. Pod pojmom rekurzivno mislimo da se prethodno dobivene vrijednosti koriste za računanje sljedeće. Drugim riječima, za fiksan broj c generiramo niz kompleksnih brojeva

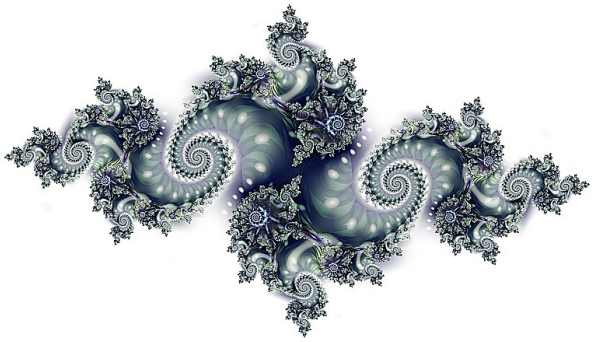
$$z \to z^2 + c \to (z^2 + c)^2 + c \to ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \to \dots$$

Ovaj niz mora zadovoljavati jedno od sljedeća dva svojstva:

(1) ili je ograničen: postoji krug oko ishodišta kojeg niz nikada ne napušta

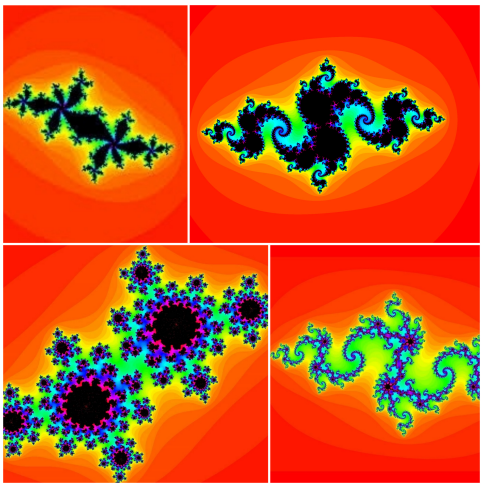
(2) ili je neograničen: članovi niza napuštaju bilo koji krug oko ishodišta.

Skup točaka koje zadovoljavaju prvo svojstvo zovemo *zatvarajući skup* P za c, a skup točaka koje zadovoljavaju drugo svojstvo *ispuštajući skup* E za c. Oba skupa su neprazna. Primjerice, za dani c i jako veliki x, broj $x^2 + c$ je veći od x. Kako skup E sadrži sve točke x koje su velike znači da je on neprazan. Kažemo da skup E sadrži sve točke koje teže u beskonačnost. Uzmemo li x tako da je $x = x^2 + c$ onda dobijemo stacionaran niz $x, x, x, \dots$ iz čega zaključujemo da je i skup P neprazan. Oba skupa pokrivaju jedan dio kompleksne ravnine i jedan je komplement drugoga. Granica zatvarajućeg skupa je istovremeno i granica ispuštajućeg skupa i to je upravo Julijin skup za c.



Slika 3.19. Julijin skup

Iako je Julia bio poznati matematičar dvadesetih godina prošlog stoljeća njegov rad je počeo padati u zaborav. No, sedamdesetih godina prošlog stoljeća Mandelbrot ga je vratio u život. Razvojem tehnologije, uz pomoć računalne grafike, Mandelbrot je Julijine radove vratio na svjetlo dana i pokazao svijetu da je Julijin rad izvor najljepših ikad viđenih fraktala. Julijino djelo je bilo puno klasičnih fraktala koji su čekali dodir računalne grafike kako bi svijetu pokazali svoju ljepotu. Jedan od primjera možemo vidjeti na slici 3.19. Slika 3.20. prikazuje da ovisno o broju c dobivamo različite Julijine skupove. Također prema vrijednosti broja c Julijin skup može biti povezan ili nepovezan.



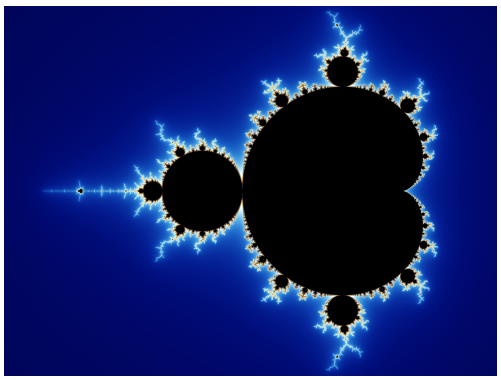
Slika 3.20. Julijini skupovi za različit c

Pogledamo li manje dijelove Julijina skupa možemo primijetiti kopije koje izgledom podsjećaju na čitavu strukturu, ali nisu identične. One su nastale nelinearnim transformacijama i iskrivljena su verzija početne te iz toga vidimo kvazi-sličnost Julijina skupa.

3.8 Mandelbrotov skup

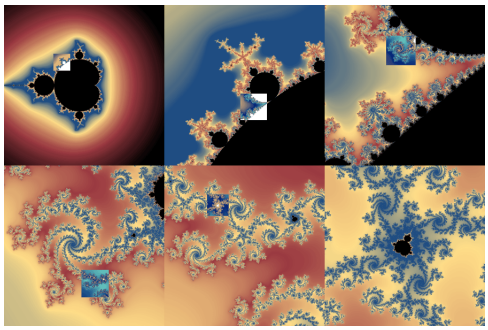
Mandelbrotov skup, otkriven 1979., je najpoznatiji i po mnogima najljepši fraktalni oblik. Osim što je najljepši, jedan je od najsloženijih ikad viđenih oblika. Vidjeli smo da ako različite vrijednosti broja c uvrstimo u rekurzivnu funkciju $f_c(z) = z^2 + c$ dobivamo različite Julijine skupove. Mandelbrot je također proučavao navedenu funkciju te je došao na ideju da napravi kartu ponašanja broja c u kompleksnoj ravnini. Odnosno, za odabranu vrijednost kompleksnog broja c i fiksnu početnu

vrijednost $z_0 = 0$ promatrao je hoće li dobiveni Julijin skup biti povezan ili nepovezan. U slučaju da je Julijin skup povezan to bi bio upravo Mandelbrotov skup. Kažemo da je Mandelbrotov skup ništa drugo nego povezani Julijin skup. Vrijednosti kompleksnog broja c za koje bi Julijn skup bio povezan obojao je crnom, a ostale bijelom. Slika koju je Mandelbrot dobio bila je posve neočekivana.



