Vrednovanje u nastavi matematike: vrste, pristupi i metode

Begić, Matea

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:524645

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Matea Begić

Vrednovanje u nastavi matematike: vrste, pristupi i metode

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Matea Begić

Vrednovanje u nastavi matematike: vrste, pristupi i metode

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod **i**

2 Što je to vrednovanje? **1**

3 Vrste vrednovanja **3**

3.1 Unutarnje i vanjsko vrednovanje 3

3.2 Dijagnostičko, sumativno i formativno vrednovanje 5

4 Vrednovanje u nastavi matematike **9**

4.1 Sumativno vrednovanje 9

4.1.1 Pismeni ispit 9

4.1.2 Državna matura 12

4.1.3 PISA istraživanje 14

4.2 Formativno vrednovanje 16

4.2.1 Uvijek, ponekad, nikad 17

4.2.2 Frayer model 18

4.2.3 Riješi i baci 20

4.2.4 Slažem se, ne slažem, ovisi 22

4.2.5 Popis naziva/pojmova 23

4.2.6 3-2-1 model 23

4.2.7 Dvije zvijezde i želja 24

4.2.8 Primjer-Protuprimjer 25

4.2.9 Semafor kartice 26

4.2.10 SWOT analiza 27

4.2.11 Metoda četiri kuta 29

4.2.12 Rubrike 30

4.3 Svrha formativnog vrednovanja u nastavi matematike 36

5 Metode vrednovanja **37**

5.1 Vrednovanje za učenje 37

5.2 Vrednovanje kao učenje 39

5.3 Vrednovanje naučenog 43

6 Zaključak **45**

Literatura **46**

Sažetak **47**

Summary **47**

Životopis **48**

1 Uvod

Današnje shvaćanje vrednovanja je opširnije, polazi od sveobuhvatno razrađenih ciljeva i načina provođenja vrednovanja. Učenici se stavljaju u situacije u kojima će shvatiti ciljeve i zadatke odgoja i obrazovanja te osvijestiti koje su njihove potrebe. Također naglasak se stavlja i na učenikovo upravljanje vlastitim učenjem, kao i na povećanje samokontrole u učenju. Uspješnost učenika ovisi o ostvarivanju tih zahtjeva, a time i vrednovanje učenika u nastavi postaje važan čimbenik za uspješnost učenika i ostvarivanje željenih ciljeva.

Iza svakog uspješnog učenika stoji uspješni učitelj. Da bi učitelj dobro procijenio učenikovo napredovanje, i time pomogao učenicima u procesu učenja, bitno je da kontinuirano istražuje i stvara alternativne metode vrednovanja koje su više usmjerene na proces učenja i motivaciju učenika, a manje na ocjene.

U drugom poglavlju diplomskog rada vidjet ćemo što je to vrednovanje i koje sve aktivnosti obuhvaća da bi se provelo kvalitetno vrednovanje.Vidjet ćemo zašto je vrednovanje važan dio svakog kurikuluma i koja je uloga učitelja prilikom vrednovanja učenika.

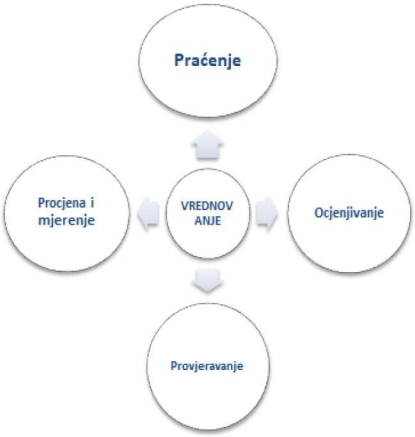
U trećem poglavlju promatramo različite vrste vrednovanja. Može se podijeliti sa obzirom na različite aspekte, a to su: s obzirom na to tko provodi vrednovanje, kada se provodi, u odnosu na što se vrednuje kod učenika te kako se vrednuje. Posebno ćemo spomenuti kakvo je to dijagnostičko vrednovanje, a kakvo sumativno i formativno, te koja je njihova razlika.

U četvrtom poglavlju ćemo promatrati vrednovanje u nastavi matematike. Na primjerima ćemo vidjeti na koji način se može provesti sumativno, a na koji način formativno vrednovanje u matematici. Nabrojati ćemo nekoliko različitih strategija formativnog vrednovanja. Opisati ću svaku posebno te pokazati na primjerima kako se može svaka od njih koristiti na satu. Namjena svih njih je promicanje učenja i poboljšanja poučavanja. Potiču učenike na matematičko razmišljanje i logično zaključivanje, čine nastavni sat zanimljivijim, daju povratnu informaciju nastavnicima, procjenjuju uspješnost odrađenog sata i sl.

U petom poglavlju upoznati ćemo tri pristupa vrednovanja: Vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog. Saznat ćemo koja je njihova svrha, te kako pomažu učenicima, a kako učiteljima. Vidjet ćemo na koji način se mogu koristiti u nastavi, te učiniti sat matematike zanimljivijim.

2 Što je to vrednovanje?

Vrednovanje u odgojno-obrazovnom sustavu obuhvaća sve aktivnosti kojima dolazimo do informacija o tome jesu li ostvareni planirani odgojno-obrazovni ciljevi i zadatci (Mužić, Vrgoč, 2005). Za pojam vrednovanje koristi se i istoznačni međunarodni termin evaluacija. Vrednovanje je važan element svakog kurikuluma. Da bi se uspješno proveo proces vrednovanja bitno je povezati više aktivnosti u jednu cjelinu. Tu spadaju praćenje učenika, provjeravanje, ocjenjivanje, procjenjivanje i mjerenje. Ti pojmovi su sličnog značenja kao i vrednovanje.



Slika 1.1. *Vrednovanje*

Praćenje je zapravo oblik vrednovanja koje se provodi tijekom aktivnosti i daje nam informaciju o napretku učenika, odnosno poteškoćama i nedostatcima. Dosta je važna stavka jer ako se na vrijeme uoče neke poteškoće mogu se ukloniti, a time će učenik moći uspješno ostvariti svoje ciljeve i djelatnosti. U procesu praćenja se prati i tijek i rezultat. Kroz praćenje se nastoji što bolje upoznati učenika i teži se uzeti u obzir što više elemenata, koji kasnije utječu na konačnu ocjenu.
Slično praćenju je provjeravanje učenika. Razlika između njih je što praćenje implicira kontinuiranost, dok se provjeravanje veže uz iterativnost. Provjeravanje podrazumijeva utvrđivanje trenutačnog stanja. To je postupak koji učitelju daje povratnu informaciju do koje su razine učenici utvrdili određena znanja, sposobnosti i vještine. Pod pojmom ocjenjivanja podrazumijevamo davanje ocjena učeniku. Osim ocjena određenih ljestvicom od 1 do 5 učenik se može ocijeniti i pomoću tekstualnog opisa.

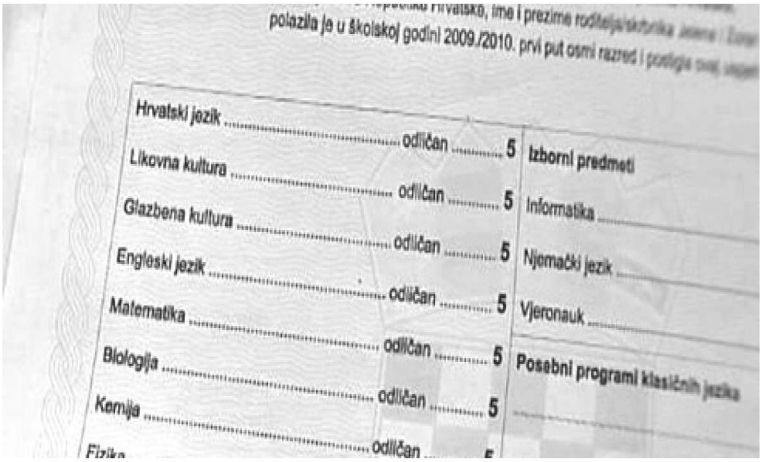
Učitelj opisuje riječima ono što ocjenjuje i to većinom služi kao obavijest roditeljima, ali i samim učenicima o njihovom uspjehu. Ocjenjuju se učenikovi usmeni i pismeni odgovori, tehnički i praktički radovi, te druge aktivnosti među kojima se posebno ističe zalaganje na satu.
Iako je u vrednovanju učenika bitno i procjenjivanje. Ono se ipak razlikuje od ostalih jer je to postupak u kojem je ponajprije naglasak na subjektivnom mišljenju onoga koji procjenjuje, bez obzira na to temelji li se ta procjena i na objektivnim kriterijima. Procjena je slična samom vrednovanju, ali se ne mora sa njime podudarati. Procjena se većinom odnosi na analizu i vrednovanje užeg dijela neke djelatnosti, dok se pod vrednovanjem uzima u obzir vrednovanje cjeline ili više povezanih djelatnosti u jednu cjelinu.
Za razliku od procjenjivanja, mjerenje je aspekt vrednovanja u kojem prevladava težnja za što objektivnijim izrazom njegovih rezultata (Mužić, Vrgoč, 2005).
Iako su učenici sami krojači svojih rezultata i ocjena, veliku ulogu imaju i učitelji. Oni trebaju odgovorno i pravedno pristupiti svojoj zadaći. Uzeti u obzir sve ove aktivnosti, od procjene mogućnosti učenika, praćenja učenika tokom aktivnosti, pa sve do same provjere učenikovog znanja. Uočiti je li učenik napredovao ili ne, te u skladu sa svim povratnim informacijama provesti vrednovanje učenika.

3 Vrste vrednovanja

Vrednovanje možemo promatrati s različitih aspekata: s obzirom na to tko provodi vrednovanje, kada se provodi, što se vrednuje kod učenika te kako se vrednuje. S obzirom na to tko provodi vrednovanje može biti: unutarnje (interno) i vanjsko (eksterno).

3.1 Unutarnje i vanjsko vrednovanje

Unutarnje vrednovanje je vrednovanje koje provode učitelji zajedno s učenicima praćenjem aktivnosti i utvrđivanjem rezultata ili postignuća. Razina postignuća iskazuje se školskim ocjenama. Načini vrednovanja su pismeni i usmeni. A učitelji sami određuju način na koji se provodi kao i njegovu težinu. Uzimaju u obzir sve faktore tokom školske godine i tako dolaze do zaključnih ocjena.



Slika 2.1. *Zaključne ocjene*

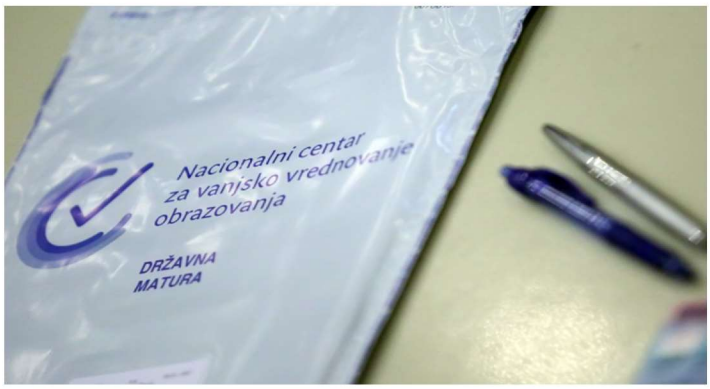
Vanjsko vrednovanje je vrednovanje koje provode prosvjetne vlasti i stručnjaci, neovisni znanstveni instituti, međunarodne ustanove i organizacije za odgoj i obrazovanje (npr. UNESCO, OECD...). Njegova svrha je ostvarivanje širih društvenih i gospodarskih ciljeva te razina znanja, sposobnosti, vrijednosti i vještina. Najčešći oblici vanjskog vrednovanja su: nacionalni ispiti, državna matura, međunarodno vrednovanje postignuća pomoću PISA programa (Programme for international Stu-

dent Assessment), TIMSS (Trends in mathematics and science study).

Državna matura je završni ispit koji učenici pišu nakon srednjoškolskog školovanja. Obavezu polaganja državne mature imaju učenici gimnazija, dok učenici strukovnih i umjetničkih škola državnu maturu polažu samo ako planiraju nastaviti svoje obrazovanje na nekom od visokih učilišta. Državnu maturu u suradnji sa školom provodi Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja.

Državnom maturom se provjeravaju i vrednuju postignuta znanja, vještine i sposobnosti učenika koje su prethodno stekli tijekom obrazovanja u osnovnoj i srednjoj školi u skladu sa propisanim nastavnim planovima i programima. Na temelju rezultata državne mature, objektivno i nepristrano se ocjenjuje znanje svakog pojedinog učenika te se dobiva usporediva ocjena svih učenika u Republici Hrvatskoj, čime se omogućava nastavak školovanja ili zapošljavanje.

