Vizualizacije u matematici

Matić, Jelena

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:566630

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Jelena Matić

Vizualizacije u matematici

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Jelena Matić

Vizualizacije u matematici

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod **i**

1 Prikaz brojeva grafičkim elementima **1**
1.1 Suma neparnih prirodnih brojeva 1
1.2 Suma prirodnih brojeva 2
1.3 Alternirajuća suma kvadrata 3

2 Prikaz brojeva preko duljine dužina **5**
2.1 Nejednakosti između sredina 5
2.2 Pitagorina nejednakost 8
2.3 Brojevi kao vrijednosti funkcija 8

3 Popločavanje ravnine **10**
3.1 Pitagorino popločavanje 10
3.2 Kartezijevo popločavanje 12
3.3 Četverokutna popločavanja 14
3.4 Trokutasta popločavanja 15

4 Uvođenje boja **16**
4.1 Domino popločavanje 16
4.2 L-tetromino popločavanje 16
4.3 Alternirajuća suma trokutastih brojeva 17
4.4 U prostoru četiri boje nisu dovoljne 18

5 Genijalnost u 3D **21**
5.1 Sve je lakše u tri dimenzije 21
5.2 Preklapanje i rezanje papira 23

Zaključak **27**

Literatura **28**

Sažetak **29**

Summary **30**

Uvod

"Nerazumljiv dokaz matematičkih tvrdnji može biti dopunjen geometrijskim analogonom tako jednostavnim i lijepim da je istina teorema vidljiva gotovo na prvi pogled", riječi su Martina Gardnera, američkog matematičara koji je uvelike dao svoj doprinos rekreativnoj matematici objavljujući članke u kolumni Matematičke igre časopisa Scientific American.

Počeci povezanosti matematičkih crteža i dokaza dolaze iz antičke Kine, Arabije, Grčke i Indije, ali tek zadnjih 40 godina raste interes za takozvane *dokaze bez riječi*. Mnogi takvi dokazi objavljivani su u Mathematic Magazine i The College Mathematics Journal, kao i u drugim časopisima, knjigama te na internetu. Počele su se i održavati mnoge radionice na teme posvećene nastavnicima srednjih škola te fakulteta kako bi se što više popularizirao kreatvniji način dokazivanja koji se koristio u samim počecima.

Vizualni dokazi ne moraju se koristiti samo u geometriji, pa će tako u ovom radu biti obrađeni slikoviti dokazi i iz drugih područja matematike. Prošle godine izdana je knjiga An illustrated theory of numbers u kojoj gotovo 500 ilustracija prati elegantne dokaze iz područja teorije brojeva te omogućuje studentima novi pristup teoriji brojeva sa manje algebarskih a više geometrijskih elemenata. No zbog nedostupnosti navedene knjige, taj dio neće biti obrađen u radu.

Često puta, osoba susrećući *dokaz bez riječi* može pomisliti da su pripadajuće slike rezultat slučajno pogođenog otkrića ili izuzetne domišljatosti kreatora slike. No sljedeća poglavlja pokazuju da se iza mnogih slika koje dokazuju matematičke relacije nalaze neke lako razumljive metode. Naravno, danu matematičku ideju može opisivati mnogo različitih slika pa se u ovisnosti o razini poučavanja odabire najbolja alternativa.

1 Prikaz brojeva grafičkim elementima

Započet ćemo tvrdnjama o prirodnim brojevima koje smatramo sasvim razumljivima iz algebarskog zapisa, no uvjerit ćemo se da lakše razumijevanje prirodnih brojeva možemo postići zamišljajući ih kao skupove objekata. Za određene objekte obično se koriste točke, kvadrati, sfere, kocke, i ostali slični objekti koje je lako nacrtati.

Kada dobijemo zadatak dokazati iskaz o prirodnim brojevima (npr. pokazati da je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka n^2), prvo čega ćemo se sjetiti je korištenje matematičke indukcije. Međutim, neki analitički ili algebarski pristupi rijetko daju objašnjenje *zašto* je iskaz točan. Geometrijski pristup, u kojem se može vizualizirati veza između brojeva kao veza između objekata, često može pružiti i razumijevanje.

U ovom poglavlju ilustrirat ćemo dva jednostavna načina prebrojavanja, a oba uključuju prikaz prirodnih brojeva preko skupa objekata. Ti načini prebrojavanja su sljedeći:

1. ako prebrojavamo objekte u skupu na različite načine, dobit ćemo isti rezultat
2. ako su dva skupa u bijekciji, onda oni imaju isti broj elemenata.

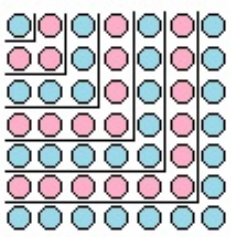
Prvi princip nazvan je Fubinijev princip po teoremu koji se odnosi na promjenu redosljeda integriranja u višestrukim integralima. Drugi nazivamo Cantorov princip, po Georgu Cantoru, koji je to pretežno koristio u istraživanju kardinaliteta beskonačnih skupova. Navedena dva principa su ekvivalentna. U nastavku ćemo ih primjenjivati.

1.1 Suma neparnih prirodnih brojeva

Dokažimo iskaz o već spomenutoj sumi neparnih prirodnih brojeva, tj.

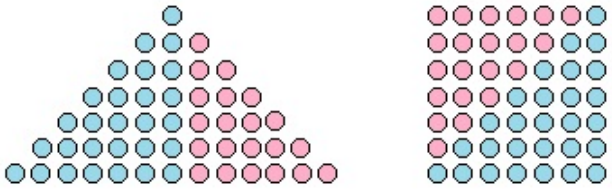
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Na slici 1.1. točke možemo brojati na dva načina, množenjem broja redaka sa brojem stupaca ($n \cdot n = n^2$) ili brojanjem točaka u svakom području u obliku slova L ($1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$). Po Fubinijevom principu, ova dva izračuna moraju biti ista, što i potvrđuje rezultat.



Slika 1.1.

Iako smo ilustrirali identitet samo za slučaj $n = 7$, uzorak jasno vrijedi za svaki prirodni broj n. Na slici 1.2. uočavamo dva skupa točaka, takva da je onaj s desne strane nastao jednostavnim preuređivanjem točaka iz skupa s lijeve strane. Lako se uočava bijekcija između elemenata ova dva skupa (isto obojane točke su odgovarajuće). Prebrojavanjem redova u lijevom skupu, imamo $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ točaka, a n^2 u desnom skupu, i Cantorov princip potvrđuje rezultat.



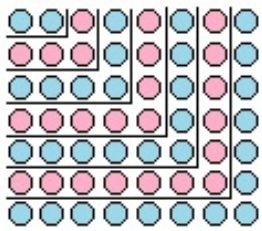
Slika 1.2.

1.2 Suma prirodnih brojeva

Ovdje također možemo koristiti navedena dva principa kako bi utvrdili klasičnu formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva,

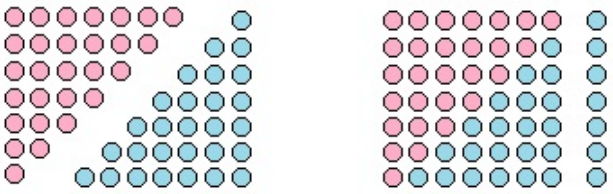
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ako na slici 1.1. s lijeve strane pridružimo stupac od n točaka, dobit ćemo skup točaka na slici 1.3.. Brojanje točaka u područjima u obliku slova L donosi $2 + 4 + \cdots + 2n$, dok množenje broja redova sa brojem stupaca daje $n(n+1)$, stoga Fubinijev princip (nakon dijeljenja s 2) donosi željeni rezultat. Uočimo da na slici 1.3. imamo sumu prvih $2n$ parnih brojeva, a želimo sumu prvih n prirodnih brojeva, pa zbog toga dijelimo sve sa 2.



Slika 1.3.

Alternativno, možemo uzeti dvije kopije od $1+2+\cdots+n$ i napraviti razmještaj točaka kakav je prikazan na slici 1.4. Skup s lijeve strane ima $2(1+2+\cdots+n)$ točaka, dok onaj s desne strane ima n^2+n točaka. Cantorov princip (opet uz dijeljenje s 2) donosi željeni rezultat (jer imamo isti broj točaka, samo u drugačijem razmještaju).



Slika 1.4.

Uređenje od $1+2+\cdots+n$ točaka u obliku trokuta s lijeve strane slike 1.4. objašnjava zašto se suma $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ često naziva n-ti trokutasti broj, što označavamo s T_n.

