Algebra u geometriji i trigonometriji

Jurjević, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:795480

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Jurjević

Algebra u geometriji i trigonometriji

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Jurjević

Algebra u geometriji i trigonometriji

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod

Algebra je važan dio matematike, prihvaćen u svim školskim kurikulima. Postoje različite definicije algebre, ali svaka uključuje da je algebra grana matematike koja se bavi simbolima i pravilima manipuliranja tim simbolima. Veliki broj učenika ima poteškoća s učenjem algebre jer ne vide njezinu svrhu. U ranom učenju algebre, učenici steknu krive ideje o značenju slova, izraza i jednadžbi. Proučavanjem uzoraka brojeva i pronalaženje formule koje će predstavljati taj uzorak zanimljiv je pristupi algebri. Tako učenici na konkretnim primjerima uočavaju moć algebre. Ocem algebre smatra se Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. On je 825. godine napisao knjigu "Hisab Al-jabr w'al-muqabala" iz čijeg naslova slijedi riječ "algebra" što znači "obnova slomljenih dijelova". Algebra je moćan alat za rješavanje problema iz stvarnog života. Važno je da nastavnici ovu činjenicu iskoriste kako bi pridobili pažnju i motivaciju učenika jer učenici često ne vide korist algebre. U prvom poglavlju rada odgovorit će se na najčešće pitanje koje postavljaju učenici: "Zašto učiti algebru?". Prikazat ćemo metode uvođenja algebre u nastavu. Bitno je da učenici od prvog susreta s algebrom imaju pozitivan stav prema njoj, a to se može postići jedino ako učenici vide kako im ona pomaže pri rješavanju konkretnih problema. Budući da se u udžbenicima nalazi veliki broj zadataka koji služe za mehaničko uvježbavanje postupaka rješavanja zadataka, važno je da se nastavnik matematike usredotoči na razumijevanje algebre. U drugom poglavlju prikazat ćemo vezu geometrije i algebre. Geometrija pruža veliki broj primjera koji pomažu za razumijevanje značenja simbola u algebri, a s druge strane algebra je moćan alat za rješavanje geometrijskih problema. Budući da teoremi i njihovi dokazi mogu jasno prikazati korisnost algebre, prikazat ćemo nekoliko primjera koji mogu biti obrađeni na nastavi. U trećem dijelu rada prikazat ćemo vezu trigonometrije i algebre. Često učenici ne razumiju definicije osnovnih trigonometrijskih funkcija pa zbog toga dolazi do neuspjeha pri učenju trigonometrije. Prikazano je kako uvesti pojmove sinusa i kosinusa tako da učenici razumiju njihovu svrhu i korisnost. Uz osnovne pojmove prikazat ćemo i neke izvode trigonometrijskih identiteta. Iako postoji veliki broj istraživanja vezanih uz učenje i poučavanje algebre, ne postoji jednostavan savijet za uspijeh za savladavanje ovog područja jer je učenje složen proces, a algebra područje puno različitih izazova. Najveću odgovornost ima nastavnik čije ponašanje i način poučavanja ovisi o njegovom stavu o učenju i poučavanju te o području koje mora prenijeti učenicima.

2 Zašto učiti algebru?

Nastavnici matematike se često susreću s pitanjima poput "Zašto učimo algebru?" i "Čemu ona služi?". Većina ljudi karakterizira algebru kao upotrebu simbola u matematici, ali teško objašnjavaju koju ona ima svrhu. Algebra ima korijene u aritmetici i geometriji, koje koriste algebra za opisivanje veza među veličinama. Na osnovnoj razini, promatramo vezu među brojevima. Ako je prikazan niz 3, 6, 9, 12, 15, ... učenici odmah uočavaju da su navedeni brojevi višekratnici broja 3, tj. dobivamo ih "množenjem nekog broja s tri". Lako se nastavlja niz 18, 21, 24 i lako se uočava da se može doći do broja 99, 300 ili čak 3 milijuna. Većina ljudi bi lako došla do ovih zaključaka, a algebra služi kako bi opisala postupak zaključivanja. Algebra nam daje mogućnost da otkrijemo da je 300 100-ti broj u nizu jer je $100 \cdot 3 = 300$. Veliku moć daje mogućnost prikazivanja veza između brojeva pomoću simbola pa tako, kada je jednom jasno da utrostručeni broj možemo zapisati kao $3n$, tj. "tri puta neki broj", lako se određuje bilo koji broj u nizu i korištenjem znanja rješavaju se daljnji problemi i objašnjavaju ostale veze među brojevima. Promotrimo sume triju uzastopnih brojeva:

$$\begin{aligned} 1+2+3&=6\\ 3+4+5&=12\\ 7+8+9&=24\\ 49+50+51&=150. \end{aligned}$$

Zanimljivo je što je rezultat uvijek višekratnik broja tri, ali postavlja se pitanje je li to uvijek slučaj. Korištenjem algebre dolazi se do zaključka, sumu tri uzastopna broja n, $n+1$ i $n+2$ možemo prikazati kao:

$$n+n+1+n+2=3n+3.$$

Iz izraza $3n+3$ slijedi da je zbroj tri uzastopna broja uvijek višekratnik broja 3. Izraz možemo zapisati i kao $3(n+1)$, tada zaključujemo da je traženi zbroj jednak tri puta $n+1$, gdje je $n+1$ srednji broj u tom poretku. I u ovom slučaju dobivamo da je broj višekratnik broja 3. Svojstvo tri uzastopna broja je lako shvatljivo, ali pruža niz ilustracija ključnih za razumijevanje algebre. Prvi zadatak je bio doći do izraza za zbroj tri uzastopna broja, zatim preoblikovati u ekvivalentan izraz koji pruža više informacija za objasniti i proširiti svojstva. Općenito, svaki algebarski izraz prikazuje neku situaciju, zatim se izraz preoblikuje kako bi ga se na drugi način interpretiralo. Korištenje algebre bio je značajan napredak u matematici. Puno je truda uloženo u proučavanje računanja sa simbolima, ali time je dobiven moćan alat za rješavanje teških matematičkih problema. Učenici smatraju da uvođenje algebre čini lake zadatke, koje mogu riješiti bez korištenja simbola, puno težima. Daljnjim učenjem složenijih koncepata uočavaju moć algebre. Važnost algebre je u tome što koristi sustav simbola kako bi se prikazali izrazi i veze među njima koje zatim koriste za predviđanja, rješavanje zadataka, objašnjavanja i dokazivanja. Predviđanje uključuje određivanje pripadne funkcije čija se vrijednost zatim računa. Rješavanje problema odnosi se na postavljanju i rješavanju jednadžbi, dok objašnjavanje i dokazivanje uključuju utvrđivanje i tumačenje algebarskih identiteta.

Dva su glavna razloga zašto učiti algebru. Kao prvi razlog navodi se korist algebre, a kao drugi smatra se njena zanimljivost. Algebra se primjenjuje u raznim područjima poput znanosti i tehnike. Manji broj učenika će u svojim budućim poslovima koristiti algebru, ali budući da nije jasno tko hoće, a tko ne, važno je da svi imaju priliku naučiti. Algebra je također korisna jer razvija vještine razmišljanja i zaključivanja, ali ovo nije ključan razlog jer se isto može reći i za druga područja matematike i druge predmete u školi. S druge strane, algebra daje uvid u bolje razumijevanje raznih pojava u svijetu. Ovo je istina jer stanovnik koji je dobro informiran i kojeg zanimaju pojave u svijetu može puno doprinijeti razvoju društva. Ovaj način razmišljanja objašnjava Usiskin prikazivanjem važnosti poznavanja jezika zemlje koju posjećujemo. Uskini smatra da ako posjetimo Meksiko, a ne znamo španjolski jezik, nikad nećemo dovoljno istražiti i upoznati njihovu zemlju i kulturu kao kada bi ga znali. Najvažnije, nikad nećemo znati što smo propustili posjetiti. Ovaj način razmišljanja odražava se na drugi razlog učenja algebre, na učenje algebre jer je zanimljiva. Učenici uče o glazbi, umjetnosti i književnosti ne zato što je to samo korisno za njih, nego i zato što je zanimljivo. Nažalost, algebru učenici često ne smatraju korisnom i zanimljivom čak iako su uspješno savladali zahtjeve školskog kurikuluma. Nastavnici često ne prenesu učenicima pravu prirodu i moć algebre. Cockcroft govori da je matematiku teško učiti i poučavati, a ovo vrijedi u većoj mjeri za algebru.

3 Uvođenje algebre u nastavu matematike

Za veliki broja učenika algebra već u ranoj dobi često predstavlja zadatke koji nemaju smisao, te ju vide kao niz pravila koje treba uvježbati. Ovakav stav vodi do neuspjeha i negativnog stava prema matematici. Također, mnogi koji savladaju tehnike rješavanja zadataka vezanih uz algebru obično smatraju da su zadaci nejasni i nedovoljno povezani sa stvarnim problemima ili predmetom njhova zanimanjima. Većina ljudi priznaje važnost korištenja i smisao brojeva, ali za algebru to nije slučaj. Zbog toga je način uvođenja algebre u nastavu matematike ključan za utvrđivanje uspjeha učenika i stava učenika o algebri. Od osnovne važnosti je davanje značenja i svrhe slovima u izrazima i jednadžbama pri prvom susretu učenika s algebrom. Od samog početka izraz $2n, n \in \mathbb{N}$ učenicima mora predstavljati '2 puta broj' ili 'udvostručen broj', tj. učenici moraju biti svjesni da dobivaju skup parnih prirodnih brojeva. Sljedeći zadatak učenicima je pojednostaviti izraz $2n + 3n$. Često izraze ovakvog oblika povezuju s izrazom poput $2n+3$ te je u oba slučaja suma jednaka $5n$. Važno je da nastavnici ne zanemariju ovu porgešku, nego je s učenicima rasprave. Nije dovoljno reći učenicima da je njihov odgovor netočan i pokazati im točno rješenje. Jedna od metoda rješavanja ove poteškoće je pomoću tablice kako je prikazano na Slici 1. Na ovaj način učenici uočavaju razlike i shvaćaju svoju pogrešku. Uvrštavanje konkretnih vrijednosti pruža jasan prikaz što je točno rješenje pojednostavljivanja izraza $2n + 3n$.

n	2n+3n	2n+3	5n
1	5	5	5
2	10	7	10
3	15	9	15
4	20	11	20
5	25	13	25

Slika 1.

Algebra bi trebala pomoći učenicima razumjeti smisao i rješavati matematičke probleme na jednostavniji način, a ne stvarati stav da dodatno kompliciramo zadatke koje bi učenici mogli riješiti na njima lakši način. U matematičkim udžbenicima pronaći ćemo kombinaciju nekih od ova četiri pristupa uvođenja algebre u nastavu matematike:

- Izrazi i pravila za operacije
- Rješavanje jednadžbi
- Formule
- Uzorci koji vode do funkcija.

3.1 Izrazi i pravila za operacije

Učenici često pogrešno interpretiraju slova u algebri, što vodi do nerazumijevanja ovog gradiva. Često se u nastavi izrazi poput $2a+5a$ objašnjavaju kao 2 jabuke plus 5 jabuka je 7 jabuka, tj. $7a$. Pa je tako $2a+3b+5a+6b = 7a+9b$ jer ne možemo zbrajati jabuke i kruške. Ovaj pristup možemo učiniti matematički prihvatljivim ako povežemo slova s brojevima pa tako izraz $2a + 5a$ povežemo $2 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 7 \cdot 8$ ili $2 \cdot 80 + 5 \cdot 80 = 7 \cdot 80$. Poteškoća kod ovog pristupa uvođenja algebre je što vodi do neprikladne interpretacije slova kao objekata, poput jabuka i krušaka, a ne kao brojeva. Štoviše, do ovog načina razmišljanja dolazi čak i kada ono nije stimulirano nastavnikovom metodom upoznavanja učenika s algebrom. Učenici algebru često algebru vide kao strani jezik i procedure za rješavanje problema koje bi oni mogli lakše riješiti bez upotrebe simbola, što dovodi do negativnog stava prema algebri.

3.2 Rješavanje jednadžbi

Dobrim načinom uvođenja algebre u nastavu smatra se rješavanje jednadžbi. Jedna od uvodnih aktivnosti je rješavanje zadataka poput 'pronađi broj koji nedostaje' ili 'zamisli broj'. Sljedećim dijalogom demonstrirana je aktivnost kojom nastavnici mogu motivirati učenike za korištenje algebre.