Na državnoj maturi pišu se obvezni predmeti, to su Hrvatski jezik, Engleski jezik i Matematika. Dostupni su učenicima u dvije razine: osnovna i viša razina. Dok su izborni predmeti, kao npr. Fizika, Biologija, Psihologija i ostali dostupni u jednoj razini.



Slika 2.2. *Ispit državne mature*

PISA istraživanja ili PISA testiranja (Programme for International Student Assessment) međunarodna su istraživanja procjena znanja i vještina petnaestogodišnjih učenika pod pokroviteljstvom OECD-a. Osnovana su s ciljem ocjenjivanja razine obrazovanja među mladima u glavnim industrijskim zemljama. Provode se svake tri godine.

Osmislile su ga zajednički zemlje članice OECD-a, a provodi ga međunarodni konzorcij institucija koji predvodi Australsko vijeće za istraživanja u obrazovanju (ACER).

Osnovni ciljevi PISA istraživanja usmjereni su na politiku obrazovanja. Inovativni koncept "pismenosti" i važnost cjeloživotnog učenja, redovito praćenje kroz trogodišnje vremenske cikluse, što zemljama omogućava praćenje napretka u postizanju ključnih obrazovnih ciljeva. PISA istraživanja čine gotovo 90 posto svjetskog gospodarstva.

PISA svojim članicama pruža podršku u pripremi učenika za suočavanje sa sve bržim društvenim promjenama te osigurava osnovu za politički dijalog i globalnu suradnju", rekla je napomenuvši da je u zadnjem ciklusu istraživanja u njemu sudjelovalo više od pola milijuna učenika iz 74 zemlje svijeta.

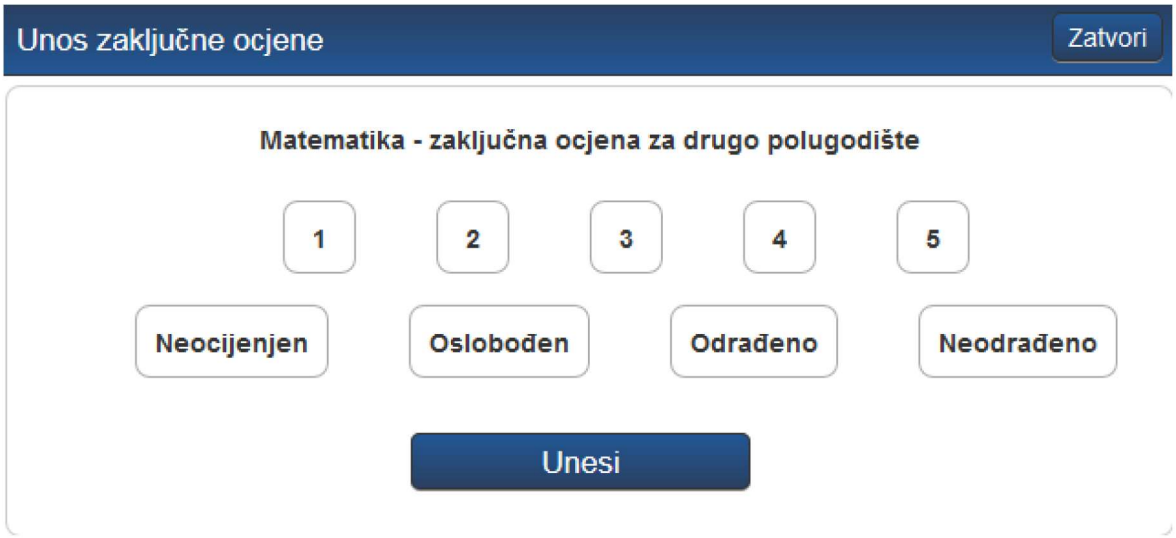
Hrvatski učenici na OECD-ovu testiranju jezičnih, prirodoslovnih i matematičkih kompetencija do sada postizali ispodprosječne rezultate. O uzrocima se nikada nije otvoreno raspravljalo u javnosti.

3.2 Dijagnostičko, sumativno i formativno vrednovanje

S obzirom na svrhu vrednovanja razlikujemo: dijagnostičko, sumativno i formativno.

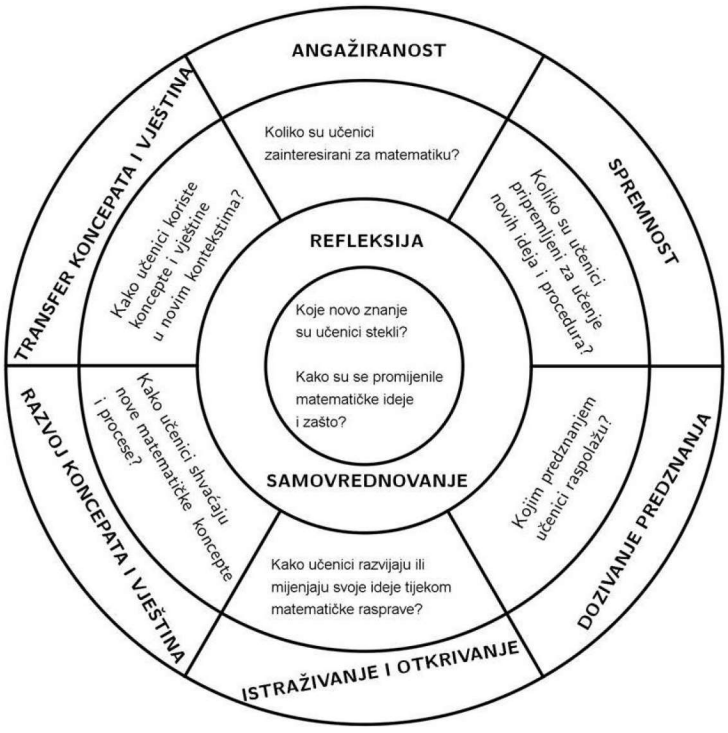
Dijagnostičko vrednovanje jest vrednovanje koje se provodi radi utvrđivanja kvalitete i razine učeničkoga znanja i vještina prije početka procesa učenja i poučavanja, npr. na početku nastavne godine. Rezultati dijagnostičkoga vrednovanja daju učitelju uvid u postojeće znanje, vještine i stavove učenika. Ovisno o rezultatima, učitelj može planirati i prilagoditi proces učenja i poučavanja.

Sumativno vrednovanje je vrednovanje koje se provodi na kraju jednog vremenskog razdoblja , tj. na kraju školske godine ili na kraju proučene sadržajne cjeline. Sumativno vrednovanje može se provesti na različite načine, najčešći su testovi znanja, procjene referata i drugih učeničkih uradaka. Zapravo pojam sumativnog vrednovanja vezan je uz pojam ocjenjivanja učenika. Osnovni zadatak ove vrste vrednovanja je pretvaranje rezultata u pisani dokument koji daje učeniku povratnu informaciju o njegovom uspjehu, a na kraju školske godine mu omogućuje da prijeđe u sljedeći razred. Ono nam odgovara na pitanje do koje mjere je učenik ostvario postavljene ishode učenja, odnosno koju ocjenu je zaslužio. Na taj način su i roditelji upoznati sa razinom znanja i zalaganjem svoga djeteta. Glavni nedostatak sumativnog vrednovanja je taj što se ono obavlja nakon dužeg vremenskog perioda proučavanja i učenja kada je često već kasno za izmjene učeničkih odnosa prema nastavi i učenju. Ono dominira u tradicionalnim školama što rezultira kampanjskim učenjem, orijentacijom na ocjenu umjesto na znanje.



Slika 2.3. *Zaključivanje ocjena*

Za razliku od sumativnih procjena, formativne procjene su stalni dio nastavnog procesa u kojem se prikupljaju dokazi o učeničkom znanju , vještinama i procesima. Formativno ocjenjivanje učiteljima pruža dokaze o razumijevanju učenika koje mogu koristiti za pravovremeno određivanje sljedećih koraka u nastavi. Glavna svrha formativnog vrednovanja je poticanje učenika na učenje, odnosno motivacija učenika. Da bi nastavnici postigli taj cilj, bitno je da kontinuirano prate učenikov rad, ponašanje, znanja, vještine i razumijevanje te daju povratne informacije koje sadrže nove strategije i poruku da su pogreške i biti u krivu dio svakog učenja. Formativno vrednovanje uključuje prikupljanje dokaza o učenikovom učenju, pružanje povratne informacije učeniku te pomaže učitelju u poboljšanju načina poučavanja, dakle, uključuje i učenike i učitelje. Cilj ovog vrednovanja nije razvrstavanje učenike na odlične, vrlo dobre itd., nego pomoći učiteljima i učenicima da usmjere pažnju i aktivnosti na propuste i nedostatke kako bi se oni otklonili.



Slika 2.4. *Kružni dijagram*

Jasno je da vrednovanje učeničkog postignuća treba biti i formativno i sumativno. Treba napomenuti da osnovne razlike između formativnog i sumativnog vrednovanja nisu u strukturi i sadržaju testa, već u tome kako se rezultati tih testova koriste, odnosno razlika je u njihovim ciljevima. Sumativno vrednovanje usmjereno je na ispitivanje poslije jednog relativno dužeg razdoblja, dok formativno vrednovanje omogućava prikupljanje informacija o radu i postignućima učenika tijekom nastave. Jedan od načina formativnog vrednovanja je i domaća zadaća. Domaća zadaća važna je povratna informacija koja pokazuje kako učenik radi bez tuđe pomoći. Posebice je korisna i za razvitak učeničkih organizacijskih sposobnosti i radnih navika. Domaća zadaća može biti dobar pokazatelj učeničkih poteškoća koje je možda teže uočiti u razredu. U tom smislu, domaća zadaća se može koristiti u dijagnostičku svrhu za utvrđivanje specifičnih područja i znanja koja trebaju dodatnu pažnju. Izrada domaće zadaće pozitivno djeluje na ishode učenja ako je povezana s nastavnim sadržajem.

4 Vrednovanje u nastavi matematike

Svaki učitelj, pa tako i učitelj matematike, ima isti cilj: osigurati najveću moguću kvalitetu nastave koja će učenicima omogućiti otkrivanje koncepata, procedura i vještina koje će im pomoći da postupno razviju matematičku kompetenciju. Strategije formativnog vrednovanja pružaju prilike učiteljima za promatranje učeničkog razvoja u pojedinoj fazi obrazovanja te daju informacije o tome kako učenici reagiraju na određene pristupe u poučavanju. Interakcija učenik-učitelj te učenik-učenik na satu matematike zahtijeva različite strategije vrednovanja koje potiču učenike na razmišljanje o svojim idejama te koje pomažu učiteljima u utvrđivanju koliko dobro pojedini učenici i cijeli razred napreduju u izgradnji matematičkog mišljenja. Dok sumativno vrednovanje služi za ocjenjivanje učenika i davanje samom učeniku povratnu informaciju o razini njegovog znanja i zalaganja.

Na primjerima ćemo pogledati na koji način se mogu provesti sumativno i formativno vrednovanje u nastavi matematike.

4.1 Sumativno vrednovanje

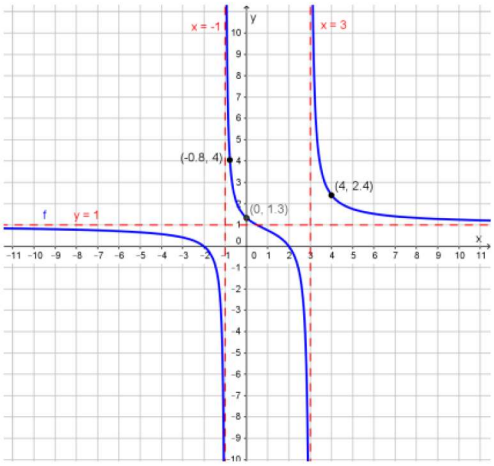
Sumativne procjene uvijek su bile (i bit će i dalje) važna metoda za utvrđivanje onoga što učenici znaju i što mogu učiniti. Kao što sam spomenula sumativno vrednovanje je vrednovanje koje se provodi nakon nekog vremenskog razdoblja pa tu spadaju sve provjere znanja. Daje nam jasnu informaciju da li učenik zna riješiti dobivene zadatke ili ne. Osim toga, sumativne procjene tradicionalno se sastoje od dva osnovna tipa: odabrani odgovor i konstruirani odgovor. Učenici mogu birati između ponuđenih odgovora ili sami odgovarati na pitanje vlastitim riječima.

4.1.1 Pismeni ispit

Prije same provjere znanja bitno je odrediti ishode koji se očekuju od učenika. Puno je primjera za ovaj način vrednovanja, pogledajmo primjer jednog ispita iz nastavne cjeline Funkcije. Ovaj ispit se sastoji od oba tipa, učenici u nekim zadatcima sami odgovaraju na pitanja, a u nekim biraju između ponuđenih odgovora.