1.3 Alternirajuća suma kvadrata

Kvadratni i trokutasti brojevi primjeri su takozvanih figurativnih brojeva, budući da se mogu prikazati uređenjem objekata u geometrijske likove (kvadrate ili trokute). Postoje mnoge zanimljive relacije među figurativnim brojevima, navedimo jednu od njih koja se odnosi na alternirajuću sumu kvadratnih brojeva,

$$1^2-2^2=-3=-(1+2),$$

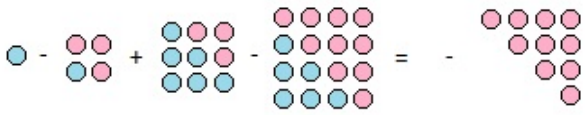
$$1^2-2^2+3^2=+6=+(1+2+3),$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2=-10=-(1+2+3+4)\quad\ldots$$

Dobivene sume su trokutasti brojevi, čija je opća formula oblika:

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}T_n.$$

Možemo ilustrirati ovaj uzorak za $n = 4$ pomoću točaka, koristeći bojanje točaka da bismo razlikovali točke koje nestaju u ovim operacijama.

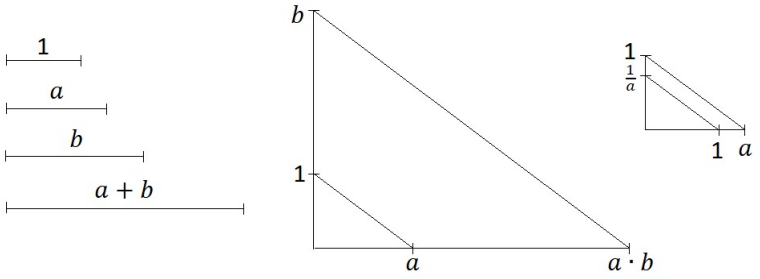


Slika 1.5.

2 Prikaz brojeva preko duljine dužina

Pozitivan broj a se na prirodan način može prikazati konstruiranjem dužine duljine a. Na taj način mnogi odnosi između pozitivnih brojeva mogu biti prikazani pomoću geometrijskih likova te veza između duljina stranica tih likova.

S dane dvije dužine duljina $a, b > 0$ i jediničnom dužinom na slici 2.1. dajemo prikaz nekih osnovnih veličina u ovisnosti o a i b.



Slika 2.1.

2.1 Nejednakosti između sredina

Najčešći način na koji pronalazimo prosjek dvaju brojeva a i b je njihova aritmetička sredina $\frac{a+b}{2}$, koja se uvijek nalazi između a i b. Ali postoje i druge srednje vrijednosti dvaju brojeva. Geometrijska sredina dva pozitivna broja a i b je $\sqrt{ab}$, koja također leži između a i b.

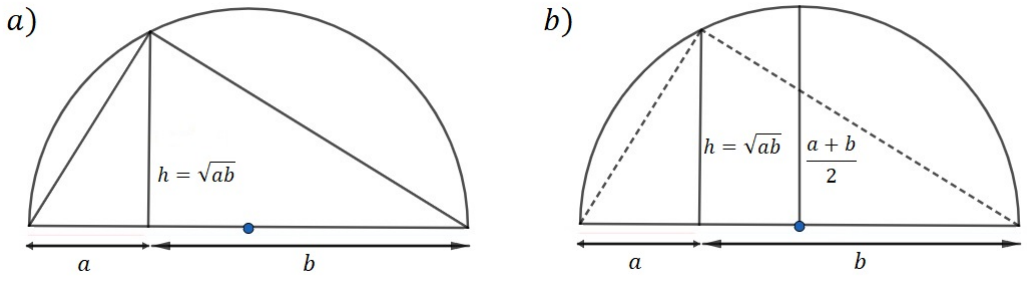
Postavlja se pitanje kako usporediti aritmetičku i geometrijsku sredinu. Slika 2.2. pokazuje da za $0 < a < b$ imamo $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.
Najprije uočimo:

i) trokut upisan u polukružnicu je pravokutan

ii) visina na hipotenuzu dijeli pravokutan trokut na dva manja pravokutna trokuta koja su slična početnom

iii) omjeri odgovarajućih stranica sličnih trokuta su jednaki.

Stoga, $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$ pa je $h = \sqrt{ab}$. Primjetimo da je najduža okomica sa polukružnice na njen dijametar upravo radijus te kružnice (slika 2.2.*b*)) pa uspoređujući dvije dane duljine dobivamo traženu nejednakost, odnosno $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.



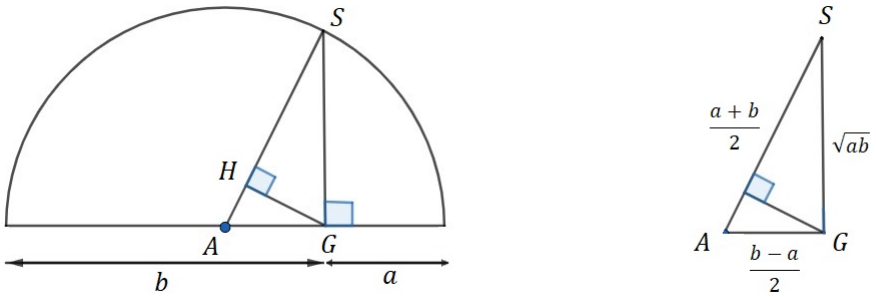
Slika 2.2.

Sljedeća srednja vrijednost koju ćemo promatrati je harmonijska sredina: za pozitivne brojeve a i b dana je sa $\frac{2ab}{a+b}$ i ona također leži između a i b. Pronalazimo ju u sljedećem primjeru: ako netko vozi D km brzinom a $\frac{km}{h}$ i vraća se D km brzinom b $\frac{km}{h}$, prosječna brzina povratnog puta je $\frac{2ab}{a+b}$ $\frac{km}{h}$. Do toga dolazimo na sljedeći način:

$$prosječna\,brzina\,povratnog\,puta = \frac{ukupna\,prijeđena\,udaljenost}{ukupno\,potrošeno\,vrijeme} =$$

$$\frac{2D}{\frac{D}{a}+\frac{D}{b}} = \frac{2D}{\frac{aD+bD}{ab}} = \frac{2Dab}{D(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Harmonijska sredina manja je od geometrijske i aritmetičke za $0 < a < b$, što prikazuje slika 2.3., a dokaz se pripisuje Pappusu iz Aleksandrije (oko 320. pr.Kr.). Nejednakosti su rezultat usporedbi duljina stranica sličnih trokuta.



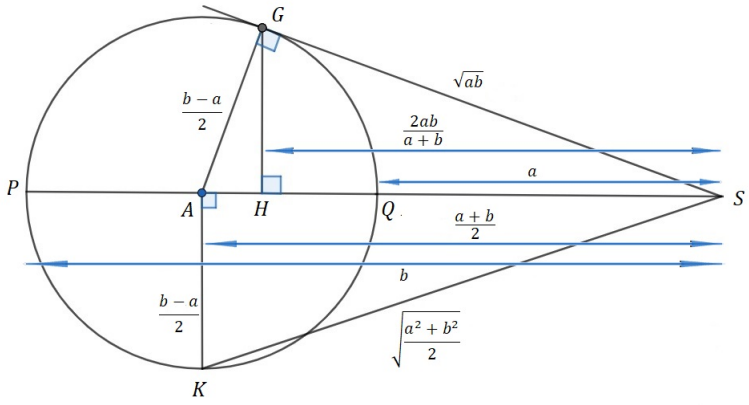
Slika 2.3.

Iz slike 2.3. vidimo:

$$|AS| = \frac{a+b}{2}, \qquad |GS| = \sqrt{ab}, \qquad |HS| = \frac{2ab}{a+b}, \qquad |AS| \geq |GS| \geq |HS|$$

gdje prva jednakost predstavlja radijus polukružnice, druga jednakost slijedi iz slike 2.2., a treća jednakost vrijedi jer je $|AG| = r - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$ pa iz sličnosti trokuta $\triangle HSG$ i $\triangle GSA$ slijedi $\frac{|HS|}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow |HS| = \frac{2ab}{a+b}$.

Posljednja srednja vrijednost koju ćemo uzeti u obzir je kvadratna sredina, koja je za pozitivne brojeve a i b dana s $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Na primjer, za dana dva kvadrata sa duljinama stranica a i b, stranica kvadrata čija je površina aritmetička sredina od a^2 i b^2 je kvadratna sredina od a i b. Kvadratna sredina veća je od svih prethodno spomenutih.



Slika 2.4.