Nastavnik: Zamislio sam jedan broj i poduplao ga. Zatim sam oduzeo 5 i dobio rezultat 7. Koji sam broj zamislio?
Učenik A: 6 jer 12 manje 5 je 7, zatim prepolovimo 12 i dobijemo 6.
Učenik B: Budući da ste oduzeli 5 ja sam ih dodao natrag i dobio da je uduplani broj jednak 12, a zatim sam prepolovio i dobio 6.
Nastavnik: D, zamisli broj i pomnoži ga s 5 a zatim dodaj 7. Koji si broj dobio?
Učenik D: 52.

Zadatke iz primjera možemo algebarski prikazati kao $2x - 5 = 7$ i $5x + 7 = 52$ te razmotriti formalne metode rješenja. Prikazivanje ovakvih slagalica u obliku jednadžbi je važan zadatak jer uključuje prevođenje usmene izjave u matematičku formu i obrnuto, tumačenje matematičke izjave. Zbog isticanja važnosti uvježbavanja postupaka ovaj način rada je zanemaren te su učenici često zbunjeni i ne razumiju koja je mentalna metoda u pozadini rješenja. Treba biti jasno da su formalni postupci korisni samo kada je teško vidjeti rješenje bez sustavne metode koja može uključivati pisane korake jer će u protivnom učenici smatrati kako rješavaju na papiru zadatke koje bi na puno lakši način mogli 'napamet' riješiti. Ovu metodu treba koristiti kada rješenje nije odmah očigledno tj. kada brojevi u zadatku nisu jednostavni ili kada postoji više operacija kao u sljedećim primjerima:

$$2.7x - 5.9 = 7.6$$
$$\frac{5(x+2)-7}{3} = 6.$$

3.3 Formule

Formule su matematičke tvrdnje izražene simbolima koje predočuju međusobni odnos između određenih veličina. Učenici se još u razrednoj nastavi susreću s pojmom trokuta, pravokutnika i kvadrata, te se u 4. razredu susreću s pojmom opsega i površine. Uče formule za opseg i površinu te kako se brojevi uvrštavaju u formule. Važno je već od prvog susreta s formulama učenici uoče njihovu smisao i korisnost. Formula za opseg pravokutnika je jednostavan primjer gdje je veza s numeričkim značajem jaka i lako razumljiva. Postoje tri ekvivalente forme formule za računanje opsega pravokutnika, a to su:

$$P = l + w + l + w$$
$$P = 2w + 2l$$
$$P = 2(w + l).$$

U prvom slučaju koristi se definicija opsega pravokutnika, tj. opseg pravokutnika jednak zbroju duljina svih njegovih stranica. U drugoj formuli se koriste algebarski izrazi $2l$ i $2w$, koji predstavljaju udvostručene duljine dimenzija pravokutnika. Dakle, koristimo svojstvo da pravokutnik ima dva para jednakih stranica te ih zatim zbrojimo kako bi dobili opseg pravokutnika. U trećoj formuli koristimo ideju da duljine dviju stranica pravokutnika možemo prvo zbrojiti, a zatim rezultat udvostručiti. Kroz ove primjere učenici se upoznavaju i s redoslijedom računskih operacija, te uočavaju važnost korištenja zagrada u algebarskim izrazima. Prednost pristupa algebri pomoću formula je u tome što je značenje slova u izrazima povezano s veličinama poput duljine i vremena koje imaju promjenjive vrijednosti pa je ideja o varijablama očigledna. Najčešće formule s kojim se učenici susreću su:

- formule za opseg i površinu pravokutnika s duljinama stranica w i l:
$$O = 2l + 2w,\ P = wl$$
- formule za opseg i površinu kruga s polumjerom r:
$$O = 2r\pi,\ P = r^2\pi$$
- površinu trokuta sa stranicom a i visinom na tu stranicu v_a:
$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$
- Udaljenost dvije točke $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ u ravnini:
$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3.4 Uzorci koji vode do funkcija

Uzorke brojeva i ideju o funkcijama možemo shvatiti kao nastavak na uvođenje algebre u nastavu pomoću formula. Dok su spomenuta tri načina uvođenja algebre u nastavu prisutna u školskim kurikulima preko 100 godina, ovaj pristup pripada 'modernoj matematici' i pronalazimo ga u školskom kurikulumu od 1950. godine. Učenicima se zada niz poput: 1, 4, 7, 10 . . . i od njih se traži da odrede sljedeći član niza. Ovaj način vodi do induktivne definicije niza i učenici zaključuju kako počinju s 1, a zatim dodavaju 3. Problem nastaje kada učenici moraju generalizirati problem, tj. odrediti da je n-ti član niza $3n - 2$. Driscoll navodi kako zadaci s uzorcima pomažu učenicima razumiti koncept funkcija i razviju naviku traženja generalizacije za nešto što će 'uvijek raditi'. Pronalaženje funkcije ima puno toga zajedničko s pristupom pomoću formula, ali ovaj način ima prednost jer pomaže učenicima shvatiti svrhu algebarskog izraza. Jednostavni primjeri traženja uzoraka su složeniji od jednostavne formule poput opsega pravokutnika jer učenici često znaju kako riješiti problem bez upotrebe algebre. Bit algebre je moć koju nam pruža simbolički zapis. Zbog motivacije učenika za učenjem algebre veza između simbola, brojeva i grafičkog prikaza mora biti jasna i stalno naglašena. Postoje tri važne značajke u ovom pristupu. Prva je da ono treba prethoditi uvježbavanju manipulacije algebarskim izrazima. Važno je učenici imaju vještinu pojednostavljivanja, uvrštavanja u formulu i rješavanja jednadžbi, ali prije samog uvježbavanja razlog uvođenja ovog problema mora biti jasan. Zatim, zadaci trebaju uključivati situacije kada je uvođenje algebre neophodno, tj. rješavanje zadataka bez korištenje algebre puno je teže, tako učenici postaju svjesni kako im algebra pomaže pri rješavanju matematičkih problema. Posljednja značajka je da dovoljno vremena treba biti posvećeno svakom zadatku tako da bude detaljno istraženo i objašnjeno kako bi učenici smatrali zadatak važnim i zanimljivim.

4 Algebra i geometrija

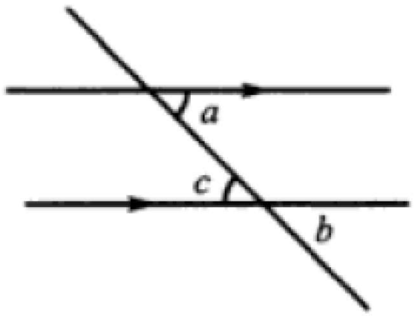
4.1 Povezivanje algebre i geometrije

Geometrija je grana matematike koja se bavi proučavanjem oblika, njihovih svojstava i odnosa. U nastavi matematike prisutna je od prvog razreda osnovne škole i učenici se s njom susreću u svakom obrazovnom razdoblju. Značajna je povezanost algebre i geometrije jer se geometrija bavi vezama između varijabli poput kuta, duljine, površine i volumena. Geometrijske skice daju izvrstan uvid u algebarske ideje, a s druge strane su algebarske metode moćan alat za rješavanje geometrijskih problema i prikazivanje geometrijskih dokaza. Učenici grafičke prikaze prihvaćaju s lakoćom jer pružaju bolji uvid u značenje različitih algebarskih izraza. U ranoj fazi učenja algebre ideja o varijablama je povezana s diskretnim cijelim brojevima, ali povezivanjem algebre i geometrije ideja o varijablama poboljšana je povezivanjem s pojmovima poput kuta, duljine, volumena itd. Veliki broj algebarskih izraza, poput razlike kvadrata, imaju svoje korijene u geometriji te su na vrlo pamtljiv način mogu prikazani pomoću slika. Učenici uočavaju smisao i svrhu učenja algebre prikazivanjem rješenja različitih geometrijskih problema pomoću algebarskih ideja.

Učenici se u šestom razredu osnove škole susreću s kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca i zbrojem kuta u trokutu. Ovi geometrijski problemi pružaju jasnu vezu između slova i brojeva. U nastavku su dokazana dva teorema, o jednakosti izmjeničnih kutova uz presječnicu paralelnih pravaca i tvrdnja da je zbroj kutova u trokutu 180°.

Teorem 1. *Izmjenični kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca su jednaki.*

Na Slici 2. prikazani su kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca. Kutovi a i b su kutovi s paralelnim kracima i oba su šiljasta pa vrijedi jednakost: $a = b$. S druge strane kutovi b i c su vršni kutovi pa i za njih vrijedi jednakost, tj. $b = c$. Iz prethodnog razmatranja slijedi jednakost izmjeničnih kutova a i c, tj. $a = c$.

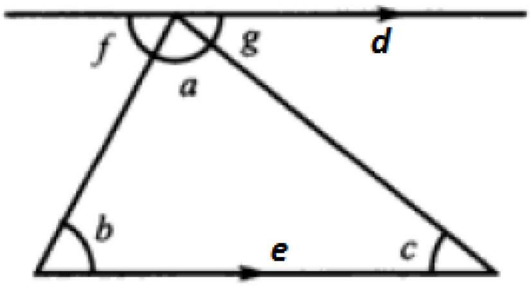


SLIKA 2.

Teorem 2. *Zbroj kutova u trokutu jednak je* 180°.

Prethodni primjer doprinosi jednostavnom dokazivanju ove tvrdnje. Iako se učenici u početku susreću s ovim ključnim podatkom o trokutu na eksperimentalan način tako što mjere kutove, važno je prikazati da ono može biti izvedeno iz jednostavnih svojstava kutova.

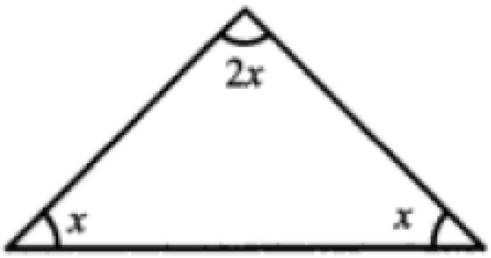
Na Slici 3. prikazan je trokut s kutovima a, b i c i pravac d paralelan stranici e. Promatrajući Sliku 3. zaključujemo da su b i f, te c i g dva para izmjeničnih kutova uz presječnicu paralelnih pravaca pa vrijedi: $b = f$ i $c = g$. Budući da kutovi f, a i g tvore ispruženi kut, vrijedi: $f + a + g = 180°$. Zatim, korištenjem jednakosti kutova dobiva se tražena tvrdnja: $a + b + c = 180°$.



SLIKA 3.

Različiti geometrijski zadaci koji uključuju kutove često su iskorišteni kako bi utvrdili druge algebarske probleme pa se često u takvim zadacima pojavljuju jednostavne jednadžbe, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 1. *Koliko iznose kutovi u jednakokračnom trokutu ako znamo da je jedan od kutova dvostruko veći od druga dva kuta?*



SLIKA 4.

Označimo li veličine kutova s x i $2x$ te korištenjem činjenice da je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$ slijedi:

$$2x + x + x = 180 \Rightarrow 4x = 180 \Rightarrow x = 45.$$

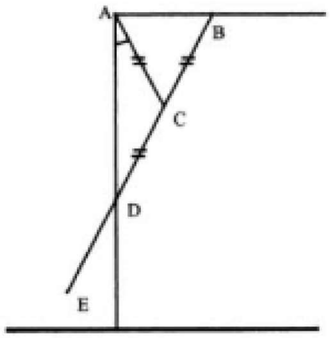
Dakle, veličine kutova su: $45°$, $45°$ i $90°$.

Spomenimo dvije važne značajke o korištenju simbola u geometrijskom kontekstu. Prva se odnosi na problem mjernih jedinica. Naime, obično se smatra da u matematici slova predstavljaju brojeve prije nego količine, što su brojevi kojima je pridružena mjerna jedinica. Do zabune dolazi kada su mjerne jedinice spojene s algebarskim simbolima pa tako učenicima nije jasna razlika između dvije uloge dodijeljene slovima. Za primjer možemo uzeti izraz mg, samo kontekst može razjasniti odnosi li se m na masu, a g na gravitaciju ili mg predstavlja masu mjerenu u miligramima. U ranoj fazi učenja algebre učenicima ova konvencija nije odmah jasna i dosljedna te često dolazi do nerazumijevanja.

Druga poteškoća s notacijom nastaje korištenjem velikih slova za označavanje točaka i malih slova za označavanje algebarskih varijabli. Također jedino kontekst pomaže razjasniti što slovo predstavlja. Često početniku izrazi ab i AB izgledaju slično te ih ne razlikuje pri izgovoru. Stoga je važno učenicima jasno objasniti što izraz predstavlja i usmjeriti im pažnju na to kako često slične forme imaju potpuno drugačija značenja u različitim kontekstima.