Primjer 1. *Pismeni ispit iz cjeline Funkcije*

I. Slika prikazuje graf funkcije f.



1. Ispunite slijedeću tablicu:

x	-2		4	0		3
$f(x)$		4			1	

2. Odredite:
   a. domenu funkcije f _____
   b. sliku funkcije f _____
   c. nultočke funkcije f _____
   d. $f^{-1}(4)$ _____
   e. $f(2)-3$ _____
   f. $2^{f(4)}$ _____

3. Zaokružite točan odgovor na postavljena pitanja.
   a. Je li funkcija čiji graf predstavlja slika injektivna? DA – NE
   b. Predstavlja li slika graf neke eksponencijalne funkcije? DA – NE
   c. Jesu li za $x > 2$ vrijednosti funkcije uvijek negativne? DA – NE

4. Koristeći sliku riješite nejednadžbu $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - 1 \le 0$.

Rješenje: _____

Očekivani ishodi ovoga pismenog ispita su:
Učenik

- određuje domenu i sliku funkcije
- prepoznaje vrijednost funkcije u zadanoj točki
- analizira funkciju obzirom na njezina svojstva
- rješava nejednadžbu koristeći sliku

Primjer 2. *Pisane provjera iz nastavne cjeline Decimalni brojevi*

1. Zapiši u decimalnom obliku :

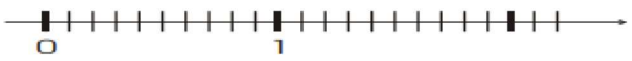
$$\frac{34}{10} =$$

$$\frac{23}{1000} =$$

2. Zapiši u obliku razlomka :
1.34 =

0.065 =

3. Prikaži na brojevnom pravcu točke : A (1.7), B (0.3) i C (2.1).



4. Koji su brojevi pridruženi točkama A, B i C?

5. Usporedi brojeve :

64.2405 ☐ 64.24057

6. Izračunaj :
32.657 + 98.316 =

7. Izračunaj :
64.98 – 35.342 =

Očekivani ishodi ovoga pismenog ispita su:
Učenik

- zapisuje razlomak u obliku decimalnog broja
- zapisuje decimalni broj u obliku razlomka
- prikazuje na brojevnom pravcu zadane točke
- pridružuje vrijednosti zadanim točkama
- uspoređuje zadane brojeve
- zbraja i oduzima decimalne brojeve

4.1.2 Državna matura

Ispite kojima učenik pristupa u sklopu obveznoga dijela državne mature , a tu spada i matematika, učenik može polagati na jednoj od dviju razina i to: A – višoj razini i B – osnovnoj razini. Razine su propisane Pravilnikom o polaganju državne mature, a sadržaji ispita prema razinama propisuju se ispitnim katalozima. Položena viša razina omogućava pristupniku pristup i onim studijskim programima koji traže osnovnu razinu. S druge strane, pristupnici koji polože osnovnu razinu nemaju mogućnost prijave na studijski program koji traži položenu višu razinu. Prilikom rangiranja, rezultat postignut na višoj razini uvećat će se množenjem nekim faktorom. Primjerice - uz faktor množenja 1,6 - 60 bodova postignutih na nekom obveznome predmetu na višoj razini bit će jednako vrijedno kao 96 bodova postignutih na tom istom obveznom predmetu na osnovnoj razini.

18. Riješite zadatke.

18.1. Riješite sustav linearnih nejednadžba $\begin{cases} 2x+3<5 \\ 4-x \leq 7 \end{cases}$ i napišite rješenje u obliku intervala.

Odgovor: _____

0 1 bod

18.2. Koji je rezultat do kraja sređenoga izraza $\frac{x-3}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{x^2-9} + 2$ za sve x za koje je izraz definiran?

Odgovor: _____

0 1 bod

Primjer zadatka sa Državne mature iz matematike - razine A
Izvor[6]

17. Izračunajte $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)^2+5}$ i zapišite rezultat u decimalnome obliku.

Odgovor: _____

0 1 bod

18. Riješite sustav jednadžba $\begin{cases} x+2y=3x-1 \\ 4x-5y=6-2y \end{cases}$.

Odgovor: $x =$ _____, $y =$ _____

0 1 bod

Primjer zadatka sa Državne mature iz matematike - razine B
Izvor[6]

4.1.3 PISA istraživanje

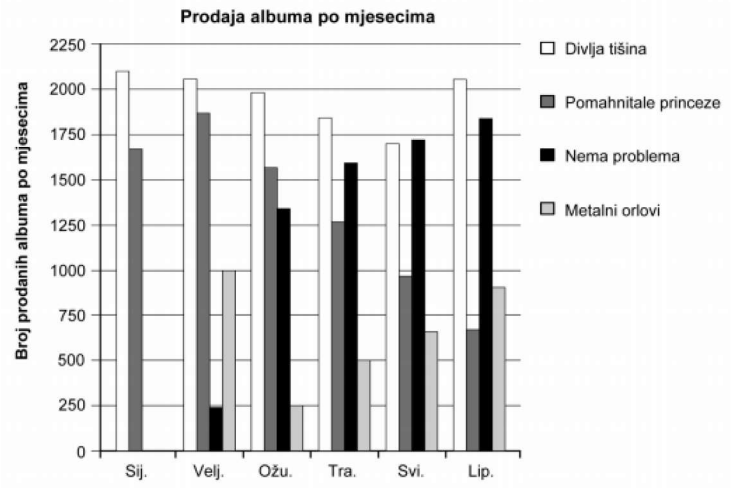
Primjer 3. *Zadatak sa PISA istraživanja:*

Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja

PISA CROATIA HRVATSKA

LJESTVICE PRODAJE

U siječnju su sastavi *Divlja tišina* i *Pomahnitale princeze* izdali nove albume. U veljači su uslijedili albumi sastava *Nema problema* i *Metalni orlovi*. Donji grafikon prikazuje prodaju albuma tih sastava od siječnja do lipnja:



1. pitanje: LJESTVICE PRODAJE

Koliko albuma je prodao sastav *Metalni orlovi* u travnju?

A 250

B 500

C 1000

D 1270

2. pitanje: LJESTVICE PRODAJE

U kojem mjesecu je sastav *Nema problema* prvi puta prodao više albuma od sastava *Pomahnitale princeze*?

A Ni u jednom mjesecu

B U ožujku

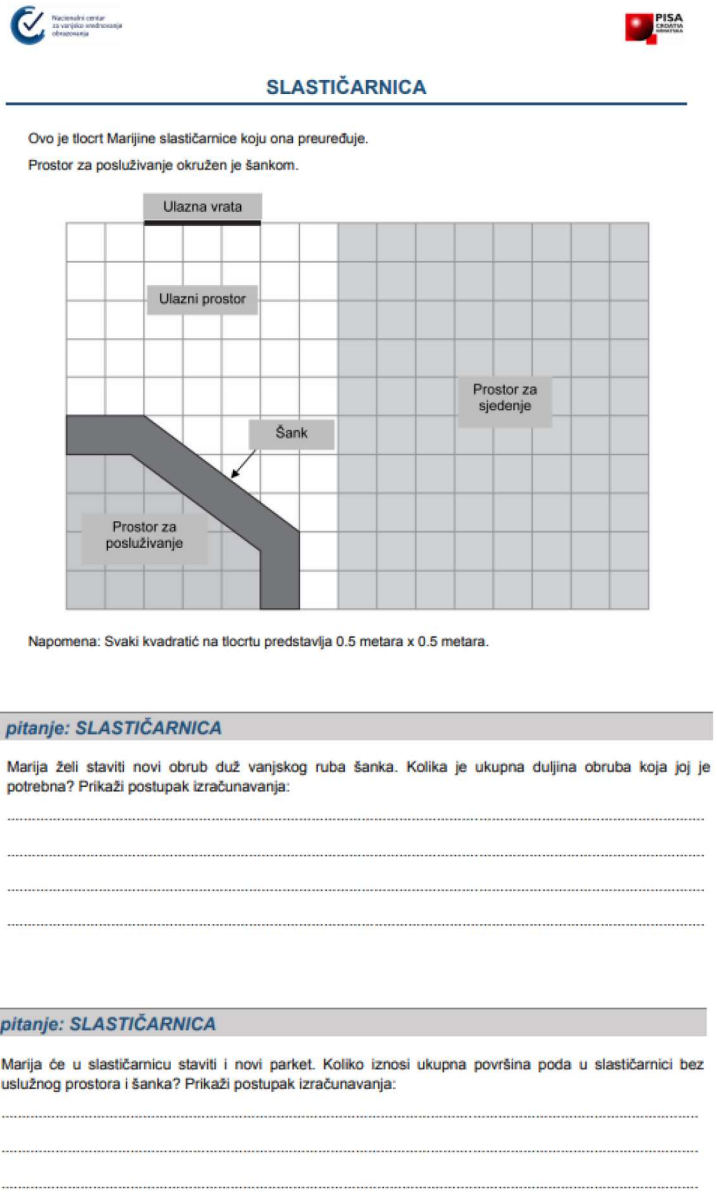
C U travnju

D U svibnju

Izvor[7]

Od učenika se traži da na osnovi grafa odgovori točno na pitanja. Potrebno znanje za točan odgovor je znati očitati stupčasti graf i usporediti visine u grafu. Ovakav zadatak spada u nižu razinu i nema djelomičnog bodovanja. Učenik može dobiti maksimalan broj bodova ukoliko točno odgovori ili 0 bodova za netočan odgovor.

Primjer 4.



SLASTIČARNICA

Ovo je tlocrt Marijine slastičarnice koju ona preuređuje.

Prostor za posluživanje okružen je šankom.

Napomena: Svaki kvadratić na tlocrtu predstavlja 0.5 metara x 0.5 metara.

1. pitanje: SLASTIČARNICA

Marija želi staviti novi obrub duž vanjskog ruba šanka. Kolika je ukupna duljina obruba koja joj je potrebna? Prikaži postupak izračunavanja:

.....

.....

.....

.....

2. pitanje: SLASTIČARNICA

Marija će u slastičarnicu staviti i novi parket. Koliko iznosi ukupna površina poda u slastičarnici bez uslužnog prostora i šanka? Prikaži postupak izračunavanja:

.....

.....

.....

Izvor[7]

Od učenika se očekuje da će koristiti Pitagorin poučak ili točno koristiti mjere radi pronalaženja duljine na crtežu u omjeru. Budući da je ovo složeniji zadatak učenici mogu dobiti i djelomičan broj bodova za odgovore koji prikazuju jedan dio točnog postupka izračunavanja (na primjer primjenu Pitagorina poučka ili korištenje omjera), ali sadrže pogrešku poput netočnog korištenja omjera ili pogrešnog izračunavanja.
Za drugo pitanje trebaju koristiti mrežu radi izračunavanja površine koja se sastoji od više elemenata. Djelomičan broj bodova će biti za postupak koji jasno pokazuje točno korištenje mreže radi izračunavanja površine, ali je netočno korišten omjer ili sadrži aritmetičku pogrešku.

4.2 Formativno vrednovanje

Formativno vrednovanje se sastoji od različitih strategija. Namjena svih njih je promicanje učenja i poboljšanja poučavanja.

Korištenje strategija formativnog vrednovanja na početku nastavne cjeline daje učitelju jasniju sliku spremnosti, motivacije i interesa učenika za temu koja slijedi. Također, strategije pružaju učenicima mogućnosti za razmišljanje i znatiželju.

Iznošenje ideja koje su učenici razvili tijekom prijašnjih iskustava u učenju pruža temelj na kojem učitelj gradi poučavanje. Učitelj postaje svjestan učeničkog znanja te uočava gdje i kako učenik može svoje prijašnje znanje povezati s novim konceptima i procedurama. Strategije formativnog vrednovanja promiču razmišljanje te dozivaju učenikovo predznanje. Rasprava među učenicima dopušta im dijeljenje svojih razmišljanja s drugima, dublje preispitivanje ideja te potiče učenike na promišljanje o mogućim izmjenama i dopunama vlastitih ideja.

Vrednovanje konceptualnog razumijevanja i korištenja matematičkih vještina tijekom otkrivanja i razvoja formalnih koncepata pomaže učenicima u poboljšanju učenja te razotkriva poteškoće i nejasnoće koje možda postoje u razumijevanju matematičkih sadržaja.

Budući da se tehnike formativnog vrednovanja rijetko susreću u primjeni, nabrojat ću neke od zanimljivih i korisnih u učenju matematike.

Tehnike koje bih izdvojila su:

- Uvijek, ponekad, nikad
- KWL tablica (znam, želim saznati, naučio/la sam)
- Frayer model
- Riješi i baci
- Slažem se, ne slažem se, ovisi
- Popis naziva/pojmova
- 3 - 2 - 1 model
- Dvije zvijezde i želja
- Primjer - protuprimjer
- Semafor kartice
- SWOT analiza

Pogledajmo kako se svaka od tih tehnika može primijeniti u nastavi matematike.