Uspoređujući duljine stranica sličnih trokuta i primjenom Pitagorinog teorema na slici 2.4., zaključujemo da vrijedi

$$0 < a < b, \qquad |QS| = a, \qquad |PS| = b, \qquad |HS| < |GS| < |AS| < |KS|,$$

$$tj. \qquad a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b.$$

Dijametar kružnice iznosi $b-a$ pa je radijus $\frac{b-a}{2}$.
Slijedi da je $|AS| = a + r = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.
Ako sada primjenimo Pitagorin teorem na trokut $\triangle KAS$ dobijemo

$$|KS| = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2 - 2ab + a^2 + a^2 + 2ab + b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Primjenimo li Pitagorin teorem na trokut $\triangle AGS$ imamo

$$|GS| = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}} = \sqrt{ab}.$$

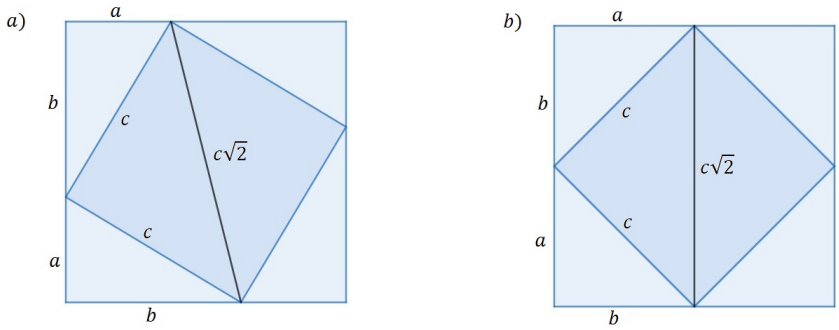
Na kraju iz sličnosti trokuta $\triangle AGS$ i $\triangle GHS$ slijedi $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{|HS|}{\sqrt{ab}} \Rightarrow |HS| = \frac{2ab}{a+b}$.
I sada uspoređujući dobivene duljine dužina dolazimo do očekivanih nejednakosti srednjih vrijednosti.

2.2 Pitagorina nejednakost

U ovom odlomku bit će predstavljen slikovni dokaz jednostavne dvostruke nejednakosti: Za sve $a, b > 0$,

$$\sqrt{a^2+b^2} < a+b \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

Na slici 2.5.a) predstavljamo a i b kao katete pravokutnog trokuta hipotenuze $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Iz nejednakosti trokuta, $c < a+b$, slijedi prva nejednakost. Za drugu, opažamo da je stranica kvadrata duljine $a+b$ manja ili jednaka duljini dijagonale $c\sqrt{2}$ kvadrata stranice c. Slika 2.5.b) pokazuje da jednakost $a+b = c\sqrt{2}$ vrijedi u slučaju ako je $a = b$.

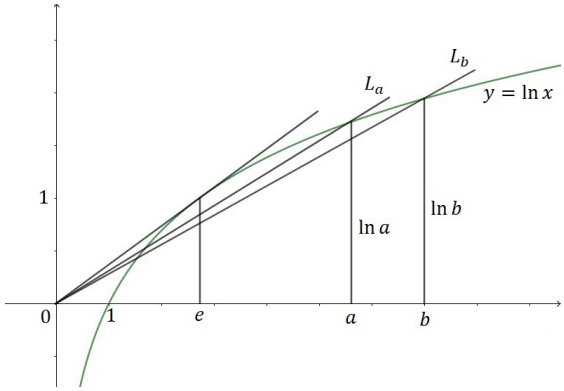


Slika 2.5.

2.3 Brojevi kao vrijednosti funkcija

Promatramo graf nenegativne funkcije f. U koordinatnom sustavu povucimo dužinu s krajnjim točkama $(a, 0)$ i $(a, f(a))$ koja predstavlja broj $f(a)$. Preko ilustracije ćemo pokazati da za $e \leq a < b$ vrijedi $a^b > b^a$. Ako na slici 2.6. s α označimo kut koji zatvaraju x-os i polupravac L_a, a s β kut koji zatvaraju x-os i polupravac L_b, vidimo da je nagib polupravca L_a (tj. $\frac{\ln a}{a}$) veći od nagiba polupravca L_b (tj. $\frac{\ln b}{b}$), tj. $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$ iz čega slijedi da je $\alpha > \beta$ što je istina i dovodi nas do željenog rezultata:

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta\\ \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}\\ b\cdot\ln a > a\cdot\ln b\\ \ln a^b > \ln b^a\\ a^b > b^a.\end{gathered}$$

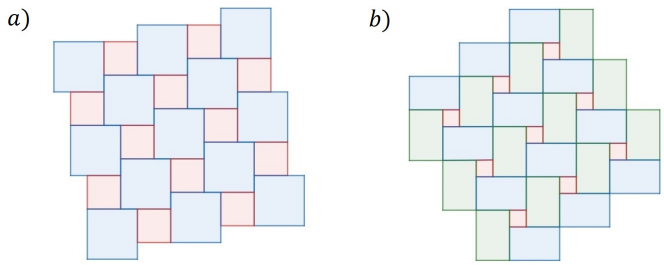


Slika 2.6.

Posebno, ako je $a = e$ i $b = \pi$ imamo $e^{\pi} > \pi^{e}$.

3 Popločavanje ravnine

Popločavanje ravnine je prebrojiva familija zatvorenih skupova (pločica) koje prekrivaju ravninu bez praznina ili preklapanja. Na slici 3.1. vidimo dva primjera, dio ravnine sastavljen od pločica oblika kvadrata dvaju različitih dimenzija pod a) te dio ravnine sastavljen od pločica oblika pravokutnika i kvadrata pod b).

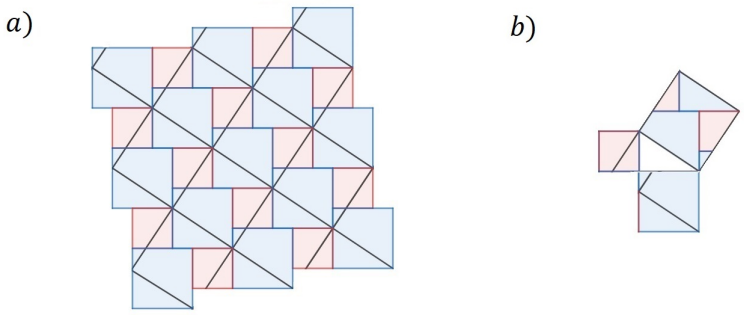


Slika 3.1.

Popločavanja poput ovih iznad koristila su se stoljećima u kućama, crkvama, palačama, itd. Ako ih preklopimo s drugom popločenom prozirnijom mrežom, možemo konstruirati vizualni prikaz raznih matematičkih teorema. Počet ćemo popločavanjem sa slike 3.1., što će dovesti do nekoliko dokaza Pitagorina teorema.

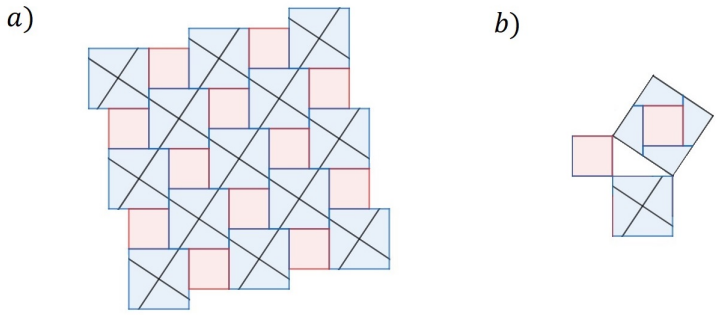
3.1 Pitagorino popločavanje

Počeli smo popločavanjem sa slike 3.1. te preklapanjem mreže prozirnim kvadratnim pločicama, kao što je prikazano na slici 3.2.a). Primijetimo da je stranica kvadrata iz preklapanja hipotenuza pravokutnog trokuta, a katete tog trokuta čine stranica manjeg i stranica većeg kvadrata u originalnom popločavanju. Kao što vidimo na slici 3.2.b), popločavanje i preklapanje generiraju dokaz Pitagorinog teorema disekcijom, gdje se vidi da bi kvadrati nad katetama trokuta trebali biti rastavljeni i ponovno sastavljeni u obliku kvadrata nad hipotenuzom. Taj dokaz obično se pripisuje Annairiziju iz Arabije (oko 900. godine).