4.2 Jednakokračni trokuti

Geometrijski problemi koji uključuju vezu među kutovima pružaju nam veliki broj različitih primjera za bolje razumijevanje algebarskih ideja. U primjerima gdje je vrijednost jednog kuta promjenjiva, vrlo je korisno promatrati kako se drugi kutovi mijenjaju. U nastavku ćemo razmotriti problem pomoću kojeg učenici na zanimljiv način povezuju znanje algebre i geometrije te ga koriste za rješavanje problema iz stvarnog života.



∠CAD	∠ACD	∠ACB	∠CAB
10°	160°	20°	80°
20°	140°	40°	70°
30°	120°	60°	60°
40°	100°	80°	50°
50°	80°	100°	40°
60°	60°	120°	30°

Slika 5.

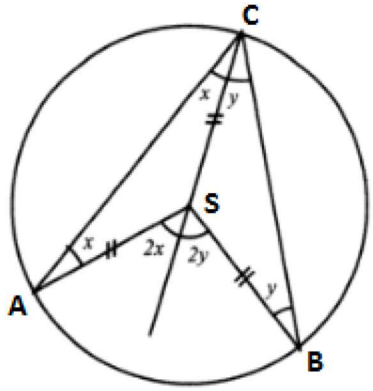
Na Slici 5. je prikazan bočni pogled na garažna vrata koja su označena dužinom BE. Uočimo još kako se točka D na vratima pomiče vertikalno po okomitom stupu vrata kako se vrata otvaraju i zatvaraju, a točka C pričvršćena je štapom na osovinu na vrhu stupa vrata s točkom A. Uočimo kako su 3 duljine $|AC|$,$|BC|$ i $|DC|$ jednake te tvore dva jednakokračna trokuta ACD i ACB. Kako bi se bolje predočilo kretanje garažnih vrata te kako bi se uočila bitna svojstva mogu se koristiti različiti programi dinamičke geometrije i modeli. Kut $\angle CAD$ se mijenja kako se vrata garaže otvaraju i zatvaraju pa korištenjem svojstava jednakokračnog trokuta učenici mogu računati veličine drugih kutova. Učenicima se može zadati zadatak da zapisuju u tablicu dobivene vrijednosti i pomoću njih dođu do različitih zaključaka koji će im omogućiti predviđanje vrijednosti kutova. Očigledni su primjeri udvostručavanja i dijeljenje kuta na dva dijela te da je zbroj kutova $\angle CAD$ i $\angle CAB$ uvijek $90°$. Učenicima je zadatak algebarski dokazati svoje zaključke. Pretpostavimo li da je kut $\angle CAD = x$ slijedi:

$$\angle ACD = 180 - 2x$$
$$\angle ACB = 2x$$
$$\angle CAB = 90 - x.$$

Zaključujemo kako je zbroj kutova $\angle CAD$ i $\angle CAB$ uvijek jednak $90°$.

Jednakokračni trokuti se često javljaju u geometrijskim zadacima, posebno u onima koji uključuju kružnice. Na slici je prikazana skica za dokaz teorema o obodnom i središnjem kutu.

Teorem 3. *Središnji kut nad nekim lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad istim lukom.*



Slika 6.

Neka su A, B i C točke na kružnici sa središtem S. Povlačenjem polupravca CS nastaju dva jednakokračna trokuta ASC i SBC. Budući da vrijedi: $\angle SCA = \angle SAC = x$, te $\angle BCS = \angle SBC = y$, zaključujemo:

$$\angle ASC = 180 - 2x \Rightarrow \text{ vanjski kut jedanak je } 2x$$
$$\angle BSC = 180 - 2y \Rightarrow \text{ vanjski kut jednak je } 2y.$$

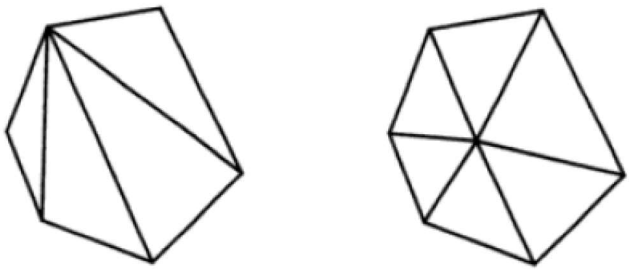
Zbrajanjem izraza dobiva se tvrdnja teorema: $2x + 2y = 2(x + y)$, tj. središnji kut je dva puta veći od obodnog kuta.

Kroz ovakve primjere učenicima važnost algebre postaje jasna, oni uočavaju da im algebra pomaže pri rješavanju različitih problema iz stvarnog života pa se njihova motivacija za učenjem algebre povećava i negativan stav prema algebri nestaje. Jednakokračni trokuti se obrađuju u ranoj fazi upoznavanja s geometrijom. Učenici vrlo brzo uočavaju vezu među kutovima što čini ovo gradivo korisnim za primjenu algebre pri računanju nepoznate veličine kuta rješavanjem jednadžbe ili pri dokazivanju različitih teorema iz područja geometrije. Rješavanjem geometrijskih problema vezanih uz jednakokračne trokute učenici uvježbavaju kako prikazati problem u alebarskom obliku.

4.3 Kutovi mnogokuta

Učenici se u 7. razredu osnovne škole susreću s pojmom mnogokuta, računaju broj dijagonala iz jednog vrha, ukupan broj dijagonala u mnogokutu, vrijednog jednog unutrašnjeg kuta mnogokuta, te zbroj unutarnjih kutova mnogokuta. Nekoliko je načina na koji se dokazuje da je zbroj unutrašnjih kutova u mnogokutu s n strana jednak $180° \cdot n - 360°$. U nastavku je prikazano nekoliko pristupa dokazivanja koji su primjereni za obradu na nastavi.

Dokaz 1. Ideja ovog dokaza je podijeliti mnogokut na trokute. Učenici mogu doći do tvrdnje teorema i sami, korištenjem osnovnih znanja o trokutu. Nastavnici bi trebali navoditi učenike da podijele mnogokut na trokute čiji zbroj kutova znaju. Mnogokut se može podijeliti na trokute na dva načina, kako je prikazano na Slici 7.

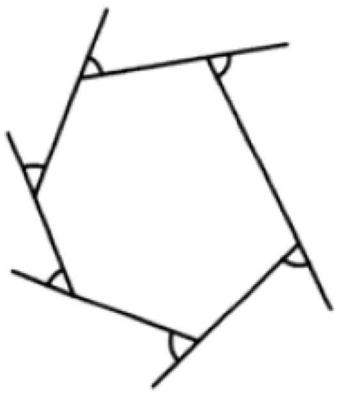


Slika 7.

U prvom slučaju povučene su dijagonale iz jednog vrha i na taj način šesterokut je podijeljen na 4 trokuta. Zbroj kutova u svakom trokutu je 180° pa slijedi da zbroj kutova u šesterokutu iznosi $4 \cdot 180° = 720°$. Kako bi poopćili ovaj problem za mnogokut s n strana koristimo činjenicu da je broj trokuta u mnogokutu $n - 2$, tj. za 2 manji od broja strana, pa tako dolazimo do zaključka da je zbroj unutrašnjih kutova jednak $180° \cdot (n - 2)$.

U drugom slučaju spajanjem jedne točke unutar mnogokuta sa svim vrhovima mnogokuta dobiva se šest trokuta. Zbroj kutova u svim trokutima je $6 \cdot 180° = 1080°$, a budući da dobiveni broj uključuje i šest kutova oko unutrašnje točke slijedi da je zbroj kutova u šesterokutu $1080° - 360° = 720°$. Iz prethodnog razmatranja slijedi kako je zbroj unutrašnjih kutova u mnogokutu s n strana jednak $180° \cdot n - 360°$. Budući da su izrazi $180° \cdot n - 360°$ i $180° \cdot (n - 2)$ ekvivalentni, vrijedi: $180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n - 2)$.

Dokaz 2. Da je zbroj kutova u mnogokutu $180° \cdot n - 360°$ dokazuje se i pomoću vanjskih kutova mnogokuta, kako je prikazano na Slici 8.



Slika 8.

Za svaki vrh mnogokuta vrijedi da je zbroj vanjskog i unutarnjeg kuta jednak 180° i zbroj vanjskih kutova jednak je 360°. Iz prethodnog slijedi zbroj unutarnjih kutova u mnogokutu:

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ.$$

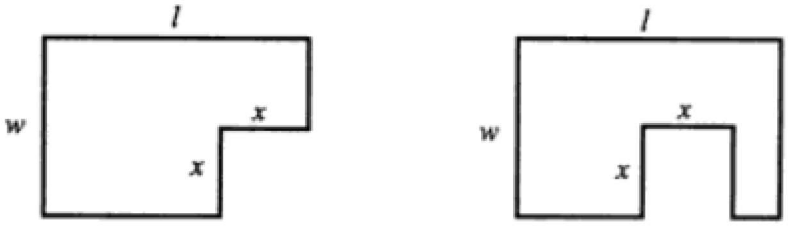
Budući da su u pravilnom mnogokutu veličine svih kutova jednake, izraz za veličinu jednog unutrašnjeg kuta dobiva se dijeljenjem izraza za zbroj svih unutrašnjih kutova s n:

$$\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

U ranoj fazi učenja o mnogokutima učenici numerički računaju kutove i tako otkrivaju njihova svojstva. Algebarski način prikazivanja ovih problema pruža učenicima bolje razumijevanje algebre i geometrije. Učenici uočavaju korisnost algebre i razvijaju svoje algebarske vještine.

4.4 Opseg i površina

Osim kuta, još jedan primjer varijable je duljina, a nju koju koristimo pri računanju opsega geometrijskih likova. Problem opsega pravokutnika koristi se kao jedan način uvođenja algebre u nastavu. Na Slici 9. prikazana su dva problema vezana uz opseg pravokutnika s duljinama stranica l i w kojima je uklonjen kvadrat stranice duljine x.



Slika 9.

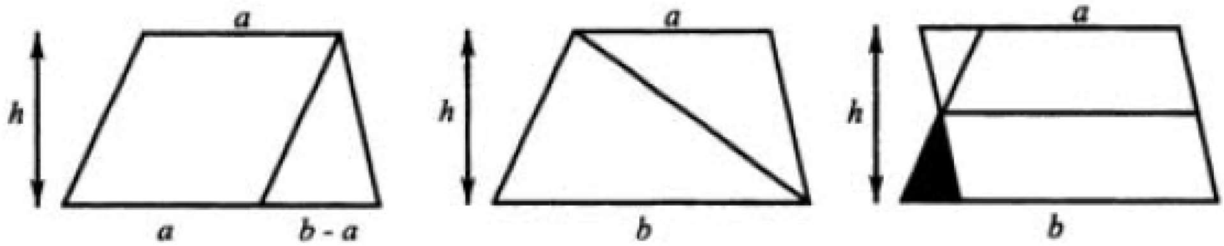
U prvom slučaju jednostavnim zbrajanjem duljina stranica dobiva se opseg lika:

$$o = l + w + (w - x) + x + x + (l - x) + w = 2l + 2w.$$

Često učenike iznenadi što x ne ostaje u izrazu nakon pojednostavljivanja. Nakon boljeg razmatranja skice jasno je da su dvije niže horizontalne stranice jednake duljini pravokutnika, te isto vrijedi za dvije desne vertikalne stranice, koje su jednake širini pravokutnika. Na drugoj slici može se činiti da nema dovoljno informacija za računanje opsega jer položaj uklonjenog kvadrata nije točno određen. Međutim, kao u prvom slučaju zaključujemo kako su tri donje horizontalne stranice jednake duljini pravokutnika l, te ostaju još dvije vertikalne stranice duljine x pa opseg lika iznosi: $o = 2l+2w+2x$. Prirodno je nakon određivanja opsega prijeći na određivanje površine zadanih likova. Povrština pravokutnika sa stranicama l i w iznosi lw, a povrština kvadrata sa stranicama duljine x iznosi x^2. Oduzimanjem površine pravokutnika i kvadrata dobiva se površina likova sa slike:

$$P = lw - x^2.$$

Povezanost geometrije i algebre očituje se i pri određivanju površine trapeza. Dobar pristup ovom problemu je navođenje učenika da samostalno otkriju površinu korištenjem prijašnjih znanja iz geometrije. Učenicima zadatak može biti zadan na papiru tako da izrezivanjem i preslagivanjem dobivaju likove čiju površinu znaju izračunati. Nekoliko pristupa rješavanja ovog problema prikazana su na Slici 10. koja prikazuje trapez s paralelnim stranicama a i b i visinom h, koji je na tri različita načina podijeljen.



Slika 10.