Slika 3.21. Mandelbrotov skup

One vrijednosti broja c koje pripadaju Mandelbrotov skupu, tj. one koje ne teže u beskonačnost obojamo jednom bojom. Ostale vrijednosti bojamo ovisno kojom brzinom teže u beskonačnost. Sve točke koje pripadaju Mandelbrotov skupu se nalaze unutar zatvorenog kruga polumjera 2 sa središtem u ishodištu. Točka c pripada Mandelbrotovom skupu ako i samo ako vrijedi $|f_c^n(0)| \leq 2$ za svaki $n \geq 0$. Pogledamo li sliku 3.22. vidimo da je Mandelbrotov skup kvazi-samosličan. Vidimo da se pojavljuju izmjenjene verzije njega samoga. Uglavnom su izmijenjene zbog skupova točaka koji vire iz njih povezujući ih s glavnim, srcolikim dijelom.



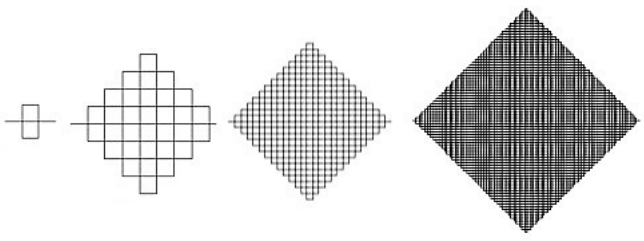
Slika 3.22. Kvazi-samosličnost Mandelbrotova skupa

3.9 Beskonačno guste krivulje

Uobičajeno je da krivulje zamišljamo kao jednodimenzionalne objekte i ravnine kao dvodimenzionalne. No, kada je riječ o beskonačno gustim krivuljama dolazimo do drugačijeg zaključka. Beskonačno guste krivulje su fraktalne krivulje koje nakon beskonačnog broja iteracija ispunjavaju ili prekrivaju prostor u kojem se nalaze. U ravnini će na primjer proći svakom točkom kvadrata, a u prostoru svakom točkom kocke. Giuseppe Peano (1858.−1932.) i David Hilbert (1862.−1943.) su bili prvi koji su se bavili takvim krivuljama. Raspravljali su o krivuljama koje se nalaze u ravnini te prolaze svakom točkom te ravnine ili određenog dijela. Svojim istraživanjem su pokazali da je tadašnje poznavanje krivulja bilo površno i ograničeno.

3.9.1 Peanova krivulja

Peanova krivulja je prva opisana beskonačno gusta krivulja koju je 1890. predstavio talijanski matematičar Giuseppe Peano. Ponekad se ostale beskonačno guste krivulje nazivaju Peanovim krivuljama.
Dobivamo ju drugačijom konstrukcijom Kochove krivulje. Konstrukciju počinjemo dužinom koju zamijenimo motivom koji je prikazan na slici 3.23.. Vidimo da motiv ima dvije točke u kojima se siječe. Preciznije, krivulja siječe samu sebe u dvije točke. Primjećujemo da Peanova krivulja ispunjava kvadrat u kojem će proći kroz svaku njegovu točku. U sljedećem koraku svaku dužinu zamijenimo s motivom koji je umanjen tri puta. U drugom korak se krivulja siječe 32 puta. Postupak ponovimo beskonačno mnogo puta.



Slika 3.23. Konstrukcija Peanove krivulje

Kako u svakom koraku dužinu zamijenimo s devet novih koje su smanjene tri puta nakon n-tog koraka dužina bi bila smanjena za faktor 3^n i bila bi dugačka $\frac{1}{3^n}$. Sada možemo lako izračunati duljinu krivulje. Uzmemo li da je duljina početne dužine 1, nakon prvog koraka bi bila $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$. Nakon drugog koraka duljina bi iznosila

$9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3^2} = 9$. Vidimo da se duljina u svakom koraku poveća tri puta pa bi u n-tom koraku iznosila 3^n.
Pogledamo li krivulju nakon nekoliko koraka konstrukcije možemo reći da je ona samoslična kao i Kochova krivulja. No što se događa nakon velikog broja koraka? Mi zapravo vidimo samo ispunjeni kvadrat koji ne slični prethodnim koracima konstrukcije. Tu se javlja pitanje je li Peanova krivulja uopće samoslična ili samosličnost moramo promatrati na drugačiji način. Zapravo, ona je savršeno samoslična. Peanovu krivulju je problem vidjeti kao krivulju, jer u bilo kojem grafičkom okruženju nakon velikog broja koraka izgleda kao dio ravnine.