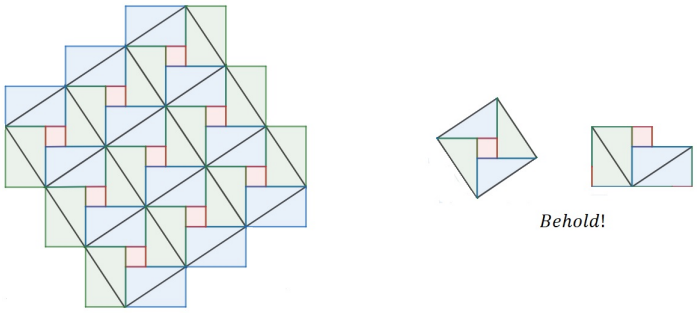
Slika 3.2.

Ako premjestimo prekrivajuću mrežu kvadrata tako da se vrhovi prekrivajućih kvadrata podudaraju sa središtima većih kvadrata u originalnom popločavanju, dobivamo drugi dokaz Pitagorina teorema disekcijom. Ovaj dokaz, sa slike 3.3, često se pripisuje amaterskom matematičaru Henryju Perigalu (1801. – 1899.). Bilo koji drugi položaj prekrivajuće mreže daje nam drugi dokaz - doista, neprebrojivo je mnogo različitih dokaza Pitagorina teorema disekcijom konstruiranog popločavanjem sa slike 3.1.*a*)!



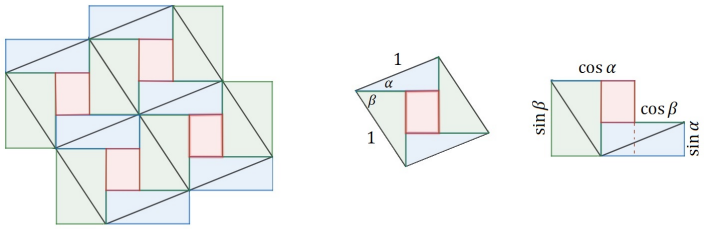
Slika 3.3.

Popločavanje sa slike 3.1.*b*) s preklapajućim kvadratnim pločicama čije su stranice dijagonale pravokutnika iz originalnog popločavanja, osnova je za dokaz Pitagorinog teorema koji se pripisuje Bhaskari (12. st.), a ilustriran je na slici 3.4.



Slika 3.4.

Ako popločimo ravninu sa uzorkom sličnim kao na slici 3.1.*b*), ali koristeći tri različita pravokutnika od kojih dva imaju dijagonale duljine 1 i preklopimo ju mrežom rombova, dobivamo dokaz trigonometrijskog identiteta sinusa sume.



Slika 3.5.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

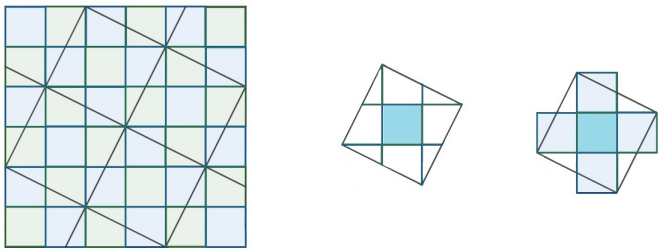
Primjenimo li formulu za površinu romba danu s $P = a^2 \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \sin\beta$, gdje je a duljina stranice, a α i β kutovi danog romba, dobivamo $P = 1^2 \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$. Budući da je hipotenuza svakog pravokutnog trokuta jednaka 1, lako dobivamo duljine kateta s obzirom na kutove α i β. Promotrimo površine pravokutnika $P_1 = \sin\alpha \cdot \cos\beta$ te $P_2 = \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Ukoliko ih zbrojimo, razmještanjem određenih trokuta, dobit ćemo površinu jednaku zadanom rombu, $P = P_1 + P_2$, odnosno $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

3.2 Kartezijevo popločavanje

Popločavanje ravnine kvadratima jednakih dimenzija asocira nas na običan list s kvadratićima a zovemo ga Kartezijevo popločavanje (općenito, kada sve pločice

za popločavanje imaju jednake dimenzije i oblik, kažemo da je to popločavanje *monoedralno*). Ako preklopimo našu mrežu istom mrežom kao na slikama 3.2., 3.3. i 3.4., tj. prozirnijim kvadratnim pločicama, dobivamo dokaz sljedećeg teorema, što je vidljivo iz slike 3.6.

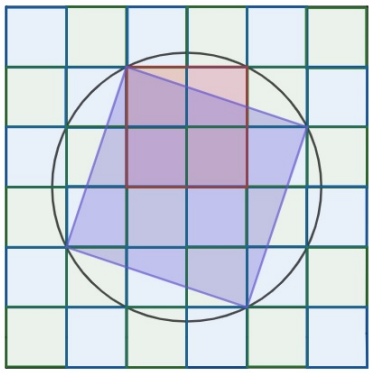
Teorem 1. *Ako su povučene dužine iz vrhova kvadrata do središta susjednih stranica, onda je površina manjeg kvadrata jednaka petini površine dobivenog kvadrata.*



Slika 3.6.

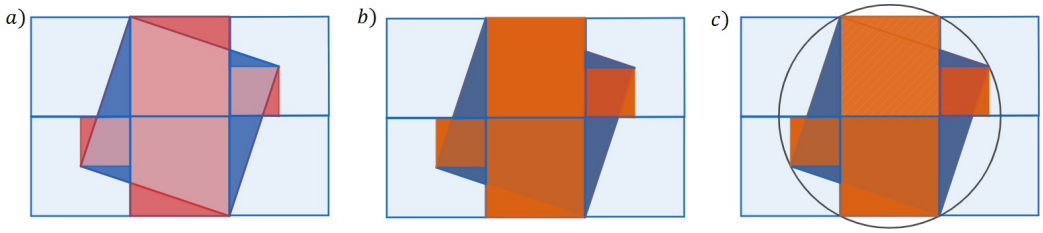
Drugačije prekrivanje (u ovom slučaju nekvadratno popločavanje) Kartezijeve mreže daje dokaz sljedećeg teorema, a prikazano je na slici 3.7..

Teorem 2. *Površina kvadrata upisanog u polukružnicu jednaka je $\frac{2}{5}$ površine kvadrata upisanog u kružnicu jednakog radijusa.*



Slika 3.7.

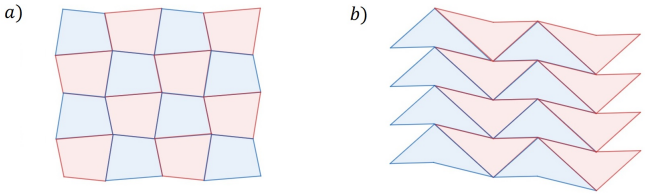
Slijedimo li korake sa slike 3.8., doći ćemo do obrazloženja. Premještanjem plavih trokuta na mjesto tamnocrvenih sa slike 3.8.*a*) dobit ćemo narančasti lik sa slike 3.8.*b*) koji je površinom jednak kvadratu upisanom u kružnicu. Na taj način lakše je usporediti površine danih kvadrata.



Slika 3.8.

3.3 Četverokutna popločavanja

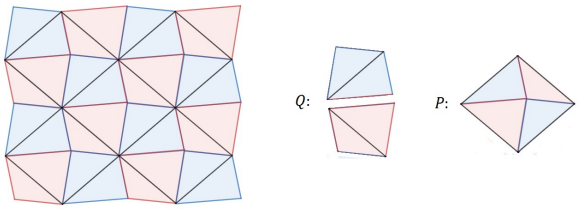
Popločavanja koja smo do sada uzimali u obzir sastojala su se od kvadrata i pravokutnika. Međutim, ako kopiramo bilo koje četverokute, konkavne ili konveksne, također ćemo dobiti monoedralno popločavanje ravnine, kao što vidimo na slici 3.9.



Slika 3.9.

Prekrivanjem mreže sa slike 3.9.*a*) prozirnim pločicama oblika paralelograma, prikazano na slici 3.10. može se dokazati sljedeći teorem:

Teorem 3. *Površina proizvoljnog konveksnog četverokuta Q jednaka je polovini površine paralelograma P čije su stranice paralelne dijagonalama od Q te po dužini jednake dijagonalama od Q.*



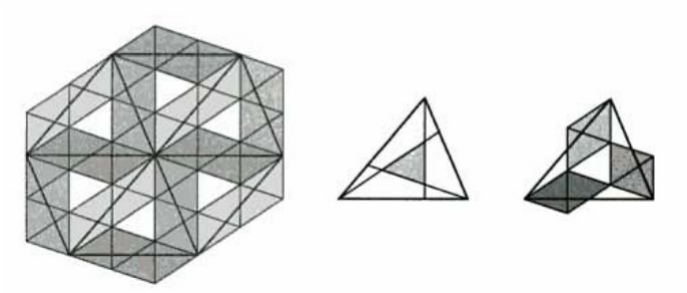
Slika 3.10.