Na prvoj slici trapez je podijeljen na paralelogram sa stranicom a i visinom h i na trokut sa stranicom $b-a$ i visinom h. Budući da učenici znaju da je površina paralelograma ah, a površina trokuta $\frac{1}{2}(b-a)h$ slijedi da je površina trapeza:

$$P = ah + \frac{1}{2}(b-a)h = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Na drugoj slici trapez je dijagonalom podijeljen na dva trokuta. Površine tih trokuta iznose: $\frac{1}{2}bh$ i $\frac{1}{2}ah$. Zbrajanjem površina trokuta dobiva se površina trapeza:

$$P = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Još jedan način izvođenja površine trapeza je pomoću osjenčanog trokuta na trećoj slici. Taj trokut ima bazu duljine $\frac{b-a}{2}$ te njegovom rotacijom za 180° dobiva se paralelogram s duljinama stranica $\frac{a+b}{2}$, a njegovu površina iznosi:

$$\frac{1}{2}(a+b)h.$$

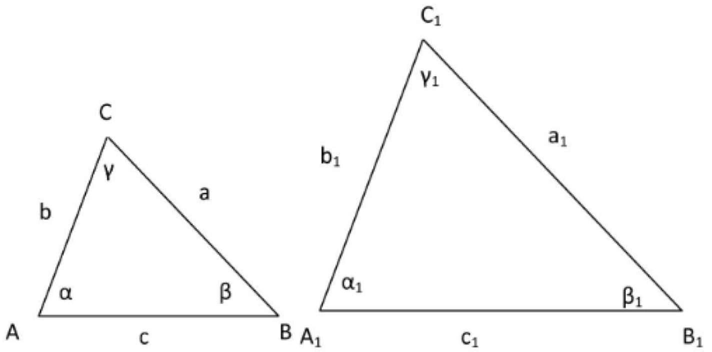
Iz prethodnog razmatranja proizlazi još jedna zanimljiva činjenica vezana uz duljinu srednjice, dužine koja spaja polovišta nasuprotnih neparalelnih stranica trapeza. Budući da je duljina baze osjenčanog trokuta $\frac{b-a}{2}$, duljina srednjice iznosi:

$$a + \frac{1}{2}(b-a) = b - \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(a+b).$$

Aktivnost određivanja površine trapeza daje učenicima mogućnost razvijanja logičkog mišljenja, snalažljivosti i korištenje ranije stečenih znanja. Učenici lakše pamte formulu koju su sami otkrili te s obzirom na to da su vidjeli alternativne načine izvođenja formule poboljšava se njihovo razumijevanje ovog gradiva.

4.5 Sličnost trokuta

Sličnost trokuta je važna geometrijska ideja koja se pojavljuje u raznim geometrijskim problemima čija rješenja često zahtijevaju algebarski pristup rješavanja. Učenici se sa sličnosti trokuta susreću u sedmom razredu osnovne škole. Tada se obrađuju teoremi sličnosti i njihove primjene. U nastavku se nalaze teoremi koje nalazimo u udžbenicima za sedmi razred, te dva primjera u kojima se očituje primjena sličnosti.



SLIKA 11.

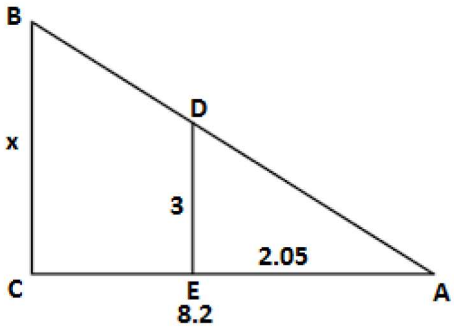
Teorem 4. *Dva su trokuta slična ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne i odgovarajući kutovi jednakih veličina.*

Teorem 5. SSS poučak sličnosti *Ako su duljine odgovarajućih stranica proporcionalne, tada su trokuti slični.*

Teorem 6. KK poučak sličnosti *Ako trokuti imaju dva kuta jednakih veličina, tada su slični.*

Teorem 7. SKS poučak sličnosti *Ako trokuti imaju jednako veliki kut i duljine odgovarajućih stranica uz taj kut proporcionalne, tada su slični.*

Primjer 2. *Stablo baca sjenu dugačku* $8.2m$ *istodobno kada štap duljine* $3m$ *(koji je postavljen okomito u zemlju) baca sjenu duljine* $2.05m$. *Kolika je visina stabla* x*?*



SLIKA 12.

Ovo je tipičan primjer primjene sličnosti trokuta koji se nalazi u udžbenicima za 7. razred osnovne škole. Lako se uočava jednakost kutova:

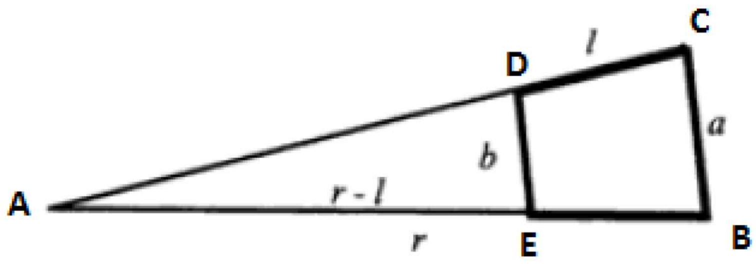
$$\angle ACB = \angle AED = 90^\circ \text{ i } \angle CAB = \angle EAD.$$

Sličnost trokuta slijedi iz KK teorema o sličnosti:

$$\frac{x}{3} = \frac{8.2}{2.05} \Rightarrow x = 12.$$

Visina stabla je 12 metara.

Primjer 3. *Ako se lonac u obliku krnjeg stošca zakotrlja bez klizanja na svojoj zakrivljenoj površini, gornji i donji rub ostavljaju tragove u obliku kruga. Izračunajte duljinu polumjera tog kruga.*



SLIKA 13.

Na Slici 13. je bočni prikaz ovog problema. Duljina gornjeg ruba lonca označena je s b, donjeg ruba s a, a duljina kosog ruba s l. Vrh stošca je središte kruga čiji je polumjer r. Budući da su pravci DE i CB paralelni, vrijedi: $\angle AED = \angle ABC$ i $\angle ADE = \angle ACB$. Prema KK poučku o sličnosti trokuta trokuti AED i ABC su slični pa vrijedi:

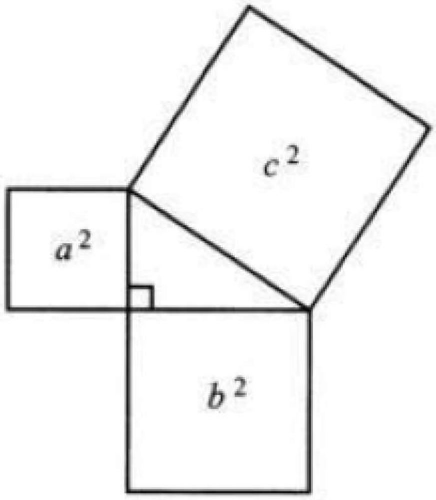
$$\frac{r-l}{r} = \frac{b}{a} \Rightarrow rb = ra - la \Rightarrow r(b-a) = la \Rightarrow r = \frac{la}{a-b}.$$

4.6 Pitagorin teorem

Jedan od najpoznatijih teorema u matematici je Pitagorin teorem. Nazvan je po Pitagori, ali smatra se da je bio poznat puno prije, još i Kinezima i Babiloncima. Obrađuje se u osmom razredu osnovne škole, a prikladan je jer povezuje površine kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta kao što prikazano na slici. Danas je poznato čak oko 400 raznih dokaza Pitagorinog teorema, a veliki broj zahtjeva korištenje algebarskih izraza.

Teorem 8. Pitagorin teorem *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

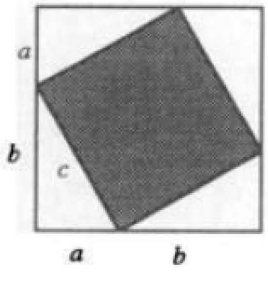
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Slika 14.

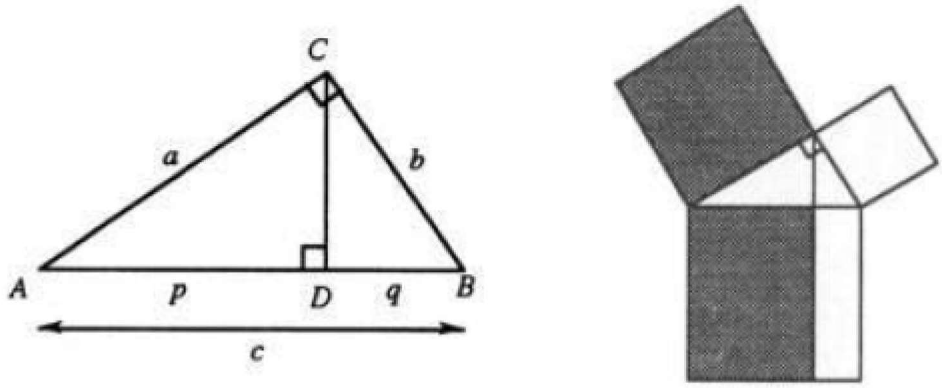
Dokaz 1. Slika 15. prikazuje dokaz koji se obrađuje u 8. razredu osnovne škole. Od učenika se očekuje poznavanje izraza $(a+b)^2$. Kvadrat sa stranicama duljina $a+b$ podijeljen je na četiri pravokutna trokuta s katetama duljina a i b i kvadrat sa stranicama duljine c. Pravokutni trokuti su sukladni jer se podudaraju u dvije odgovarajuće stranice i pravom kutu između njih. Svaki od trokuta ima površinu $\frac{1}{2}ab$ pa slijedi da 4 takva trokuta imaju površinu $4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2ab$, a površina kvadrata sa stranicama c iznosi c^2. Budući da površina kvadrata čije su stranice duljine $a+b$ ima površinu $(a+b)^2$, vrijedi:

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



Slika 15.

Dokaz 2. Desno na Slici 16. prikazano je kako se površine kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta izjednačavaju s pravokutnicima koji zajedno čine kvadrat nad hipotenuzom.



SLIKA 16.

Ovaj dokaz Pitagorinog teorema slijedi iz sličnosti trokuta ACD i ABC te CDB i ABC. Nožište D visine na stranicu c iz vrha C dijeli tu stranicu na dva dijela duljina p i q. Trokuti ACD i ABC imaju zajednički kut $\angle DAC$ i po jedan pravi kut, tj. $\angle ADC = \angle BCA = 90°$. Trokuti su slični prema KK teoremu o sličnosti trokuta pa vrijedi:

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = cp.$$

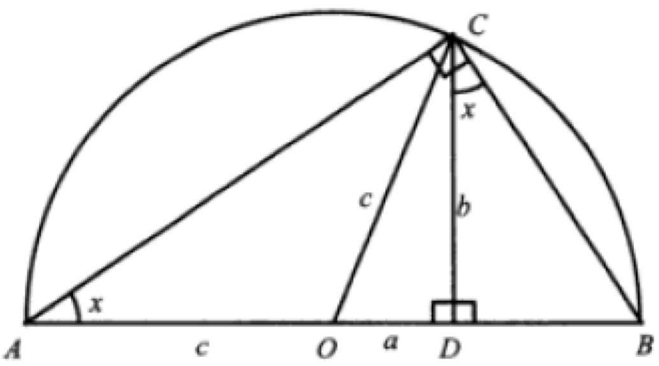
Sličnim razmatrenjem dokazuje se i sličnost trokuta CDB i ABC pa vrijedi:

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = cq.$$

Zbrajanjem jednadžbi dobiva se tvrdnja teorema:

$$a^2 + b^2 = c(p+q) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Dokaz 3. Treći dokaz također proizlazi iz sličnosti trokuta. Trokut ABC je smješten u polukrugu promjera AB s centrom O, a točka C se nalazi na kružnici, kako je prikazano na Slici 17.



SLIKA 17.

Trokut ODC je pravokutan sa stranicama a, b i c. Sličnost trokuta ADC i CDB vrijedi prema KK teoremu o sličnosti trokuta. Kutovi $\angle DCB$ i $\angle OAC$ su jednaki jer su šiljasti kutovi s okomitim kracima. Također vrijedi: $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$. Budući da $DB = c - a$, a $AD = c + a$ vrijedi:

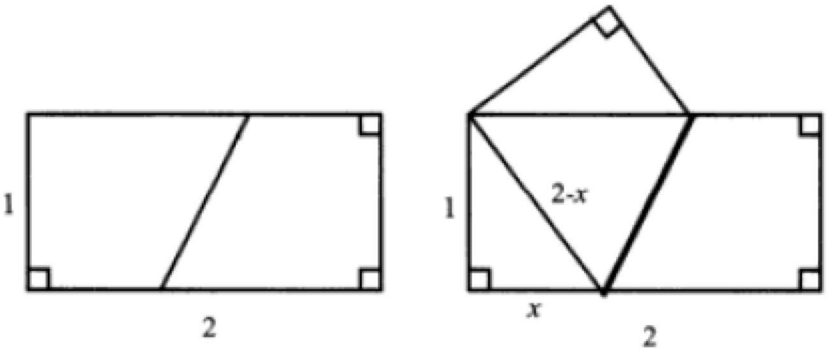
$$\frac{b}{c+a} = \frac{c-a}{b} \Rightarrow b^2 = (c+a)(c-a).$$

Korištenjem formule za razliku kvadrata slijedi tvrdnja Pitagorinog teorema:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Učenici razvijaju geometrijsko uočavanje i algebarske vještine bradom različitih dokaza ovog teorema na nastavi. Dokazi jasno prikazuju vezu geometrije i algebre što pobuđuje interes kod učenika. Javlja se potreba za stjecanjem poznavanja algebarskih struktura i tečnosti pri rješavanju. Slijede tri primjera koja ilustriraju primjenu algebre u geometrijskom kontekstu.