4.2.1 Uvijek, ponekad, nikad

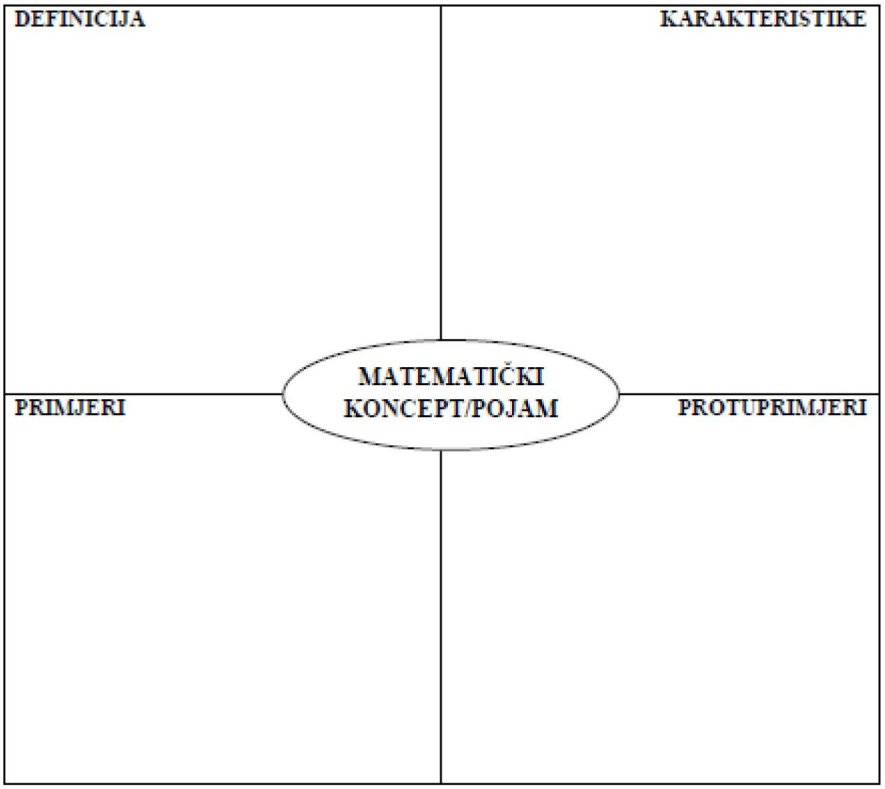
Tu tehniku provodimo na način da svaki učenik dobije listić sa nekoliko tvrdnji. Ispod napisane tvrdnje nalazi se ponuđeni odgovori „uvijek“, „ponekad“, „nikad“. Oni moraju za zadanu tvrdnju izabrati neki od ponuđenih odgovora i obrazložiti ga. Ovakvim pristupom se uočavaju matematička mišljenja pojedinog učenika i dovodi do toga da sami donose matematičke zaključke. Primjer jednog riješenog listića:

1. Višekratnici broja 5 završavaju znamenkom 5. Uvijek Ponekad Nikada	Obrazloži svoj odgovor: Višekratnici broja 5 završavaju znamenkom 0 ili 5, npr. 25 i 50.
2. Posljednja znamenka višekratnika broja 2 je neparan broj. Uvijek Ponekad Nikada	Obrazloži svoj odgovor: Posljednja znamenka višekratnika broja 2 može biti 0, 2, 4, 6 ili 8, a to nisu neparni brojevi.
3. Višekratnici broja 7 su neparni brojevi. Uvijek Ponekad Nikada	Obrazloži svoj odgovor: Višekratnici broja 7 su 7, 21, 35, 49, ...
4. Posljednja znamenka višekratnika broja 10 je 0. Uvijek Ponekad Nikada	Obrazloži svoj odgovor: 10, 20, 30, 40, ... su višekratnici broja 10 i svi završavaju znamenkom 0.
5. Višekratnici broja 3 su ujedno i višekratnici broja 9. Uvijek Ponekad Nikada	Obrazloži svoj odgovor: 9, 18, 27, 36, ... su višekratnici brojeva 3 i 9.

Izvor[2]

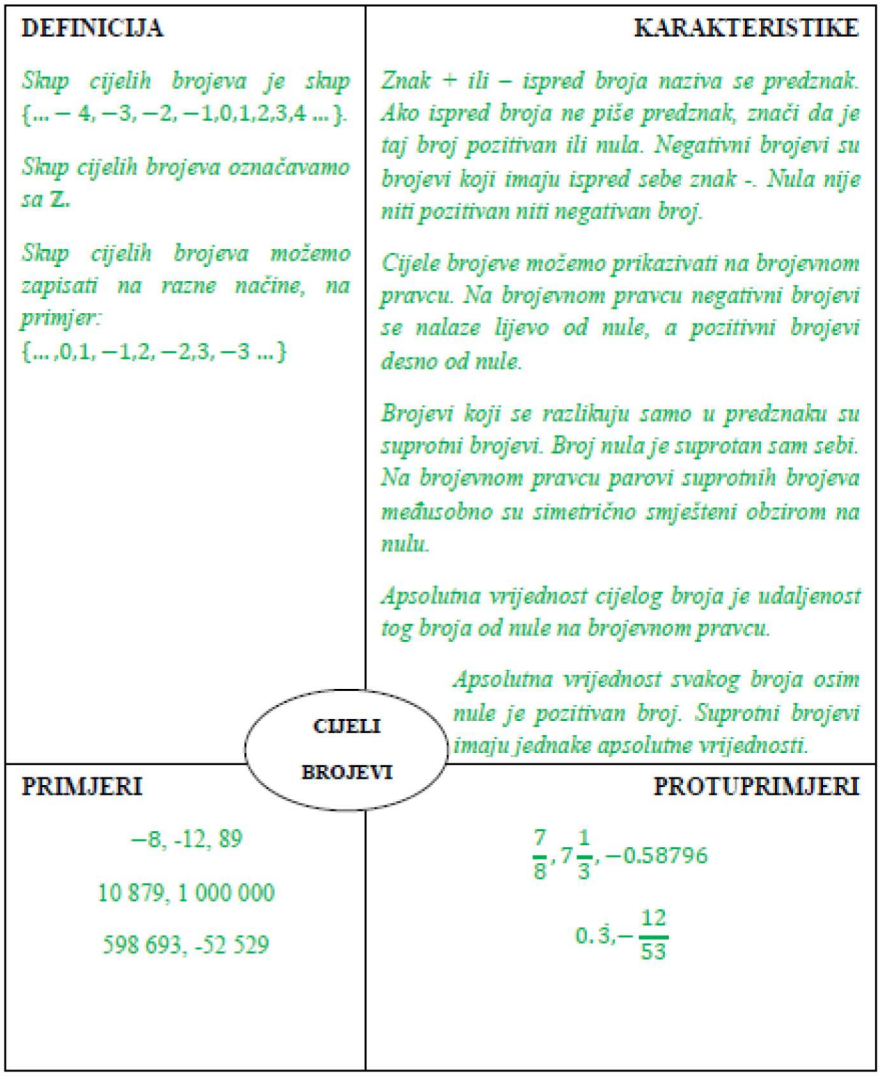
4.2.2 Frayer model

Učenik popunjava Frayerov dijagram svojom definicijom, karakteristikama, primjerima i protuprimjerima za neki zadani matematicki koncept/ pojam.



Može se koristiti u bilo kojem razredu i za bilo koju nastavnu temu. Na takav način učitelji mogu i provjeravat učenikovo znanje,a pogotovo i razumijevanje.

Uzmimo za primjer matematički pojam: Cijeli brojevi. Primjer je primjeren učenicima šestog razreda osnovne škole i prvog razreda srednje škole. Rješenje modela nije jedinstveno. Evo jedno od mogućih rješenja:



Izvor[2]

4.2.3 Riješi i baci

Ova metoda se u nastavi koristi na način da učitelj postavi neko pitanje ili zadatak učenicima i oni svoj odgovor ili rješenje zadatka napišu na papirić. Zatim taj papirić preklope nekoliko puta i dobace nekom učeniku u razredu. I tako u krug dok učitelj ne zaustavi dobacivanje. Otvori se papirić i pročita se rješenje. Na taj način se dijele anonimne ideje učenika.

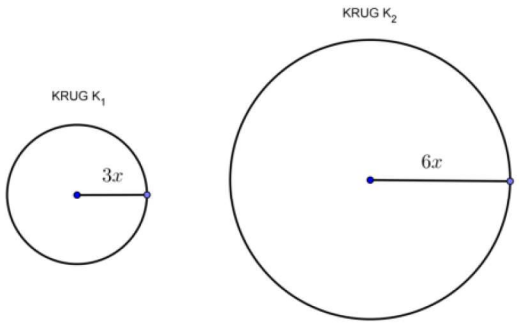
Ovakav način je za učenike jako zanimljiv, a učitelji dobivaju odgovore na svoja

pitanja. Primjenjiv je više za teorijski dio i neke jednostavnije zadatke.

Primjer 5. *Metoda Riješi i baci: Opseg kruga U danom primjeru, koji je primjeren za učenike sedmog razreda osnovne škole, učenicima je dana slika dvaju kruga s naznačenim polumjerima te su im ponuđena četiri odgovora vezana uz odnos opsega tih krugova. Učenici zaokružuju slovo ispred odgovora za koji smatraju da je točan te ga objašnjavaju. Učenički mogući odgovori naznačeni su zelenom bojom.*

OPSEG KRUGA

Zaokruži izjavu koja opisuje kako se opseg kruga K_1 odnosi prema opsegu kruga K_2.



(A) Opseg kruga K_1 dvostruko je veći od opsega kruga K_2.

B Opseg kruga K_1 jednak je opsegu kruga K_2.

C Opseg kruga K_2 je za tri veći od opsega kruga K_1.

D Nema dovoljno informacija za uspoređivanje.

Objasni svoje razmišljanje.

Opseg kruga računa se po formuli $O = 2r\pi$, gdje je r polumjer tog kruga.

Opseg kruga K_1 jednak je $O_1 = 2 \cdot 3x \cdot \pi = 6x\pi$.

Opseg kruga K_2 jednak je $O_2 = 2 \cdot 6x \cdot \pi = 12x\pi$.

Omjer opsega zadanih krugova je $\frac{O_1}{O_2} = \frac{6x\pi}{12x\pi} = \frac{1}{2}$.

Dakle, opseg kruga K_2 je dvostruko veći od opsega kruga K_1. Točan odgovor je A.

Izvor[2]

4.2.4 Slažem se, ne slažem, ovisi

Učenici koriste ovu strategiju kako bi provjerili točnost danih tvrdnji. Prvo trebaju odlučiti slažu li se ili ne s tvrdnjom, ili im je za odluku potrebno još informacija. Osim toga, trebaju opisati svoj proces razmišljanja koji ih je doveo do odgovora. Nakon toga, učenici opisuju što mogu učiniti kako bi istražili je li tvrdnja točna ili netočna. Testiraju svoje ideje, ispituju ono što je već poznato ili koriste druge matematičke načine istraživanja.

1. Jednakokračni trokut ima dva kuta jednake veličine. Slažem se Ne slažem se Ovisi Nisam siguran/a	Kako to možeš ustanoviti? U jednakokračnom trokutu krakovi su jednakih duljina pa su kutovi nasuprot svakog kraka tada također jednaki. To mogu provjeriti tako da kutomjerom izmjerim te kutove.
2. Tupokutni trokut ima tri tupa kuta. Slažem se Ne slažem se Ovisi Nisam siguran/a	Kako to možeš ustanoviti? Zbroj svih kutova u trokutu iznosi 180°. Tupi kut je veći od 90°, a manji od 180°. Kada bi u trokutu bila tri tupa kuta, njihov zbroj bi bio veći od 270°, što nije moguće.
3. Zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90°. Slažem se Ne slažem se Ovisi Nisam siguran/a	Kako to možeš ustanoviti? Pravokutan trokut ima jedan pravi kut i on iznosi 90°. Zbroj sva tri kuta iznosi 180°. Tada zbroj preostala dva kuta iznosi 90°.
4. Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu. Slažem se Ne slažem se Ovisi Nisam siguran/a	Kako to možeš ustanoviti? Nisam siguran što je točno simetrala dužine.
5. Visina trokuta se nalazi unutar trokuta. Slažem se Ne slažem se Ovisi Nisam siguran/a	Kako to možeš ustanoviti? U tupokutnom trokutu visina se nalazi izvan njega.

Izvor[2]

4.2.5 Popis naziva/pojmova

Ova metoda predstavlja neku vrstu ankete o tome koliko učenici razumiju i poznaju matematičke pojmove i nazive.