Ovaj teorem pruža možda najlakši način za računanje površine četverokuta općenito. Zapravo, teorem također vrijedi za konkavne četverokute iako se jedna dijagonala u tom slučaju nalazi izvan četverokuta.

3.4 Trokutasta popločavanja

Upravo kao sa četverokutima, mreža kopija proizvoljnog trokuta također će činiti monoedralno popločavanje ravnine. Sljedeći teorem je analogon Teorema 1 iz poglavlja 3.2., a njegov dokaz ilustriran je na slici 3.11. sa trokutastim popločavanjem prekrivenim prozirnom trokutastom mrežom.

Teorem 4. *Ako je u trokutu točka na svakoj stranici koja se nalazi na trećini stranice spojena sa nasuprotnim vrhom, rezultirajući trokut površinom je jednak sedmini originalnog trokuta.*



Slika 3.11.

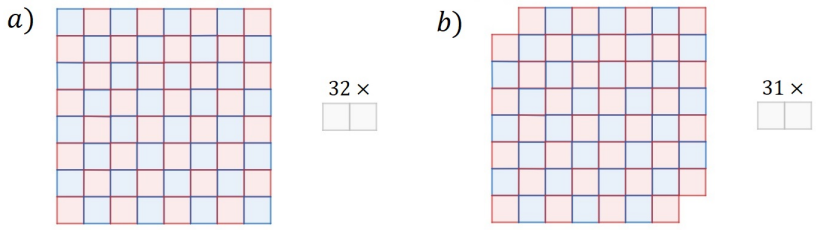
4 Uvođenje boja

Često uvodimo boje u matematičke slike zbog estetskih razloga ili štoviše da bismo mogli razlikovati pojedine dijelove slike. U ovom poglavlju prikazat ćemo korištenje boja pomoću kojeg ćemo dokazivati neke tvrdnje. Ova ideja posebno je korisna u radu s popločavanjima iz prethodnog poglavlja.

4.1 Domino popločavanje

Lako se vidi da standardnu 8×8 šahovnicu možemo popločiti koristeći 32 domino pločice dimenzije 1×2 (tj. smjestiti domino pločice na šahovnicu tako da se ne preklapaju i da je svaki kvadrat prekriven), budući da svaki domino prekriva točno dva susjedna kvadrata dane šahovnice. Doista, svaka $2n \times 2n$ šahovnica može biti popločena na taj način.

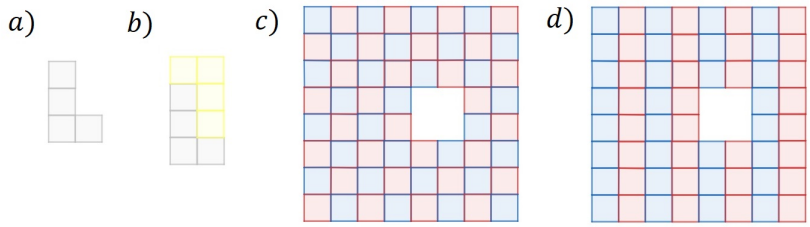
No što ako uklonimo prvi i zadnji kvadrat 8×8 šahovnice, kao što je prikazano na slici 4.1.*b*), može li rezultirajuća nepotpuna šahovnica biti popločena s 31 domino pločicom? Odgovor je ne, budući da će 31 domino pločica prekriti točno 31 plavi i 31 rozi kvadrat, a naša nepotpuna šahovnica ima 32 roza i 30 plavih kvadrata (oba uklonjena kvadrata bila su plave boje).



Slika 4.1.

4.2 L-tetromino popločavanje

L-tetromino je pločica oblika slova L sastavljena od 4 kvadrata jednakih dimenzija kako je prikazano na slici 4.2.*a*). Očito je da 8×8 šahovnica može biti popločana sa 16 tetromina, budući da dva L-tetromina prekrivaju 2×4 ploču, što se vidi na slici 4.2.*b*). No ukoliko uklonimo 2×2 ploču bilo gdje u šahovnici (kao na slici 4.2.*c*)), može li ova nepotpuna šahovnica biti popločena s 15 L-tetromina?

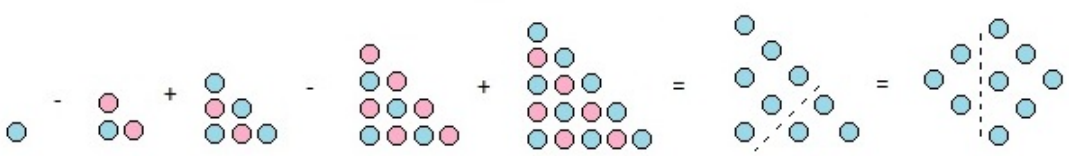


Slika 4.2.

U standardno obojanoj šahovnici, svaki L-tetromino, bez obzira na orijentaciju, prekriva 2 plava i 2 roza kvadrata, dok nepotpuna šahovnica ima po 30 kvadrata od obje boje, stoga ne možemo doći do kontradikcije kao na ranije opisani način, ali nemamo niti dokaz da nepotpuna šahovnica *može* biti popločena. Međutim, pretpostavimo da obojamo ploču kao na slici 4.2.*d*). Opet imamo po 30 plavih i 30 rozih kvadrata, ali svaki L-tetromino, bez obzira na orijentaciju, prekrit će jedan plavi i tri roza kvadrata (klasa A) ili jedan rozi i tri plava kvadrata (klasa B). Ako je popločavanje moguće, imat ćemo x L-tetromina klase A i y L-tetromina klase B, gdje je $4x + 4y = 60$ (budući da svaki od 60 kvadrata treba biti prekriven, a svaki L-tetromino sadrži 4 kvadrata) i $3x + y = 30$ (ako pretpostavimo da će svaki od 30 rozih kvadrata biti prekriven). No jedinstveno rješenje ovog sustava jednadžbi je $x = y = 7.5$, tj. ako želimo prekriti nepotpunu šahovnicu sa slike 4.2. sa 15 L-tetromina, morali bi koristiti 7.5 L-tetromina klase A i isto toliko klase B, a to je nemoguće jer u obzir uzimamo samo cijele L-tetromino pločice. Zbog toga nepotpuna šahovnica sa slike 4.2. ne može biti prekrivena sa 15 L-tetromina.

4.3 Alternirajuća suma trokutastih brojeva

U poglavlju 1.3. koristili smo boje da bismo pokazali da je alternirajuća suma kvadrata jednaka trokutastom broju. Na sličan način, koristit ćemo boje kako bismo pokazali da je alternirajuća suma trokutastih brojeva kvadrat, tj. ako je $T_k = 1 + 2 + \cdots + k$ onda imamo $T_1 - T_2 + T_3 - \cdots + T_{2n-1} = n^2$.

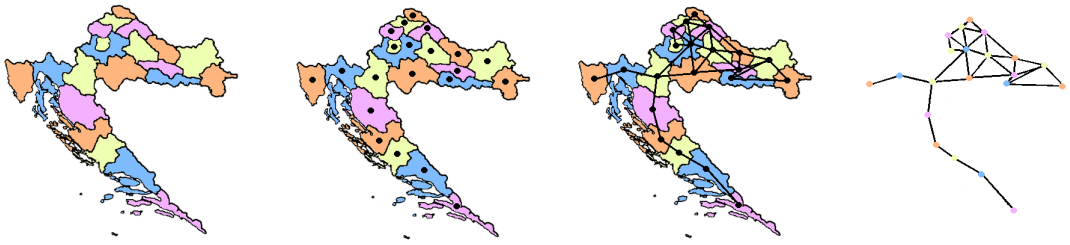


Slika 4.3.

Oduzimamo li točke danih trokutastih brojeva dijagonalno, uočimo da će se sve roze poništiti, a od plavih će ostati samo tri dijagonale. Pravilnim razmještanjem dobivenog trokuta formiramo kvadrat te uočimo da je dobiveni kvadrat dimenzije $n \times n$.