Primjer 4. *Preklopite papir kvadratnog oblika tako da dobijte pravokutnik s duljinama stranica 2 i 1. Zatim preklopite pravokutnik tako da se dva suprotna vrha podudaraju. Odredite duljine stranica pravokutnog trokuta koji je nastao.*



Slika 18.

Duljina stranice pravokutnika je 2, preklapanjem duljinu stranice dijelimo na x i $2 - x$. Preklapanjem pravokutnika nastaje pravokutni trokut sa stranicama $1, x$ i $2-x$. Primjenom Pitagorinog teorema na dobiveni pravokutni trokut dobiva se:

$$(2-x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 4 - 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Duljine stranica iznose: $\frac{3}{4}$, 1 i $\frac{5}{4}$, proporcionalne duljinama 3, 4 i 5. Učenicima je taj zaključak neočekivan, ali postaje jasniji ako ponove zadatak s pravokutnikom s duljinama stranica 8 i 4. Štoviše, zanimljivo je istraživati pravokutnik sa stranicama m i n.

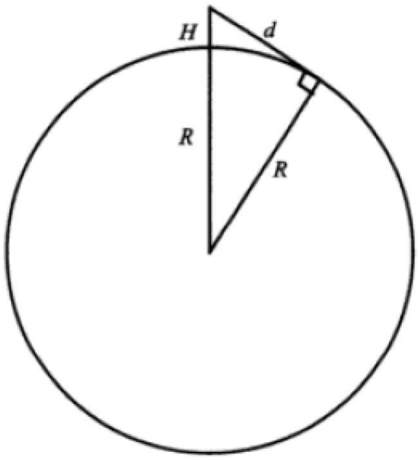
Primjer 5. *Odredite formulu za udaljenost horizonta u miljama od točke koja je h stopa iznad razine mora.* (1 *milja* = 1.609344 *km,* 1 *stopa* = 0.3048 *m,*)

Problem je prikazan na Slici 19., gdje R predstavlja polumjer zemlje u miljama, a H nadmorsku visinu u miljama (jedna milja iznosi 5280 stopa, a R iznosi 3960). Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut sa Slike 19. dobiva se:

$$d^2 = (R+H)^2 - R^2 = 2RH + H^2 \approx 2RH, \text{ ako je } H \text{ mali broj.}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za R i H dobiva se tražena formula:

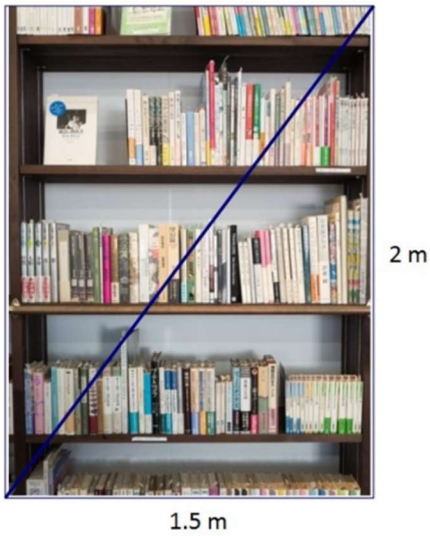
$$d^2 \approx 2RH \Rightarrow d \approx \sqrt{2RH}.$$



SLIKA 19.

Dobivena formula je laka za pamćenje i korištenje. Važno je interpretirati je u nekoliko konkretnih primjera iz stvarnog života. Na nadmorskoj visini od 300 stopa udaljenost od horizonta je oko 21 milja, a s Mont Everesta, na nadmorskoj visini od 29000 stopa, udaljenost do horizonta je preko 200 milja.
Sljedeći primjer obrađuje se na nastavi kako bi učenici primijenili stečeno znanje na probleme iz stvarnog života.

Primjer 6. *Polica za knjige u obliku pravokutnika rasklimala se. Visina police iznosi 2 metra, a širina 1.5 metara. Pozvan je stolar kako bi je popravio, učvrstio. Stolar je uzeo mjere. On zna da svaki pravokutni oblik najbolje učvrstimo ako ga osiguramo dvjema letvicama postavljenim dijagonalno te je izmjerio duljinu dijagonale poleđine police. Maja je nakon razgovora sa stolarom uzela papir i olovku te znajući širinu i visinu police izračunala potrebne mjere. Što je Maja računala?*



SLIKA 20.

Maja je znajući širinu i visinu police pomoću Pitagorinog poučka izračunala duljinu dijagonale, tj. duljinu potrebne letvice:

$$d^2 = 2^2 + 1.5^2 \Rightarrow d^2 = 4 + 2.25 \Rightarrow d^2 = 6.25 \Rightarrow d = 2.5.$$

Duljina jedne dijagonale iznosi 2.5m. Za dvije letvice potrebno je 5m letvice.

5 Algebra i trigonometrija

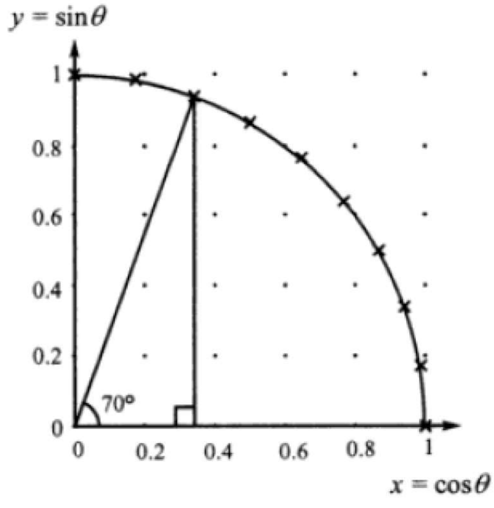
5.1 Uvođenje sinusa i kosinusa

Trigonometrisjke funkcije sinus, kosinus i tangens imaju vrlo važnu ulogu u matematici. Pomoću njih se pronalaze nepoznate veličine trokuta pomoću poznatih, a ovaj problem je i inspirirao njihov razvoj. Geometrijski problemi pronalaženja duljine i kutova zahtijevaju poznavanje navedenih funkcija. Za razumijevanje svojstava i primjene ovih funkcija važna je interakcija geometrije i algebre. Učenici često ovo gradivo smatraju teškim jer zadatke vide kao uvježbavanje puno različitih formula koje nisu međusobno povezane. Neophodno je razvijanje razumijevanja odnosa ovih triju funkcija u pravokutnom trokutu, te kako su povezane s jediničnom kružnicom. Osim toga, moraju biti jasna i svojstva grafova navedenih funkcija te veze između identiteta poput mreže povezanih ideja prije nego skup nepovezanih činjenica.

U velikom broju udžbenika sinus, kosinus i tangens se uvode pomoću omjera stranica u pravokutnom trokutu. Učenici zatim imaju velikih poteškoća jer dane formule uče bez razumijevanja. Puno prihvatljiviji način uvođenja ovih funkcija je pomoću duljina. Učenicima duljina predstavlja nešto jednostavno i konkretno što može biti predstavljeno brojem. U ranom učenju trigonometrije jednostavno poimanje duljine i uvećavanje množenjem faktorom imaju prednost pred definicijama koje uključuju omjere. Shvaćanje sinusa i kosinu kao duljina nije nova ideja, naime, ona datira još iz 15. stoljeća.

Upotrebom tehnologije poput kalkulatora i različitih računalnih softvera na nastavi pruža mogućnost boljeg predstavljanje ove teme učenicima. Korištenjem različitih pomagala veza između funkcija i njihovih grafova, te različita svojstva funkcija postaju jasnija. Tako na zanimljiv način uče i otkivaju nove činjenice, te se stvara pozitivan stav prema trigonometriji. Korištenje kalkulatora dobar je način za upoznavanje s trigonometrijom. Istraživanjem brojeva nastali korištenjem sinusa i kosinusa učenici na zanimljiv način uočavaju važne činjenice. Lijevo na Slici 21. prikazana je tablica vrijednosti kosinusa i sinusa zaokružena na dvije decimale za vrijednosti kuta između 0° i 90°, a na desno na Slici 21. prikazan je graf sinusa i kosinusa u ovisnosti o kutu θ. Crtajući grafove dobivamo dio kruga s radijusom 1 i centrom u ishodištu koji se nalazi u prvom kvadrantu što često učenike iznenadi i zainteresira za daljnje proučavanje trigonometrije. Lako se proširi raspon vrijednosti s 0° do 90° na cijelu krug, ali kvadrant daje dovoljno informacija za raspravu o tablici i grafu.

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
10	0.98	0.17
20	0.94	0.34
30	0.87	0.50
40	0.77	0.64
50	0.64	0.77
60	0.50	0.87
70	0.34	0.94
80	0.17	0.98
90	0	1

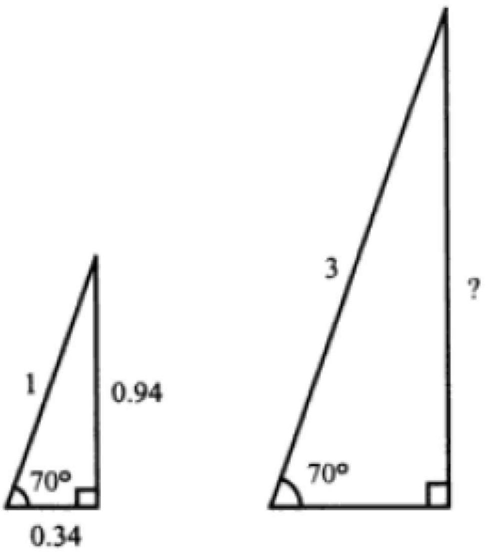


Slika 21.

Navođenjem od strane nastavnika, učenici istražujući danu tablicu i graf dolaze do različitih zaključaka:

- Točke su s jednakim razmacima raspoređene po kružnici.
- Vrijednost θ odgovara kutu mjerenog u stupnjevima u smjeru obrnutom od kazaljke na satu od osi x.
- Koordinate $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ daju točku na kružnici koja odgovara bilo kojem kutu θ.
- U tablici su vrijednosti sinusa i kosinusa jednaki, ali u obrnutom redoslijedu.
- Vrijednosti se ne povećavaju i ne smanjuju jednako za jednake pomake za kut θ. U početku se cos se smanjuje za male vrijednosti, a zatim za sve veće.
- Kada sinus i kosinus postignu jednake vrijednosti, zbroj pripadnih kutova je $90°$. Ova činjenica dovodi do zaključka da je $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$, tj. kosinus je jednak sinusu komplementarnog kuta.
- Sinus i kosinus postižu jednaku vrijednost za $\theta = 45°$.

Veliki broj zaključaka može se donijeti iz ovog jednostavnog grafičkog prikaza. Učenici mogu zapaziti različita osnovna svojstva i veze između ovih trigonometrijskih funkcija.

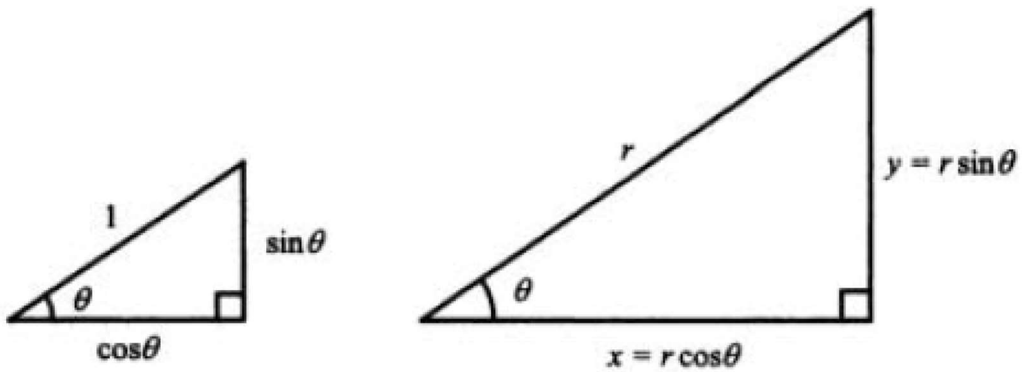


SLIKA 22.