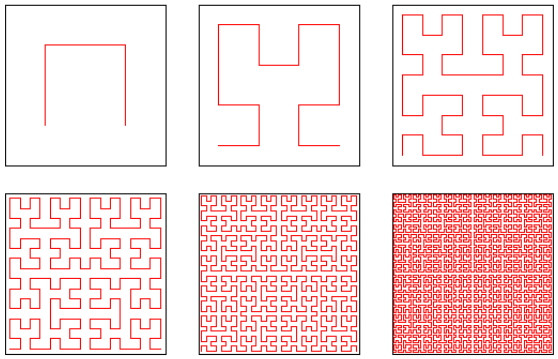
3.9.2 Hilbertova krivulja

Hilbertovu krivulju je 1891. opisao njemački matematičar David Hilbert i ona je varijacija Peanove krivulje.
Kao i kod konstrukcije Peanove krivulje imamo zadane nulti i prvi korak koji su prikazani na slici 3.24.. U drugom koraku svaki dio koji je sličan krivulji iz nultog koraka se zamjeni krivuljom koja je zadana u prvom. Sljedeći, odnosno n-ti korak se može dobiti na dva načina:

(1) n-ti korak dobijemo tako da u prethodnom koraku svaki dio koji je sličan krivulji u nultom koraku zamijenimo krivuljom iz prvog.

(2) n-ti korak dobijemo tako da svaki dio iz prethodnog, odnosno n-1 koraka koji je sličan krivulji iz n-2 koraka zamijenimo cijelom krivuljom dobivenom u n-1 koraku.

Iako imamo dva načina konstrukcije krajnji rezultat je isti i nakon beskonačno mnogo koraka dobijemo Hilbertovu krivulju.



Slika 3.24. Konstrukcija Hilbertove krivulje

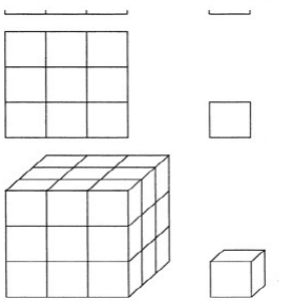
4 Fraktali i dimenzija

Određivanje dimenzije jednostavnih oblika kao što su segment, kvadrat, kocka rezultiralo bi nekim cijelim brojem. No, pojavom fraktala situacija više nije bila toliko jednostavna. Do tada poznate dimenzije nisu bile dovoljno dobre da bi se opisala veličina fraktalnih oblika. Razvojem fraktala došlo je do nastanka fraktalne dimenzije za koju smo već rekli da nam govori u kojoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi. Jedna od posebnih karakteristika fraktalne dimenzije je da ona ne mora biti cijeli broj kao primjerice topološka. Upravo se zbog toga još često naziva i razlomljenom dimenzijom. Osim što opisuje svojstva kao što su izlomljenost ili hrapavost objekta ona ostaje konstantna pri različitim mjerilima. Razvoj fraktalne dimenzije povezujemo s razvojem topologije. Topologija je grana matematike koja se najviše razvila u prošlom stoljeću te se bavi pitanjima oblika i formi. Proučava zašto se oblici mogu iskriviti i izvući u prostoru koji se ponaša kao guma. U topologiji se segmenti mogu saviti u krivulje, krug možemo izvući u trokut ili kvadrat. Ovo svojstvo se zove topološka invarijantnost. Također, broj rupa u nekom objektu je topološki invarijantan. Kuglu možemo transformirati u oblik potkove, ali ne možemo u oblik krafne. Transformacije koje su dozvoljene nazivaju se homeomorfizmi i ne smiju mijenjati invarijantnost objekta. Jedino što se u topologiji ne može stvoriti ili uništiti je sjecište, bez obzira na to koliko zakretali ili razvlačili promatrane objekte. Kako su segment i Kochova krivulja topološki invarijantni to bi trebalo značiti da je Kochova krivulja jednodimenzionalna. No, to nije točno. Iako je ovo pitanje kao i pitanje same dimenzije mučilo brojne matematičare u ovom poglavlju ćemo se fokusirati na određivanje dimenzije fraktala, odnosno fraktalne dimenzije.
Postoji nekoliko definicija fraktalne dimenzije. Jedna od njih je i Hausdorffova dimenzija koju smo već opisali i objasnili. Ona je najvažnija za teorijsko shvaćanje definicije fraktala, ali ju je teško procijeniti i izračunati koristeći numeričke metode. Najjednostavnija je dimenzija samosličnosti koja se koristi kod jednostavnih geometrijskih fraktala, a u praksi je najzastupljenija box-counting dimenzija.

4.1 Dimenzija samosličnosti

Za početak, podsjetimo se što je samosličnost. Samosličnost je svojstvo objekta da je sličan sam sebi, odnosno da u sebi sadrži kopije samog sebe. No, ako je neki objekt samosličan to ne znači da je on nužno i fraktal. Pogledajmo na primjer segment ili kvadrat ili kocku. Svaki se objekt može razbiti na manje kopije samog sebe koristeći

afina preslikavanja, ali oni nisu fraktali.



Slika 4.25. Samosličnost segmenta, kvadrata i kocke

Na slici 4.25. vidimo da je faktor skaliranja $\frac{1}{3}$ koji je proizvoljan što znači da smo mogli uzeti bilo koji faktor skaliranja npr. $\frac{1}{6}, \frac{1}{176}$. Upravo je u tome razlika između fraktala i ostalih objekata. Fraktali imaju karakterističan faktor skaliranja. Na primjer, Kochova krivulja ima karakteristične faktore skaliranja $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ Postoji nešto zajedničko samosličnim strukturama, bile one fraktali ili ne, a to je odnos između faktora skaliranja i broja umanjenih dijelova na koje je struktura podijeljena. Prema tome formula koja povezuje broj dijelova a i faktora skaliranja s za segment, kvadrat i kocku je:

$$a = \frac{1}{s^D}, \tag{1}$$

gdje je D eksponent koji predstavlja topološku dimenziju objekta. U ovom slučaju $D = 1$ za segment, $D = 2$ za kvadrat i $D = 3$ za kocku. Pogledamo li odnos između $a = 4, s = \frac{1}{3}$ i $a = 16, s = \frac{1}{9}$ za Kochovu krivulju vidimo da on i nije toliko očit kao za segment, kvadrat i kocku.