4.4 U prostoru četiri boje nisu dovoljne

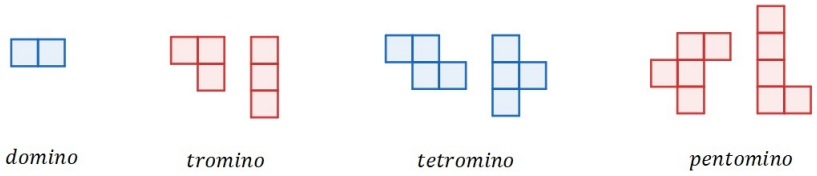
Ovo poglavlje započet ćemo uvođenjem pojma grafa iz područja kombinatorike. Pojednostavljeno rečeno, graf je familija točaka, koje se zovu vrhovi, zajedno sa spojnicama među vrhovima, koje se zovu bridovi. Pravilno bojenje grafa je pridruživanje boja nekom skupu vrhova tako da je svakom vrhu pridružena jedna boja, a svaki par susjednih vrhova obojen je različitim bojama. Tada je kromatski broj grafa najmanji broj boja k koji se može upotrijebiti tako da graf bude k-obojiv, tj. da se u bojenju upotrijebi k boja. Na slici 4.4. prikazan je 4-obojiv graf čiji vrhovi predstavljaju hrvatske županije, tj. kromatski broj toga grafa je četiri.



Slika 4.4.

Jedan od najpoznatijih teorema vezanih uz boje je takozvani *Teorem četiri boje*, koji tvrdi da se svaki planaran graf može obojiti koristeći četiri boje, tj. kromatski broj grafa koji se može prikazati u ravnini na način da mu se bridovi sijeku jedino u vrhovima je četiri. Dakle, četiri ili manje boja dovoljno je da bi se obojala zemljopisna karta u ravnini tako da susjedne države budu obojane različitim bojama. Ovaj teorem dokazali su dvojica matematičara Kenneth Appel i Wolfgang Haken 1976. godine nakon mnogobrojnih pokušaja drugih matematičara tijekom stoljeća.

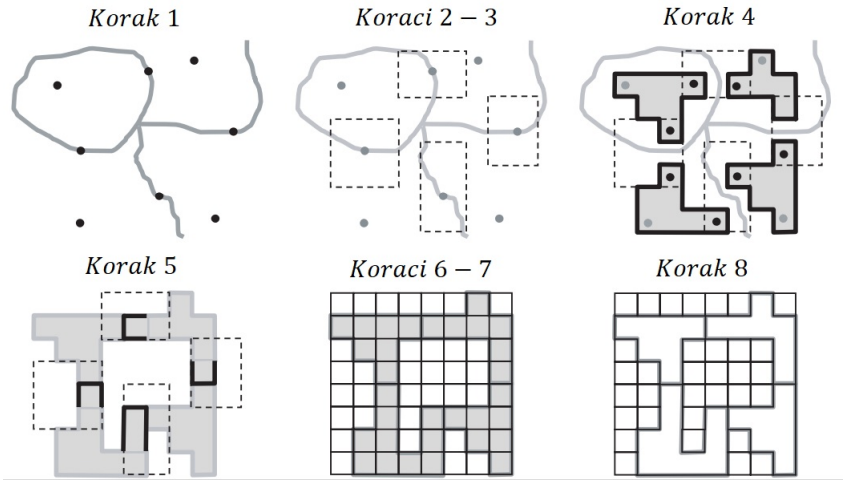
Dokaz ovog teorema prvi je dokaz koji se nije mogao riješiti bez korištenja računala. Spomenut ćemo samo dio koji se koristi u dokazu, a dotiće se takozvanih poliomina. Poliomino je geometrijski lik sastavljen od nekoliko međusobno povezanih jednakih kvadrata rub uz rub. Dva spojena kvadrata predstavljaju svima poznati domino, tri tromino, četiri tetromino i tako redom. Na slici 4.5. prikazane su neke vrste poliomina.



Slika 4.5.

Uočimo da smo se već susretali sa poliominima u ovom poglavlju kada smo popločavali šahovnicu sa dominom i tetrominom. Također primjetimo da je poznata igrica tetris bazirana na temelju matematičkog pojma tetromina.

Slijedeći korake sa slike 4.6 vidjet ćemo upotrebu poliomina u dokazu navedenog teorema.

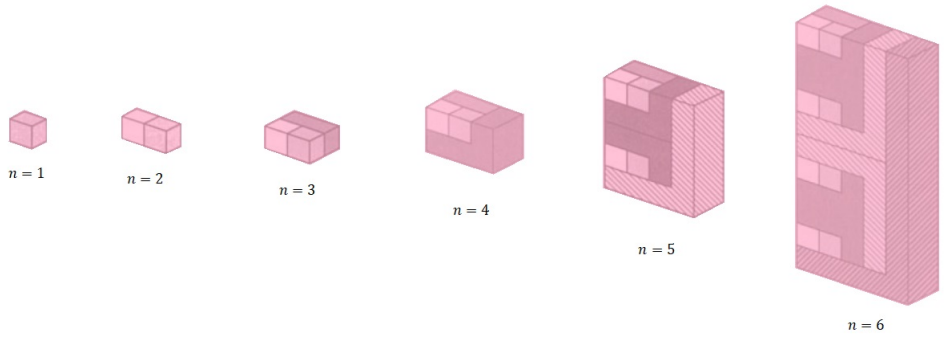


Slika 4.6.

Imamo 4 susjedne regije. Za svake dvije susjedne regije treba izabrati točku na njihovoj granici (korak 1), zatim odabrati disjunktne okoline tih točaka (korak 2) i smjestiti ih u pravokutnu rešetku (korak 3). Sada se odabere jednostavna aproksimacija svake regije poliominom tako da svaki poliomino siječe granične pravokutne rešetke (korak 4) i zatim produžimo poliomine tako da se diraju (korak 5). Odaberemo rešetku koja pokriva sve poliomine (korak 6) i konstruiramo odgovarajuću hipermapu poliomina (korak 7) te konstruiramo obrise svakog poliomina (korak 8). Na taj su način iskorišteni poliomini u dokazu.

Što se događa u većim dimenzijama? Ako je četiri najmanji broj boja potreban za bojanje karte u ravnini, koji bi bio najmanji takav broj boja u prostoru? Sljedeći

niz slika pokazuje da nijedan konačan broj boja nije dovoljan da bi se obojala trodimenzionalna karta.



Slika 4.7.

5 Genijalnost u 3D

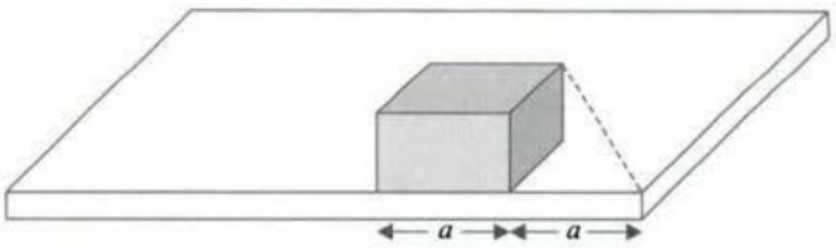
Cilj ovog poglavlja je spomenuti konkretne primjere da bismo pokazali kako neki geometrijski problemi mogu biti brzo riješeni u tri dimenzije korištenjem genijalnih *hands-on* strategija, dok bi bilo gotovo nemoguće ili jako iscrpljujuće doći do rješenja tog istog problema na neki od tradicionalnih načina.

5.1 Sve je lakše u tri dimenzije

Započet ćemo sa skupom problema koji dovode do razvoja trodimenzionalnih strategija.

Problem 1 *Pretpostavimo da sjedimo za stolom na kojemu se nalazi kutija nepoznatih dimenzija i metar (krojački). Na koji se način može najlakše odrediti duljina dijagonale kutije?*

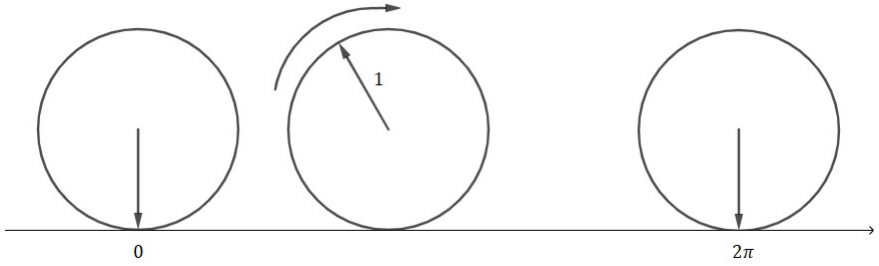
Ključ rješenja je u stolu! Postavimo kutiju na rub stola i koristeći centimetarsku vrpcu premjestimo kutiju duž jedne strane stola na udaljenost od ruba stola onoliku kolika je duljina stranice koja leži na stolu. Sada direktno možemo izmjeriti dijagonalu u "praznom prostoru kutije" (na mjestu gdje je kutija bila u početnom položaju) od vrha stola do odgovarajućeg vrha kutije.