Za razvijanje ideja za rješavanje problema pravokutnog trokuta učenicima može biti prikazan problem kao na Slici 22. Zadan je lijevi pravokutni trokut čija hipotenuza predstavlja ljestve duge 1 m. Učenici imaju zadatak pomoću danog trokuta odrediti koliko visoko dosežu ljestve duge 3 m koje također stoje pod kutom $70°$. Dobar način za poučavanje je razgovorom navesti učenike do zaključaka kako je prikazano u sljedećem dijalogu.

Nastavnik: Kako možemo odrediti koliko visoko dosežu ljestve duge 3m ako stoje pod kutom od 70°.
Učenici: Nacrtajmo prvo skicu.
Nastavnik: Što zaključujete?
Učenici: Tlo je horizontalno, a zid je vertikalan pa imamo pravokutni trokut.
Nastavnik: Što možete reći o ta dva trokuta?
Učenici: Slični su, drugi je uvećani prvi.
Nastavnik: Koji je faktor uvećanja?
Učenici: 3, zato što je hipotenuza 3.
Nastavnik: Kako možemo naći visinu koju dosežu ljestve?
Učenici: Ona iznosi $3 \cdot 0.94$ što je 2.82.
Nastavnik: Je li to točan odgovor?
Učenici: Očekujemo da će broj biti manji od 3. Bolje je zaokružiti na 2.8, jer 2.82 previše precizan za mjerenje duljine zida.
Nastavnik: Kolika je udaljenost od podnožja ljestava do zida?
Učenici: Odgovor je $3 \cdot 0.34$ što je 1.02. tj oko 1 metra.
Nastavnik: Kako bi izračunali koju visinu dosežu ljestve duge 5m?
Učenici: To bi bilo $5 \cdot 0.94$.
Nastavnik: A što ako je kut 75°, a ne 70°?
Učenici: Moramo promijeniti 0.94.
Nastavnik: Što je bilo 0.94?
Učenici: To je bilo $\sin 70°$, a sada trebamo $\sin 75°$. Visina koju dosežu ljestve duge $5m$ je $5 \cdot \sin 75$.
Nastavnik: Kako računamo koliko je udaljeno podnožje ljestava do zida?
Učenici: To je $5 \cdot \cos 75°$.

Logičkim zaključivanjem učenici sami uočavaju kako izračunati katete uvećanog pravokutnog trokuta pomoću zadanog manjeg trokuta. Nastavnik pravilnom upotrebom pitanja može učenike dovesti do zaključaka kako riješiti problem u općenitom smislu. Ovaj način poučavanja može biti uvježban i korišten na raznim matematičkim problemima. Ovaj pristup definira sinus i kosinus kuta kao duljine, točnije kao koordinate točke na jediničnoj kružnici koje tvore pravokutni trokut s hipotenuzom duljine 1. Uvećamo li lijevi trokut sa Slike 23. tako što duljinu svake stranice pomožimo s pozitivnim realnim brojem r, dobiva se općenita definicija sinusa i kosinusa kuta pomoću duljina strancica pravokutnog trokuta.



SLIKA 23.

Jednakosti $x = r \cdot \cos\theta$ i $y = r \cdot \sin\theta$, gdje su x i y duljine kateta pravokutnog trokuta, koriste se za definiranje odnosa između sinusa i kosinusa. Također, te jednakosti daju tradicionalnu definiciju sinusa i kosinusa pomoću omjera:

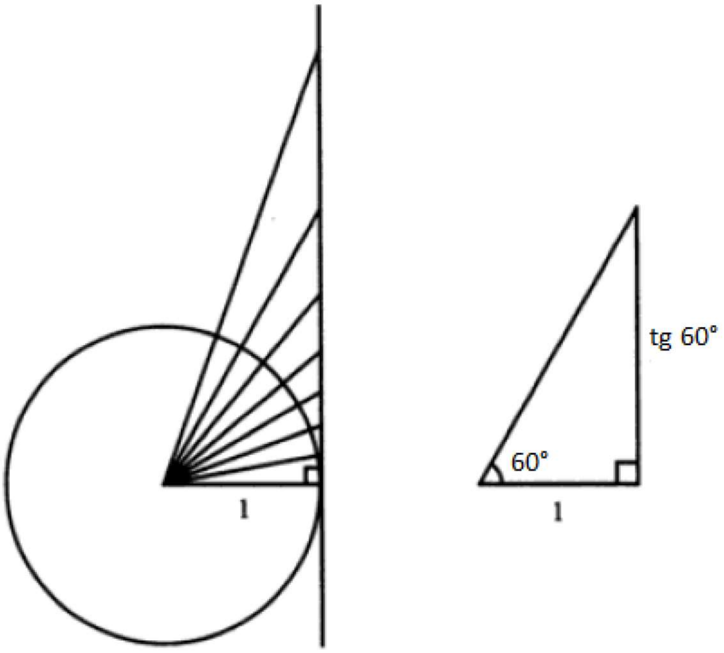
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$
$$\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Računanje duljine je lakši koncept od računanja omjera te se javlja prije određivanja kuta, za što je računanje omjera neizbježno. Štoviše, učenicima je lakše računati s jednakostima koji uključuju množenje nego s onima koji uključuju dijeljenje. Učenicima, čije algebarske vještine nisu još razvijene, lakše je početi s $a = bc$, a onda izvesti $b = \frac{a}{c}$ i $c = \frac{a}{b}$ nego raditi obrnuto. Isti problem se javlja i s drugim formulama koje imaju sličan oblik. Pa tako učenicima određivanje duljina stranica l i w pravokutnika iz formule za površinu $A = lw$ stvara poteškoće. Slično, iz formule za brzinu v pomoću udaljenosti d i vremena t, $v = \frac{d}{t}$, učenici teško dolaze do ekvivalentnih forma: $tv = d$, te $t = \frac{d}{v}$. Postoje udžbenici koji navode sve tri formule s ciljem da ih učenici upamte, umjesto da upamte samo jednu formulu, a ostale izvedu iz te. Pri rješavanju zadataka vezanih uz trigonometriju pravokutnog trokuta često se javljaju jednadžbe oblika $\cos\theta = \frac{5}{6}$.

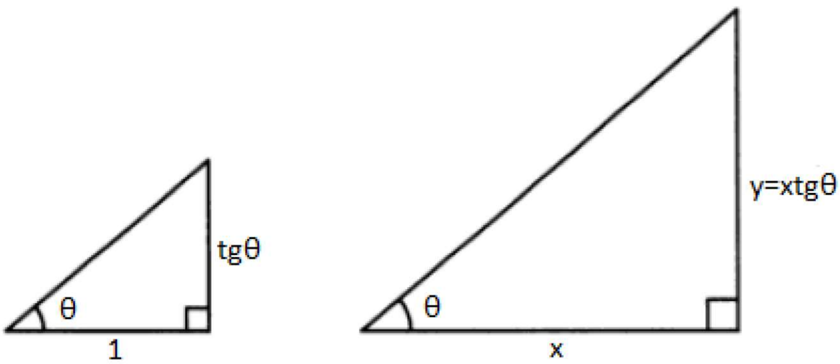
Prije nego što se učenike uputi na korištenje inverzne funkcije, korisno je dati im zadatak da odrede kut samo pomoću naredbe kosinus na kalkulatoru. Ovo se može činiti kao besmislen zadatak, ali na ovaj način učenici uočavaju smisao i korisnost inverznih funkcija. Bez ovakvog pristupa učenici bi inverznu funkciju smatrali još jednom tipkom na kalkulatoru kojoj ne razumiju smisao i pravilom koje moraju zapamtiti.

5.2 Tangens

Pojam tangensa može biti uveden u nastavu prije pojmova sinusa i kosinusa ili u kasnijem stadiju učenja trigonometrije. Obrađivanje sinusa, kosinusa i tangensa u isto vrijeme može narušiti razumijevanje ideja i učiniti učenike zbunjenima. Sinus i kosinus je prirodno obrađivati u isto vrijeme jer imaju puno zajedničkog. Korisno je prikazati njihova svojstva, grafove i primjene kako bi učenici povezali pojmove sinus i kosinus. Međutim, jednostavni zadaci poput pronalaska visine drveta pomoću kuta elevacije dobar je primjer za uvođenje tangensa. Uvođenje tangensa u nastavu slično je kao i uvođenje sinusa i kosinusa, postavljaju se slična pitanja koja se odnose na definiciju i rješavanje jednadžbi.



Slika 24.



Slika 25.

Tangens se tako može definirati kao omjer ili kao duljina, ali se duljina smatra prihvatljivijim načinom. Slika 24. prikazuje jediničnu kružnicu s tangentom, te je spojeno središte kružnice s točkama tangente u intervalima duljine 10. Duljina tangente od točke dodira tangente s kružnicom do sjecišta kraka kuta s tangentom jednaka je tangensu odgovarajućeg kuta. Vrijednosti ovih duljina mogu se mjeriti, a zatim provjeriti upotrebom kalkulatora. S druge strane, vrijednosti dobivene kalkulatorom mogu se iskoristiti za crtanje točaka na tangenti kako bi učenici promatrali svojstva kutova.

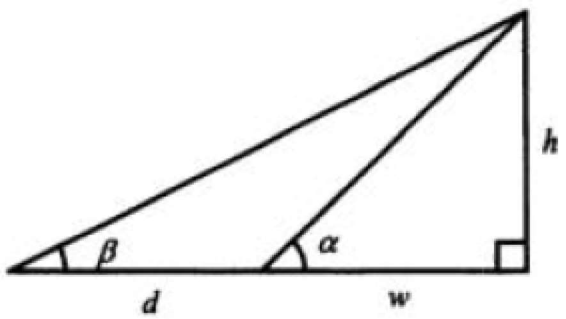
Desno na Slici 24. prikazan je pravokutan trokut sa šiljastim kutom od 60° i katetom duljine 1. Zaključujemo kako je duljina druge katete jednaka $\operatorname{tg} 60°$. Na Slici 25. prikazno je kako doći do općenite definicije za tangens. Na lijevoj slici prikazan je općeniti slučaj kada je zadan kut θ i duljina katete jedan. S druge strane, na desnoj Slici 25. prikazan je uvećan lijevi trokut tako što su duljine stranica pomnožene s pozitivnim realnim brojem x. Budući da je $y = x \operatorname{tg} \theta$, dobiva se defincija tangensa pomoću omjera duljina kateta pravokutnog trokuta:

$$y = x \operatorname{tg} \theta \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}.$$

5.3 Rješavanje trigonometrijskih problema

Pri rješavanju zadataka vezanih uz pravokutni trokut kada je jedan kut poznat, učenici imaju poteškoće s odabirom između sinusa, kosinusa i tangensa pri pravilnom postavljanju zadatka. Problem im je upamtiti definicije i primijeniti ih točno na stranice i kutove trokuta. Osim definicija pojmova problem im stvaraju i algebarske jednadžbe koje zatim treba riješiti. Također, javljaju se manje poteškoće s obilježavanjem, korištenjem kalkulatora, te pravilnom zaokruživanju rješenja. Prevladavanje poteškoća s kojima se učenici sesreću nije lako. Važno je da pri poučavanju učenici shvate smisao i primjenu definicija, te postupke koji se temelje na tečnosti rješavanja jednadžbi. Potrebno je dobro uvježbati nove ideje, ali to zahtjeva više od samog ponavljanja sličnih procedura bez razumijevanja problema koji se tim postupkom rješava. Usmenim postavljanjem pitanja nastavnik potiče učenike na razmišljanje i zaključivanje na danu temu. Štoviše, na ovaj način nastavnik uočava učenikova pogrešna shvaćanja te odmah reagira na njih i time razvija bolje razumijevanje gradiva. Kada je u pitanju poučavanje trigonometrije, preporuča se prikazivanje trokuta i navođenje pitanjima do točnih zaključaka i postavljanja točnih jednadžbi. Prikazivanjem pravokutnog trokuta sa zadanim šiljastim kutom i duljinom jedne stranice ili pravokutnog trokuta sa zadanim duljinama dvije stranice od učenika se može zatražiti zapisivanje jednadžbi za određivanje nepoznatih stranica i kutova. Važno je povezati trigonometriju s problemima iz stvarnog života kako bi učenici uočili svrhu učenja ovog gradiva. Davanjem značenja matematičkim pojmovima, što često manjka u udžbenicima, učenici razvijaju pozitivan stav prema matematici. Zahtjevniji trigonometrijski zadaci mogu uključivati dodatne algebarske probleme ili razne geometrijske ideje poput Pitagorinog teorema za pronalazak rješenja, tako učenici razvijaju razne vještine. Sljedeći primjer povezuje znanje trigonometrije, geometrije i algebre.