Učenici dobivaju niz naziva vezanih uz određeni pojam i za svaki odabiru tvrdnju:

- Nikad nisam čuo/la za taj naziv.
- Čuo/la sam za taj naziv, no nisam siguran/na što znači.
- Imam neke ideje što bi taj naziv mogao značiti.
- Znam što taj naziv znači i mogu ga opisati:

Ako su odabrali posljednju tvrdnju trebaju i opisati taj naziv/pojam.

Zanimljiv je pristup da se od učenika sazna kako se služe sa pojedinim matematičkim pojmovima.

4.2.6 3-2-1 model

Ova metoda je dobar način da se od učenika dobije povratna informacija o naučenom na tome satu. Na ovaj način učenici daju osvrt na svoje učenje odgovarajući na tri pitanja, vezana uz temu o kojoj su učili.

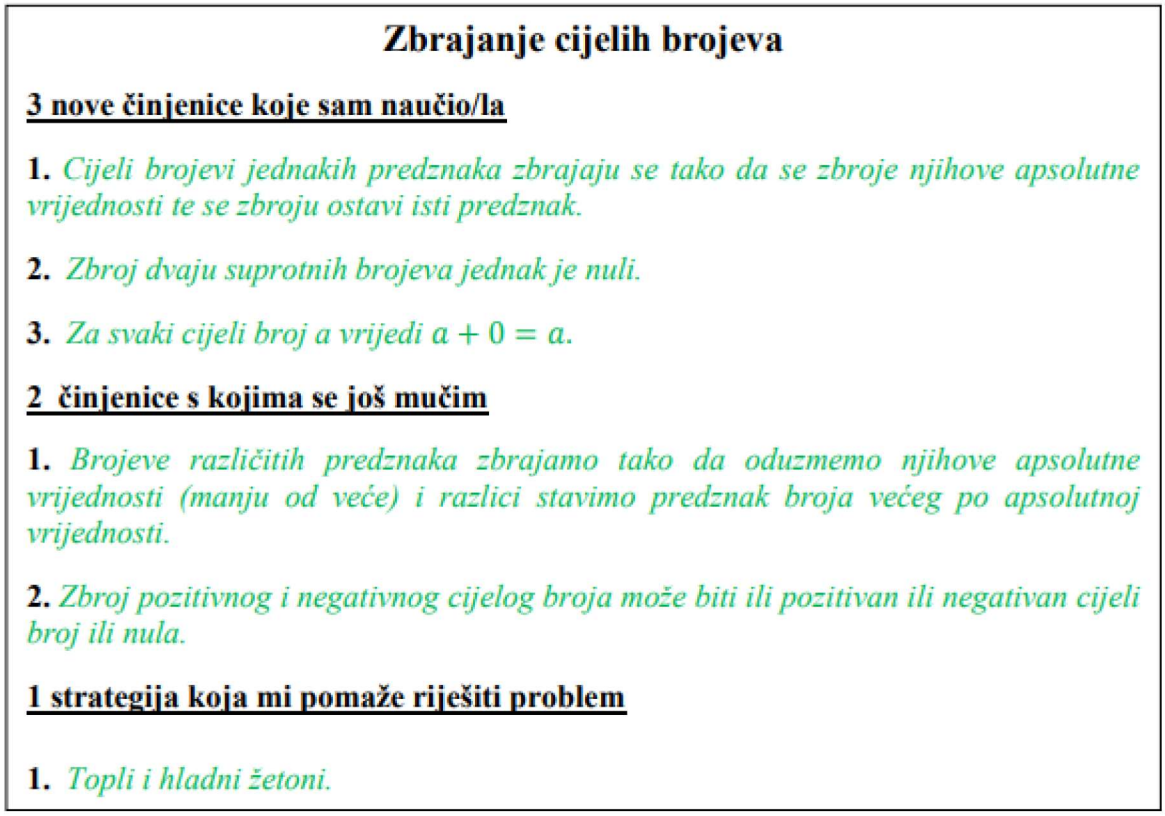
Učenici trebaju napisati:

- 3 nove stvari koje sam naučio/la
- 2 stvari s kojima još imam teškoća
- 1 strategija koja mi pomaže riješiti problem

Bilo bi dobro da nakon svake obrađene nastavne teme se učenicima postave ta pitanja, tako učitelji mogu obratiti pozornost sa kojim teškoćama se učenici susreću te koje strategije rješavanja teškoća učenicima odgovaraju.

Primjer takvog načina je: Zbrajanje cijelih brojeva. Dani primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenicima je dan nastavni listić na kojem

trebaju daju šest odgovora koji opisuju što su naučili, s čim još imaju problema te koje strategije koriste da bi došli do točnog odgovora ukoliko ne znaju neku činjenicu. Učenički odgovor dan je zelenom bojom.



Zbrajanje cijelih brojeva

3 nove činjenice koje sam naučio/la

1. *Cijeli brojevi jednakih predznaka zbrajaju se tako da se zbroje njihove apsolutne vrijednosti te se zbroju ostavi isti predznak.*

2. *Zbroj dvaju suprotnih brojeva jednak je nuli.*

3. *Za svaki cijeli broj a vrijedi* $a + 0 = a$.

2 činjenice s kojima se još mučim

1. *Brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da oduzmemo njihove apsolutne vrijednosti (manju od veće) i razlici stavimo predznak broja većeg po apsolutnoj vrijednosti.*

2. *Zbroj pozitivnog i negativnog cijelog broja može biti ili pozitivan ili negativan cijeli broj ili nula.*

1 strategija koja mi pomaže riješiti problem

1. *Topli i hladni žetoni.*

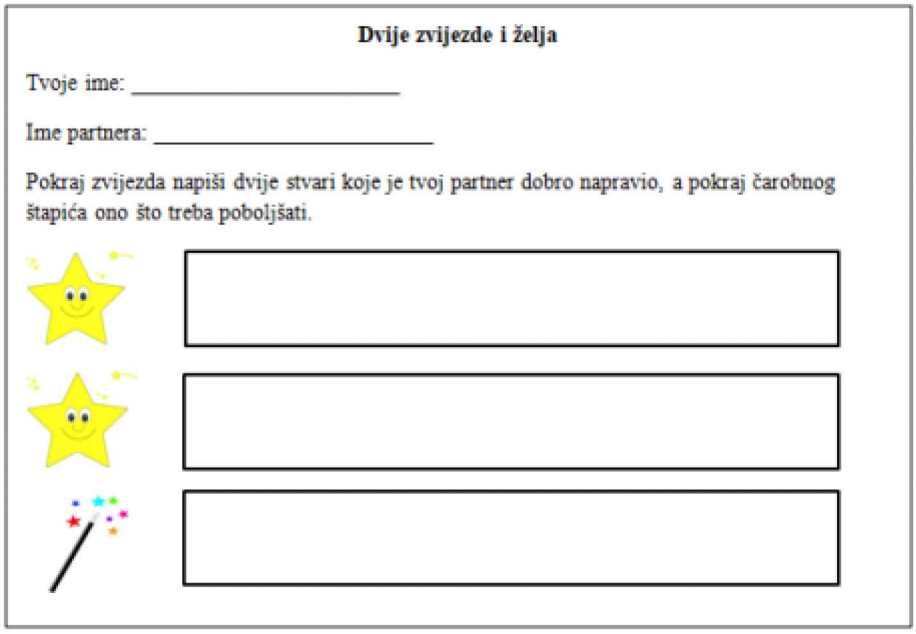
Izvor[2]

4.2.7 Dvije zvijezde i želja

Ovo je metoda koju nastavnik može primijeniti kod davanja povratne informacije o učeničkim radovima. Nakon pregleda rada (bilo bi dobro da rad sadrži zadatke kroz koje se pokazuje konceptualno razumijevanje i rješavanje problema) nastavnik učeniku daje komentar u kojem ističe dvije pozitivne stvari, tj. daje dvije pohvale ("dvije zvijezde") i ističe jednu stvar koju treba popraviti ("želja"). Ovakva metoda više je primjenjiva za niže razrede osnovnih škola. Učenike se na zanimljiv način pohvali, ali i navede da poprave pogrešku.

U nastavi se može primijeniti i da svi učenici dobiju listić sa zadatcima. Nakon

što ih riješe zamijene se sa partnerom u klupi. Nastavnik čita odgovore a učenici jedni drugima pregledavaju jesu li točno riješili. Umjesto ocjena jedni za druge mogu popuniti rubriku „Dvije zvijezde i želja“.



Dvije zvijezde i želja

Tvoje ime: _____

Ime partnera: _____

Pokraj zvijezda napiši dvije stvari koje je tvoj partner dobro napravio, a pokraj čarobnog štapića ono što treba poboljšati.

4.2.8 Primjer-Protuprimjer

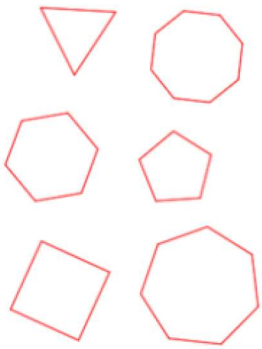
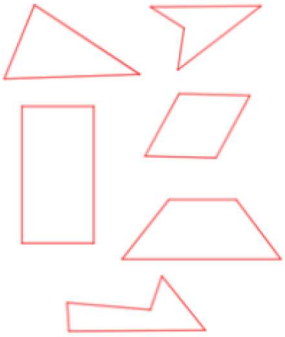
Nakon neke odrađene nastavne teme, učenicima se zada da za određeni pojam ili definicija navedu primjer i protuprimjer. Nastavnik sam određuje što će zadati. Osmisliti i ispitati primjere i protuprimjere otkriva učenikovo razumijevanje te način na koji interpretira definicije matematičkih pojmova.

Neki od primjera zadavanja su:

- Do kraja skraćeni (algebarski) razlomci
- Četverokuti koji su pravokutnici
- Ravninski oblici koji su pravilni mnogokuti

Na ovakav način učenici daju različite odgovore što ih navodi na matematičko razmišljanje.

Primjer jednog riješenog:

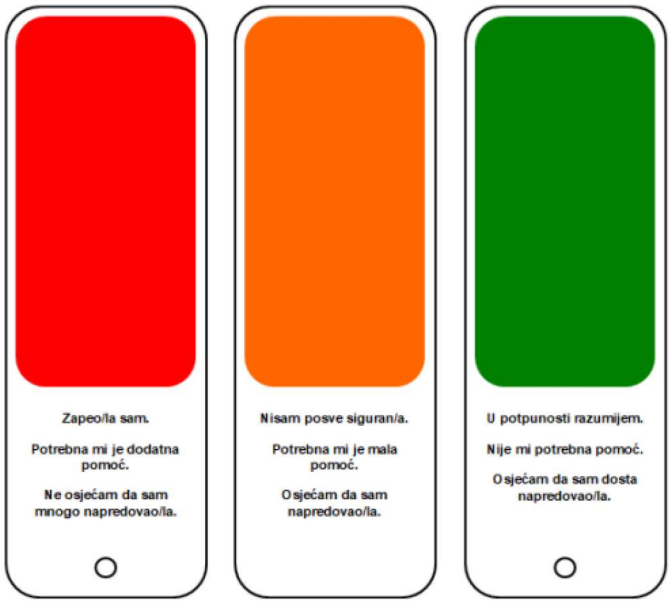
Ravninski oblici koji su pravilni mnogokuti	Ravninski oblici koji nisu pravilni mnogokuti
Nacrtaj što više različitih primjera. 	Nacrtaj što više različitih protuprimjera. 
Napiši pravilo koje si koristio/la kako bi odlučio/la je li mnogokut pravilan: Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice jednake duljine i svi kutovi jednake veličine.	

Izvor[2]

4.2.9 Semafor kartice

Ova metoda omogućuje nastavniku da na jednostavan i brz vizualan način dobije povratnu informaciju koliko učenici razumiju ili mogu pratiti lekciju koju obrađuju. Nastavnik za svakog učenika pripremi crvene, žute i zelene kartice. Zelena kartica znači "vrlo dobro razumijem", žuta znači "dosta toga razumijem, ali dobro bi došla mala pomoć" a crvena kartica znači "nije mi jasno i trebam pomoć". U bilo kojem trenutku sata nastavnik može zatražiti od učenika da podignu karticu koja najbolje opisuje njihov trenutni stupanj razumijevanja, i na temelju toga može odlučiti o sljedećoj fazi sata. Nastavnik, na primjer, može zamoliti učenike s zelenom karticom da pomognu onima sa žutom, dok on sam pomaže učenicima s crvenom karticom. Umjesto kartica možemo se poslužiti signaliziranjem rukom: palac gore - "vrlo dobro razumijem", okretanje ruke - "tako-tako", palac dolje - "nije mi jasno".