Slika 5.1.

Problem 2 *Je li moguće konstruirati dužinu duljine točno 2π?*

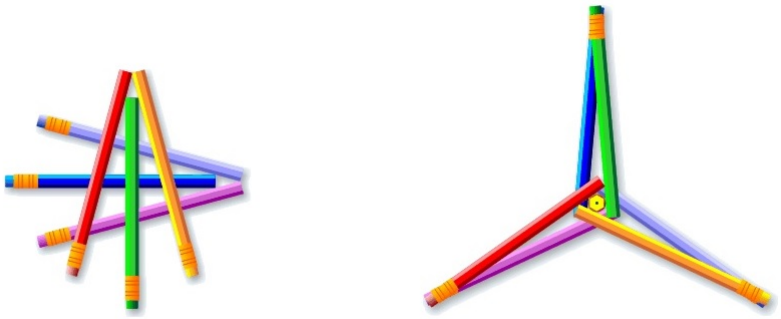
Odgovor je da, ako imamo prikladna trodimenzionalna tijela! Uzet ćemo valjak i odaberimo za jediničnu mjeru njegov radijus. Kotrljanjem valjka za jedan potpuni obrtaj po ravnini dobivamo dužinu duljine 2π (tj. opseg baze $2r\pi = 2\pi$). Ovo je, naravno, nemoguće učiniti samo sa ravnalom i šestarom u ravnini, dakle potreban nam je prostor.



Slika 5.2.

Problem 3 *Uzmimo* 6 *olovki jednakih dužina. Možemo li ih rasporediti tako da svaka olovka dira sve ostale? A što ako imamo* 7 *olovki?*

Odgovor za oba problema je da, i na slici vidimo rješenje. Primjetimo da je u slučaju sa 7 olovki jedna smještena vertikalno u središtu.

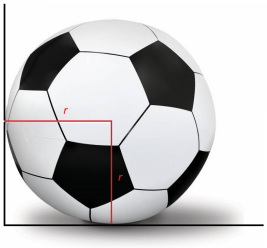


Slika 5.3.

Na slici je prikazan samo jedan od više načina, no odlučimo li takav problem riješiti u nastavi, učenicima treba dati slobodu da sami probaju doći do rješenja i uvjerit ćemo se da postoji mnogo različitih rješenja. Ako dopustimo da olovke budu različitih dužina, možemo li rasporediti 8 olovki tako da svaka dodiruje sve ostale? Odgovor je također da.

Problem 4 *Pretpostavimo da u razredu imamo loptu (košarkašku, nogometnu, biljarsku ili neku drugu) i ravnalo. Kako bi precizno izmjerili radijus lopte?*

U razredu možemo pronaći neku kredu te njom označimo proizvoljno mjesto na površini lopte. Stavimo loptu uza zid tako da mjesto na lopti koje je označeno kredom dira zid te zid na tom mjestu također obilježimo kredom. Sada koristeći ravnalo samo izmjerimo visinu označene točke na zidu i dobijemo radijus lopte.



Slika 5.4.

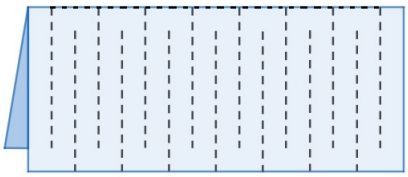
5.2 Preklapanje i rezanje papira

Konstrukcija geometrijskih likova rezanjem i preklapanjem papira česta je aktivnost koja je nastala neposredno nakon pojave papira. Možda su najelegantnije konstrukcije one zasnovane na japanskoj tradiciji poznatoj kao origami.

S pedagoškog gledišta, papirnate konstrukcije često mogu pobuditi interes za proučavanje matematike. U ovom poglavlju predstavit ćemo neke iznenađujuće primjere zasnovane na rezanju i preklapanju papira.

Problem 5 *Uzmimo list papira i škare. Može li se izrezati rupa od papira dovoljno velika da se može proći kroz nju?*

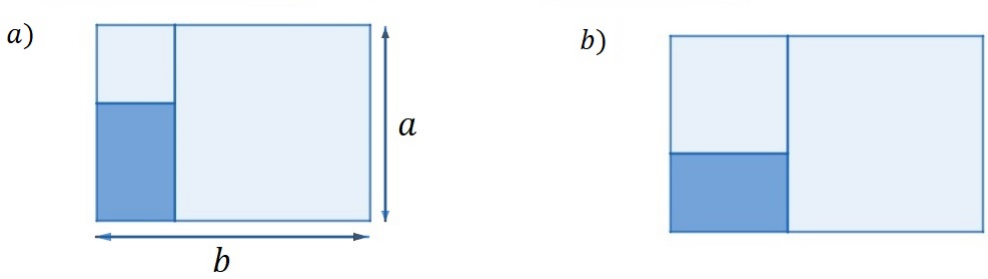
Očito je da ne postoji način na koji bi mogli proći kroz "standardnu rupu" na papiru. No ako shvatimo *rupu* kao prostor okružen neprekinutim dijelovima lista papira, onda naš izazov ima beskonačno mnogo rješenja. Jedno je sljedeće:



Slika 5.5.

Papir se prepolovi i izreže po isprekidanim linijama (na obje polovice preklopljenog papira) kao što je naznačeno na slici 5.5. Kada se papir rastvori, dobit ćemo veliku rupu kroz koju ćemo zaista moći proći.

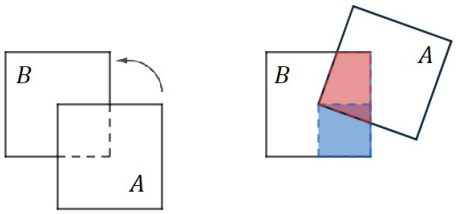
Problem 6 *Uzmimo list papira pravokutnog oblika i presavijanjem papira iz jednog vrha označimo najveći mogući kvadrat. Isto to napravimo sa preostalim dijelom pravokutnog oblika. Tako dobijemo drugi manji kvadrat i pravokutan dio. Može li se to napraviti sa bilo kojim pravokutnikom? Kakav mora biti oblik početnog pravokutnika tako da mu konačan bude sličan?*



Slika 5.6.

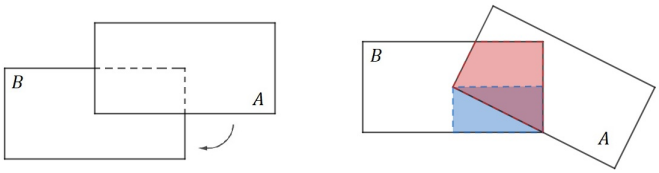
Ako su dimenzije početnog pravokutnika $a \times b$, gdje je $b > a$, onda su kvadrati dimenzija a i $b-a$ pa su dimenzije istaknutog pravokutnika $(2a-b) \times (b-a)$. Prema tome je konstrukcija moguća jedino kada je $b < 2a$. Ako je istaknuti pravokutnik suprotne orijentacije u usporedbi s početnim (kao na slici 5.6.a)) onda je $\frac{2a-b}{b-a} = \frac{b}{a}$ pa je stoga $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$. Ako je istaknuti pravoktnik jednake orijentacije kao početni (kao na slici 5.6.b)) slijedi $\frac{b-a}{2a-b} = \frac{b}{a}$ pa je stoga $\frac{b}{a} = \phi \simeq 1.618$ omjer zlatnog reza. Dakle, početni pravokutnik mora imati stranice u omjeru zlatnog reza ili u omjeru $\sqrt{2}$ da bi mu konačan bio sličan.

Problem 7 *Počinjemo s dva identična lista papira kvadratnog oblika, A i B. Onaj gornji, A, prekriva $\frac{1}{4}$ površine od B. Ako rotiramo A oko centra od B za bilo koji kut, koliki dio od B će biti prekriven sa A?*



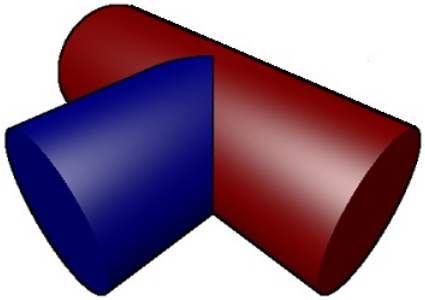
Slika 5.7.

Dio papira B koji je prekriven papirom A ostat će konstantno $\frac{1}{4}$, kao što se može vidjeti uspoređujući površine obojanih dijelova. Slika 5.8. pokazuje da ne bismo mogli zaključiti isto ako bismo umjesto kvadrata koristili identične pravokutnike.