Primjer 7. *Odredite visinu drveta h ukoliko su poznati kutovi elevacije α i β, udaljenost d između dvije točke na tlu, te udaljenost w bliže točke na tlu do drveta, kako je prikazano na Slici* 26.



SLIKA 26.

Kut koji gleda iznad razine horizonta zovemo kut elevacije, dok za onaj koji gleda ispod razine kažemo da je kut depresije.
Dva pravokutna trokuta sa slike daju jednadžbe:

$$h = w \operatorname{tg} \alpha \text{ i } h = (w + d) \operatorname{tg} \beta.$$

Budući da duljina w nije potrebna, izlučivanjem i izjednačavanjem dobiva se:

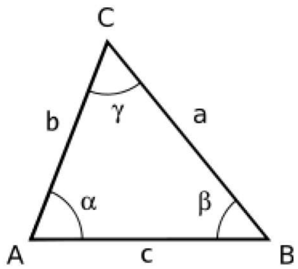
$$\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} - d \Rightarrow h = \frac{d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Pronalazak ovakvog općenitog rješenja zahtjeva značajno algebarsko razumijevanje i tečnost u rješavanju. Lakši zadatak bi bio kada bi kutovi bili točno zadani 11.3°i 22.6°. Odgovarajuće vrijednosti tangensa u zadanim kutovima zaokružene na jednu decimalu iznose 0.2 i 0.5. Zatim, ako udaljenost između dvije točke na tlu iznosi 60 metara, početne jednadžbe imaju oblik:

$$h = 0.5w \text{ i } h = 0.2(w + 60).$$

Rješavanjem sustava dobiva se visina drveta h i ona iznosi 20 metara. Sustav ove dvije jednadžbe jednostavnije je riješiti nego prethodne jednadžbe u općenitoj formi. Rješavanje zadataka s manje prikladnim brojevima pokazat će prednost korištenja općenite formule, čak i kada se za izračun koristi kalkulator. Međutim, to je ipak dobra strategija poučavanja kojom se pokazuju algebarski koraci za rješavanje zadatka.

5.4 Kosinusov i Sinusov teorem



Slika 27.

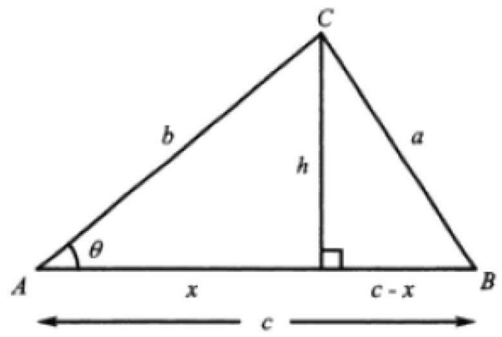
Teorem 9. *Ako je zadan trokut ABC onda su a, b, c duljine njegovih stranica, a α, β, γ odgovarajući unutarnji kutovi, tada vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Ako je kut pri vrhu C pravi, onda je $\cos \gamma = 0$. Na taj se način iz Kosinusovog teorema dobiva tvrdnja Pitagorinog teorema: $c^2 = a^2 + b^2$.

Kosinusov teorem je matematički koncept koji također može biti uveden u nastavu matematike kao problemski zadatak koji učenici sami rješavaju sustavnim zaključivanjem pomoću zadatka navedenog u sljedećem primjeru. Učenici koriste zadane elemente, povezuju znanja iz geometrije, trigonometrije, te koriste svoje algebarske vještine kako bi došli do rješenja.

Primjer 8. *Pronađite duljinu treće stranice trokuta sa stranicama* 5 *cm i* 8 *cm i kutom među njima od* 39°.



Slika 28.

Postupak rješavanja ovog problema u općenitoj formi daje iskaz Kosinusovog teorema. Trokut tada ima poznate duljine stranica b i c, te kut a među njima. Spuštanjem okomice iz vrha C na stanicu c dobiva se visina trokuta h, a nožište te visine dijeli stranicu c na dva dijela duljina x i $c - x$. Zadatak je odrediti duljinu stranice a. Primjenom Pitagorinog teorema na dobivena dva pravokutna trokuta dobivaju se sljedeće dvije jednadžbe:

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2$$
$$b^2 = x^2 + h^2.$$

Oduzimanjem ove dvije jednadžbe eliminira se h i dobiva se veza između duljina a, b, i x:

$$a^2 - b^2 = (c - x)^2 - x^2 = c^2 - 2cx.$$

Primjenom tangensa poznatog kuta θ dobiva se jednadžba $x = b\cos\theta$ te uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobiva se tvrdnja Kosinusovog teorema:

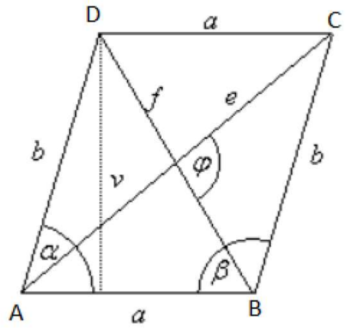
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Uvrštavanjem poznatih veličina u jednadžbu dobiva se: $a = 89 - 80\cos 34°$. Često učenici griješe pri rješavanju ove jednadžbe pa dobivaju: $a = 9\cos 34°$. Ovu grešku bi trebali sami uočiti jer dobivaju duljinu stranice a manju od 3, a tada zbroj duljina svake dvije stranice nije veći od duljine treće stranice, tj. ne postoji takav trokut. Nastavnici trebaju biti svjesni da učenici često rade ovu pogrešku i njoj dodatno posvetiti. Važno je komentirati njezine posljedice, te poticati učenike da provjeravaju jesu li dobiveno rješenje smisleno, a time i je li provedeni postupak rješavanja točan.

Učenicima Kosinusov teorem ima više smisla ako su vidjeli njegov izvod pomoću već poznatih činjenica, a ne kao zasebnu formulu koju treba naučiti. Nastavnici bi trebali birati aktivnosti tako da učenici logičkim zaključivanjem dođu do važnih činjenica. Učenici bi sami trebali doći do zaključka kako je Kosinusov teorem proširenje Pitagorinog teorema, te bi samostalno trebali ispitivati vrijednost kosinusa i sinusa za različite kutove jer na taj način najbolje uče i pamte nove činjenice. U nastavku je prikazan dijalog u kojem učenici sami dolaze do različitih zaključaka. Osim dijalogom, nastavnici se mogu koristiti različitim tablicama, grafičkim prikazima i softverima kako bi učenike potaknuli na pravilno zaključivanje.

Nastavnik: Što ako je kut u Kosinusovom teoremu jednak 90°?
Učenici: Kosinus je jednak 0, pa dobivamo $c^2 = a^2 + b^2$, tj. tvrdnju Pitagorinog teorema!
Nastavnik: Što ako je kut manji od 90°?
Učenici: Dobivamo manji broj jer oduzimamo $2b\cos\theta$.
Nastavnik: A što ako je kut veći od 90° ?
Učenici: Računajući kosinus tupog kuta dobivamo negativan broj pa oduzimanjem negativnog broja zapravo dodajemo $2b\cos\theta$ pa dobivamo veći broj.

Nakon upoznavanja s Kosinusovim teoremom, učenici mogu samstalno izvesti formulu koja povezuje duljine dijagonala paralelograma sa stranicama paralelograma te formulu za površinu paralelograma ako su poznate duljine stranica paralelograma i kut među njima.



Slika 29.

Rješavanje problema vezanih uz paralelograma se najčešće svodi na rješavanje trokuta na koji taj paralelogram dijele dijagonale paralelograma. Neka je zadan paralelogram sa stranicama duljina a i b te šiljasti kut α, kako je prikazano na Slici 29. Primjenom Kosinusovog teorema odredimo duljine dijagonala paralelograma te njegovu površinu P. Primjenom Kosinusovog teorema na trokut ABD dobivamo:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Budući da je zbroj susjednih kutova u paralelogramu jednak 180°, vrijedi $\beta = 180° - \alpha$. Iskoristimo li činjenicu da je $\cos(180° - x) = -\cos x$ slijedi:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Zbrajanjem jednakosti slijedi veza između duljina dijagonala i stranica paralelograma:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Površinu paralelograma računamo po formuli:

$$P = av.$$

Budući da vrijedi $v = b\sin\alpha$ slijedi formula za površinu paralelograma pomoću stranica paralelograma i kuta između njih:

$$P = ab\sin\alpha.$$

5.5 Sinusov teorem

Teorem 10. *Ako je zadan trokut ABC s duljinama stranica a, b i c te odgovarajućim kutovima α, β i γ, tada vrijedi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Navedene jednakosti možemo zapisati u obliku produženog razmjera:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Dokaz Na nastavi se Sinusov poučak obrađuje kada i Kosinusov, te se dokazuje pomoću iste skice kao i Kosinusov poučak. Uz navođenje nastavnika učenici lako mogu doći do tvrdnje teorema. Primjenom definicije sinusa na pravokutne trokute na Slici 28. dobivaju se sljedeće jednadžbe: $b\sin\alpha = h$ i $a\sin\beta = h$.
Izjednačavanjem jednadžbi slijedi:

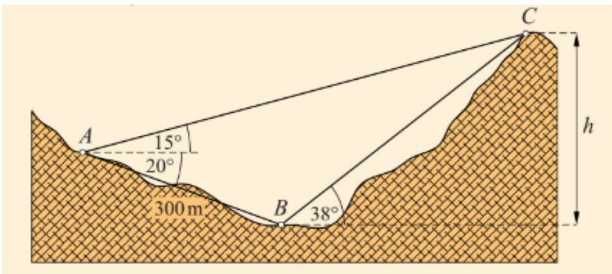
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Na sličan način dobiva se i drugi dio tvrdnje Sinusovog teorema. U nastavku je primjer iz školskog udžbenika koji prikazuje primjenu Sinusovog teorema u problemima iz stvarnog života.

Primjer 9. *Vrh C brda vidi se iz mjesta A pod kutom $15°$, a iz podnožja B brda, 300 metara udaljenog od A, pod kutom od $38°$, kako je prikazano na Slici 30. Ako nagib od A do B iznosi $20°$, kolika je visina h brda?*

Korištenjem zadanih podataka slijedi:

$$\begin{aligned}\alpha &= \angle CAB = 15° + 20° = 35°\\ \beta &= \angle ABC = 180° - (20° + 38°) = 122°\\ \gamma &= 180° - (\alpha + \beta) = 23°.\end{aligned}$$



SLIKA 30.

Budući da je poznata stranica $c = |AB|$, korištenjem Sinusovog poučka slijedi:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c = \frac{\sin 35°}{\sin 23°}\cdot 300 = 440.4 \text{ m}.$$

Primjenom definicije sinusa dobiva se visina brda h:

$$h = a\sin 38° = 271 \text{ m}.$$

5.6 Trigonometrijski identiteti

Učenici često trigonometriju smatraju teškom jer ju povezuju s velikim brojem formula koje moraju upamtiti, a čija svrha im je nejasna. Ako učenici razumiju osnovne definicije sinusa, kosinusa i tangensa i nekoliko ključnih rezultata, ostale formule mogu lako izvesti. Tada učenici nemaju problema s pamćenjem i primjenom tih formula. Učenicima pri učenju tih formula mogu pomoći i grafički prikazi, tablice i različiti numerički primjeri. Pravokutni trokut s hipotenuzom duljine jedan prikazuje duljine kateta pomoću sinusa i kosinusa. Primjenom Pitagorinog teorema se dobiva osnovni trigonometrijski identitet:

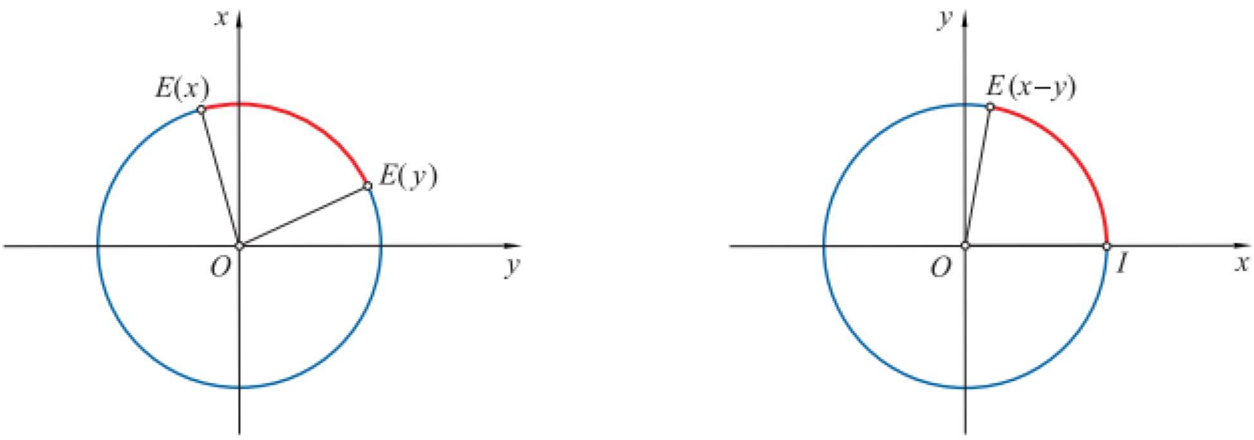
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Ako znamo vrijednost jedne trigonometrijske funkcije za neki θ, pomoću osnovnog identiteta možemo odrediti vrijednost druge funkcije:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

Predznak biramo prema kvadrantu ovisno o kutu θ.