Pogledajmo što ćemo dobiti ako taj odnos primijenimo za Kochovu krivulju. Ubacimo li $a = 4$ i $s = \frac{1}{3}$ u formulu (1) dobijemo $4 = 3^D$. Logaritmiranjem obje strane dobijemo:

$$\log 4 = D \cdot \log 3,$$

ili

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619.$$

Sad se postavlja pitanje dobijemo li isti rezultat ako uzmemo manje dijelove, odnosno ako je faktor skaliranja $s = \frac{1}{9}$. Prema formuli (1) za $a = 16$ i s imamo $16 = 9^D$, odnosno

$$\log 16 = D \cdot \log 9.$$

Izrazimo li D dobijemo

$$D = \frac{\log 16}{\log 9} = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = \frac{2 \cdot \log 4}{2 \cdot \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619.$$

Općenito za Kochovu krivulju imamo

$$D = \frac{\log 4^n}{\log 3^n}$$

iz čega na kraju dobijemo

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Bez obzira koji faktor skaliranja s i broj dijelova a uzeli za Kochovu krivulju uvijek ćemo dobiti isti broj. Taj broj je dimenzija samosličnosti Kochove krivulje i označavamo ga s D_s. Odnos između faktora skaliranja s i broja dijelova na koje struktura može biti podijeljena a kod samosličnih objekata je

$$a = \frac{1}{s^{D_s}}$$

ili ekvivalentno

$$D_s = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}},$$

gdje je D_s dimenzija samosličnosti. Dimenzija samosličnosti za segment, kvadrat, kocku su očekivani brojevi $1, 2$ i 3 dok smo za Kochovu krivulju dobili da je $D_s \approx 1.2619$. Sad kad smo vidjeli kako se određuje dimenzija samosličnosti u tablici 1. možemo vidjeti dimenziju Cantorova skupa, trokuta, tepiha i tetraedra Sierpińskog, Mengerove spužve te Peanove krivulje.

Tablica 1: Dimenzija samosličnosti za fraktale

Fraktal	Faktor skaliranja s	Broj dijelova a	Dimenzija D_s
Cantorov skup	$1/3^n$	2^n	$\log 2/\log 3 \approx 0.6309$
Trokut Sierpińskog	$1/2^n$	3^n	$\log 3/\log 2 \approx 1.5850$
Tepih Sierpińskog	$1/3^n$	8^n	$\log 8/\log 3 \approx 1.8928$
Tetraedar Sierpińskog	$1/2^n$	4^n	$\log 4/\log 2 = 2$
Mengerova spužva	$1/3^n$	20^n	$\log 20/\log 3 \approx 2.7268$
Peanova krivulja	$1/3^n$	9^n	$\log 9/\log 3 = 2$

Iako smo rekli da fraktalna dimenzija ne mora biti cijeli broj, vidimo na primjeru tetraedra Sierpińskog i Peanove krivulje da je njihova dimenzija cjelobrojna. Posebno nam je zanimljiva dimenzija beskonačno gustih krivulja, jer njihova fraktalna

dimenzija odgovara topološkoj dimenziji prostora u kojem se nalaze i koji ispunjavaju. Također, pomoću poznavanja dimenzije samosličnosti možemo izračunati i duljinu p fraktalnih krivulja pomoću formule:

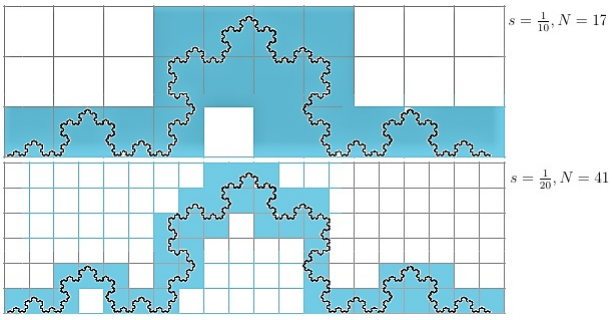
$$D_s = 1 + d$$

gdje d označava nagib pravca u $\log / \log$ grafu određenog duljinom krivulje p nasuprot preciznosti $\frac{1}{s}$. Odnosno,

$$d = \frac{\log p}{\log \frac{1}{s}}.$$

4.2 Box-counting dimenzija

Box-counting dimenzija je, kao i dimenzija samosličnosti, specijalni oblik Mandelbrotove fraktalne dimenzije koje se oslanjaju na Hausdorffov rad iz 1919. Određivanje ove dimenzije temelji se na konceptu brojanja „kutija" koje prekrivaju fraktalni objekt. Promatrani objekt postavimo u rešetku koja se sastoji od ćelija stranice duljine s i prebrojimo ćelije koje sadrže neki dio objekta. Naravno broj ćelija ovisi o duljini stranice s i taj broj označavamo s $N(s)$. Zatim profinjujemo rešetku tako da smanjimo duljinu stranica ćelija s i odredimo novi $N(s)$. Zbog praktičnih razloga prikladno je duljinu stranica ćelija smanjiti za faktor $\frac{1}{2}$. Sljedeći korak je smještanje točaka čije su koordinate $(\log \frac{1}{s}, \log N(s))$ u $\log / \log$ graf. Dobivenim točkama je određen pravac kojem odredimo nagib. Nagib pravca je box-counting dimenzija promatranog objekta i označavamo ju s D_b.