Ova metoda može se primijeniti i na neki još od načina koji se nastavnici dosjete, ali je bitno da je značenje isto, tj. da nastavnik u svakom trenutku može dobiti povratnu informaciju od učenika.



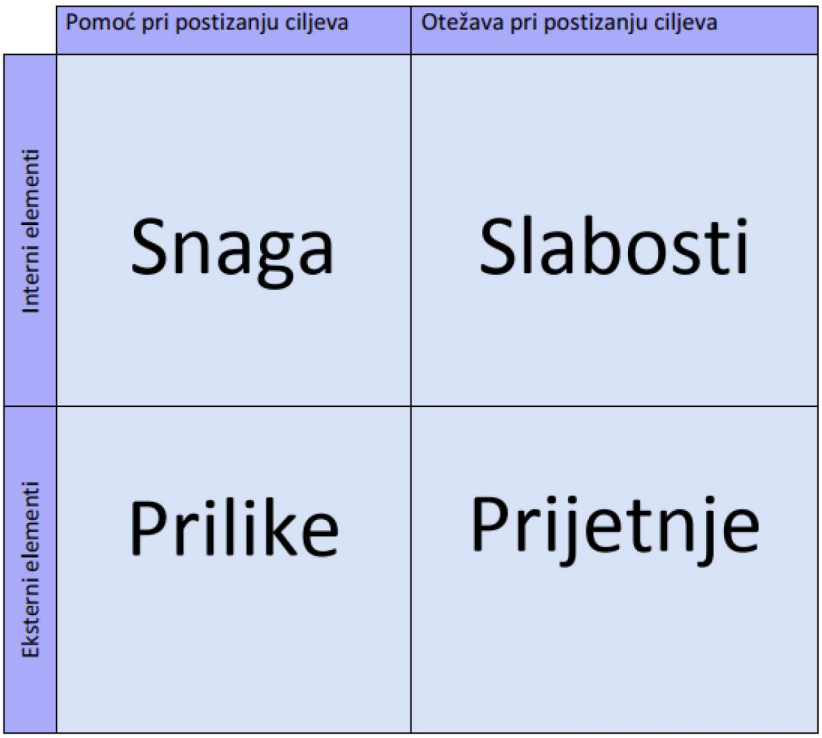
4.2.10 SWOT analiza

Naziv SWOT analiza dolazi od:

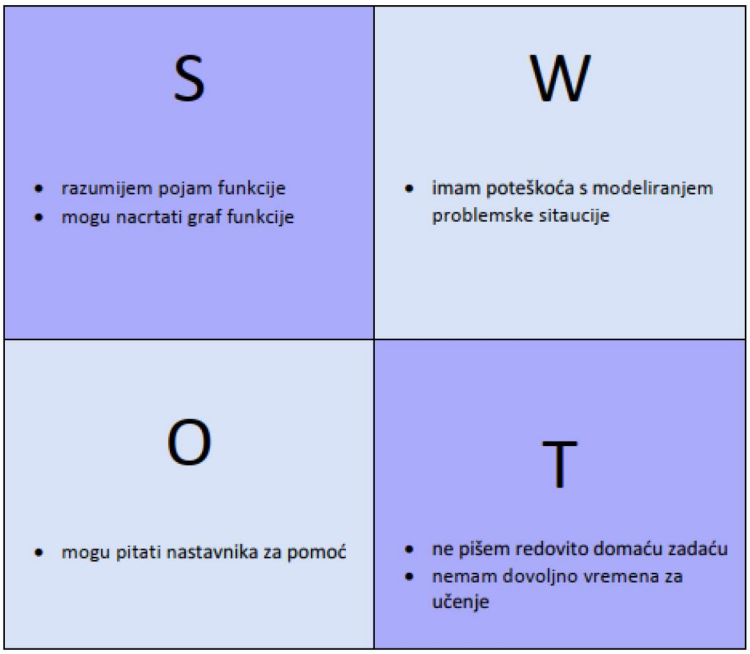
- S - Strengths - snaga
- W - Weaknesses- slabosti
- O - Opportunities - prilike
- T - Threats - prijetnje

SWOT analiza može se koristiti kako bi učenici osvijestili sebi koje su im dobre strane, a koji nedostaci u nastavi bilo kojeg predmeta, a onda i matematike. Ona se može koristiti općenito za neki predmet ali i za pojmove.

Tablica izgleda ovako:



Primjer ispunjene SWOT tablice jednog učenika:

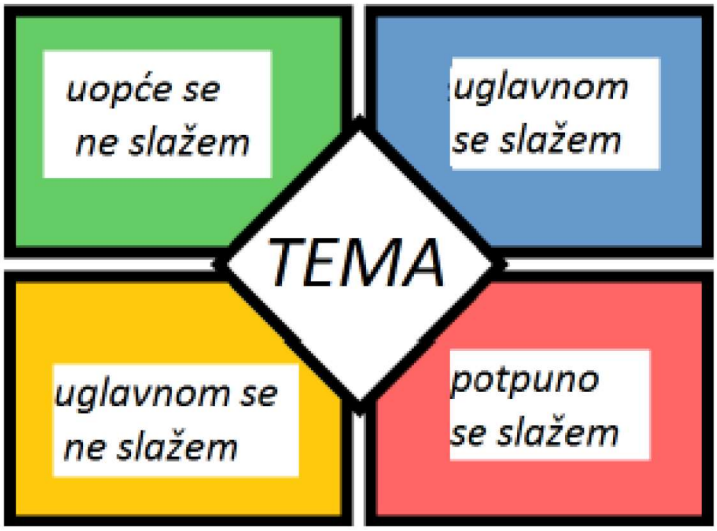


Popunjavanjem tablice učenici otkrivaju svoje snage i nedostatke, ali i uočavaju mogućnosti za napredovanje.

4.2.11 Metoda četiri kuta

Četiri kuta sjajan je način da se učenici izvuku iz klupa i kreću učionicom. Neki učenici uče bolje kada se kreću, a ostali će se razgibati. Svaki kut sobe označite različitim oznakama: „uopće se ne slažem“, „uglavnom se ne slažem“, „uglavnom se slažem“, „potpuno se slažem“.Postavite tvrdnju vezanu uz aktivnost/zadatak. Učenici izabiru kut koji odgovara njihovu odgovoru. Učenici obrazlažu izbor kuta. Međusobno komentiraju.

Na temelju odgovora svi dobivaju povratnu informaciju.



Zadatak koji učitelj može postaviti:

1. Svaki jednakokračni trokut ujedno je i jednakostraničan.
2. Svaki kvadrat je pravokutnik.
3. Svi prirodni brojevi djeljivi s 18 , djeljivi su i s 3 i s 6.
4. Ako je broj djeljiv i s 5 i s 3 , djeljiv je i s 15.

4.2.12 Rubrike

Izrazitu važnost za ovu metodu imaju rubrike za vrednovanje. Rubrika je jednodimenzionalna ili višedimenzionalna tablica kriterija postavljenih na nekoliko razina. Koristi se s ciljem donošenja procjena o učenikovom rezultatu ili postignućima. Rubrike mogu ocjenjivati vještine mišljenja, učenikovo razumijevanje i učenikove mogućnosti za primjenu znanja u matematičkim zadatcima. One također daju učiteljima, učenicima i roditeljima vjerodostojnu sliku što učenici znaju i što su sposobni napraviti te koliko su sposobni demonstrirati svoje znanje. Učenicima daju povratne informacije koje su neophodne za postavljanje ciljeva i podizanje razine znanja.

Postoje dva tipa rubrika: analitička i holistička. Analitička rubrika podrazumijeva više kriterija i analizu razina ostvarenosti svakog od njih, tj. analitičke rubrike su višedimenzionalne. Holistička rubrika opisuje za svaku razinu cjelokupnu očekivanu učeničku izvedbu bez analitičke razrade, tj. one su jednodimenzionalne. Analitičke rubrike bolje je koristiti kao dio formativnog vrednovanja jer su dizajnirane kao alat za unapređenje učeničkih uspjeha i izvedbi. Holističke rubrike sumativnog su karaktera te se najčešće koriste za vrednovanje učeničkog rada na kraju procesa učenja.

Za jasniju i precizniju procjenu matematičkih procesa pri rješavanju problemskih zadataka koriste se holističke rubrike. U široj primjeni je takozvana trodimenzionalna četverorazinska holistička rubrika. Njezine dimenzije su: matematičko znanje, strateško znanje i obrazloženje.

Primjer 6. *3-razinske analitičke rubrike:*

JEDNODIMENZIONALNA 3-RAZINSKA RUBRIKA		
3 – **IZNAD I ISPRED**	2 – **IDE U DOBROM SMJERU**	1 – **NIJE JOŠ NI BLIZU**
Pokazuje jasno razumijevanje. Primjenjuje pojmove u različitim prikazima. Primjenjuje primjerene metode. Dokumentira svoju ideju. Često nadilazi okvire zadanog problema.	Pokazuje razumijevanje i pretežno dobro napreduje u rješavanju. Zadatak rješava, povremeno griješi. Pretežno koristi uspješne pristupe.	Pokazuje nejasnoće ili nerazumijevanje. Primjenjuje pojmove i postupke samo uz pomoć. Čini značajne pogreške. Koristi neuspješne pristupe.

Primjer 7. *4-razinske analitičke rubrike:*

JEDNODIMENZIONALNA 4-RAZINSKA RUBRIKA			
NA CILJU ILI BLIZU NJEGA		**NIJE JOŠ BLIZU**	
4 – IZVRSNO: **POTPUNO ISPUNJENJE ZAHTJEVA** Strategija i primjene zadovoljavaju sadržajne, procesne i kvalitativne zahtjeve. Komunikacija je efikasna, što ne znači da mora biti opširna. Moguće su minorne pogreške.	**3 – VRLO DOBRO: ZADOVOLJAVAJUĆE ISPUNJENJE ZAHTJEVA** Uz minimalnu podršku može doći do potpunog ispunjenja zahtjeva. Pogreške su minorne pa je učitelj siguran da je razumijevanje dovoljno za ispunjenje cilja.	**2 – DOVOLJNO: DJELOMIČNO ISPUNJENJE ZAHTJEVA** Rješava samo dio zahtjeva, no nedostaje dokaza razumijevanja ili nerazumijevanja. Potrebna je direktna pomoć ili dodatno poučavanje.	**1 – NEDOVOLJNO: ZANEMARIVO POSTIGNUĆE** Pokušao riješiti zadatak i uložio neki matematički trud. Mogu postojati mali ili nimalo uspješni fragmenti ispunjenja zahtjeva.

Primjer 8. *Poponjavanje tablica rubrika zapažanja*

RUBRIKA ZAPAŽANJA Sastavljanje cijelog od razlomaka	
IZNAD I ISPRED Jasno razumijevanje. Komunicira koncept u različitim prikazima. Dokumentira svoju ideju bez da ga/ju se upozori na to. *Sastavlja cijelo od razlomaka prikazanih na štapićima i skupovima objekata.*	Marija Vesna Karlo
IDE U DOBROM SMJERU Pokazuje razumijevanje ili dobro napreduje u njegovom razvoju. Koristi zadane modele. *Može sastaviti cijelo ili od razlomaka prikazanih na štapićima ili skupovima objekata. Oklijeva. Treba pomoćpri prepoznavanju jediničnog razlomka (odgovarajućeg razlomka s brojnikom 1).*	Fran (štapić) Jakov (štapić) Ivna (skup) Milena (skup) Koraljka (štapić) Dean (skup) Davor (štapić)
NIJE JOŠNI BLIZU Nejasnoće ili nerazumijevanje. Ideju modelira samo uz pomoć. *Treba pomoć pri izvođenju ove aktivnosti. Nema samopouzdanja.*	Mirko Slavko Nina

Složenije bodovne rubrike

Za jasniju i precizniju procjenu matematičkih procesa pri rješavanju zadataka koriste se višedimenzionalne bodovne rubrike. U široj je primjeni tzv. trodimenzionalna četverorazinska bodovna rubrika. Njene dimenzije su:

- matematičko znanje: znanje matematičkih koncepata, principa i postupaka koji vode korektnom rješenju problemskog zadatka. Zna li učenik/ca riješiti zadatak?

- strateško znanje: prepoznavanje i primjena strategija rješavanja problemskog zadatka, tj. prepoznavanje i primjena važnih elemenata problemskog zadatka kojima se prikazuju i povezuju koncepti koji vode njegovom rješenju (npr. modeli, dijagrami, simboli, algoritmi). Kako učenik/ca planira rješavanje zadatka?

- obrazloženje: pisano obrazloženje plana i koraka procesa rješavanja problemskog zadatka, pri čemu je potrebno argumentirano obrazložiti svaki provedeni korak. Iako su važni, duljina odgovora, pravopis i gramatika nisu kritični elementi ove dimenzije. Može li učenik/ca objasniti svoj postupak rješavanja?