5.6.1 Adicijske formule za kosinus



Slika 31.

Neka su x i y dva realna broja iz intervala $[0, 2\pi]$, te neka je $x \geq y$. Brojevima $x, y, x-y$ pridružene su točke $E(x), E(y), E(x-y)$ na brojevnoj kružnici, a točki I pripada točka $E(0)$, kako je prikazno na Slici 31. Duljina luka od točke $E(y)$ do točke $E(x)$ jednaka je duljini luka od točke I do točke $E(x-y)$ pa su pripadne tetive jednake duljine:

$$\left|E(x)E(y)\right| = \left|IE(x-y)\right|.$$

Koordinate točaka sa Slike 31. su:

$$E(y) = (\cos y, \sin y)$$
$$E(x) = (\cos x, \sin x)$$
$$E(x-y) = (\cos(x-y), \sin(x-y))$$
$$E(0) = I = (1, 0).$$

Korištenjem formule za udaljenost dviju točaka dobiva se:

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x-y) - 1)^2 + (\sin(x-y) - 0)^2}.$$

Kvadriranjem jednadžbe i korištenjem osnovnog trigonometrijskog identiteta slijedi:

$$2 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2 - 2\cos(x-y).$$

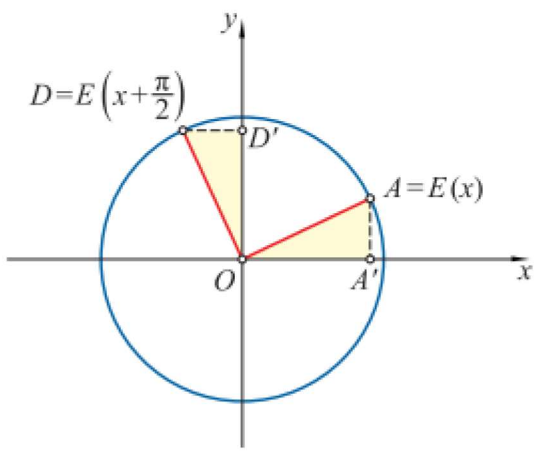
Dodavanjem -2 na obje strane, te množenjem s $\frac{-1}{2}$ dobivamo traženi trigonometrijski identitet:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Time smo dokazali identitet za razliku dva realna broja x, $y \in \left[0, 2\pi\right]$, $x \geq y$. Ako je $y \geq x$, tada je $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$, kako zbog parnosti kosinusa vrijedi: $\cos(y-x) = \cos(x-y)$. Dakle, identitet vrijedi za svaka dva realna broja iz intervala $\left[0, 2\pi\right]$. Ako u gornju relaciju umjesto y stavimo $-y$ i iskoristimo parnost kosinusa i neparnost sinusa dobiva se formula kojom je kosinus zbroja dva broja prikazan pomoću kosinusa i sinusa tih brojeva:

$$\begin{aligned}\cos(x - (-y)) &= \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

5.6.2 Formule redukcije za argument $x + \frac{\pi}{2}$



Slika 32.

Neka je $A = E(x)$ točka brojevne kružnice dobivena eksponencijalnim preslikavanjem broja $x \in R$, a neka je A' njena ortogonalna projekcija na x os. Zarotiramo li trokut OAA' za 90° u pozitivnom smjeru. Točka A preslikava se u točku $D = E(x + \frac{\pi}{2})$. Budući da rotacija čuva udaljenosti zaključujemo:

$$|OD'| = |OA'| \text{ i } |DD'| = |AA'|.$$

Budući da je $|OA'| = \cos x$, a $|OD'| = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, vrijedi:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$$

S druge strne, $|AA'| = \sin x$, a $|DD'| = \cos(x+\frac{\pi}{2})$, te uzimajući u obzir da je predznak sinusa u prvom kvadrantu pozitivan, a predznak kosinusa u drugom kvadrantu negativan slijedi:

$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

Slično se pokazuju i formule redukcije za argumente $\frac{\pi}{2}-x, \pi+x$ i $\pi-x$. Tvrdnje se dokazuju i pomoću adicijskih formula za zbroj i razliku uvrštavanjem konkretnih vrijednosti kutova, ali geometrijske predodžbe formula redukcije omogućit će primjenu formula s razumijavenjem, bez njihovog učenja napamet.
Poznavajući formule redukcije i formule za kosinus zbroja i razlike dva realna broja lako se dobiva formula za sinus zbroja i razlike dva realna broja:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\cos((x+y)+\frac{\pi}{2}) = -\cos(x+(y+\frac{\pi}{2}))\\ &= -\cos x\cos(y+\frac{\pi}{2}) + \sin y \sin(y+\frac{\pi}{2})\\ &= \cos x \sin y + \sin y \cos y.\end{aligned}$$

Ako umjesto y stavimo $-y$ i iskoristimo parnost kosinusa i neparnost sinusa, dobiva se traženi identitet:

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \cos x \sin(-y) + \sin x \cos(-y)\\ &= -\cos x \sin y + \sin x \cos y\\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.\end{aligned}$$

6 Zaključak

Algebra je dio matematike s kojim se učenici susreću kroz sve cikluse obrazovanja. Kako bi učenici razvili pozitivan stav prema algebri važno da uz tečnost rješavanja učenici shvaćaju smisao algebre. Razumijevanjem ovog gradiva povećat će se učenikova motiviranost i zainteresiranost za daljnjim učenjem. Moć algebre je u tome što pruža mogućnost poopćivanja problema te zatim rješavanje specijalnih slučajeva. Algebra pomaže pri rješavanju različitih problema iz raznih područja matematike pa je tako geometrija veliki izvor zadataka, teorema i njihovih dokaza u kojima se koristi algebarsko razmišljanje. Budući da učenici često slova u matematici interpretiraju kao objekte, geometrija daje veliki broj primjera kako bi učenici lakše shvatili značenje slova u matematici. Dobri primjeri za to su duljina i mjera kuta. Budući da se problemi vezani uz ove pojmove prikazuju pomoću različitih skica, učenici mogu jasno uočiti kako im algebra pomaže za rješavanje različitih problema. S druge strane, trigonometrija je također izvrstan primjer korištenja algebre. Često učenici stvaraju negativan stav prema geometriji i trigonometriji jer ih vide kao veliki broj formula koje nemaju smisao i koje moraju naučiti na pamet. Ključnu ulogu za razvijanje pozitivnog stava prema matematici imaju nastavnici. Važno je svaku formulu izvesti pomoću poznatih činjenica kako bi učenici uočili kako izvedena formula ima smisla. Često učenici imaju negativan stav prema trigonometriji jer ne vide njezinu svrhu pa je važno prikazati primjere iz stvarnog života gdje se ona koristi. Važno je da pri prvom susretnu s trigonometrijom učenici dobro razumiju što je to sinus, kosinus i tangens nekog broja, a zatim će daljnje učenje biti puno lakše. Vrlo važno u suvremenoj nastavi matematike je korištenje tehnologije, ona omogućava nastavnicima da pomoću različitih softvera prikažu učenicima nastavno gradivo kako bi ga oni lakše i bolje usvojili. Na taj način se kod učenika razvija zainteresiranost za nastavno gradivo te lakše uočavaju i pamte različite matematičke činjenice.

7 Sažetak

Kroz prvi dio rada odgovorili smo na pitanje "Zašto učimo algebru?", te budući da je prvi susret ključan za razvijanje pozitivnog stava o algebri, naveli smo načine uvođenja algebre u nastavu. Od samog početka učenja algebre, uz uvježbavanje manipuliranja algebarskim izrazima, važno je prikazivati razne primjere iz stvarnog života kako bi učenici shvatili kako im algebra pomaže pri rješavanju različitih problema.U drugom dijelu rada prikazali smo vezu algebre i geometrije. Učenici grafičke prikaze prihvaćaju s lakoćom jer pružaju bolji uvid u značenje različitih algebarskih izraza, a s druge strane učenici uočavaj kako je algebra moćan alat za rješavanje različitih geometrijskih problema. Prikazali smo kako algebru koristimo u jednakokračnom trokutu, te kako nam pomaže pri računanju kutova mnogokuta, opsega i površina različitih likova. Prikazali smo primjer kako problem iz stvarnog života rješavamo pomoću veze algebre i sličnosti trokuta, te nekoliko dokaza Pitagorinog teorema i njegovu primjenu u stvarnom životu. U trećem dijelu rada bavili smo se vezom algebre i trigonometrije. Budući da učenici često imaju negativan stav prema trigonometriji jer ju vide kao veliki broj formula koje nemaju smisao, važno je da od prvog susreta s trigonometrijom učenici shvate pojmove sinus, kosinus i tangens, a zatim svaku formulu izvedu pomoću poznatih činjenica kako bi uočili njihov smisao. Prikazali smo kako uvesti pojmove sinus, kosinus i tangens u nastavu, riješili smo nekoliko trigonometrijskih problema, upoznali se sa Sinusovim i Kosinusovim teoremima te izveli nekoliko trigonometrijskih identiteta. Prikazano je i nekoliko primjera iz stvarnog života kako bi učenici vidjeli primjenu trigonometrije, što razvija pozitivan stav i motivaciju za učenjem trigonometrije.

Ključne riječi: Algebra, Geometrija, Jednakokračni trokut, Sličnost trokuta, Opseg, Površina, Pitagorin poučak, Trigonometrija, Sinus, Kosinus, Tangens, Trigonometrijski identiteti

8 Abstract

Throughout the first part of the paper, we addressed the question "Why do we learn algebra", and listed ways of introducing algebra into teaching since the first encounter is pre-eminent for the development of a positive attitude towards algebra. From the very beginning of learning algebra, besides practicing manipulation with algebraic expressions, it is important to present a variety of real-life examples to help students understand how algebra helps them solving different problems. In the second part of the paper, we have demonstrated the interlink of algebra and geometry. Student accepts graphics display with ease because they provide a better insight into the meaning of different algebraic expressions. On the other hand, students realize that algebra is a powerful tool for solving all sorts of geometric problems. We have demonstrated how algebra is used in the isosceles triangle and how it helps us calculate the angles of a polygon, perimeter, and area of different shapes. We have also demonstrated how real-life problems are solved by using the interlink of algebra, similarity of the triangle, and Pythagorean theorem. The third part of the paper deals with algebra and trigonometry. Since students often have a negative attitude towards trigonometry, mainly because they perceive it as a large number of formulas with meaning, it is important that from the first encounter with trigonometry students understand the concepts of sinus, cosine, and tangent, and only then should the formulas be derived from known facts in order for students to be able to perceive their meaning. The paper shows how to introduce the concepts of sinus, cosine, and tangent to the teaching, and how to solve several trigonometric problems. The paper also shows how to get acquainted with the Sinus and Cosine theorems and to perform several trigonometric identities. In addition, there are some real-life examples of how should the students perceive the application of trigonometry, which develops a positive attitude and motivation towards learning trigonometry.

Keywords: Algebra, Geometry, Isosceles Triangle, Similarity of Triangle, Perimetre, Area, Pythagorean theorem, Trigonometry, Sinus, Cosine, Tangent, Trigonometric Identities

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3*, Element, Zagreb, 2009.

[2] D. French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

[3] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 7*, Alfa, Zagreb, 2014.

[4] <https://edutorij.e-skole.hr> Pristupljeno 15. travnja 2019.

Životopis

Moje ime je Ivana Jurjević, rođena sam 1. ožujka 1994. godine u Đakovu. U osnovnu školu Josipa Antuna Ćolnića upisujem 2000. godine. Nakon završetka osnovne škole 2008. godine obrazovanje nastavljam u jezičnoj gimnaziji Antuna Gustava Matoša u Đakovu koju završavam 2012. godine. U istoj godini upisujem Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, a zatim se 2015. godine prebacujem na nastavnički studij matematike i informatike. Imam višegodišnje radno iskustvo preko studentskog serivsa, a tijekom apsolventske godine radila sam kao zamjena nastavnice matematike u Osnovnoj školi Otok u Zagrebu.