Slika 4.26. Određivanje box-counting dimenzije Kochove krivulje

Gornji dio slike 4.26. prikazuje Kochovu krivulju koja se nalazi u rešetki, odnosno kvadratnoj mreži gdje je $s = \frac{1}{10}$ i $N = 17$. Profinjenjem za $\frac{1}{2}$ dobivamo novu kvadratnu mrežu gdje se broj kvadrata koji prekrivaju Kochovu krivulju povećao na 41 što možemo vidjeti na donjem dijelu slike 4.26. Nakon što dobivene točke stavimo u

log / log graf, lako možemo odrediti nagib dobivenog pravca. Odnosno, box-counting dimenziju

$$D_b = \frac{\log 41 - \log 17}{\log 20 - \log 10} = \frac{\log \frac{41}{17}}{\log 2} \approx 1.27.$$

Dobili smo približno jednaku dimenziju za krivulju kao i kod dimenzije samosličnosti. Povećanjem broja „kutija", odnosno većim profinjenjem rešetke dobit ćemo točniji rezultat.

Iako se koristi sličan koncept kao i za određivanje dimenzije samosličnosti, box-counting dimenzija je jedna od najpraktičnijih i najkorištenijih zbog jednostavnog i brzog određivanja. Jedna od najvećih prednosti je što se koristiti za određivanje dimenzije nepravilnih i nesamosličnih objekata poput pera, obala, raznih škrabotina i tako dalje. Također, može se koristiti za određivanje dimenzije objekata u prostoru gdje će ćelije u rešetki poprimiti pravi izgled „kutija" koje će imati dužinu, širinu i visinu. Ovaj koncept je primjenjiv i na fraktale poput Cantorova skupa koji je podskup jediničnog intervala u čijem su slučaju „kutije" zapravo mali intervali.

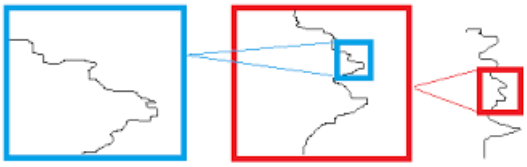
5 Primjena fraktala

Svijet oko nas prepun je fraktalnih oblika. Pogledamo li drveće, munje, oblake, obale, planine, cvjetaču te listove paprati u njima možemo prepoznati fraktalne strukture. Razvojem i otkrićem fraktala te daljnjim proučavanjem našli su primjenu u gotovo svim znanostima. Osim u matematici, koriste se u fizici za proučavanje kaosa, biologiji za proučavanje rasta bakterija ili populacije. U medicini se koriste za mjerenje složenosti bioloških struktura poput tkiva, stanica i njihovih organela. Kako se površina stanica raka sastoji od nabora i pregiba koji imaju fraktalnu strukturu te se mijenjaju ovisno o stadiju raka fraktalna analiza pomaže u otkrivanju stanica raka u tijelu. Utvrđeno je da veće vrijednosti fraktalne dimenzije odgovaraju kasnijem stadiju razvoja raka, odnosno da stadij raka ovisi o dimenziji samih stanica. Koriste se za predviđanje širenja šumskog požara, promjene vrijednosti dionica na financijskom tržištu i tako dalje. Osobito veliku primjenu imaju u računalnoj grafici, odnosno kod modeliranja terena i raznog raslinja. Vidimo da je njihova primjena u današnje vrijeme jako velika, no u ovom poglavlju opisat ćemo samo neke od njih.

5.1 Duljina obale Britanije

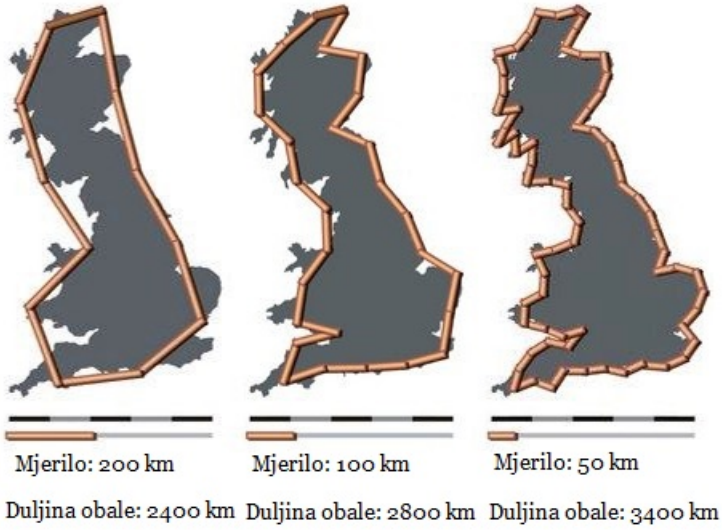
Mandelbrot je iznio zanimljivu priču u kojoj granica između Španjolske i Portugala ima različitu duljinu. Španjolci su u svojim enciklopedijama tvrdili da je duljina granice 991.36 kilometara, dok su Portugalci objavili podatak je granica dugačka 1219.88 kilometara. Budući da je očita poprilična razlika u tim duljinama postavlja se pitanje kako je moguće da su dvije države istu granicu izmjerile sasvim drugačije? Odgovor na to pitanje je dao Mandelbrot u članku *„How long is the coast of Britain?"* objavljenom 1967. godine. Ovo naizgled jednostavno pitanje u sebi krije temelje samosličnosti i fraktalne geometrije. Pogledamo li različite izvore koji nam govore o duljini britanske obale dobit ćemo podatke koji variraju između 7440 i 8000 km. Mandelbrot je tvrdio da je to zbog samosličnosti obale. Problem je što ne postoji jedinstvena formula kojom bi se izračunala duljina obale Britanije, ali niti jedne druge obale. Oblik obale je nastajao milijunima godinama raznim tektonskim aktivnostima, erozijama i sedimentnim procesima koji traju i danas. Jedini način kojim možemo odrediti duljinu obale je da ju izmjerimo. U praksi se mjerenje obala i granica vrši na geografskim kartama. Geografske karte na sebi sadrže mjerilo, na primjer 1:100 000 i mjernu jedinicu 1 cm, što znači da jedan centimetar na karti predstavlja 100 000 m ili 100 km u stvarnosti. Mjerimo tako da uzmemo mjernu je-

dinicu koju crtamo po obali te na kraju izbrojimo koliko crta smo povukli. Dobiveni broj pomnožimo s mjerilom i dobijemo broj koji predstavlja duljinu obale ili granice.