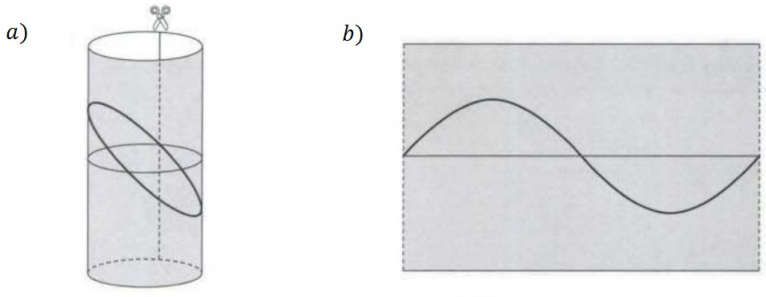
Slika 5.8.

Problem 8 *Pretpostavimo da imamo dva identična lista papira. Od jednog spojimo ljepilom paralelne duže strane tako da dobijemo valjak. Želimo to učiniti i s drugim listom papira no prije nego što to napravimo želimo napraviti rupu u tom papiru tako da se u nju može umetnuti prvi papir (oblika valjka) da bismo dobili trodimenzionalni oblik koji podsjeća na slovo "T". Pronađite prikladan oblik rupe kakvu trebamo napraviti. Dva valjka spojena su kao na slici* 5.9.



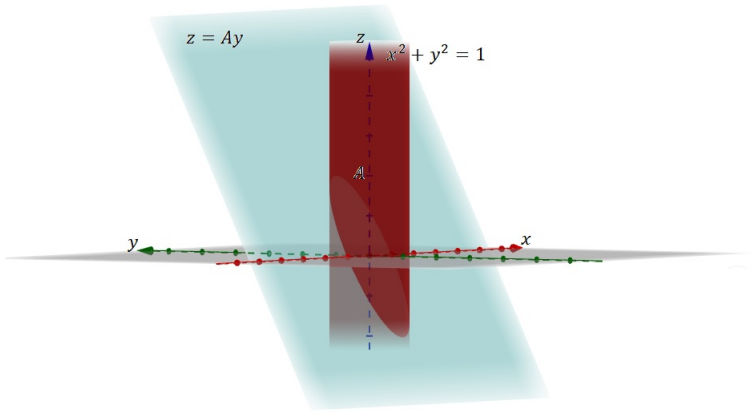
Slika 5.9.

Ako presječemo kružni valjak ravninom (koja također siječe os valjka), u presjeku ćemo dobiti elipsu, kao što je prikazano na slici 5.10.*a*). Presjek na plaštu valjka tada ima oblik sinusoide kao na slici 5.10.*b*).



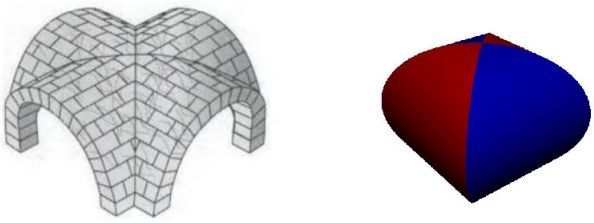
Slika 5.10.

U xyz-koordinatama jednadžba kružnog valjka je $x^2 + y^2 = 1$ (ako uzmemo da je radijus baze jednak 1), a jednadžba ravnine je $z = Ay$, tj. ravnina prolazi kroz ishodište i sadrži os x, a os z siječe u točki A. Odnos navedene dvije jednadžbe bolje se može vizualizirati pomoću slike 5.11. Stoga je parametarski oblik krivulje u presjeku $(\cos\theta, \sin\theta, A\sin\theta)$ za $\theta \in [0, 2\pi]$. Plašt valjka ekvivalentan je krivulji koju promatramo u O-z ravnini (ravnini kroz ishodište koja sadrži os z), pa je prema tome jednadžba krivulje $z = A\sin\theta$. Dakle, zaista se radi o sinusoidi.



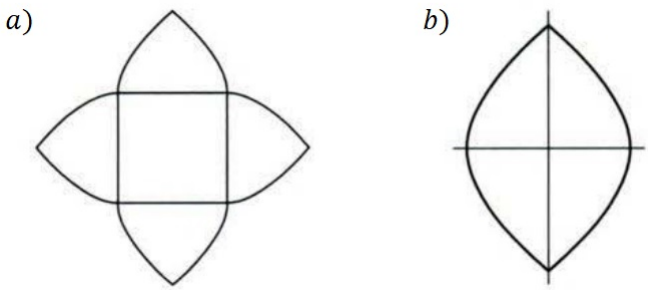
Slika 5.11.

S lijeve strane slike 5.12. vidimo klasičan oblik iz arhitekture poznat kao križni svod, a čini ga presjek dva identična poluvaljka čije su osi međusobno okomite. S desne strane nacrtan je dio svoda u kojem su oba valjka (odnosno presjek oba valjka). Kako bi pravilno konstruirali ovakav model od papira, koristit ćemo prethodna razmatranja o eliptičnom presjeku i sinusoidi.



Slika 5.12.

Na slici 5.13.*a*) dan je predložak za presavijanje papira kako bi dobili model dijela ispod kružnog svoda. Koristi se dio sinusoide i njegova simetrija s obzirom na vertikalnu os sa slike 5.13.*b*).



Slika 5.13.

Zaključak

U ovom radu vidjeli smo razne načine na koje mogu biti prikazani prirodni brojevi. Osim tvrdnji koje su preko toga dokazane u radu, postoje mnoge druge tvrdnje koje se mogu dokazati na sličan način. Takve zadatke bilo bi dobro ponekad upotrijebiti u nastavi matematike.

Popločavanje ravnine drugi je način za dokazivanje matematičkih tvrdnji s kojim smo se sreli u radu. Pomoću njega dokazivali smo Pitagorin teorem te odnose među površinama nekih likova.

U dokaz matematičkih tvrdnji uveli smo korištenje boja i vidjeli da nam je na taj način puno lakše riješiti probleme koji sadrže takozvane *poliomine*. Također smo se osvrnuli na dokaz Teorema četiri boje.

Da je vizualizacija potrebna za bolje razumjevanje dokaza uvjerili smo se u prva četiri poglavlja te smo to još potvrdili i u zadnjem poglavlju kada smo vidjeli da neki problemi u ravnini postaju lako rješivi zadaci ako se na njih gleda iz prostora.

Literatura

[1] C. Alsina, R.B. Nelsen, *Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, The Mathematical Association of America, 2006.

[2] G. Gonthier, *Formal Proof—The Four Color Theorem*, Notices of the AMS, **55**(2008), 1387–1388

Sažetak

U ovom diplomskom radu prikazani su dokazi nekih matematičkih tvrdnji pomoću slika, preko kojih bi se učenicima u osnovnim pa i u srednjim školama mogao probuditi interes za proučavanje matematike. Počinjemo prikazivanjem brojeva preko poznatih objekata te preko duljine dužina, a zatim upoznavajući se sa popločavanjima ravnine u kojima uvodimo neke vrste *poliomina*, dotićemo se dokaza Teorema četiri boje. Za kraj odlazimo u tri dimenzije, odnosno rješavamo probleme koji se u ravnini čine nerješivi, no pogledamo li izvan okvira, tj. u prostoru, vrlo lako dolazimo do rješenja.

Ključne riječi: figurativni brojevi, srednja vrijednost, Pitagorina nejednakost, Pitagorin teorem, popločavanje ravnine, monoedralno popločavanje, poliomino, planaran graf, papirnate konstrukcije, omjer zlatnog reza, kružni valjak

Summary

In this graduate thesis, some proofs of mathematical claims are illustrated with the help of images i.e. illustrations by which students in elementary and secondary schools could awaken interest for studying and elaborating mathematics. We begin by displaying numbers by graphical elements and over lengths of segments and then getting familiar with tiling of the plane in which we introduce some types of polyominos, which leads to mentioning some parts of the Four color theorem proof. Lastly we discuss about three dimensions, apropos we solve problems which in plane seem unsolvable, but if we look out of the box, i.e. in space, we can reach the solution very easy.

Keywords: figurate numbers, average, Pythagorean inequality, Pythagorean theorem, plane tilings, monohedral tiling, polyomino, planar graph, paper constructions, golden ratio, circular cylinder

Životopis

Zovem se Jelena Matić. Rođena sam 17. siječnja 1995. godine u Požegi. Završila sam osnovnu školu "Mladost" u Jakšiću. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavila u Prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji u Požegi. Upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku 2013. godine.