BODOVNA RAZINA	MATEMATIČKO ZNANJE U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:
4	• pokazao/la potpuno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje • upotrijebio/la prikladni i precizni matematički jezik, nazivlje i oznake, uključujući i označavanje, odnosno isticanje odgovora (npr. na danoj slici) ako je potrebno • u cijelosti i korektno izvršio/la algoritamske i računske postupke.
3	• pokazao/la gotovo potpuno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje • upotrijebio/la uglavnom korektni matematički jezik, nazivlje i oznake • u cijelosti izvršio/la algoritamske postupke; općenito korektno, uz moguće manje pogreške, izvršio/la računske postupke.
2	• pokazao/la barem neko, ali djelomično razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje • upotrijebio/la barem neko korektni matematički jezik, nazivlje i oznake • možda učinio/la velike algoritamske i/ili računske pogreške.
1	• pokazao/la vrlo ograničeno ili nikakvo razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje • možda pogrešno upotrijebio/la matematički jezik, nazivlje i oznake ili ih uopće nije upotrijebio/la • pokazao/la barem pokušaj rješavanja zadatka.
0	• nije niti pokušao/la riješiti zadatak.

BODOVNA RAZINA	STRATEŠKO ZNANJE U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:
4	• prepoznao/la sve važne elemente zadatka i pokazao/la potpuno razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa • potpuno dokumentirao/la prikladnu strategiju i prikaze koji vode korektnom rješenju zadatka.
3	• prepoznao/la većinu važnih elemenata zadatka i pokazao/la općenito razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa • gotovo potpuno dokumentirao/la prikladnu strategiju i prikaze koji vode korektnom rješenju zadatka.
2	• prepoznao/la neke važne elemenata zadatka, ali je pokazao/la vrlo ograničeno razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa • dao/la barem neku naznaku strategije i/ili prikaza koji vode korektnom rješenju zadatka.
1	• preveliku pažnju posvetio/la elementima koji ne vode rješenju zadatka ili nije prepoznao/la važne elemenata zadatka • prikazao/la ili naznačio/la neprimjerenu i/ili pogrešnu strategiju i/ili prikaz za rješavanje ovog problema, koje je možda i teško razabrati.
0	• nije prikazao/la nikakvu strategiju rješavanja zadatka.

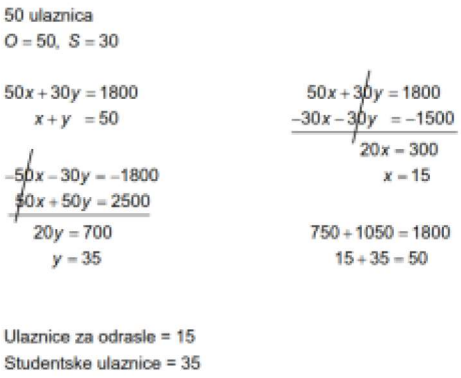
BODOVNA RAZINA	OBRAZLOŽENJE U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:
4	• dao/la cjelovito i detaljno pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; jasno i • matematički precizno objasnio/la što je i zašto napravio/la • možda nacrtao/la dijagram s potpunim objašnjenjem svih njegovih elemenata
3	• dao/la gotovo cjelovito pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; jasno i • matematički precizno objasnio/la što je napravio/la i započeo/la obrazlagati zašto je to • napravio/la • možda nacrtao/la dijagram s objašnjenjem većine njegovih elemenata.
2	• dao/la neko pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; ili je objasnio/la što je • napravio/la ili je napomenuo/la zašto je to napravio/la, ali ne i oboje • dao/la objašnjenje koje je nejasno, teško za interpretaciju ili ne odgovara potpuno • prikazanom procesu rješavanja • možda nacrtao/la dijagram s objašnjenjem nekih njegovih elemenata.
1	• dao/la minimalno pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; možda uopće nije • objasnio/la što je i zašto napravio/la • dao/la objašnjenje koje ne odgovara prikazanom procesu rješavanja • možda nacrtao/la dijagram s minimalnom diskusijom nekih njegovih elemenata; • nejasno objasnio/la važne elemente dijagrama.
0	• nije dao/la nikakvo pisano objašnjenje procesa rješavanja zadatka

Primjer 9. *Branko je prodavao ulaznice za rukometnu utakmicu. Prodao je ukupno 50 ulaznica i time zaradio 1 800 kn. Cijena jedne ulaznice za odrasle je 50 kn, a cijena jedne studentske ulaznice 30 kn.*

Koliko je Branko prodao ulaznica za odrasle, a koliko studentskih ulaznica?

Prikaži cijeli svoj rad. Riječima objasni kako si došao/la do odgovora i zašto si napravio/la pojedini korak u postupu rješavanja zadatka.

Učenikovo rješenje primjera:



Kako sam pogledao na zadatak, vidio sam da sadrži dvije nepoznanice x i y koje predstavljaju ulaznice za odrasle i studentske ulaznice. Zato sam postavio dvije jednadžbe, jednu koja se odnosi na ukupnu cijenu ulaznica, a druga na njihov ukupni broj. Nakon što sam dobio jednadžbe, primijenio sam metodu suprotnih koeficijenata i odredio *x* i y. Pomnožio sam prvu jednadžbu s -1 i drugu s 50 te ih zbrojio i dobio 2y = 700. Podijelio sam jednadžbu s 2 i dobio y = 35. Isti sam postupak primijenio na x i dobio 20x = 300 i podijelio sam jednadžbu s 20 i dobio x = 15.

MATEMATIČKO ZNANJE	STRATEŠKO ZNANJE	OBRAZLOŽENJE
4 U odgovoru je vidljivo potpuno razumijevanje matematičkih koncepata i principa povezanih sa zadanim problemom. Zapisan je i korektan odgovor o broju od prodanih 15 ulaznica za odrasle i 35 studentskih ulaznica.	4 Odgovor odražava sustavnu strategiju (sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama), koja uključuje sve važne elemente postavljenog problema.	4 Odgovor se osvrće I na ono što je rađeno i zašto je rađeno (metoda suprotnih koeficijenata). Učinjena je i provjera dobivenog rješenja.

4.3 Svrha formativnog vrednovanja u nastavi matematike

Osim što će školski sat učiniti zanimljiviji, formativno vrednovanje u nastavi matematike ima i druge svrhe, a to su:

- Potiču učenike na razmišljanje
- Potiče učenikovu znatiželju
- Ohrabruje učenike da postavljaju pitanja i sudjeluju u razgovorima
- Pomažu u razvoju konceptualnog znanja
- Dovodi učenike da sami zaključe što su naučili, a što još trebaju naučiti
- Potiče razrednu diskusiju, razmjenu ideja među učenicima
- Potiče učenikovo matematičko razmišljanje
- Potiče učenikovo korištenje matematičkog jezika
- Pomažu učenicima u razvijanju vještina samovrednovanja te kritičkom osvrtu na svoje učenje
- Daje povratnu informaciju
- Pomaže nastavnicima da izaberu prigodne metode rada
- Pomaže nastavnicima u otklanjanju mogućih teškoća na satu
- Procjenjuje uspješnost odrađenog nastavnog sata
- Potiče sudjelovanje svih učenika

5 Metode vrednovanja

Razlikujemo tri pristupa vrednovanju: vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog. Vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje pripadaju formativnom vrednovanju. Vrednovanje naučenog pripada sumativnom vrednovanju. Učitelj više nije jedina osoba koja provodi vrednovanje učeničkih postignuća, sada tu ulogu preuzima i sam učenik. U ovom pristupu upravo je učenik u središtu odgojno-obrazovnog procesa u punom smislu te riječi.

5.1 Vrednovanje za učenje

Kod ove metode stavlja se naglasak na proces zajedničkoga prikupljanja informacija i dokaza o procesu učenja i poučavanja učitelja i učenika te interpretaciji tih informacija i dokaza kako bi učitelj unaprijedio poučavanje, a učenik proces učenja. Takvim pristupom učeniku se pruža mogućnost da tijekom učenja postane svjestan kako uči te uvidi kako treba učiti da bi postigao bolje rezultate.Vrednovanje za učenje u pravilu ne rezultira ocjenom, nego kvalitativnom povratnom informacijom i razmjenom iskustava o procesima učenja i usvojenosti znanja i vještina u odnosu na postavljena očekivanja. Povratna je informacija središnji dio vrednovanja za učenje jer učeniku omogućuje preuzimanje kontrole nad vlastitim učenjem. Vrednovanje za učenje uvijek je usmjereno na napredak učenika pa se trenutačna postignuća svakoga učenika uspoređuju s njegovim prethodnim postignućima, fokusirajući se na napredovanje koje je učenik ostvario u odnosu na postavljene odgojno-obrazovne ishode.

Učiteljima vrednovanje za učenje pomaže u:

- prikupljanju informacija o početnim znanjima i iskustvima učenika, stilovima učenja učenika, o razinama usvojenosti znanja, motivaciji za učenje i drugo.
- postavljanju ciljeva i planiranju poučavanja u skladu s potrebama učenika
- dobivanju uvida u učinkovitost vlastita rada, učinkovitijem planiranju i kontinuiranome unapređenju procesa poučavanja

Učenicima vrednovanje za učenje pomaže da:

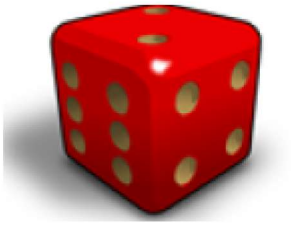
- postanu svjesni koliko učinkovito uče te uvide kako trebaju učiti
- unapređuju kompetenciju učiti kako učiti postavljanjem svojih ciljeva učenja i razvijanjem vještina
- imaju bolja postignuća jer primaju česte povratne informacije koliko napreduju i koliko učinkovito uče
- razvijaju motivaciju za učenje, samopouzdanje i pozitivnu sliku o sebi

Metode formativnog vrednovanja za učenje :

- Rubrike
- Domaći uradak
- Anegdotske zabilješke
- Učeničke mape
- Propitivanje razumijevanja
- Opažanja tijekom rada
- Individualnog
- U skupini
- Rasprave u skupini

Primjena metode u nastavi

Postoje mnogi zanimljivi načini primjene ove metode na satu matematike. Jedan od njih je Bacanje kocke.



Postavlja se šest pitanja, označenih brojkama od 1 do 6 (kocka). Učenici su podijeljeni u grupama od četiri.
Svaka grupa ima jedno bacanje. Učenik baca kocku i odgovara na pitanje pod brojem koji je dobio bacanjem kocke. Ako je broj već dobiven i na pitanje je već odgovoreno, može se ponoviti bacanje ili se može ponoviti i proširiti prethodni odgovor. Odgovarati se može usmeno ili pismeno.

Primjer mogućih zadataka:

$34.5 + 1.8 \cdot 10 =$	$12.5 \cdot 10 - 0.5 =$	$10 \cdot 3.2 + 0.5 \cdot 12 =$
$(34.5 + 1.8) \cdot 10 =$	$12.5 \cdot (10 - 0.5) =$	$(10 \cdot 3.2 + 0.5) \cdot 12 =$
$12.5 \cdot 10 + 0.5 =$	$3.4 \cdot 2 + 1.5 \cdot 7 =$	$10.2 : 2 - 1.9 =$
$12.5 \cdot (10 + 0.5) =$	$3.4 \cdot (2 + 1.5) \cdot 7 =$	$10.2 : (2 - 1.9) =$
$34.5 - 1.8 \cdot 10 =$	$10 \cdot 3.2 - 0.5 \cdot 12 =$	$4.5 : 0.9 + 123 \cdot 0.01 =$
$(34.5 - 1.8) \cdot 10 =$	$(10 \cdot 3.2 - 0.5) \cdot 12 =$	$0.5 + 0.5 \cdot 7 =$

5.2 Vrednovanje kao učenje

Vrednovanje kao učenje pridonosi razvoju učenika kao kompetentne i samouvjerene osobe, učenik uči kritički promišljati o procesu učenja,uočava svoj napredak,prednosti i nedostatke svog načina i metoda učenja, te se uči samoregulaciji vlastitog procesa učenja.

Vrednovanje kao učenje može se provoditi u obliku ispunjavanja različitih lista procjena, rubrika, vođenjem dnevnika učenja ili refleksijom i razgovorom s nastavnikom.

Kod vrednovanja kao učenje potrebno je razlikovati samovrednovanje i vršnjačko vrednovanje. Samovrednovanje provodi sam učenik, a vršnjačko vrednovanje provode učenici međusobno vrednujući rad drugih učenika. Prije pristupa samovrednovanju i vršnjačkom vrednovanju važno je unaprijed s učenicima dogovoriti sastavnice vrednovanja tj. što će se vrednovati. Te sastavnice mogu biti odabrane iz različitih domena: kognitivne, afektivne i socijalne, za razliku od tradicionalne nastave gdje su se isključivo vrednovale sastavnice iz kognitivne domene. Stoga možemo zaključiti da pri vrednovanju kao učenje vrednujemo i procjenjujemo cjeloviti razvoj učenika. Kod vrednovanja kao učenje podrazumijeva se da učenik vrednovanjem uči. Kad se učenici i sami uključe u proces vrednovanja, on će i za njih sigurno biti manje stresan.

Možemo zaključiti da učenici u vrednovanju kao učenje unaprijed znaju koji su ciljevi i ishodi postavljeni te u kojoj razini su ih uspjeli ostvariti. Takav način vrednovanja pozitivno utječe na razvoj samoinicijative kod učenika i samokontrole vlastitog učenja, ali i preuzimanje odgovornosti za vlastito učenje što je i dio Kurikuluma međupredmetne teme Učiti kako učiti. Upravo ta kompetencija preuzimanja odgovornosti za vlastito učenje i samoinicijativnost će učenicima pomoći u daljnjem školovanju, razvoju i kasnijem cjeloživotnom učenju.

Učiteljima vrednovanje pomaže u:

- podijeli odgovornosti između učitelja i učenika
- dobivanju uvida u učenikovo razmišljanje prilikom analize i vrednovanja procesa učenja
- kreiranju učinkovitijega poučavanja jer učenici postaju samostalniji i motiviraniji

Učenicima vrednovanje kao učenje pomaže da:

- shvate da je vrednovanje alat za vlastito praćenje učenja i za stjecanje razumijevanje na kojoj se razini učenja nalaze
- usklađuju vlastite procjene s procjenama drugih

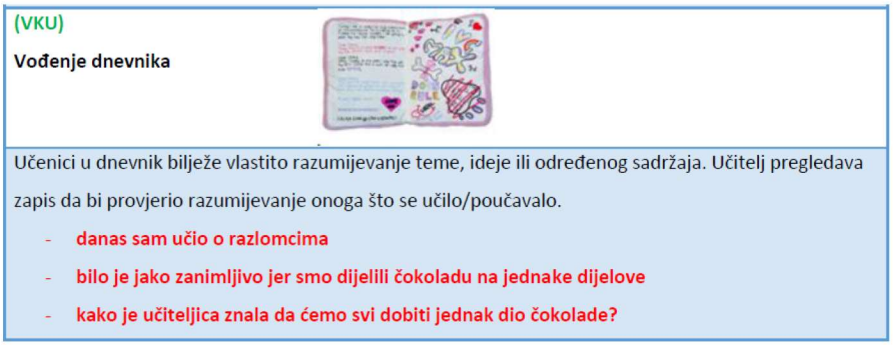
- razvijaju vještinu upravljanja svojim učenjem, postavljanja vlastitih ciljeva i razvijanja vještine samovrednovanja i vršnjačkoga vrednovanja potrebnih za postizanje tih ciljeva
- razvijaju osjećaj odgovornosti i samopouzdanja istovremeno razvijajući kritičko razmišljanje, analizu i na kraju vrednovanje

Metode formativnog vrednovanja kao učenje

- Dnevnik učenja
- Konzultacije s učiteljem
- Razgovori s kolegama
- Ispravak vlastitih i tuđih uradaka
- Rasprava o postavljenim kriterijima
- Rasprava o kriterijima po kojima su (samo)vrednovali.

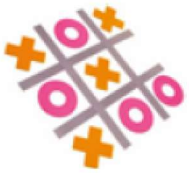
Primjena metode u nastavi

Primjeri vrednovanja kao učenja je vođenje dnevnika u koji si učenici sami zapisuju bilješke sa sata, a učitelj pregledava.



Izvor[9]

Poznato je da učenicima matematika nije među zanimljivim predmetima, ali to ne znači da sat ne može biti zanimljiv, a još uz to i koristan. Kroz igru se može napraviti da učenici rješavaju zadatke, jedan takav primjer je poznata igra Križić-kružić.



Učitelj napravi skup aktivnosti. Tema može biti iz bilo kojeg matematičkog područja. Učenici odabiru aktvnost/zadatke kroz koju će pokazati njezino razumijevanje. Aktivnosti/zadaci su organizirani u 3x3 strukturu kao za igru Križić – kružić. Cilj je da ostvare tri zadatka u nizu. Aktivnosti mogu biti osmišljenje unutar koncepata, dimenzija procesa, razina znanja...

Primjer jedne takve igre iz Djeljivosti brojeva.

Ispitaj je li 234 djeljivo s 8. Opiši postupak kojim ćeš to ispitati. Obrazloži odgovor.	Ispitaj je li 343 djeljivo sa 7. Opiši postupak kojim ćeš to ispitati. Obrazloži odgovor.	Dijeli li broj 9 broj 546?
Dijeli li broj 6 broj 546?	Istraži i ispiši sve prirodne brojeve manje od 20 koji imaju točno dva djelitelja.	Ispitaj je li 28 djelitelj broja 128? Obrazloži postupak i opiši način razmišljanja.
Ispitaj je li 1 289 višekratnik broja 9? Obrazloži postupak i opiši način razmišljanja.	Ispitaj je li 7 djelitelj broja 126? Obrazloži postupak i opiši način razmišljanja.	Ispitaj je li 1 089 višekratnik broja 9? Obrazloži postupak i opiši način razmišljanja.

Izvor[9]

5.3 Vrednovanje naučenog

Pristupom vrednovanja naučenoga provjeravaju se isključivo oni odgojno-obrazovni ishodi koji su definirani kurikulumom, a takvo vrednovanje uvijek rezultira ocjenom. Kriteriji ocjenjivanja moraju biti jasni i javni.

Vrednovanje naučenoga rezultira brojčanom ocjenom, a usvojenost se ishoda provjerava usmenim ispitivanjem, pismenim provjerama i matematičkim/interdisciplinarnim projektima. U jednoj provjeri moguće je ocijeniti više elemenata vrednovanja. U predmetu Matematika postignuća učenika vrednuju se brojčanom ocjenom (nedovoljan – 1, dovoljan – 2, dobar – 3, vrlo dobar – 4, odličan – 5).
Uz ocjenu treba stajati bilješka iz koje je vidljivo što je vrednovano tom ocjenom (oblik, ishod, razina usvojenosti). Zaključna ocjena iz matematike mora se temeljiti na usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda. U tu svrhu nužno je ostvarenost ishoda provjeravati na što više različitih načina i u što više vremenskih točaka.

Elementi vrednovanja u nastavnome predmetu Matematika su:

1. Usvojenost znanja i vještina
    - opisuje matematičke pojmove
    - odabire pogodne i matematički ispravne procedure te ih provodi
    - provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rezultata
    - upotrebljava i povezuje matematičke koncepte.
2. Matematička komunikacija
    - koristi se odgovarajućim matematičkim jezikom (standardni matematički simboli, zapisi i terminologija) pri usmenome i pisanom izražavanju
    - koristi se odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka
    - prelazi između različitih matematičkih prikaza

- svoje razmišljanje iznosi cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama
- postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenoga pitanja
- organizira informacije u logičku strukturu
- primjereno se koristi tehnologijom.

3. Rješavanje problema

   - prepoznaje relevantne elemente problema i naslućuje metode rješavanja
   - uspješno primjenjuje odabranu matematičku metodu pri rješavanju problema
   - modelira matematičkim zakonitostima problemske situacije uz raspravu
   - ispravno rješava probleme u različitim kontekstima
   - provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rješenja problema
   - generalizira rješenje.

Vrednovanje naučenog planiramo prilikom razrade teme. Vrednovati možemo sve što smo planirali za vrednovanje naučenog:

- Pisane provjere znanja – na kraju teme, vrednuju sve (ili većinu) ishoda teme;
- pisane provjere znanja – unutar teme, vrednuju manji dio ishoda, obično kraće traju;
- razne aktivnosti kroz koje možemo provjeriti i vrednovati usvojenost ishoda učenja: zadaci, timski rad, radni listići, projektni zadaci...

6 Zaključak

Vrednovanje učenika može se provesti na više načina. Kako se razvija školstvo, tako se uvode neke nove metode vrednovanja. Dobro je koristiti se i formativnim i sumativnim vrednovanjem. Novi kurikulum nastavnog predmeta Matematika upravo to promiče. Pristupi, poznati kao vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog dobar su način na koji možemo dobiti uvid u učenikov rad kada analiziramo i procjenjujemo uspješnost učenja i poučavanja. Upravo je učenik u središtu odgojno-obrazovnog procesa u punom smislu te riječi. Glavni cilj učenja i poučavanja postaje ne samo (na)učiti matematičke koncepte i procedure, nego i upravljati vlastitim učenjem i postavljati odgovarajuće ciljeve. Uz to je još potrebno da učenici razviju osjećaj odgovornosti i samopouzdanja, istovremeno razvijajući kritičko mišljanje, analizu i na kraju vrednovanje vlastitog rada.

Literatura

[1] C. Danielson, E. Marquez, *Performance Tasks and Rubrics for High School Mathematics*, Routledge, London, 2016.

[2] M. Hunjek, *Vrednovanje kao strategija učenja matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno- matematički fakultet, Matematički odsjek, 2015.*

[3] V. Mužić, H. Vrgoč, *Vrjednovanje u odgoju i obrazovanju*, Zagreb: Hrvatsko pedagoško- književni zbor, 2005.

[4] S. Kadum-Bošnjak,*Praćenje, provjeravanje i ocjenjivanje učenika u nastavi. Metodički obzori*,2(2007.), 35- 51.

[5] S. Stilinović, *Ishodi učenja, prćenje i vrednovanje*-primjeri iz prakse, prezentacija, preuzeto s:

`www.matematika.hr,`

14.9.2019.

[6] *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, Brošura-državna matura:*

`https://www.ncvvo.hr/brosura-drzavna-matura/`

[7] *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, PISA:*

`https://pisa.ncvvo.hr/`

[8] *Alfa portal:*

`http://www.alfaportal.hr/index.php/srednja-eng/1393-vrednovanje-kao-ucenje`

[9] *Škola za život, Metodični priručnici za osnovnu školu:*

`https://skolazazivot.hr/obrazovni-sadrzaji/metodicki-prirucnici/metodicki-prirucnici-za-osnovnu-skolu/`

[10] *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, Narodne novine,* 7/2019, (146).

`https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`

Sažetak

Vrednovanje je važan dio školskog sustava kojim se određuju razine postignutih individualnih i općih ciljeva. U školi služi kao sredstvo za utvrđivanje razine uspješnosti učenika s obzirom na unaprijed definirane norme. Vrednovanje se razlikuje sa obzirom na to tko ga provodi, kada se provodi, kako se provodi i što se vrednuje kod učenika.

Ključne riječi: vrednovanje, proces, ocjenjivanje, praćenje, sumativno, formativno, matematika

Summary

Assessment is an important part of the school system that determines the levels of individual and general goals achieved. At school it serves as a means of determining the student's level of performance in relation to predefined standards. Assessment differs in terms of who implements it, when it is implemented, how it is implemented, and what is valued in students.

Keywords: Assessment, Process, Evaluation, Tracking, Summative, Formative, Mathematics

Životopis

Rođena sam 10. Veljače 1994. u Slavonskom Brodu u Hrvatskoj. U razdoblju od 2000. do 2008. godine pohađala sam Osnovnu školu Vladimir Nazor u Slavonskom Brodu. Nakon toga upisujem srednju Tehničku školu u Slavonskom Brodu te 2012. godine završavam struku Tehničar za logistiku i špediciju. Iste godine upisujem Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera Osijeku, ali zbog zdravstvenih razloga pauziram prvu akademsku godinu. 2013. godine nastavljam sa studiranjem na Integriranom nastavničkom studiju matematike i informatike.

Volim sport. Od svoje 10.-te godine do nedavno trenirala sam stolni tenis. Svake godine sam predstavljala Sveučilište J. J. Strossmayer na natjecanjima iz stolnog tenisa. Redovno smo zauzimali 1. mjesto na Sveučilišnom natjecanju, a također smo osvojile 3. mjesto na državnom prvenstvu 2018. godine, koje se igralo u Rovinju. Najveći uspjeh mi je osvojeno 1. mjesto na znanstveno-sportskom natjecanju "Primatijada" u Čanju 2017. godine, te osvojeno 2.mjesto na "Primatijadi" u Budvi 2018.godine. U slobodno vrijeme volim otići u teretanu ili čitati knjigu.

Od nedavno sam se zaposlila na zamjeni kao profesorica matematike u Ekonomskoj školi Slavonski Brod.