Slika 5.27. Samosličnost obale

Pogledamo li neki zaljev ili poluotok na karti s mjerilom 1:100 000 te istu tu kartu prikažemo s mjerilom 1:10 000 novi zaljevi i uvale postaju vidljivi. Ponovimo li postupak, ali ovaj put s mjerilom 1:1000 opet ćemo otkriti nove zaljeve i uvale koje dosad nismo vidjeli i tako dalje. Iz ovog se može vidjeti samosličnost obala kao što je prikazano na slici 5.27., ali to nije savršena samosličnost kao kod fraktala poput Kochove krivulje već je približna, statička samosličnost. Svaki novi zaljev, uvala ili polutok svojom duljinom utječu na ukupnu dužinu obale.



Slika 5.28. Ovisnost duljine obale Britanije o duljini mjernog štapa

Na slici 5.28. možemo vidjeti da se promjenom mjerne jedinice, odnosno „duljine štapa" mijenja i duljina britanske obale. Na prvoj slici s lijeva smo uzeli štapove koje ne možemo posložiti tako da savršeno prate obris obale pa će samim time i aproksimacija duljine biti dosta neprecizna. Na srednjoj, a posebno na desnoj slici

mjerni štapovi su posloženi tako da savršeno prate obris obale i zbog toga dobivamo precizniju duljinu obale. Odnosno, što je duljina štapa kojim mjerimo manja bolje ćemo slijediti nepravilnosti obale i dobiti točniju aproksimaciju duljine. U tablici 2. možemo vidjeti rezultate za duljinu obale Britanije koristeći različita mjerila.

Tablica 2: Aproksimacija duljine obale Britanije

Duljina mjerne jedinice na karti	Duljina obale u stvarnosti
200 km	2400 km
100 km	2800 km
50 km	3400 km
17 km	8640 km

Zanimljivo je da ako uzmemo malu duljinu mjernog štapa, izmjerena duljina obale može biti po volji velika i ta pojava se naziva paradoks obale.
Proučavanjem problema duljine obale i istraživajući svojstvo ponavljajućih uzoraka te otkrivanjem dimenzije koja nije cjelobrojna Mandelbrotov rad je postao temeljem teorije fraktala.

5.2 Geometrijski red i Kochova pahuljica

Znamo da se fraktali poput Kochove krivulje, trokuta Sierpinskog i drugih dobivaju iterativnim procesom za kojeg bi bilo idealno da nikada ne stane. Prilikom konstrukcije mi pustimo iteraciju da ide dovoljno daleko, ali to i dalje nije dovoljno da dobijemo pravi fraktal. Zapravo, istina je da fraktal postoji samo kao idealizacija koju dobijemo kada bi iteracija išla u beskonačnost. Drugim riječima, fraktali su ograničeni objekti i njihovo postojanje nije prirodno kao što se čini. Sam pojam ograničenosti je bitan za matematičare jer može dovesti do novih ideja i zaključaka. Promatramo li neki niz ponekad nije jednostavno zaključiti je li on ograničen ili ne. Primjerice, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots,$$

je divergentan, dok

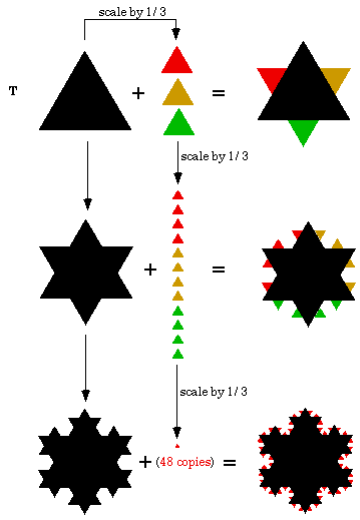
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

prema Euleru konvergira ka $\frac{\pi^2}{6}$.
Prisjetimo se na trenutak geometrijskog reda. Pitamo se je li za dani broj $q \in \langle -1, 1 \rangle$

red

$$\sum_{0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots ,$$

konvergentan i ako je, prema kojem broju konvergira. Kako se radi o geometrijskom redu, za njega znamo da je konvergentan i broj prema on konvergira je $\frac{1}{1-q}$. Geometrijski red je povezan s konstrukcijom osnovnih fraktala. Kod fraktala konstrukciju većinom započinjemo dužinom duljine 1 dok kod geometrijskog reda počinjemo s brojem 1 i faktor skaliranja je q. Bitno je da faktor skaliranja po apsolutnoj vrijednosti bude manji od 1. Konstrukciju geometrijskog reda započinjemo s 1. U sljedećem koraku 1 umanjimo faktorom skaliranja q i dodamo, zatim 1 smanjimo faktorom skaliranja $q \cdot q$ i dodamo. Ponovimo postupak. Poanta je u tome da pustimo li da ovaj proces ide u beskonačnost sve više ćemo se približiti broju $\frac{1}{1-q}$. Ova konstrukcija nas podsjeća na konstrukciju Kochove pahuljice samo što umjesto zbrajanja imamo uniju. Kod Kochove pahuljice krećemo s ispunjenim jednakostraničnim trokutom T duljine stranice a kao što je prikazano na slici 5.29. Trokut T umanjimo za faktor $\frac{1}{3}$ i tri umanjene kopije zalijepimo na trokut T. Dobiveni lik ima $3 \cdot 4$ dužina duljine $\frac{1}{3}a$. Zatim trokut T umanjimo za faktor $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ i zalijepimo 12 umanjenih kopija na lik dobiven u prethodnom koraku. Novi lik ima $3 \cdot 4 \cdot 4$ dužina duljine $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a$.



Slika 5.29. Konstrukcija Kochove pahuljice

Vidimo da su konstrukcije geometrijskog reda i Kochove pahuljice povezane. Zanimljivo je da pahuljica ima beskonačan opseg, a konačnu površinu i upravo nam geometrijski red pomaže u računanju njezine površine.

Na početku imamo jednakostraničan trokut T čija je površina $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. U svakom n-tom koraku dodajemo površinu od t_n umanjenih jednakostraničnih trokuta duljine stranice s_n. Pogledajmo, $t_1 = 3$, $t_2 = 3 \cdot 4$, $t_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4$, $\ldots$, $t_n = 3 \cdot 4^{n-1}$. Duljine stranica s_n dobivene su smanjivanjem početne stranice duljine a faktorom $\frac{1}{3}$ u svakom koraku. Imamo da je duljina stranice s_n u n-tom koraku $s_n = (\frac{1}{3})^n \cdot a$. Poznavanjem dobivenih rezultata imamo:

$$A_{n+1} = A_n + t_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s_n^2 = A_n + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot a^2 = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) \cdot a^2.$$

Raspišemo li to korak po korak,

$$A_{n+1} = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) \cdot a^2.$$

Izraz u zagradi je geometrijski red čije suma iznosi $\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$. Kochova pahuljica ima površinu

$$A = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} \cdot a^2,$$

uvrstimo li $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ na kraju dobijemo da je površina Kochove pahuljice

$$A = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2.$$

Na kraju, možemo reći da je Kochova pahuljica zapravo vizualizacija konvergentnog geometrijskog reda.

5.3 Fraktali u računalnoj grafici

Fraktali su svoju primjenu pronašli i u znanosti koja je dovela do njihovog razvoja i otkrića. Razvojem računalne grafike svijetu su otvorena vrata prema prekrasnim i kompleksnim strukturama koje mogu ostaviti bez daha. Najjednostavniji primjeri primjene fraktalu u računalnoj grafici su modeliranje terena, posebice planina ili raslinja, grmlja, drveća i trava.

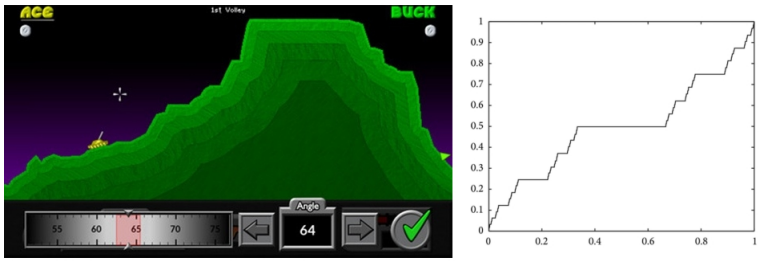
Planine se mogu crtati tako da se horizontalno položenom trokutu svaki vrh povisi ili snizi za neku vrijednost. Tako dobivenom trokutu pronađemo polovišta stranica te ih spojimo i tako dobijemo četiri nova trokuta. Sada srednjem trokutu kojeg smo dobili spajanjem polovišta povisimo ili snizimo svaki vrh kao i kod početnog, ali s upola manjim vrijednostima. Postupak ponovimo na preostala tri trokuta i tako dalje. Ovdje možemo uočiti sličnost s konstrukcijom trokuta Sierpińskog. Također,

planine se mogu dobiti i pomoću kvazi-sličnog fraktala, Perlinova šuma. Perlinov šum je funkcija koja se dobije zbrajanjem više funkcija koje su dobivene slučajno odabranim točkama i gdje svaka sljedeća funkcija ima dvostruko manju amplitudu.



Slika 5.30. Izrada planine koristeći fraktale

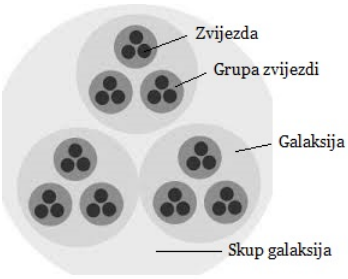
Fraktale koristimo i za kreiranje računalnih igrica. Najpoznatiji je primjer izrada terena za dvodimenzionalne igrice koristeći fraktal đavolje stube prikazan na slici 5.31. Đavolje stube su zapravo Cantorov skup koji se konstruira na kvadratu stranice duljine 1. Stranicu kvadrata podijelimo na tri jednaka dijela te izbacimo srednji dio. Zatim na srednjem dijelu stavimo pravokutnik širine $\frac{1}{3}$ i određene visine. Odnosno, svaki dio koji izbacimo mijenjamo pravokutnikom širine dijela koge smo izbacili i određene visine. Visinu povećavamo s lijeva na desno kako bi dobili izgled stuba.



Slika 5.31. Izrada terena u igricama pomoću fraktala

5.4 Olbersov paradoks

Olbersov paradoks ili paradoks tamnog neba opisao je 1826. njemački astronom Henrich Olbers prema kojem je i dobio ime. Ovaj paradoks je vezan za pitanje beskonačnosti svemira i kaže ako ima beskonačno mnogo zvijezda zašto nebo noću ne svijetli kao Sunce? Jedno od mogućih rješenja ponudio je i sam Mandelbrot. Njegovo rješenje se temeljilo na fraktalnoj hijerarhiji svemira koju je prije njega opisao Carl Charlier. Njegova teorija sugerira da su zvijezde i galaksije u svemiru raspoređene u ponavljajućim uzorcima čiji se broj povećava s udaljenošću. Na slici 5.32. vidimo pojednostavljeni prikaz fraktalne hijerarhije na kojoj crni krugovi predstavljaju zvijezde koje čine grupu koja se nalazi unutar galaksije koja je dio skupine galaksija i tako dalje.



Slika 5.32. Fraktalna hijerarhija svemira

Odnosno, pretpostavio je da su zvijezde u svemiru fraktalno raspoređene poput višedimenzionalnog Cantorova skupa i da ih ima beskonačno mnogo, ali se ne nalaze u svakoj točki svemira i zato nebo ne svijetli.
Matematički gledano, svjetlost koju dobivamo od zvijezda koje se nalaze u fraktalnoj hijerarhiji možemo opisati kao

$$svjetlost = \int_{r_0}^{\infty} L(r)N(r)dr$$

gdje je:
r_0= udaljenost do najbliže zvijezde,
r= udaljenost do planeta Zemlje,
$L(r)$= prosječan sjaj zvijezde na udaljenosti r,
$N(r)$= broj zvijezda na udaljenosti r.
Iz izraza $L(r)N(r)$ možemo odrediti je li svjetlost konačna ili beskonačna. Kako bi ova formula bila rješenje paradoksa $N(r)$ mora biti proporcionalno r^a za $a < 1$ kako bi svjetlost bila konačna. Također, moralo bi vrijediti da je fraktalna dimenzija svemira manja ili jednaka 2. Međutim, ova teorija nije prihvaćena jer kozmolozi nisu mogli prihvatiti činjenicu da je dimenzija svemira manja od 2.

Literatura

[1] I. Bodiš, *Fraktali*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Diplomski rad, Osijek, 2012.

[2] E. Duckworth, *Olbers' Paradox.*
URL: $https://www.ogdentrust.com/assets/media/Ed_Duckworth_Olbers_Paradox.pdf$

[3] M. Hata, J. Kigami, M. Yamaguti, *Mathematics of Fractals*, AMS, Providence, 1997.

[4] D. Jukić, *Mjera i integral, Drugo izdanje*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2014.

[5] H. Jürgens, H. Peitgen, D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Second Edition*, Springer, New York, 2004.

[6] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

[7] E. Pearse, *An introduction to dimension theory and fractal geometry: fractal dimensions and measures.*
URL: $http://pi.math.cornell.edu/\ erin/docs/dimension.pdf$

Sažetak

Svijet oko nas je prepun oblika i linija koje ne mogu biti opisani klasičnom geometrijom. No, zahvaljujući razvoju i otkriću fraktala te fraktalne geometrije pronađen je način za njihovo shvaćanje. U ovom radu upoznat ću vas s pojmom fraktala, njihovom podjelom te klasičnim fraktalima kao što su Cantorov skup, trokut i tepih Sierpińskog, Kochova krivulja i pahuljica, Pitagorino stablo, Julijin i Mandelbrotov skup te beskonačno guste krivulje. Pojavom fraktala javio se i problem dimenzije jer dotadašnje poznavanje dimenzije nije bilo dovoljno za njihovo opisivanje. Hausdorffova dimenzija, dimenzija samosličnosti te box-counting dimenzija su jedne od definicija fraktalne dimenzije koje se oslanjaju na Hausdorffov rad iz 1919. Dimenzija samosličnosti se koristi kod geometrijskih fraktala dok je box-counting dimenzija najzastupljenija zbog primjene na nepravilne oblike. Osim u matematici primjenu su našli u brojim drugim znanostima poput fizike, biologije te najviše u računalnoj grafici uz čiju su pomoć fraktali predstavljeni svijetu.

Ključne riječi: fraktali, klasični fraktali, fraktalna dimenzija, samosličnost, Mandelbrot

Summary

The world around us is abundant in shapes and lines which can not be described by classical geometry. Nevertheless, thanks to development and discovery of fractals and fractal geometry, a way for their understanding was found. In this thesis, I am going to introduce you with concept of fractals, their classification and classical fractals such as Cantor's set, the Sierpiński triangle and carpet, the Koch curve and snowflake, Pythagorean tree, Julia and Mandelbrot's sets, and space-filling curves. With the appearance of fractals, a dimension problem was revealed as the previous knowledge about dimensions was insufficient for their description. Hausdorff's dimension, self-similarity dimension and box-counting dimension are some of the fractal dimension definitions relying on the Hausdorff's work in 1919. Self-similarity dimension is used in geometric fractals while the box-counting dimension is most commonly used for irregular shapes. Apart from mathematics they have been applied in many other sciences such as physics, biology and most common is computer graphics that helped fractals to become presented to the world.

Keywords: fractals, classical fractals, fractal dimension, self-similarity, Mandelbrot

Životopis

Rođen sam 13. listopada 1994. godine u Našicama u Hrvatskoj. U razdoblju od 2001. do 2009. sam pohađao osnovnu školu „kralja Tomislava". Srednju školu „Isidora Kršnjavoga" u Našicama upisujem 2009. godine, smjer opća gimnazija. Nakon završene srednje škole i položene državne mature 2013. upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. 2014. se prebacujem na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku.