Vrednovanje opcija na OTC tržištu

Rački, Barbara

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:052247

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Barbara Rački

Vrednovanje opcija na OTC tržištu

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Barbara Rački

Vrednovanje opcija na OTC tržištu

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc.Nenad Šuvak

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Izvedeni financijski instrumenti **3**
2.1 Osnovne pretpostavke matematičkih modela na financijskom tržištu . 3
2.2 Europske call i put opcije 4
2.3 Forward i futures ugovori 5

3 Black-Scholes-Mertonov model **7**
3.1 Black-Scholes-Mertonov model s dividendama 14
3.2 Black model 15
3.3 Ekvivalentna martingalna mjera 15
3.3.1 Tržišna cijena rizika ili Sharpeov omjer 16
3.4 Promjena tržišne cijene rizika 19

4 OTC tržište obveznica i kamatnih stopa **21**
4.1 LIBOR 24
4.2 Forward rate Agreement (FRA) 24
4.3 Floating rate notes 25
4.4 Kamatni Swap 26

5 Opcije na OTC tržištu **32**
5.1 Black model za određivanje cijena opcija na OTC tržištu 32
5.2 Cap i floor opcije 33
5.2.1 Cap opcije 33
5.2.2 Floor opcije 35
5.2.3 Primjer cap i floor opcije koristeći Bloomberg 35
5.3 Swap opcije 40
5.3.1 Primjer swap opcije koristeći Bloomberg 42
5.4 Generalizirani modeli 46
5.4.1 Shifted Black model 46
5.4.2 Bachelier model 46
5.5 Zaključak 47

1 Uvod

U posljednjih nekoliko godina u suvremenom bankarstvu upravljanje tržišnim rizicima jedan je od najznačajnijih oblika upravljanja rizicima. Tržišni rizik predstavlja gubitak uzrokovan promjenama na tržištu kao što su promjene deviznih tečajeva, cijena, indeksa te kamatnih stopa. Trgovanje financijskim izvedenicama osim na burzovnom tržištu veoma je prošireno i na OTC (tzv. over the counter) tržištu. OTC tržište je tržište na kojemu se prodaja odvija neposredno između dvije zainteresirane strane. Na ovakvom tržištu mogu se pronaći različite vrste investitora te ne postoji jedinstveno mjesto trgovanja kao na burzi. Opcije na OTC tržištu su obično strukturirane specifično prema potrebama klijenata. U posljednjih nekoliko godina na ovom tržištu uvelike se povećao interes za analizom opcija na kamatnu stopu. Tri najpopularnije OTC opcije na kamatnu stopu su kamatni cap i floor te swap opcije (tzv. swaptions). Standardni model koji se koristi za nearbitražno vrednovanje opcija vezanih uz kamatne stope je Black model ili Black 76 koji je proširenje Black-Scholes-Mertonovog modela. Originalnu formulu Black modela predstavio je Fisher Black 1976.-te godine. Iako je početna ideja Black modela bila određivanje cijena opcija kod kojih je vezana imovina u odnosu na koju određujemo cijenu opcije (tzv.underlying asset) futures ugovor, pokazalo se da je ovaj model primjenjiv i za određivanje cap, floor i swap opcija kod koji je vezana imovina kamatna stopa. Black model nasljeđuje osnovne pretpostavke Black-Scholes-Mertonovog modela, odnosno pretpostavlja da je vezana imovina log-normalna slučajna varijabla s konstantnom volatilnošću. Još jedna od pretpostavki originalnog Black modela, jednako kao i Black-Scholes Mertonovog modela je da je stopa povrata na nerizičnu imovinu za neprekidno ukamaćivanje konstantna, odnosno 1 kn uložena u trenutku 0 vrijedi e^{rt} u trenutku t, pri čemu je r konstantna. U ovom radu postrožiti čemu ovu pretpostavku realnijom pretpostavkom, a to je da je stopa povrata promjenjiva, odnosno opisujemo je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom. Budući da je u modelima za cap, floor i swap opcije vezana imovina kamatna stopa i budući da kamatne stope mogu poprimiti negativne vrijednosti Black model se sve manje primjenjuje u praksi te se češće koriste prošireni modeli, poput shifted Black modela i Bachelier modela koje ćemo samo ukratko predstaviti na kraju rada.

2 Izvedeni financijski instrumenti

Mjere rizika odnose se na prognozu moguće štete odnosno nastanka nepovoljnog ili štetnog događaja. Cilj svakog pojedinca, jednako kao i financijskih institucija koje trguju na financijskom tržištu je upravljati rizikom. Upravljati rizikom znači gledati u budućnost i unaprijed razmišljati o mogućim događajima i posljedicama s kojima se možemo suočiti u budućnosti te na vrijeme reagirati kako bi se rizici minimizirali i nepovoljni učinci izbjegli. Za kontrolu i ograničavanje rizika na financijskom tržištu često se koriste izvedeni financijski instrumenti. Izvedeni financijski instrumenti jesu ugovori čija je vrijednost izvedena iz vrijednosti nekog drugog osnovnog instrumenta. Među najraširenijima su forward i futures ugovori te europske put i call opcije. Prije samih definicija forward i futures ugovora i europskih put i call opcija navesti ćemo osnovne pretpostavke modela na financijskom tržištu.

2.1 Osnovne pretpostavke matematičkih modela na financijskom tržištu

Označimo sa S_t^i cijenu i-te financijske imovine u trenutku t, $i \in \{0, 1, ...d\}, d \in \mathbb{N}$, $t \in \{0, 1, ..T\}, T \in \mathbb{N}$. Pretpostavljamo da na tržištu trgujemo s d rizičnih financijskih imovina i jednom nerizičnom financijskom imovinom, novcem čiju vrijednost u trenutku t označavamo sa S_t^0. Cijena nerizične financijske imovine poznata je u svakom trenutku ako je poznata efektivna kamatna stopa. U diskretnom vremenu cijena nerizične financijske imovine je

$$S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t,$$

odnosno

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$$

u neprekidnom vremenu, pri čemu pretpostavljamo da su efektivna kamatna stopa r' i neprekidna kamatna stopa r konstantne.[1] Cijene rizične financijske imovine poznate su u trenutku $t = 0$ dok ih u preostalim trenucima modeliramo nenegativnim slučajnim varijablama. Osim toga pretpostavljamo i efikasnost tržišta, svi investitori imaju pristup svim informacijama i te se informacije odražavaju na cijene rizične financijske imovine. Financijska imovina je beskonačno djeljiva i likvidna, što znači da se može prodavati i kupovati u proizvoljnim i neograničenim količinama. Postoje i pretpostavke da se na financijskom tržištu trguje bez transakcijskih troškova te da posjedovanjem financijskih instrumenata ne ostvarujemo dodatni prihod ili trošak. Jedna od pretpostavki koja će nam biti vrlo važna u nastavku je teorija irelativnosti politike dividendi koja kaže da će se u slučaju isplati dividendi na savršenom tržištu cijena financijske imovine u trenutku isplate dividendi smanjiti upravo za iznos dividende. Odgovor na pitanje vrijede li ove pretpostavke u stvarnom svijetu vrlo je jasan. Imovinu ne možemo kupovati i prodavati u neograničenim količinama već postoji odgovarajući broj jedinica imovine koji možemo kupiti ili prodati, osim toga posjedovanjem neke imovine kao npr. kuponske obveznice, koja će detaljnije

[1] U nastavku rada, umjesto S_t^0 koristit ćemo samo oznaku S_t.

biti objašnjena u nastavku rada, ostvarujemo dodatni prihod jednak iznosu kupona za vrijeme posjedovanja te obveznice. Također, ostvaruju se i razni transakcijski troškovi koji u teoriji nisu uključeni u samu cijenu financijskih instrumenata.

2.2 Europske call i put opcije

Definicija 1. *Europska Call (Put) opcija je ugovor koji daje vlasniku pravo ali ne i obvezu kupiti (prodati) neki financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni, cijeni izvršenja, na određeni datum u budućnosti, datum dospijeća.*

Označimo sa S_t cijenu financijske imovine u trenutku $t \geq 0$, sa S_T tržišnu cijenu financijske imovine u trenutku dospijeća te sa K cijenu izvršenja. U svakom trenutku $t \geq 0$ moguće su sljedeće dvije situacije:

1. $S_t > K$
2. $S_t \leq K$.

U prvom slučaju, odnosno u slučaju kada je cijena financijske imovine u trenutku t veća od cijene izvršenja vlasnik call opcije koristi svoje pravo i kupuje financijski instrument po dogovorenoj cijeni izvršenja te time bilježi zaradu od $S_T - K$. Ova situacija ne odgovara vlasniku put opcije budući ne želi prodati financijsku imovinu po cijeni koja je manja od njene tržišne. Iz tog razloga u ovom slučaju vlasnik Put opcije ne koristi svoje pravo.

U drugom slučaju kada je cijena financijske imovine manja od cijene izvršenja vlasnik call opcije ne koristi svoje pravo na kupnju te time ne bilježi zaradu ali niti gubitak. Vlasnik put opcije koristi svoje pravo te prodaje financijsku imovinu po cijeni koja je manja od njene tržišne te time bilježi zaradu od $K - S_T$. Ono što možemo vidjeti je da vlasnici opcija nikada nisu u gubitku, odnosno, maksimalam gubitak im je visina premije koju su platili za opciju. Vrijednost call opcije za vlasnika je $max(0,\, S_T - K) = (S_T - K)_+$, dok je vrijednost put opcije za vlasnika $max(0,\, K - S_T) = (K - S_T)_+$. Vrijedi

$$C_t^{Call} - C_t^{put} = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_t - K.$$

Ovaj identitet naziva se call-put paritet i bit će nam koristan u izračunu cijena opcija. Budući da bi s obzirom na prethodno rečeno prodavatelj opcije uvijek bio na gubitku, kupac plaća premiju prodavatelju opcije, odnosno plaća pravo da koristi opciju. U nastavku rada cilj nam je odrediti koliko iznosi ta premija, odnosno kolika je cijena opcije. Ključna pretpostavka je da se vrijednost opcije određuje u kontekstu financijskog tržišta na kojemu nema arbitraže [2], odnosno nitko ne može zaraditi bez rizika. Jedna od najpopularniji metoda za određivanje vrijednosti Europskih call i put opcija je Black-Sholes-Mertonova formula. Do Black-Scholes-Mertonove formule jednako kao i do Black modela doći ćemo konstrukcijom bezrizičnog portfelja. Portfelj je sastavljen od različitih financijskih instrumenata kojima trgujemo.

Definicija 2. *Vektor $\rho = (\rho^0, ...\rho^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, gdje ρ^i, $i = 0, 1, \ldots, d$, označava broj jedinica i-te financijske imovine, naziva se portfelj.*

[2] Arbitraža - istodobna kupovina (po nižoj cijeni) i prodaja određenog financijskog instrumenta (po višoj cijeni, ali na drugom tržištu) načinjena s ciljem ostvarivanja zarade na razlici u cijeni.

2.3 Forward i futures ugovori

Definicija 3. *Forward ugovor je ugovor između dvije strane o kupnji (odnosno prodaji) financijskog instrumenta na specificirani budući datum (tzv. 'delivery date') uz cijenu izvršenja (tj. stopu prinosa, tečaj) F_0 dogovorenu danas (tzv. 'delivery price').*

Ovisno o vrsti financijske imovine cijenu izvršenja forward ugovora na savršenom tržištu možemo vrlo lako odrediti. Najjednostavnije je odrediti cijenu forward ugovora uz pretpostavku da posjedovanjem financijske imovine ne ostvarujemo nikakav dodatni prihod niti trošak. Primjer takve financijske imovine su obveznice bez kupona koje ćemo detaljnije objasniti u nastavku.

Lema 1. *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijsku imovinu čija je sadašnja vrijednost S_0 i čijim posjedovanjem ne ostvarujemo nikakav dodatni prihod niti trošak, mora biti*

$$F_0 = S_0 e^{rT}. \tag{1}$$

Dokaz. Pokazat ćemo da u oba slučaja, $F_0 > S_0 e^{rT}$ i $F_0 < S_0 e^{rT}$, možemo doći do bezrizične zarade, odnosno da je jedina nearbitražna cijena $F_0 = S_0 e^{rT}$.

1. $F_0 > S_0 e^{rT}$
   Posudimo S_0 novaca uz intenzitet kamate r i kupimo obveznicu. Sklopimo forward ugovor o prodaji obveznice s dospijećem u trenutku T i s cijenom izvršenja $F_0 > S_0 e^{rT}$. U trenutku T izvršimo obvezu iz forward ugovora, odnosno prodajemo obveznicu po cijeni F_0. Banci dugujemo $S_0 e^{rT}$ te kad to vratimo ostaje nam zarada od $F_0 - S_0 e^{rT} > 0$.

2. $F_0 < S_0 e^{rT}$
   Napravimo short selling [3] jedne obveznice i dobijemo S_0 novaca. Novac uložimo u banku uz intenzitet kamate r. Sklapamo forward ugovor u poziciji kupca s dospijećem u trenutku T i cijenom izvršenja $F_0 < S_0 e^{rT}$. U trenutku T iz banke podignemo ulog u iznosu od $S_0 e^{rT}$ te izvršavamo obvezu iz forward ugovora i kupujemo obveznicu. Ostaje nam zarada $S_0 e^{rT} - F_0 > 0$.

□

U prethodnoj lemi pretpostavili smo da posjedovanjem financijske imovine ne ostvarujemo dodatni prihod ili trošak. Pretpostavimo nadalje da želimo sklopiti forward ugovor vezan uz financijsku imovinu koja vlasniku osigurava savršeno predvidljivi novčani prihod. Primjer takvih financijskih imovina su dionice za koje nam je točno poznata vrijednost isplate dividendi i kuponske obveznice za koje nam je poznat iznos kupona.

[3] Short sell - jedna od arbitražnih tehnika koja se provodi u očekivanju pada cijene vrijednosnih papira. Opisno, investitor posuđuje vrijednosne papire od brokera te ih prodaje kako bi ih otkupio prema očekivanom padu njihovih cijena te zaradio nakon što ih vratiti brokeru.

Lema 2. *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijsku imovinu čija je sadašnja vrijednost S_0 i čijim posjedovanjem ostvarujemo prihod čija je sadašnja vrijednost I, mora biti*

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}. \tag{2}$$

Dokaz. Pretpostavimo da se radi o dionici i da se vlasniku dionice u trenutku $t \in [0, T]$ isplaćuje dividenda u iznosu C. U tom slučaju sadašnja vrijednost dividende jednaka je $I = Ce^{-rt}$. Analogno dokazu u prethodnoj lemi, pretpostavimo:

1. $F_0 > (S_0 - I)e^{rT}$
   Posudimo iznos I uz intenzitet kamate r na t vremena i iznos $(S_0 - I)$ na T vremena. Ukupno smo posudili iznos S_0 kojim kupujemo dionicu. Sklapamo forward ugovor u poziciji prodavatelja po cijeni izvršenja $F_0 > (S_0 - I)e^{rT}$. U trenutku t isplaćuje nam se iznos dividende C, a kako smo banci dužni $Ie^{rt} = Ce^{-rt}e^{rt} = C$, vrijednost dividende pokriva obveze koje dugujemo banci. U trenutku T izvršavamo obvezu forward ugovora te prodajemo dionicu po cijeni F_0. Banci dugujemo $(S_0 - I)e^{rT}$ te nam ostaje zarada $F_0 - (S_0 - I)e^{rT} > 0$.

2. $F_0 < (S_0 - I)e^{rT}$
   Napravimo short selling dionice i prodajemo je po cijeni S_0 novaca. Dobivenih S_0 uložimo u banku ali tako da iznos I uložimo na t vremena uz intenzitet kamate r, a preostali iznos $(S_0 - I)$ uložimo na T vremena. Sklapamo forward ugovor u poziciji kupca s dospijećem u trenutku T i cijenom izvršenja $F_0 < (S_0 - I)e^{rT}$. U trenutku t iz banke podignemo ulog u iznosu od $Ie^{rT} = C$ kako bismo mogli isplatiti obveze dividendi. U trenutku T iz banke podignemo ulog u iznosu od $(S_0 - I)e^{rT}$, izvršavamo obvezu iz forward ugovora i kupujemo dionicu. Ostaje nam zarada od $(S_0 - I)e^{rT} - F_0 > 0$.

□

Pretpostavimo nadalje da nam je umjesto vrijednosti isplate dividende poznat prinos dividende. Prinos dividende pokazuje postotak isplaćenih dividendi u proteklih godinu dana prema tekućoj tržišnoj cijeni dionice. Odnosno,

$$\text{prinos dividendi} = \text{godišnja dividenda} \setminus \text{cijena dionice}.$$

Lema 3. *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijsku imovinu čija je sadašnja vrijednost S_0 i prinosom dividendi q, mora biti*

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}. \tag{3}$$

Dokaz. Slično kao prethodna dva dokaza. Moguće pronaći u [17], Problem 5.20. □

Osim forward ugovorima na financijskim tržištima trguje se i **futures ugovorima.** Futures ugovori su standardiziran vrijednosni papir kojim se slobodno i organizirano trguje. Samim time likvidnost je puno veća nego kod forward ugovora. Futurs ugovorima se trguje na burzi dok se forward ugovorima trguje na OTC tržištu. Ono što je važno je da su u slučaju kada je bezrizična kamatna stopa konstantna

i kada je datum dospijeća jednak, futures i forward ugovori u teoriji jednaki[4]. Kada kamatna stopa nije konstanta i nije prediktivna, forward i futures ugovori u teoriji nisu u potpunosti jednaki ali je razlika zanemariva u slučaju kada su ugovori dogovoreni na kraći period od nekoliko mjeseci. U praksi postoje razlike koje teorijski modeli neće razlikovati, poput razlike u transakcijskim troškovima i rizika da druga strana neće ispuniti obveze ugovora koji je češće manji kod futures ugovora. Unatoč razlikama koje u praksi postoje u nastavku pretpostavljamo da su futures i forward cijene jednake odnosno opisujemo ih slučajnim procesom $(F_t, t \geq 0)$ i pretpostavljamo da je F_t log-normalno distribuirana slučajna varijabla.

3 Black-Scholes-Mertonov model

Osnova za opisivanje matematičkih modela na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu je Brownovo gibanje i neke njegove transformacije, dok je Black–Scholesov-Mertonov model najpoznatiji model za nearbitražno vrednovanje izvedenica, a polazi od pretpostavke da cijene dionica modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem. U nastavku su dane osnovne definicije i kratka objašnjenja zašto cijene dionica ima smisla modelirati upravo na ovaj način.

Definicija 4. *Slučajni proces $\{B_t, t \geq 0\}$ na vjerojatnosnom prostoru $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ naziva se Brownovo gibanje, odnosno Wienerov proces, ako za njega vrijedi:*

1. $B_0 = 0$ *g.s., odnosno* $P(B_0 = 0) = 1$
2. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \forall t, s$ *takve da je* $t > s \geq 0$, *odnosno prirasti Brownovog gibanja na jednako dugim vremenskim intervalima su jednako distribuirani (stacionarnost prirasta)*
3. $\forall t_0, \ldots, t_n \geq 0$ *t.d. je* $t_0 < \cdots < t_n$ *slučajne varijable* $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *su nezavisne, odnosno prirasti Brownovog gibanja na disjunktnim vremenskim intervalima su nezavisni.*

Definicija 5. *Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces $\{S_t, t \geq 0\}$ gdje je*

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

pri čemu je $\{B_t, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje.

Jedno od važnih svojstava prethodno definiranih procesa je to da su ti procesi Markovljevi. Stohastički proces je Markovljev ako za dano trenutno stanje i sva prošla stanja, budućnost procesa ovisi samo o trenutnome stanju i niti o jednom drugome prethodnom. Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja očito je iz same definicije, odnosno svojstva 3. Geometrijsko Brownovo gibanje također je Markovljev proces. Pretpostavimo da je t sadašnjost, $h > 0$, tada je

$$\begin{aligned} S_{t+h} = S_0 e^{\sigma B_{t+h} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+h)} &= S_0 e^{\sigma(B_{t+h} - B_t + B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)h} \\ &= S_t e^{\sigma(B_{t+h} - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)h}. \end{aligned}$$

[4]Dokaz se može pronaći u [16], Appendix 5.

Uz dano S_t, budućnost S_{t+h} ovisi samo o prirastu Brownovog gibanja $(B_{t+h} - B_t)$, a kako Brownovo gibanje ima nezavisne priraste taj je prirast nezavisan o Brownovom gibanju prije trenutka t.

Definicija 6. *Markovljeve procese u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja i g.s. neprekidnim trajektorijama zovemo difuzije.*

Trajektorije Brownovog gibanja su gotovo sigurno neprekidne i nigdje diferencijabilne.

Definicija 7. *Slučajan proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je h-sebi sličan za neki $h \geq 0$ ako za njegove konačno dimenzionalne distribucije vrijedi*

$$(T^h X_{t_1} \dots T^h X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{T_{t_1}} \dots X_{T_{t_n}}), \quad \forall T \geq 0$$

i za proizvoljne $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Nediferencijabilnost trajektorija Brownovog gibanja slijedi iz tvrdnje da je Brownovo gibanje $\frac{1}{2}$-sebi sličan proces [5]i sljedećeg teorema.

Teorem 1. *Ako je $\{X_t, t \geq 0\}$ h-sebi sličan proces za $h \in (0, 1)$, tada za svaki fiksirani t_0 vrijedi*

$$\lim_{t \to t_0} sup \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty,$$

tj. trajektorije takvih h-sebi sličnih procesa su nigdje diferencijabilne funkcije g.s..

Dokaz. Dokaz moguće pronaći u [21], str. 188. □

Dinamiku difuzije opisujemo stohastičkim diferencijalnim jednadžbama. [6]

Označimo sa ΔB_t prirast Brownovog gibanja na $[t, t + \Delta t\rangle$. Prema definiciji Brownovog gibanja

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \sim N(0, \Delta t).$$

Kada $\Delta t \to 0$ koristit ćemo oznaku dB_t. Drugim riječima, dB_t ima svojstva slučajne varijable ΔB_t kada $\Delta t \to 0$. Brownovo gibanje možemo generalizirati procesom $\{X_t, t \geq 0\}$ koji opisujemo stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dX_t = adt + bdB_t, \tag{4}$$

pri čemu su $a \in \mathbb{R}$ i $b \geq 0$ konstante, a proces kreće iz $X_0 = 0$.[7]Jednadžbu 4 možemo zapisati kao diferencijsku jednadžbu

$$\Delta X_t = a\Delta t + b\Delta B_t.$$

Prema definiciji Brownovog gibanja slijedi

$$\Delta X_t \sim \mathcal{N}(a\Delta t, b^2 \Delta t).$$

[5]Više moguće pronaći u [21], str. 36-40.

[6]Više o stohastičkim diferencijalnim jednadžbama moguće je pronaći u [21], poglavlje 3. i [10], poglavlje 5.

[7]Za $a = 0$ i $b = 1$ proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je standardno Brownovo gibanje.

Prethodno znači da su očekivana stopa povrata i varijanca prirasta procesa X_t na intervalu duljine Δt konstantne. Primamljivo bi bilo pretpostaviti da cijene dionica prate ovako definirani proces. No, to bi značilo da je očekivana stopa povrata na dionicu neovisna o samoj cijeni dionice. Drugim riječima investitor bi očekivao jednak povrat u slučaju dionice čija je cijena 100kn i čija je cijena 200kn. Iz tog razloga definiramo sljedeći proces.

Definicija 8. *Neka je* $\{B_t, t \geq 0\}$ *Brownovo gibanje. Itôv proces je slučajni proces* $\{X_t, t \geq 0\}$ *oblika*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t, \tag{5}$$

pri čemu su $a\colon [0,T] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *i* $b\colon [0,T] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *funkcije, a* $X_0 = 0$.

Analogno prethodnom

$$\Delta X_t \sim \mathcal{N}(a(X_t, t)\Delta t, b(X_t, t)^2 \Delta t),$$

odnosno očekivana stopa prirasta jednako kao i varijanca ovisit će o samom slučajnom procesu kojeg modeliramo i vremenu $t \geq 0$.

Nadalje, može se pokazati da je geometrijsko Brownovo gibanje, koji smo definirali definicijom 5, jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{6}$$

pri čemu proces kreće iz $S_0 = 0$, odnosno u integralnom obliku

$$S_t = \alpha \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s. \tag{7}$$

Prvi integral je običan Riemannov integral, a drugi Itôv stohastički integral.[8]

Definicija 9. *Za familiju* σ*-algebri* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *na vjerojatnosnom prostoru* $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ *kažemo da je filtracija ako je* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$*, odnosno ako je to rastuća familija* σ*-algebri.*

Definicija 10. *Jako rješenje Itôve stohastičke diferencijalne jednadžbe je stohastički proces* $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ *koji zadovoljava sljedeća svojstva*

- X *je adaptiran na Brownovo gibanje, tj. u vremenu* t *je funkcija od* B_s, $s \leq t$.
- *Riemannov i Itôv stohastički integral u jednadžbi 7 su dobro definirani.*
- X *je funkcija slučajnih varijabili* B_s, $0 \leq s \leq t$ *i koeficijenata* $a(t,x)$ *i* $b(t,x)$.

Teorem 2. *Pretpostavimo da početni uvjet* X_0 *ima konačan drugi moment* ($\mathbb{E}X_0^2 < \infty$)*, tada Itôva stohastička diferencijalna jednadžba (5) ima jedinstveno jako rješenje* $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ *ako* $\forall t \in [0,T]$ *i* $x, y \in \mathbb{R}$ *funkcije* $a(t,x)$ *i* $b(t,x)$ *zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

[8] Više o Itôvom stohastičkom integralu moguće pronaći u u [21].

- *$a(t,x)$ i $b(t,x)$ su neprekidne funkcije,*
- *$a(t,x)$ i $b(t,x)$ za neku konstantu K zadovoljavaju Lipschitzov uvjet s obzirom na prostornu varijablu:*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|.$$

Dokaz. Dokaz moguće pronaći u [10], str. 119-121. □

Uočimo, da je (6) Itôv proces kod kojeg su funkcije $a(S_t,t) = \alpha S_t$ i $b(S_t,t) = \sigma S_t$ što znači da vrijedi

$$\Delta S_t \sim \mathcal{N}(\alpha S_t \Delta t, (\sigma S_t)^2 \Delta t),$$

pri čemu je

$$\Delta S_t = \alpha S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta B_t. \tag{8}$$

Odnosno,

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \alpha \Delta t + \sigma \Delta B_t \sim \mathcal{N}(\alpha \Delta t, \sigma^2 \Delta t).$$

Uočimo da je izraz na lijevoj strani relativni povrat na intervalu duljine Δt. Parametre α i σ u slučaju jediničnog intervala možemo interpretirati kao očekivanu stopu povrata i standardnu devijaciju povrata tzv. volatilnost. Također, možemo uočiti da ovaj proces zadovoljava jednadžbu (5). Ono što za sada znamo je distribucija relativnog povrata cijena dionica, u nastavku je cilj doći do same distribucije kojom modeliramo cijenu dionice, odnosno jednodimenzionalne distribucije geometrijskog Brownovog gibanja. Vrlo važna bit će sljedeća lema.

Lema 4. *(Itôva formula za Itôv proces)*
Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ Itôv proces dan formulom (5) i neka je $G(t,x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $G_t(t,x)$, $G_x(t,x)$ i $G_{xx}(t,x)$. Tada za svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$dG(t,X_t) = \Big(a(X_t,t)G_x(t,X_t) + G_t(t,X_t) + \frac{1}{2}b(X_t,t)^2 G_{xx}(t,X_t)\Big)dt + b(X_t,t)G_x(t,X_t)dB_t. \tag{9}$$

Dokaz. Moguće pronaći u Vondraček [13]. □

Prema Lemi, budući da je geometrijsko Brownovo gibanje Itôv proces, vrijedi

$$dG(t,S_t) = \Big(\alpha S_t G_x(t,S_t) + G_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 G_{xx}(t,S_t)\Big)dt + \sigma S_t G_x(t,S_t)dB_t. \tag{10}$$

Pretpostavimo da je $G(t,S_t) = ln(S_t)$. Prema Itôvoj lemi

$$G_S = \frac{1}{S_t}, \qquad G_{SS} = -\frac{1}{S_t^2}, \qquad G_t = 0.$$

Uvrštavajuću u jednadžbu (10) dobivamo

$$dG(t,S_t) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t. \tag{11}$$

Budući da su α i σ konstante slijedi da $G(t,S_t) = lnS_t$ prati generalizirani proces Brownovog gibanja definiranog sa (4). Promatramo promjenu na intervalu $[0,T]$. Vrijedi da je

$$ln(S_T) - ln(S_0) \sim N\left((\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right),$$

tj.

$$ln(S_T) \sim N\left(ln(S_0) + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right). \tag{12}$$

Budući da je logaritam cijena normalno distribuirana slučajna varijabla, ono što smo ovime pokazali je da je cijena dionice S_t log-normalno distribuirana što ima smisla budući da cijene dionica ne mogu poprimati negativne vrijednosti. Također, može se pokazati

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{\alpha T}, \tag{13}$$

$$Var(S_t) = S_0^2 e^{2\alpha T}(e^{\sigma^2 T} - 1), \tag{14}$$

odnosno $S_T \sim logN\left(S_0 e^{\alpha T}, S_0^2 e^{2\alpha T}(e^{\sigma^2 T} - 1)\right)$.

S ciljem određivanja vrijednosti call opcije, označimo sa $f(t,x)$ vrijednost call opcije u trenutku t ako je $x = S_t$, (S_t prati proces (6)). Uočimo, $f(t,x)$ je deterministička funkcija $f : [0,T] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ dok je $(f(t,S_t), t \in [0,T])$ slučajni proces. Želimo izračunati funkciju $f(t,x)$. Za početak prema Itôvoj formuli odredimo diferencijal od $f(t,S_t)$. Imamo

$$df(t,S_t) = \left(\alpha S_t f_x(t,S_t) + f_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t,S_t)\right)dt + \sigma S_t f_x(t,S_t)dB_t, \tag{15}$$

odnosno u diferencijskom obliku

$$\Delta f(t,S_t) = \left(\alpha S_t f_x(t,S_t) + f_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t,S_t)\right)\Delta t + \sigma S_t f_x(t,S_t)\Delta B_t. \tag{16}$$

Označimo sa $(\Pi_t, t \in [0,T])$ slučajni proces kojim opisujemo vrijednosti portfelja. Očito je da je izdavanje opcija rizična aktivnost pa je iz tog razloga investitoru u cilju minimizirati ili u potpunosti ukloniti taj rizik. Rizik možemo eliminirati konstruirajući bezrizične portfelje (tzv. hedging portfelje). Konstrukcija takvih portfelja naziva se strategija trgovanja. Budući da trgujemo bez arbitraže za sve bezrizične portfelje vrijedi da im je povrat jednak bezrizičnoj kamatnoj stopi. Pretpostavimo za početak da investitor zauzima kratku poziciju u jednoj opciji i dugu poziciju u Δ_t dionica. Kažemo da investitor zauzima dugu poziciju, odnosno odluči "ići dugo" ako kupuje imovinu za koju smatra da će njena cijena porasti. Ako je u pravu ostvaruje dobit prodajom po nižoj cijeni. Zauzeti kratku poziciju, odnosno "ići kratko", znači prodati imovinu za koju smatramo da će njena cijena pasti, te ostvariti dobit kupnjom po nižoj cijeni. Dakle, u ovom slučaju investitor konstruira

portfelj $\rho = (\Delta_t, -1)$. Ovakav portfelj možemo konstruirati zbog pretpostavke da je financijska imovina beskonačno djeljiva i likvidna. Vrijednost takvog portfelja je

$$\Pi_t = \Delta_t S_t - f(t, S_t), \tag{17}$$

odnosno,

$$d\Pi_t = \Delta_t dS_t - df(t, S_t). \tag{18}$$

Uočimo da smo fiksirali Δ_t na vremenskom intervalu $[t, t + dt\rangle$. Uvrštavanjem jednadžbi (15) i (6) u jednadžbu (18) slijedi

$$d\Pi_t = \sigma S_t\Big(\Delta_t - f_x(t, S_t)\Big)dB_t + \Big(\alpha S_t(\Delta_t - f_x(t, S_t)) - f_t(t, S_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)\Big)dt.$$

Pretpostavimo da je

$$\Delta_t = f_x(t, S_t).$$

Slijedi

$$d\Pi_t = \Big(f_t(t, S_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)\Big)dt.$$

Dakle, uz pretpostavku da je količina dionica koju posjedujemo jednaka $f_x(t, S_t)$, eliminirali smo izvor nesigurnosti B_t te vrijednost našeg portfelja postaje trenutno bezrizična, odnosno bezrizična na intervalu duljine dt. To znači da ako želimo trgovati bezrizično za vrijeme trajanja opcije moramo u svakom novom intervalu rebalansirati naš portfelj. Ovakva strategija trgovanja naziva se dinamička strategija trgovanja. Generalno, Δ_t se naziva **delta opcije** i definiramo ju kao stopu promjene vrijednosti opcije s obzirom na promjenu cijene vezane imovine (tzv. underlying asset).

Budući da je sada portfelj bezrizičan na intervalu duljine dt i budući da trgujemo bez arbitraže mora vrijediti

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt, \tag{19}$$

pri čemu je r bezrizična kamatna stopa. Uvrštavanjem (17) i (18) slijedi

$$\Big(f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2\Big)dt = r\Big(f(t, S_t) - f_x(t, S_t)S_t, \Big)dt, \tag{20}$$

odnosno

$$f_t(t, S_t) + rS_t f_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t) = rf(t, S_t). \tag{21}$$

Ono što trebamo odrediti je funkcija $f(t, x)$ koja $\forall t \in [0, T)$ i $x \geq 0$ zadovoljava jednadžbu

$$f_t(t, x) + rxf_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) = rf(t, x). \tag{22}$$

Ova jednadžba naziva se Black-Scholes-Mertonova parcijalna diferencijalna jednadžba.

Drugi način kojim možemo doći do je Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe je konstrukcija portfelja koji će u svakom trenutku biti jednak vrijednosti opcije. Takav portfelj naziva se replicirajući portfelj, a strategija statička strategija trgovanja. Kod statičke strategije trgovanja rizik je u potpunosti eliminiran i nije potrebno rebalansirati portfelj kao u slučaju dinamičke strategije trgovanja.

Pokazat ćemo da u tom slučaju cijena opcije zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu (22).

Pretpostavimo da investitor zauzima kratku poziciju u N obveznica koje ćemo označiti sa O_t, pri čemu je $dO_t = rO_t dt$[9] i dugu poziciju u Δ_t dionica, odnosno konstruira portfelj $\rho = (\Delta_t, -N)$. Vrijednost takvog portfelja je

$$\Pi_t = \Delta_t S_t - NO_t, \tag{23}$$

odnosno,

$$d\Pi_t = \Delta_t dS_t - rNO_t dt. \tag{24}$$

Tražimo portfelj takav da vrijedi $d\Pi_t = df(t, S_t)$. Odnosno prema (15) i (24)

$$\Delta_t dS_t - rNO_t dt = \Big(\alpha S_t f_x(t, S_t) + f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)\Big)dt + \sigma S_t f_x(t, S_t) dB_t.$$

Koristeći jednadžbu (6)

$$(\Delta_t \alpha S_t - rNO_t dt)dt + \sigma \Delta_t S_t dB_t = \Big(\alpha S_t f_x(t, S_t) + f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)\Big)dt + \sigma S_t f_x(t, S_t) dB_t$$

slijedi da je $\Delta_t = f_x(t, S_t)$, a $(-rNO_t) = f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)$. Budući da je $\Pi_t = \Delta_t S_t - NO_t$ i tražili smo $d\Pi_t = df(t, S_t)$, slijedi da je $NO_t = f_x(t, S_t)S_t - f(t, S_t)$. Odnosno,

$$0 = rNO_t - rNO_t = r(f_x(t, S_t)S_t - f(t, S_t)) + f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t),$$

što znači da cijena opcije zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu

$$f_t(t, x) + rx f_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) = rf(t, x). \tag{25}$$

Rješenje ove jednadžbe u slučaju Europske Call opcije tražimo uz terminalni uvjet

$$f(T, x) = (x - K)_+$$

i rubne uvijete $x = 0$ i $x = \infty$. [10] Konačno, rješenje je dano formulom

$$f(t, x) = xN(d_1(T - t, x)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(T - t, x)),\ \ 0 \le t \le T,\ \ x > 0, \tag{26}$$

pri čemu je

$$d_{1,2}(T - t, x) = \frac{ln(x/K) + (r \pm \sigma^2/2)/(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \tag{27}$$

N funkcija distribucije standardne normalne razdiobe

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}} dx, \tag{28}$$

[9] Umjesto obveznica možemo uzeti bilo koju drugu nerizičnu financijsku imovinu, više moguće pronaći u [12].

[10] Detaljnije objašnjenje moguće je pronaći u [1].

K cijena izvršenja, x trenutna cijena dionice, σ volatilnost i r konstantna kamatna stopa. Označimo s c vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$. Tada je

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \qquad S_0 > 0, \tag{29}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)/T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{30}$$

U nastavku rada doći ćemo i do cijene europske put opcije koristeći vjerojatnost neutralnu na rizik, odnosno ekvivalentnu martingalnu mjeru. Slijedi jedna tvrdnja koja će nam također biti vrlo važna u nastavku rada.

Teorem 3. *Neka X_t log-normalno distribuirana slučajna varijabla i σ standardna devijacija slučajne varijable lnX_t. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[max(X_t - K, 0)] = \mathbb{E}[X_t]N(d1) - KN(d2) \tag{31}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(\mathbb{E}[X_t]/K) \pm \sigma^2/2}{\sigma}. \tag{32}$$

Dokaz. Moguće pronaći u [16], str. 329-330. □

3.1 Black-Scholes-Mertonov model s dividendama

Promatramo financijsku imovinu koja neprekidno isplaćuje dividende kroz vrijeme. Prinos dividendi jednak je g. Jednako kao i ranije pretpostavka je da cijenu financijske imovine modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem. Također, pretpostavka je da se u trenutku isplate dividendi cijena financijske imovine smanjuje upravo za iznos dividendi. Ako pretpostavimo da se radi o dionicama, prethodno bi značilo da ako u slučaju prinosa dividendi g vrijednost dionice naraste sa S_0 na S_T u trenutku T, tada ta ista dionica ako se dividende ne isplaćuju naraste sa S_0 na $S_T e^{qT}$ u trenutku T. Odnosno, ako pretpostavimo da nema isplate dividendi cijena $S_0 e^{-qT}$ danas, u trenutku $t = T$ iznosi S_T. Zbog ove pretpostavke vrlo lako odredimo cijenu call opcije za financijsku imovinu koja neprekidno isplaćuje dividende uvrštavajući u (29) $S_0 e^{-qT}$ umjesto S_0. Slijedi

$$c = S_0 e^{-qT} N(d1) - Ke^{-rT} N(d2), \tag{33}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(S_0/K) + (r - q \pm \sigma^2/2)/T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Cijena dionice koja neprekidno isplaćuje dividende opisana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{34}$$

Jednakom kao u prethodnom slučaju, eliminacijom rizika i konstruiranjem replicirajućeg portfelja možemo doći do modificirane Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$f_t(t, S_t) + (r - q)S_t f_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, S_t) = rf(t, S_t) \tag{35}$$

čijim rješenjem također možemo doći do vrijednosti call opcije definirane s (33). [11]

[11] Više o tome moguće pronaći u [16], poglavlje 15.3.

3.2 Black model

Do sada smo pretpostavljali da određujemo cijenu opcije vezanu uz određenu financijsku imovinu, dionice. U nastavku želimo odrediti cijenu opcije futures ugovora. Označimo sa $(F_t, t \in [0, ..., T])$ proces kretanja cijena futures ugovora. Uobičajena pretpostavka je da je F_t log-normalno distribuirana slučajna varijabla koju opisujemo sljedećom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dF_t = \sigma F_t dB_t \tag{36}$$

pri čemu je σ konstanta te B_t Brownovo gibanje. Koristeći jednu od prethodno navedenih strategija trgovanja pri određivanju cijene opcije futures ugovora dolazimo do sljedeće diferencijalne jednadžbe

$$f_t(t, F_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 F_t^2 f_{xx}(t, F_t) = r f(t, F_t).^{12} \tag{37}$$

Možemo uočiti da je ova diferencijalna jednadžba jednaka jednadžbi (35) uz pretpostavku da je $r = q$ što bi značilo da se cijene futures ugovora ponašaju kao cijene opcija na dionice koje isplaćuju dividendu q. To možemo vidjeti i u Lemi 3. Dakle, uz pretpostavku da su cijene futures ugovora log-normalno distribuirane, cijenu call opcije vezanu uz futures ugovore možemo dobit iz jednadžbe (33) zamjenom F_0 sa S_0, te r sa q. Slijedi

$$c = e^{-rT}[F_0 N(d1) - K N(d2)], \tag{38}$$
$$d_{1,2} = \frac{ln(F_0/K) \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Ovaj model naziva se Black model ili Black 76 model za određivanje vrijednosti opcija futures ugovora i koristi se kao osnova za određivanje cijena opcija vezanih uz kamatne stope. Još jedan način na koji možemo shvatiti ovaj model je kao Black-Scholes-Mertonov model kod kojeg je bezrizična kamatna stopa jednaka $(r - q)$. [13]. Budući da nam je u radu cilj odrediti cijene opcija vezanih uz kamatne stope i budući da vrijednosti kamatnih stopa u stvarnosti nisu poznate u nastavku rada cilj nam je relaksirati pretpostavke ovog modela i doći do modela u kojem pretpostavljamo da je proces kamatnih stopa neki slučajni proces.

3.3 Ekvivalentna martingalna mjera

Uočimo da je do sada uvijek pretpostavka bila da je kamatna stopa r konstanta i ne mijenja se tijekom trajanja opcije. U nastavku ćemo ovu pretpostavku oslabiti i pretpostaviti da je r stohastička. Samim time rješavanje Black-Scholesove parcijalne diferencijalne jednadžbe je otežano. Još jedan od načina kojim možemo doći do cijene opcije (29) je koristeći tzv. ekvivalentnu martingalnu mjeru, odnosno vjerojatnost neutralnu na rizik P^*.

[12] Detaljnije moguće pronaći u [16], poglavlje 16.
[13] Više moguće pronaći u [16], poglavlje 17.

Definicija 11. *Slučajni proces* $(X_t, t \in [0, ..., T])$ *je martingal u odnosu na filtraciju* $(F_t, t \geq 0)$ *ako vrijedi*

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, $\forall t \geq 0$
2. X *je* $\mathbb{F}$*-adaptiran tj.* $\forall t \geq 0$ X_t *je* F_t*-izmjeriva slučajna varijabla tj.* $\forall t \geq 0$ *je* $\sigma(X_t) \subset F_t$
3. $\mathbb{E}[X_t|F_s] = X_s$, $0 \leq s \leq t$.

Svojstvo 3 iz prethodne definicije kaže da je očekivana promjena vrijednosti procesa u bilo kojem trenutku u budućnosti jednaka njenoj vrijednosti danas. Slijedi da je svaki proces $(\theta_t, 0 \leq t \leq T)$ oblika

$$d\theta_t = \sigma\theta_t dB_t \tag{39}$$

martingal.

Za početak ćemo na vrlo jednostavnom modelu objasniti ideju određivanja vrijednosti opcije koristeći vjerojatnost neutralnu na rizik. Pretpostavimo da trgujemo dionicom u dva vremenska trenutka $t = 0$ (danas) i $t = 1$ (bilo koji trenutak u budućnosti). Označimo sa S_{danas} cijenu dionice u $t = 0$ te sa S_1 cijenu dionice u trenutku $t = 1$ koju modeliramo slučajnom varijablom $S_1 : \Omega \to [0, \infty\rangle$. Skup $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ nazvat ćemo skup stanja svijeta. Pretpostavimo da cijena dionice u trenutku $t = 1$ može porasti na iznos $S_1(\omega_1) = S_{rast}$ s vjerojatnošću p^* te da može pasti na iznos $S_1(\omega_2) = S_{pad}$ s vjerojatnošću $1 - p^*$. Zanima nas njena cijena danas odnosno njena očekivana diskontirana vrijednost,

$$S_{danas} = e^{-rt}(p^* S_{rast} + (1 - p^*)S_{pad}).$$

Definiramo $X_t = S_t e^{-rt}$. Tada slijedi iz prethodne jednadžbe da je

$$X_0 = X_{danas} = p^* X_{rast} + (1 - p^*)X_{pad} = \mathbb{E}^*[X_1],$$

što je martingal s obzirom na vjerojatnost P^*. Ova vjerojatnosna mjera P^* opisuje "stanje svijeta " u kojem je investitor neutralan na rizik promijene cijene financijske imovine i u odnosu na koju je diskontirana vrijednost financijske imovine martingal. Iz tog razloga P^* zovemo vjerojatnost neutralna na rizik ili ekvivalentna martingalna mjera.

3.3.1 Tržišna cijena rizika ili Sharpeov omjer

Promatramo financijsku imovinu čiju cijenu opisujemo procesom $(\theta_t, t \geq 0)$. Odnosno, cijena je u diferencijalnom obliku dana s

$$d\theta_t = m_t\theta_t dt + n_t\theta_t dB_t,$$

gdje slučajni procesi $(m_t, t \geq 0)$ i $(n_t, t \geq 0)$ modeliraju srednju stopu povrata i volatilnost, redom. Pretpostavimo da su $(f(t, \theta_t), 0 \leq t \leq T)$ i $(g(t, \theta_t), 0 \leq t \leq T)$ procesi adaptirani na filtraciju Brownovog gibanja kojima opisujemo cijene dva

financijska derivata koji ovise o financijskoj imovini θ_t (tzv. underlying asset) u vremenu t. U diferencijalnom obliku

$$df(t,\theta_t) = \alpha_{f,t} f(t,\theta_t)dt + \sigma_{f,t} f(t,\theta_t)dB_t, \tag{40}$$

$$dg(t,\theta_t) = \alpha_{g,t} g(t,\theta_t)dt + \sigma_{g,t} g(t,\theta_t)dB_t, \tag{41}$$

pri čemu su $\alpha_{f,t}, \alpha_{g,t}$ i $\sigma_{f,t}, \sigma_{g,t}$ srednja stopa povrata i volatilnost financijskih derivata $f(t,\theta_t)$, odnosno $g(t,\theta_t)$. Zbog jednostavnosti i dalje pretpostavljamo da nema isplata dividendi. Analogno prethodnom kako bi eliminirali rizik konstruiramo portfelj $\rho = (\sigma_{g,t} g(t,\theta_t), -\sigma_{f,t} f(t,\theta_t))$ čija je vrijednost:

$$\Pi_t = (\sigma_{g,t} g(t,\theta_t)) f(t,\theta_t) + (-\sigma_{f,t} f(t,\theta_t)) g(t,\theta_t) = (\sigma_{g,t} - \sigma_{f,t}) f(t,\theta_t) g(t,\theta_t). \tag{42}$$

Odnosno,

$$d\Pi_t = (\sigma_{g,t} g_t) df(t,\theta_t) + (-\sigma_{f,t} f_t) dg(t,\theta_t). \tag{43}$$

Uvrštavajući (40) i (41) u jednadžbu (43) slijedi

$$d\Pi = (\sigma_{g,t}\alpha_{f,t} - \sigma_{f,t}\alpha_{g,t}) f(t,\theta_t) g(t,\theta_t) dt. \tag{44}$$

Budući da je portfelj bezrizičan vrijedi $d\Pi = r_t \Pi dt$, odnosno iz (42) i (44) slijedi

$$(\sigma_{g,t}\alpha_{f,t} - \sigma_{f,t}\alpha_{g,t}) = r_t(\sigma_{g,t} - \sigma_{f,t}). \tag{45}$$

Odnosno,

$$\frac{\alpha_{f,t} - r_t}{\sigma_{f,t}} = \frac{\alpha_{g,t} - r_t}{\sigma_{g,t}} = \lambda_t. \tag{46}$$

Proces $(\lambda_t, 0 \leq t \leq T)$ nazivamo **tržišna cijena rizika** ili **Sharpeov omjer**. Sharpeov omjer je mjera koja pokazuje koliko očekivanog prinosa daje portfelj po jedinici preuzetog rizika. Uočimo da λ_t ovisi o vremenu t i procesu $(\theta_t, 0 \leq t \leq T)$, a neovisan je o procesima $(f(t,\theta_t), 0 \leq t \leq T)$ i $(g(t,\theta_t), 0 \leq t \leq T)$. Također, budući da su $(f(t,\theta_t), t \in [0,T])$ i $(g(t,\theta_t), 0 \leq t \leq T)$ dva proizvoljna procesa i budući da vrijedi (46) slijedi da na tržištu bez arbitraže mora vrijediti da je tržišna cijena rizika λ_t jednaka za svaki proces $(f(t,\theta_t), t \in [0,T])$. Odnosno, za svaki proces $(f(t,\theta_t), 0 \leq t \leq T)$ koji je u diferencijalnom obliku dan s

$$df(t,\theta_t) = \alpha_t f(t,\theta_t)dt + \sigma_t f(t,\theta_t)dB_t \tag{47}$$

vrijedi

$$\frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t} = \lambda_t. \tag{48}$$

Nadalje, u slučaju kada je $\lambda_t = 0$, slijedi da je $\alpha_t = r_t$. Odnosno,

$$df(t,\theta_t) = r_t f(t,\theta_t)dt + \sigma_t f(t,\theta_t)dB_t. \tag{49}$$

Prethodno definirani proces (49) nazivamo procesom neutralnim na rizik. Slijedi tvrdnja koja povezuje Black-Scholesovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu s vjerojatnošću neutralnom na rizik. Zbog jednostavnosti ponovo ćemo pretpostaviti da financijsku imovinu opisujemo jednadžbom (6), odnosno da su kamatna stopa i volatilnost konstantne.

Teorem 4. *Pretpostavimo da $f(t, S_t)$ zadovoljava Black-Scholesovu-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (22) pri čemu je S_t opisana jednadžbom (6) i pretpostavimo da je $\lambda = 0$. Tada vrijedi da je $(f(t, S_t)e^{-rt}, t \geq 0)$ martingal.*

Dokaz. Vrijedi

$$d(f(t, S_t)e^{-rt}) = e^{-rt}df(t, S_t) - re^{-rt}f(t, \theta_t)dt. \tag{50}$$

Kako je pretpostavka da je $\lambda = 0$ vrijedi

$$df(t, S_t) = rf(t, S_t)dt + \sigma f(t, S_t)dB_t. \tag{51}$$

Koristeći Itôvu formulu (9) i uvrštavanjem (51) u (50) slijedi

$$\begin{aligned} d(f(t, S_t)e^{-rt}) &= e^{-rt}\Big[\Big(r_t S_t f_x(t, S_t) + f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t)\Big)dt + \sigma S_t f_x(t, S_t)dB_t\Big] \\ &\quad - re^{-rt}f(t, S_t)dt = \\ &= e^{-rt}\underbrace{\Big(r_t S_t f_x(t, S_t) + f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t) - rf(t, S_t)\Big)}_{=0(BSM)}dt \\ &\quad + e^{-rt}\sigma S_t f_x(t, S_t)dB_t. \end{aligned}$$

Odnosno,

$$d(f(t, S_t)e^{-rt}) = \sigma S_t(f(t, S_t)e^{-rt})_x dB_t,$$

što znači da je prema (39) $\Big(f(t, S_t)e^{-rt}, t \geq 0\Big)$ martingal. □

Dakle uz odabir $\lambda_t = 0$ pokazali smo da će diskontirani proces biti martingal, odnosno možemo reći da je odabir λ_t ekvivalentan definiranju nove vjerojatnosti uz koju će diskontirani proces biti martingal. Na temelju prethodne tvrdnje zaključujemo da vrijednost opcije možemo, umjesto rješavanjem Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe, odrediti računajući očekivanu diskontiranu vrijednost opcije s obzirom na vjerojatnost P^* neutralnu na rizik. Drugim riječima, vrijedi

$$f_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^*[f_T]. \tag{52}$$

Slijedi,

$$\mathbb{E}^*[S_T] = S_0 e^{rT}. \tag{53}$$

Usporedimo li prethodnu jednadžbu s (13) možemo uočiti da je jedina razlika što umjesto α imamo r_t, a ono što nam daje pretpostavka $\lambda_t = 0$ je upravo $\alpha = r_t$. Prema Lemi 1 je $F_0 = S_0 e^{rT}$, a iz jednadžbe (53) slijedi $F_0 = S_0 e^{rT} = \mathbb{E}^*[S_T]$ što znači da vjerojatnost neutralna na rizik također osigurava da ne postoji arbitraža, odnosno pretpostavka $\lambda_t = 0$ je jedna od arbitražnih tehnika.

Prema (52) vrijednost europske call opcije možemo odrediti kao

$$c = e^{-rT}\mathbb{E}^*[max(S_T - K)].$$

Zbog (53) i budući da je S_t log-normalno distribuirana pa možemo primijeniti Teorem 3 slijedi

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \qquad S_0 > 0, \tag{54}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)/T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{55}$$

Nadalje, koristeći call-put paritet i (53) možemo lako izračunati i vrijednost put opcije. Slijedi

$$\begin{aligned} C_0^{Call} - C_0^{Put} &= \mathbb{E}^*[e^{-rt}(C_T^{Call} - C_T^{Put})] && (56)\\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rt}(S_T - K)] && (57)\\ &= S_0 - Ke^{-rt}. && (58) \end{aligned}$$

Uz korištenje svojstva parnosti funkcije gustoće standardne normalne slučajne varijable i iz (54) slijedi da je vrijednost put opcije u trenutku $t = 0$ koju ćemo kraće označiti sa p, odnosno $C_0^{Put} = p$, jednaka

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1), \qquad S_0 > 0, \tag{59}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)/T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{60}$$

3.4 Promjena tržišne cijene rizika

U nastavku pretpostavljamo da financijski derivati $f(t, \theta_t)$ i $g(t, \theta_t)$ uvijek ovise o procesu θ_t te koristimo oznake f_t i g_t umjesto $f(t, \theta_t)$ i $g(t, \theta_t)$. Pokazali smo da je tržišna cijena rizika, Sharpeov omjer, jednako definirana za svaki financijski derivat. Pretpostavimo da je

$$\lambda_t^* = \frac{\alpha_t^* - r_t}{\sigma_{t,f}} = \frac{\alpha_t^* - r_t}{\sigma_{t,g}} \tag{61}$$

nova tržišna cijena rizika. Slijedi

$$df_t = (r_t + \lambda_t^*\sigma_{t,f})f_t dt + \sigma_{t,f}f_t dB_t, \tag{62}$$

$$dg_t = (r_t + \lambda_t^*\sigma_{t,g})g_t dt + \sigma_{t,g}g_t dB_t. \tag{63}$$

Uočimo da tržišna cijena rizika određuje srednju stopu povrata i nema utjecaja na volatilnost. Dakle, određivanje tržišne cijene rizika ekvivalentno je određivanju srednje stopa povrata. U nastavku ćemo pokazati da za $\lambda_t = \sigma_{t,g}$ vrijedi da je $\frac{f_t}{g_t}$ martingal. U tom slučaju kažemo da smo definirali novu vjerojatnost P_g^* neutralnu na rizik s obzirom na numerar g_t. Numerar $(g(t), t \geq 0)$ je slučajni proces kojim modeliramo vrijednost neke financijske imovine koja ne isplaćuje dividende i u terminima koje možemo izraziti neku drugu financijsku imovinu. Zbog jednostavnosti označimo $\sigma_g = \sigma_{t,g}$ i $\sigma_f = \sigma_{t,f}$.

Uvrštavajući $\lambda_t^* = \sigma_g$ u (62) i (63) slijedi

$$df_t = (r_t + \sigma_g\sigma_f)f_t dt + \sigma_f f_t dB_t,$$

$$dg_t = (r_t + \sigma_g^2)g_t dt + \sigma_g g_t dB_t.$$

Koristeći Itôvu formulu (9) slijedi,

$$d\ln f_t = (r_t + \sigma_g\sigma_f - \frac{1}{2}\sigma_f^2)dt + \sigma_f dB_t,\ ^{14} \tag{64}$$

[14] Više moguće pronaći u [16].

$$d\ln g_t = (r_t + \frac{1}{2}\sigma_g^2)dt + \sigma_g dB_t. \tag{65}$$

Odnosno,

$$\begin{aligned} d\ln\frac{f_t}{g_t} &= d(\ln f_t - \ln g_t) \\ &= d\ln f_t - d\ln g_t. \end{aligned}$$

Koristeći (64) i (65) slijedi

$$d\ln\frac{f_t}{g_t} = -\frac{1}{2}(\sigma_f - \sigma_g)^2 dt + (\sigma_f - \sigma_g)dB_t. \tag{66}$$

U nastavku želimo iskoristiti prethodno kako bi izračunali $d\left(\frac{f_t}{g_t}\right)$. Pretpostavimo

$$\begin{aligned} dX &= \mu_X dt + \sigma_X \\ d\ln X &= \mu dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Zanima nas odnos između (μ_X, σ_X) i (μ, σ). Kako je

$$\begin{aligned} d\ln X &= \frac{1}{X}dX + \frac{1}{2}\sigma_X^2\left(-\frac{1}{X^2}\right)dt \\ &= \left(\frac{1}{X}\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_X^2\frac{1}{X^2}\right)dt + \frac{\sigma_X}{X}dB_t. \end{aligned}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{X}\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_X^2\frac{1}{X^2}, \\ \sigma &= \frac{\sigma_X}{X}. \end{aligned}$$

Odnosno,

$$\begin{aligned} \mu_X &= \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)X \\ \sigma_X &= \sigma X. \end{aligned}$$

Na analogan način koristeći (66) možemo odrediti $d\left(\frac{f_t}{g_t}\right)$. Vrijedi

$$d\Big(\frac{f_t}{g_t}\Big) = \left(-\frac{1}{2}(\sigma_f - \sigma_g)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_f - \sigma_g)^2\right)dt + (\sigma_f - \sigma_g)\frac{f}{g}dB_t \tag{67}$$

$$= (\sigma_f - \sigma_g)\frac{f}{g}dB_t. \tag{68}$$

Na ovaj način zbog (39) pokazali smo da je $\left(\frac{f_t}{g_t}, t \geq 0\right)$ martingal što znači da vrijedi

$$\frac{f_0}{g_0} = \mathbb{E}_g^*\Big[\frac{f_T}{g_T}\Big|F_t\Big]. \tag{69}$$

Pri čemu su procesi $(f_t, t \geq 0)$ i $(g_t, t \geq 0)$ adaptirani na filtraciju $(F_t, t \geq 0)$.

Teorem 5. *Da bi proces* $(g_t, t \in [0, ..., T])$ *mogli koristiti kao numerar mora vrijediti da je diskontirani proces*

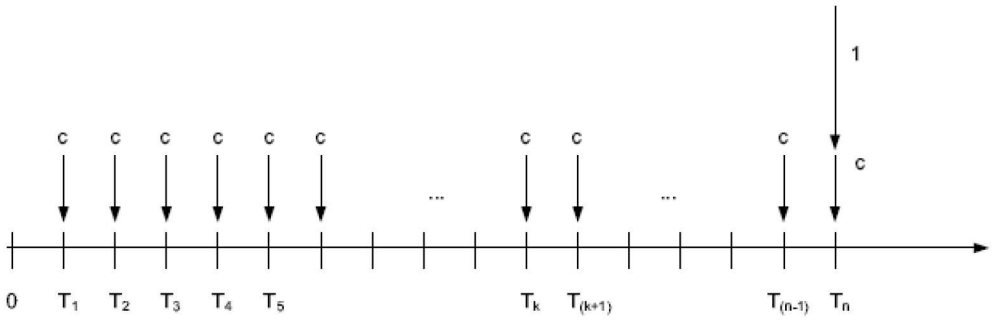
$$\tilde{g}_t = e^{-\int_0^t r_s ds} g_t$$

martingal s obzirom na vjerojatnost P^* *neutralnu na rizik.*

Dokaz. Moguće pronaći u [9], 15.2 Change Numeraire and Forward Measures. □

4 OTC tržište obveznica i kamatnih stopa

U financijama, obveznica je dužnički vrijednosni papir koji se izdaje s ciljem prikupljanja financijskih sredstava s unaprijed definiranim rokom povrata. Iz pozicije izdavatelja, obveznica je alternativa bankovnom kreditu. Vrednovanje obveznica određeno je nominalnom vrijednosti, kuponskom stopom (kuponom), dospijećem obveznice te sustavom amortizacije. Prema sustavu amortizacije razlikujemo jednokratne obveznice, odnosno obveznice bez kupona te višekratne među mojima su najzastupljenije kuponske i anuitetske obveznice. Pretpostavimo da se radi o obveznici s vremenom dospijeća T_n čija je nominalna vrijednost 1, te da su kuponi koje ćemo označiti sa C fiksni i isplaćuju se u trenucima $T_1, ...T_n$. Priljev novčanih tokova ovakve kuponske obveznice prikazan je na slici 1.



Slika 1: Novčani tokovi kuponske obveznice

Obveznice bez kupona ne isplaćuju kupone. Definiramo sa $P(t, T)$ obveznicu bez kupona čija je vrijednost u trenutku dospijeća T jednaka 1 tj. $P(T, T) = 1$. Tada je $P(t, T)$ ništa drugo nego vrijednost u trenutku t iznosa 1 koji dospijeva u trenutku T, odnosno diskontni faktor.

Slika 2: Obveznica bez kupona

U nastavku definiramo novi proces $(M(t), t \geq 0)$ koji nazivamo vrijednost bankovnog računa ili račun na tržištu novaca (Money-market account).

Definicija 12. *Vrijednost bankovnog računa ili račun na tržištu novaca je slučajni proces* $(M_t, t \geq 0)$ *oblika*

$$dM_t = r_t M_t dt, \tag{70}$$

za koji vrijedi $M_0 = 1$, $(r_t, t \in [0, ..., T])$ *je proces kamatnih stopa.*

Slijedi,

$$\frac{\Delta M_t}{M_t} = r_t \Delta. \tag{71}$$

Proces kamatnih stopa $(r_t, t \in [0, ..., T])$ često se naziva proces kratkoročnih kamatnih stopa (tzv."short interest rate process"). Pretpostavljamo da je $(r_t, t \in [0, ..., T])$ Itôv proces oblika (5)

$$dr_t = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dB_t.$$

Ovisno o tome kako su definirane $a(r_t, t)$, $b(r_t, t)$ postoje razni modeli za opisivanje procesa kamatnih stopa. Jedan od prvih i osnovnih modela je Vasicek-ov model

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma B_t, \;\; r(0) = r_0 > 0, \tag{72}$$

pri čemu su $a > 0, b > 0, \sigma > 0$ konstante. U praksi se češće primjenjuju prošireni modeli poput Ho-Lee modela koji pretpostavlja da je kamatna stopa normalno distribuirana slučajna varijabla.[15] Koristeći proces $(r_t, t \in [0, ..., T])$ možemo odrediti vrijednost obveznica bez kupona. Ako pretpostavimo da je $r_t = r$ konstanta, tada je jedina nearbitražna cijena obveznice bez kupona $P(t, T)$ jednaka

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}. \tag{73}$$

Ako je $P(t, T) > e^{-r(T-t)}$ možemo izdati obveznicu i novac koji smo dobili prodajom uložiti u banku po kamatnoj stopi r. U trenutku T morali bi ispuniti obvezu obveznice i isplatiti iznos 1 te bi podigli novac iz banke u iznosu $P(t, T)e^{-r(T-t)} > 1$. S druge strane ako pretpostavimo da je $P(t, T) < e^{-r(T-t)}$ možemo posuditi iznos $P(t, T)$ po kamatnoj stopi r i kupiti obveznicu po cijeni $P(t, T)$. U trenutku dospijeća T primili bi iznos 1 te bi u banku morali vratiti $P(t, T)e^{r(T-t)} < 1$, odnosno ostaje nam zarada $1 - P(t, T)e^{r(T-t)}$. Analogno, može se pokazati da je u slučaju kada je $(r_t, t \in [0, ..., T])$ deterministički proces nearbitražna cijena obveznica bez kupona jednaka

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}. \tag{74}$$

Ono što ćemo pretpostavljati u nastavku rada je da je $(r_t, t \in [0, ..., T])$ slučajni proces adaptiran na filtraciju $(F_t, t \geq 0)$ i tada cijenu obveznice bez kupona možemo odrediti kao

$$P(t, T) = \mathbb{E}^* \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | F_t \right], \tag{75}$$

pri čemu je P^* vjerojatnost neutralna na rizik.

Propozicija 1. *Diskontirani proces* $\tilde{P}(t, T) = e^{-\int_0^T r_s ds} P(t, T)$ *je martingal s obzirom na vjerojatnost* P^* *neutralnu na rizik.*

Dokaz. Moguće pronaći u [9] , Propozicija 16.1. □

[15] Više moguće pronaći u [2] i [14].

Zbog Teorema 5 prethodna propozicija omogućava nam da proces $P(t,T)$ koristimo kao numerar. Kako je $g_T = P(T,T) = 1$ i $g_0 = P(0,T)$ iz jednadžbe (69) slijedi

$$f_0 = P(0,T)\mathbb{E}_g^*[f_T|F_t], \tag{76}$$

pri čemu je $\mathbb{E}_g^*$ očekivanje neutralno na rizik s obzirom na numerar $g_t = P(t,T)$.

Pretpostavimo nadalje da imamo futures ugovor s dospijećem u trenutku T koji je vezan uz financijsku imovinu S_t koju možemo zapisati u terminima obveznica bez kupona. Futures ugovor u trenutku T donosi zaradu (ili gubitak) $S_T - K$, gdje je K ugovorena cijena futures ugovora. Označimo sa f_t cijenu ovog future ugovora. Iz jednadžbe (76) slijedi

$$f_0 = P(0,T)(\mathbb{E}_g^*[S_T|F_t] - K). \tag{77}$$

Pravedna vrijednost ugovorene cijene future ugovora je vrijednost za koju je $f_0 = 0$. Označimo je sa F. Slijedi

$$P(0,T)(\mathbb{E}_g^*[S_T|F_t] - F) = 0, \tag{78}$$

odnosno,

$$F = \mathbb{E}_g^*[S_T|F_t]. \tag{79}$$

Prethodnom jednadžbom pokazali smo da je pravedna vrijednost bilo kojeg future ugovora, osim kada se radi o kamatnim stopama, jednaka očekivanoj cijeni financijske imovine u svijetu neutralnom na rizik, pri čemu je za numerar uzeta obveznica bez kupona tj. $g = P(t,T)$. U nastavku želimo vidjeti što se dešava u slučaju kada je futures ugovor vezan uz kamatne stope. Odnosno kada je vezana imovina kamatna stopa, te ugovorena cijena K ugovorena kamatna stopa koju često nazivamo izvršna stopa ugovora. Vrijednost prethodno spomenutih kuponskih obveznica čiji je novčani tok prikazan na slici 1 možemo odrediti pomoću obveznica bez kupona $P(t,T)$. Označimo cijenu u trenutku t sa $p(t)$. Vrijedi

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)C_i + P(t,T_n)N. \tag{80}$$

Iznos kupona C_i najčešće je dan kao fiksni postotak nominalne vrijednosti N, odnosno $C_i = K\delta N$, pri čemu je $\delta = T_{i+1} - T_i$ [16], te K fiksna kamatna stopa. Tada prethodnu jednadžbu možemo zapisati kao

$$p(t) = N\Big(\delta K \sum_{i=1}^{n} P(t,T_i) + P(t,T_n)\Big). \tag{81}$$

Osim kuponskih obveznica s fiksnim kamatnim stopama K vrlo su česte i kuponske obveznice kod kojih se kamatna stopa K mijenja u svakom trenutku $T_1, T_2 ... T_n$ u kojem se kuponi isplaćuju, tzv. Floating rate notes (FRN). Jedna od promjenjivih kamatnih stopa koja se vrlo često koristi u praksi kod takvih obveznica je LIBOR.

[16] U stvarnosti najčešće pretpostavljamo da je δ = broj dana u obračunskom razdoblju / 360.

4.1 LIBOR

LIBOR(London Inter Bank Offering Rate) predstavlja prosječnu kamatu na međubankarskom tržištu u Londonu po kojoj su banke spremne jedna drugoj posuđivati novce na jedan dan (overnight rate), 1 tjedan, 2 tjedna te 1 do 12 mjeseci. LIBOR se određuje na temelju dnevnih kotacija banaka s visokim kreditnim rejtingom. Iz tog razloga LIBOR je relativno niska kamatna stopa, te se u praksi smatra bezrizičnom kamatnom stopom, iako, vjerojatnost defaulta banaka uvijek postoji. Na sljedećoj slici prikazano je kretanje šestomjesečnog LIBORA, odnosno stope po kojoj su banke spremne jedna drugoj posuđivati novce na šest mjeseci, u razdoblju od 6.8.2018. do 6.8.2019. Podaci su preuzeti s bankarskog softvera Bloomberg.

Slika 3: Kretanje šestomjesečnog LIBOR-a u razdoblju od 6.8.2018. do 6.8.2019.

4.2 Forward rate Agreement (FRA)

Forward rate agreement (FRA) je dogovor dviju strana o fiksiranju kamatne stope na određeni iznos glavnice na neki period čiji su početak i kraj u budućnosti. FRA se dogovara na današnji datum, a na kraju perioda isplaćuje se samo razlika između referentne i dogovorene fiksne stope izračunate na iznos glavnice. FRA se koristi za zaštitu od promjena referentnih stopa te pri fiksiranju budućih kamatnih prihoda ili rashoda. Označimo sa $F(t,S,T)$ forward kamatnu stopu (forward interest rate), pri čemu je $t < S < T$, odnosno t je trenutak u kojem se ugovara FRA, a S i T su početak i kraj perioda. Na tržištu bez arbitraže za $F(t,S,T)$ vrijedi

$$F(t,S,T) = \frac{1}{S-T}\left[\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right] = \frac{1}{S-T}\left[\frac{P(t,T) - P(t,S)}{P(t,S)}\right].^{17} \qquad (82)$$

[17]Detaljnije moguće pronaći u [9] i [4].

Stavljajući

$$f_t = \frac{1}{S-T}[P(t,T) - P(t,S)]$$

i

$$g_t = P(t,S)$$

koristeći prethodne rezultate vezane za ekvivalentnu martingalnu mjeru i s obzirom na to da prema Propoziciji 2 možemo obveznice koristiti kao numerar, može se pokazati da vrijedi

$$F(0,S,T) = \mathbb{E}_g^*[F(T,S,T)|F_t], \tag{83}$$

pri čemu je $\mathbb{E}_g^*$ očekivanje u svijetu neutralnom na rizik s obzirom na $P(t,T)$ i $F(t,S,T)$ adaptiran s obzirom na filtraciju $(F_t, t \geq 0)$. Odnosno, $F(t,S,T)$ je martingal s obzirom na vjerojatnost P_g^* s obzirom na koju se računa očekivanje u (83).

U slučaju kada je $S = t$, $F(t,t,T)$ nazivamo spot kamatna stopa i vrijedi

$$F(t,t,T) = F(t,T) = \frac{1}{T-t}\Big[\frac{1}{P(t,T)} - 1\Big]. \tag{84}$$

Prethodno definirani LIBOR je također forward kamatna stopa, odnosno LIBOR opisujemo sa (82) i vrijedi (83).

4.3 Floating rate notes

Kao što je prethodno spomenuto postoje obveznice kod kojih kupon, odnosno kuponska stopa nije fiksna već se u svakom trenutku isplate kupona ona može promijeniti. Takve obveznice nazivaju se Floating rate notes. U tom slučaju iznos kupona jednak je

$$C_i = (T_i - T_{i-1})F(T_{i-1}, T_i)N \tag{85}$$

Pri čemu je $F(T_{i-1}, T_i)$ prethodno definirana spot kamatna stopa. Uočimo da je ova kamatna stopa određena već u trenutku T_{i-1} te ćemo iz tog razloga osim trenutaka $T_1, ..., T_n$ u kojima isplaćujemo kupone imati i trenutak T_0 u kojem će biti određena kamatna stopa koja će određivati iznos kupona u trenutku T_1. Ako pretpostavimo da je $N = 1$, uvrštavajući (84) u (85) dobivamo

$$C_i = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1. \tag{86}$$

Budući da iznos 1 koji dospijeva u T_i u trenutku t vrijedi $P(t,T_i)$ slijedi da je vrijednost iznosa -1 koji dospijeva u T_i u trenutku t jednaka $-P(t,T_i)$. Osim toga iznos $\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}$ koji dospijeva u trenutku T_i u trenutku t jednak je $P(t,T_{i-1})$. Slijedi da je iznos C_i koji dospijeva u trenutku T_i u trenutku t jednak

$$C_i = P(t,T_{i-1}) - P(t,T_i). \tag{87}$$

Vrijednost FRN-a je u trenutku t

$$p(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} P(t,T_{i-1}) - P(t,T_i)\Big) - P(t,T_n) = P(t,T_0). \tag{88}$$

4.4 Kamatni Swap

Kamatni swap je dogovor između dviju strana o zamjeni fiksne kamatne stope za promjenjivu kamatnu stopu. Najčešće se dogovara na iznos nominalne vrijednosti koja se nikada ne izmjenjuje nego samo služi kao baza za izračun. Izmjenjuje se samo razlika između fiksne i promjenjive kamatne stope tzv. Net cash flow. Strana koja plaća fiksnu kamatnu stopu i prima promjenjivu naziva se platilac fiksne stope (fixed leg payer), dok je druga strana koja plaća promjenjivu, a prima fiksnu kamatu primatelj fiksne stope (floating leg receiver). Pretpostavimo da su isplate u trenucima $T_1, \dots T_n$. Dakle, platioc swapa u trenutku T_i plaća fiksnih $K\delta N$ i prima promjenjivih $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$. Slijedi da je novčani priljev u tom slučaju jednak

$$[F(T_{i-1}, T_i) - K]\delta N, \tag{89}$$

odnosno koristeći (85) i (87) slijedi

$$N[P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K\delta P(t, T_i)]. \tag{90}$$

Slijedi da je vrijednost $\Pi_p(t)$ swapa za platioca u trenutku $t \leq T_0$ jednaka

$$\Pi_p(t) = N[P(t, T_0) - P(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)]. \tag{91}$$

Dok je vrijednost $\Pi_r(t)$ swapa za primatelja u trenutku t jednaka

$$\Pi_r(t) = -\Pi_p(t). \tag{92}$$

Pravedna stopa swapa u $t \leq T_0$ tzv. swap rate je ona stopa za koju je vrijednost swapa jednaka 0 odnosno ona za koju je $\Pi_r(t) = \Pi_p(t) = 0$. Označimo tu stopu sa $R_{swap}(t)$, iz jednadžbe (91) slijedi

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)}. \tag{93}$$

Prethodnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{A(t)}, \tag{94}$$

gdje je

$$A(t) = \delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i).$$

U praksi najčešće duljine intervala $[T_{i-1}, T_i]$ nisu jednake pa koristimo izraz

$$A(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i P(t, T_i).$$

$A(t)$ se naziva anuitetni faktor.

Propozicija 2. *Diskontirani proces* $\tilde{A}(T) = e^{-\int_0^T r_s ds} A(t)$ *je martingal s obzirom na vjerojatnost* P^* *neutralnu na rizik.*

Dokaz. Dokaz moguće pronaći u [9], Remark 18.5. □

Slijedi da $A(t)$ možemo koristiti kao numerar. Za forward swap kamatnu stopu $R_{swap}(t)$ vrijedi da je martingal u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik uz numerar $A(t)$. Odnosno, ako uzmemo da je $f_t = P(t, T_0) - P(t, T_n)$ i $g_t = A(t)$ slijedi

$$R_{swap}(t) = \mathbb{E}_A^*[R_{swap}(T_0)|F_t]. \tag{95}$$

Također, prema (69) za bilo koji financijski derivat f_t vrijedi

$$f_0 = A(0)\mathbb{E}_A^*\left[\frac{f_T}{A(T)}\middle|F_t\right]. \tag{96}$$

Posljednja dva rezultata bit će ključna za razumijevanje swap opcija.

Važno je napomenuti da prethodno definirana swap kamatna stopa $R_{swap}(t)$ nije realna budući da u stvarnosti nećemo ugovarati stopu koja nam ne donosi nikakav prinos. Kako bi bilo jasnije o čemu se radi pogledajmo jedan primjer. Pretpostavimo da poduzeće A ima obveze prema Banci A, odnosno pretpostavimo da se radi o kreditu u trajanju od 5 godina čija je nominalna vrijednost 10 000 000 USD, te da je kamata koju poduzeće plaća šestomjesečni LIBOR koji se isplaćuje svakih šest mjeseci. Varijabilna kamatna stopa, odnosno LIBOR je forward kamatna stopa što znači da se dogovara u trenutku prije isplate kamate, odnosno u trenutku $t = 0$ dogovorena je stopa koje će se isplatiti u $t = 1$, te je u $t = 1$ dogovorena nova stopa za $t = 2$ i tako sve do kraja trajanja ugovora. Varijabilna stopa se često naziva i reset rate. Kako bi se poduzeće A zaštitilo od promjena LIBOR-a odlučuje ući u kamatni swap u kojem će primati šestomjesečni LIBOR te plaćati fiksnu kamatnu stopu.

Slika 4: Kamatni swap

Na prethodnoj slici možemo vidjeti da Poduzeće A prima i plaća šestomjesečni LIBOR, preostaju mu obveze u fiksnoj kamatnoj stopi, odnosno poduzeće A zaštitilo se od rizika promjene LIBOR-a. Pretpostavimo dodatno da je swap dogovoren s Bankom B na dan 8.8.2019. Koristeći Bloomberg možemo odrediti vrijednost ovog swap ugovora. Podaci su preuzeti na dan 6.8.2019.

Slika 5: Primjer swap ugovora u trajanju od 5 godina s nominalom 10 000 000 USD, fiksnom stopom 1.5% i varijabilnom stopom koja je šestomjesečni LIBOR sklopljen na 6.8.2019.

Ono što možemo vidjeti na slici 5 jesu dvije strane swap ugovora, payer što je prema našem primjeru poduzeće A i receiver banka B. Često se te dvije strane nazivaju fixed leg i float leg, odnosno kažemo da imamo dvije noge u ugovoru, fiksnu i varijabilnu. Pretpostavljamo da se nalazimo u poziciji platioca odnosno plaćamo fiksnu stopu. Nominalna vrijednost swapa je 10000000 USD (na slici 5 notional 10MM). Swap je ugovoren s početkom na 8.8.2019. (Bloomberg za datum koristi mm/dd/yyyy) i traje 5 godina, odnosno traje do 9.8.2024., a isplate su polugodišnje što znači da sve ukupno imamo deset trenutaka u kojima se razmjenjuju isplate. Promjenjiva kamatna stopa je kao što smo rekli šestomjesečni LIBOR (na slici 5 je to index US0006M). Pretpostavimo također da je fiksna stopa 1.5% (na slici coupon). U izračunu za δ_i koristimo formulu $\delta_i = dani\ u\ obracunskom\ razdoblju/360$ (na slici 5 Day Count = ACT/360). Sadašnja vrijednost ovog swap ugovora koju ćemo izračunati u nastavku također je vidljiva na slici 5 i iznosi 20 091.16 (NPV). Na slikama 6 i 7 prikazan je predviđeni novčani tok za vrijeme trajanja swapa, te forward stopa, odnosno očekivana stopa LIBOR-a.

Pogledajmo detaljnije prvu isplatu swapa. Nominalna vrijednost je 10 000 000 USD, promjenjiva kamatna stopa dogovorena je na 6.8.2019. i iznosi 2.08588% (Slika 7), dok je fiksna kamatna stopa jednaka 1.5%. Prva isplata je šest mjeseci nakon ulaska u swap, odnosno na 10.2.2020. što je 186 dana od početka dogovora. Budući da smo u ovom swapu u poziciji platitelja fiksne stope, plaćamo fiksnu stopu, a primamo varijabilnu što znači da moramo platiti iznos jednak

$$10\,000\,000 \cdot 0.015 \cdot \frac{186}{360} = 77\,500.00$$

Slika 6: Novčani tok swapa ugovora

i primamo iznos

$$10\,000\,000 \cdot 0.0208588 \cdot \frac{186}{360} = 107\,770.47,$$

što znači da smo ostvarili zaradu od

$$107\,770.47 - 77\,500.00 = 30\,270.47$$

čija je sadašnja vrijednost

$$30\,270.47 \cdot 0.989721 = 29\,959.32.$$

Prethodna vrijednost je sadašnja vrijednost prve isplate vidljiva na slici 6 u prvom trenutku isplate, zbog zaokruživanja imamo malenu razliku na zadnjoj decimali. Prethodno znači da u prvom trenutku ostvarujemo zaradu od 29 959.32 koja nastaje zbog toga što je naša fiksna stopa 1.5% manja od varijabilne stope koja iznosi 2.08588%, odnosno u prvom trenutku primamo veći iznos, a plaćamo manji. U trenucima kada je predviđena LIBOR stopa manja od fiksne stope dolazi do gubitka. Ukupna zarada tj.vrijednost swap ugovora je suma svih isplata, odnosno kada bi na isti način izračunali sadašnje vrijednosti svih isplata dobili bismo vrijednost swap ugovora koja iznosi

$$\begin{aligned} NPV = {} & 29\,959.32 + 3\,905.61 - 2\,056.5 - 6\,533.55 - 2\,901.55 - 6\,519.61 \\ & - 976.69 - 2\,033.31 + 3\,561.28 + 3\,686.70 = 20\,091.63 \end{aligned}$$

Uočimo da opet imamo malu razliku u odnosu na vrijednost koju je izračunao Bloomberg. Osim toga na slici 6 možemo vidjeti da je u posljednjoj isplati jednako

Slika 7: Predviđeni LIBOR na 6.8.2019

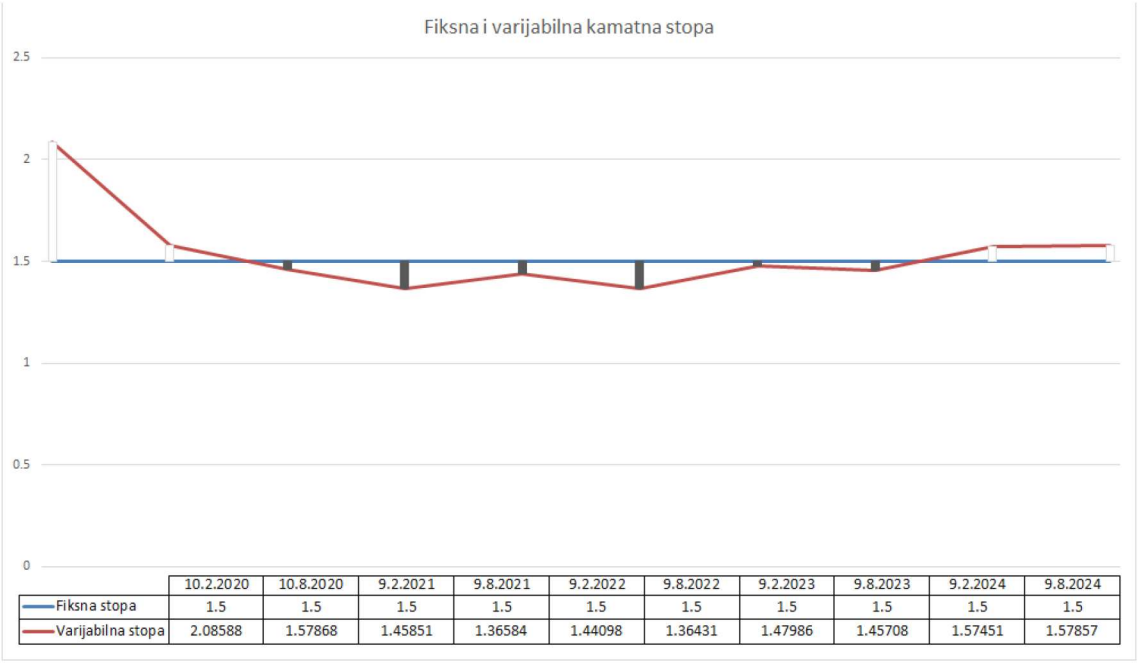
kao i u trenutku ugovaranja swap ugovora uračunata i nominalna vrijednost swap ugovora, no kako smo već spomenuli nominalne vrijednosti neće se razmjenjivati. U slučaju kada bi nominalne vrijednosti razmjenjivali mogli bismo ovaj swap ugovor promatrati kao zamjenu dvije kuponske obveznice pri čemu je iznos kupona jedne fiksan dok je kupon druge varijabilan, odnosno prethodno spomenuti floating rate notes. Vrijednost ovog swap ugovora kada bi se nalazili u poziciji primatelja fiksne stope, poziciji banke B, iznosila bi $-20\,091.63$. Odnosno, u svim trenucima u kojima je varijabilna stopa veća od fiksne trpjeli bi gubitak. Na slici 8 prikazan je graf fiksne i varijabilne stope za vrijeme trajanja ovog swap ugovora. U svim trenucima u kojima je varijabilna stopa veća od fiksne ostvarujemo dobit zbog plaćanja manje stope dok u preostalim ostvarujemo gubitak.

U nastavku pogledajmo što bi se dogodilo da smo ovaj isti swap dogovarali jedan dan kasnije, odnosno na dan 7.8.2019. s istim početkom i završetkom, te istom kuponskom stopom koju zamjenjujemo šestomjesečnim LIBOR-om. Swap ugovor prikazan je na slici (9).

Možemo primjetiti da je sada vrijednost swap ugovora $-11\,997.29$ što znači da smo u ovom slučaju u gubitku. Naravno, promjena je nastala zbog promjena u LIBOR kamatnoj stopi čije su vrijednosti prikazane na slici 10.

Budući da je LIBOR stopa u odnosu na dan prije manja za 0.03475 to je utjecalo na procjenu budućih kretanja LIBOR stopa. Na sljedećoj slici prikazan je odnos varijabilne i fiksne stope u ovom slučaju.

Vidimo da je u odnosu na sliku (8) u ovom slučaju LIBOR stopa samo u prvom i drugom trenutku isplate veća od fiksne stope 1.5%. Kako bi se dodatno zaštitili od rizika koji nastaje zbog promjena u tržišnim stopama poput LIBOR-a možemo koristiti swap opcije (tzv. Swaptions). Osim swap opcija za zaštitu od porasta



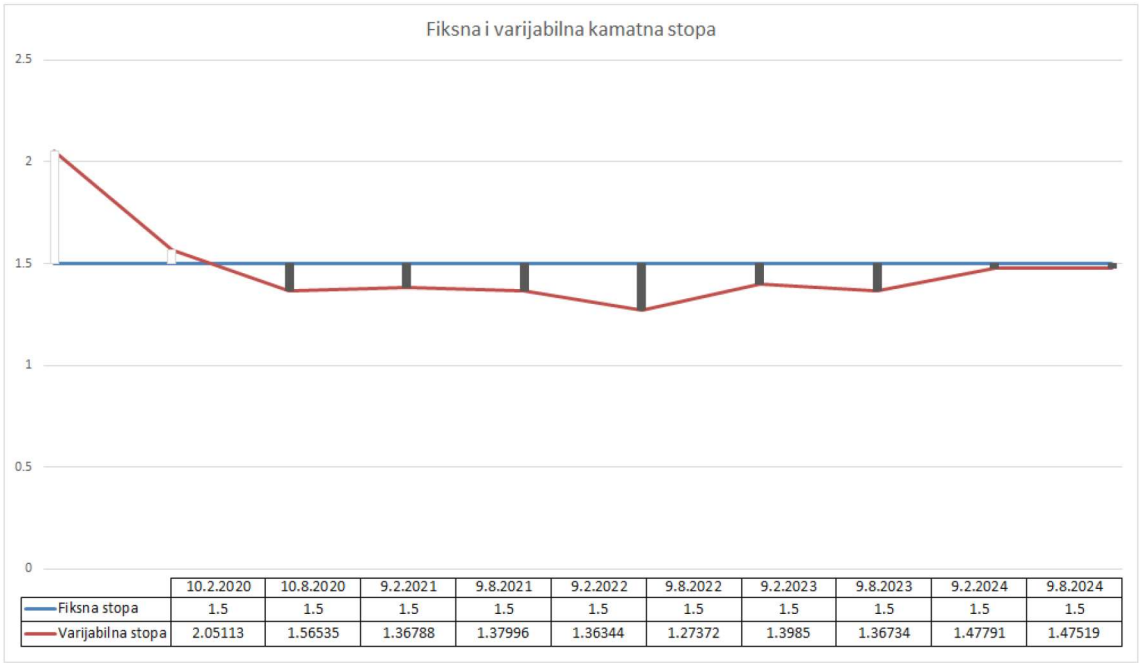
	10.2.2020	10.8.2020	9.2.2021	9.8.2021	9.2.2022	9.8.2022	9.2.2023	9.8.2023	9.2.2024	9.8.2024
Fiksna stopa	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
Varijabilna stopa	2.08588	1.57868	1.45851	1.36584	1.44098	1.36431	1.47986	1.45708	1.57451	1.57857

Slika 8: Varijabilna i fiksna kamatna stopa na 6.8.2019.

Slika 9: Primjer swap ugovora u trajanju od 5 godina s nominalom 10 000 000 USD, fiksnom stopom 1.5% i varijabilnom stopom koja je šestomjesečni LIBOR sklopljen na 7.8.2019

kamatnih stopa možemo koristi cap opcije dok za zaštitu od pada kamatnih stopa možemo koristiti floor opcije. Ove opcije te način na koji ih vrednujemo objašnjene su u sljedećem poglavlju.

Slika 10: Promjena LIBOR stope u posljednjih 17 dana



	10.2.2020	10.8.2020	9.2.2021	9.8.2021	9.2.2022	9.8.2022	9.2.2023	9.8.2023	9.2.2024	9.8.2024
Fiksna stopa	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
Varijabilna stopa	2.05113	1.56535	1.36788	1.37996	1.36344	1.27372	1.3985	1.36734	1.47791	1.47519

Slika 11: Varijabilna i fiksna kamatna stopa na 7.8.2019.

5 Opcije na OTC tržištu

5.1 Black model za određivanje cijena opcija na OTC tržištu

Rekli smo da će nam Black model biti ključan za određivanje opcija na OTC tržištu. U nastavku ćemo odrediti Black-ov model za izračun cijena opcija koristeći

prethodne rezultate očekivanja neutralnog na rizik kada za numerar uzmemo obveznicu bez kupona. Pretpostavimo da se radi o europskoj call opciji s cijenom izvršenja K i dospijećem T. Želimo odrediti vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ iz jednadžbe (76) slijedi

$$c = P(0,T)\mathbb{E}_g^*[max(0, S_T - K)]. \tag{97}$$

Neka su F_0 i F_T forward cijene u trenucima $t = 0$ i trenutku dospijeća T. Kako je $F_T = S_T$ slijedi

$$c = P(0,T)\mathbb{E}_g^*[max(0, F_T - K)]. \tag{98}$$

Pretpostavimo da je F_T log-normalno distribuirana slučajna varijabla te da je standardna devijacija od $ln(F_T)$ konstanta i iznosi $\sigma_F\sqrt{T}$. Prema Teoremu 3 slijedi

$$\mathbb{E}_g^*[max(0, F_T - K)] = \mathbb{E}_g^*[F_T]N(d_1) - KN(d_2), \tag{99}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(\mathbb{E}_g^*[F_T]/K) \pm \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}} \tag{100}$$

Budući da je zbog (79) $\mathbb{E}_g^*[F_T] = \mathbb{E}_g^*[S_T] = F_0$ slijedi

$$c = P(0,T)[F_0N(d_1) - KN(d_2)], \tag{101}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(F_0/K) \pm \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}. \tag{102}$$

Odnosno vrjednost put opcije u $t = 0$ jednaka je

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_0N(-d_1))]. \tag{103}$$

Uočimo da ako je pretpostavka da je r konstantna tada vrijedi prema (73) da je $P(0,T) = e^{-rT}$ odnosno, jednadžba (117) jednaka je jednadžbi (38) u poglavlju Black model.

5.2 Cap i floor opcije

5.2.1 Cap opcije

Krovna (cap) opcija služi kao zaštita od porasta kamatnih stopa. Kupac opcije plaća premiju da bi utvrdio gornju granicu na određenu kamatnu stopu po kojoj se financira. Odnosno, prodavatelj opcije dužan je kupcu nadoknaditi razliku ako tržišna kamatna stopa pređe dogovorenu gornju granicu. Dogovorena gornja granica naziva se izvršna stopa cap-a. Osim izvršne stope, kupac i prodavatelj dogovaraju nominalu vrijednost, koja se jednako kao kod kamatnog swapa ne izmjenjuje već služi kao baza za izračun, te vrijeme trajanja ugovora. Na ovaj način kupac cap-a postavlja gornju granicu svojih troškova financiranja. Pogledajmo jedan jednostavan primjer. Pretpostavimo da je nominalna vrijednost 10 000 000 USD, te da se želimo zaštiti od promjena šestomjesečnog LIBOR-a. Pretpostavimo da opcija traje 2 godine, te da su isplate svakih šest mjeseci,odnosno imamo 4 isplate za vrijeme trajanja opcije. Pretpostavimo da je gornja granica, odnosno izvršna stopa cap-a

3%. Pretpostavimo da je nakon šest mjeseci, u prvom trenutku isplate, LIBOR jednak 4%. Budući da je LIBOR veći od izvršne kamatna stope prodavatelj kupcu mora vratiti iznos koji je jednaki razlici između LIBORA i izvršne kamatne stope, odnosno iznos

$$(0.04 - 0.03) \cdot 0.5 \cdot 10\,000\,000 = 50\,000.$$

Prethodna isplata naziva se caplet. Suma svih caplet-a jednaka je našoj mogućoj zaradi za vrijeme trajanja opcije. Za svaki caplet računamo opciju zasebno te ćemo vrijednost opcije dobiti sumiranjem vrijednosti opcija za svaki pojedini caplet. Uočimo, da je nakon šest mjeseci LIBOR bio manji od 3% kupac ne bi imao nikakvu zaradu u prvom trenutku isplate. Označimo sa L nominalnu vrijednost i pretpostavimo da se radi o cap opciji s vremenom dospijeća $T = t_{n+1}$, te da su isplate u trenucima $t_1 \ldots, t_n$, a izvršna stopa jednaka r_{cap}. Pretpostavimo također da je $\delta_i = t_{i+1} - t_i$, a sa R_i označimo LIBOR određen u trenutku t_i koji se isplaćuje na kraju perioda δ_i. Slijedi da je vrijednost i-tog capleta jednaka

$$L\delta_i max(R_i - r_{cap}, 0).$$

kako bi odredili vrijednost i-tog capleta koristimo $P(t, t_{i+1})$ (vrijednost obveznice bez kupona u trenutku t, čija je vrijednost u trenutku dospijeća t_{i+1} jednaka 1) kao numerar. Prema (78) slijedi

$$F(0, t_i, t_{i+1}) = \mathbb{E}_{P(0,t_{i+1})}[R_i], \tag{104}$$

gdje je $F(t, t_i, t_{i+1})$ forward kamatna stopa definirana u trenutku t za period (t_i, t_{i+1}). Iz prethodne jednadžbe vidimo da je vrijednost u trenutku 0 forward kamatne stope jednaka očekivanoj vrijednosti spot kamatne stope za period (t_i, t_{i+1}), pri čemu očekivanje računamo u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik te za numerar koristimo $P(0, t_{i+1})$. Označimo sa $cap_i(t)$ vrijednost opcije i-tog caplet-a u trenutku t. Ako u jednadžbu (76) stavimo da je $f_t = cap_i(t)$ vrijedi da je vrijednost opcije $i - tog$ caplet-a jednaka

$$cap_i(0) = P(0, t_{i+1})L\delta_i E_{P(0,t_{i+1})}[max(R_i - r_{cap}, 0)]. \tag{105}$$

Uz pretpostavku da je R_i log-normalna slučajna varijabla te da je standardna devijacija $ln(R_i) = \sigma_i\sqrt{t_i}$ slijedi da je vrijednost i-tog capleta u trenutku 0 jednaka

$$cap_i(0) = L\delta_i P(0, t_{i+1})[R_i(0)N(d_1) - r_{cap}N(d_2)], \tag{106}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(R_i(0)/r_{cap}) \pm \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i\sqrt{t_i}}.$$

Prethodna formula je proširenje Black modela. R_i je forward kamatna stopa za period između t_i i t_{i+1}, σ_i je volatilnost ove forward kamatne stope. $P(0, t_{i+1})$ je diskontni faktor budući da su isplate u trenucima t_{i+1}, a ne u trenucima t_i kada je dogovorena forward stopa.

5.2.2 Floor opcije

Suprotno cap opcijama, podne (floor) opcije služe kao zaštita od pada kamatnih stopa, odnosno ugovara se minimalna kamatna stopa koju je kupac spreman platiti. Ako referentna kamatna stopa padne ispod razine izvršne kamatne stope određene floor opcijom, prodavatelj je dužan kupcu nadoknaditi tu razliku. Isplatu u i-tom trenutku nazivamo flooret. Vrijednost floor opcije jednaka je sumi opcija izračunanih za pojedini flooret. Slijedi da je vrijednost i-tog flooreta jednaka

$$L\delta_i max(r_{floor} - R_i, 0).$$

Odnosno u trenucima kada je izvršna stopa r_{floor} veća od tržišne kamatne stope R_i kupac ostvaruje zaradu, dok u trenucima u kojima je tržišna kamatna stopa veća od izvršne ne ostvaruje nikakav dobitak. Premija koju vlasnik mora platiti za ovakvu opciju u trenutku 0 jednaka je

$$floor_i(0) = L\delta_i P(0, t_{i+1})[r_{floor}N(-d_2) - R_i(0)N(-d_1)], \tag{107}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(R_i(0)/r_{floor}) \pm \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i\sqrt{t_i}}.$$

5.2.3 Primjer cap i floor opcije koristeći Bloomberg

Koristeći ponovno bankarski softver Bloomberg možemo odrediti vrijednosti cap i floor opcija. U prethodno opisanom primjeru kamatnog swap ugovora na slici 8 vidjeli smo predviđeno kretanje šestomjesečnog LIBOR i odnos s fiksnom kamatnom stopom od 1.5%. Jednako tako vidjeli smo da je dan kasnije LIBOR pao te ćemo iz tog razloga sada odrediti vrijednosti floor i cap opcije u kojem je varijabilna stopa šestomjesečni LIBOR, dok je izvršna stopa cap ugovora jednaka 1.4%. U slučaju cap opcije ono što želimo je zaštiti se od rasta šestomjesečnog LIBOR-a iznad 1.4%, dok u slučaju floor opcije želimo zaštitu od pada kamatnih stopa ispod 1.4%. Prvo ćemo izračunati vrijednost floor opcije. Promatramo opciju koja je dogovorena na dan 7.8.2019. s početkom za godinu dana, odnosno na dan 6.8.2020. s izvršnom stopom od 1.4% te promjenjivom stopom šestomjesečnim LIBOR-om i nominalnom vrijednošću 10 000 000 USD. Isplate su polugodišnje. Pretpostavka modela za izračun floor, jednako kao i cap opcija je konstantna volatilnost, no budući da vrijednost cap i floor opcije računamo kao sumu svih capleta i flooret-a u izračunu koristimo tzv. spot volatilnosti odnosno pretpostavka je da je volatilnost konstantna za vrijeme trajanja jednog flooret-a te se jednako kao kamatna stopa mijenja svakih šest mjeseci, odnosno nakon svake isplate. Pretpostavka modela za izračun floor, jednako kao i cap opcija je konstantna volatilnost za vrijeme trajanja jednog caplet-a, odnosno flooret-a. Podatke o volatilnosti preuzeti ćemo s Bloomberg-a. Razlikujemo povijesnu volatilnost i podrazumijevanu volatilnost (tzv. implied volatility). Povijesna volatilnost određuje se na temelju povijesnih podataka o volatilnosti. Bloomberg u izračunu koristi podrazumijevanu volatilnost koja se za razliku od povijesne volatilnosti određuje na temelju tržišnih cijena opcija. Odnosno, koristeći poznate tržišne vrijednosti opcija kojima se kotira na tržištu i poznate vrijednosti svih ostalih parametara koje koristimo u izračunu opcije, metodom pokušaja i pogrešaka određujemo

volatilnost vezane imovine, u ovom slučaju volatilnost LIBOR-a. Na slici 12 prikazana je floor opcija dok je na slici 13 prikazana tablica svih podataka koje možemo preuzeti s Bloomberg-a i koje ćemo koristiti za izračun floor opcije.

Slika 12: Floor opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om.

Expiry	Pay Date	Days	Notional	Floor Strike	Floor Vols	Reset Rate	Payment	Discount	Intrinsic PV	Time PV	PV
08/06/2020	02/09/2021	183	10,000,000.00	1.40	51.67	1.39102	14,651.52	0.98	445.10	13,848.34	14,293.44
02/05/2021	08/09/2021	181	10,000,000.00	1.40	52.96	1.32180	19,407.73	0.97	3,811.75	15,002.60	18,814.34
08/05/2021	02/09/2022	184	10,000,000.00	1.40	53.84	1.36144	21,889.03	0.96	1,898.13	19,181.65	21,079.78
02/07/2022	08/09/2022	181	10,000,000.00	1.40	55.89	1.27105	26,299.97	0.96	6,205.89	18,968.73	25,174.62
08/05/2022	02/09/2023	184	10,000,000.00	1.40	54.16	1.38980	25,961.43	0.95	495.82	24,188.07	24,683.90
02/07/2023	08/09/2023	181	10,000,000.00	1.40	55.11	1.35702	28,391.53	0.94	2,041.59	24,779.09	26,820.68
08/07/2023	02/09/2024	184	10,000,000.00	1.40	50.05	1.46887	26,358.53	0.94	-	24,724.42	24,724.42
02/07/2024	08/09/2024	182	10,000,000.00	1.40	50.41	1.46510	27,869.73	0.93	-	25,959.91	25,959.91
											181,551.09

Slika 13: Tablica s podacima floor opcije preuzeta s Bloomberg-a.

Nalazimo se u long poziciji odnosno kupujemo floor opciju što znači da očekujemo pad kamatne stope. Ova opcija daje nam pravo da nakon godinu dana, točnije na dan 8.6.2020., imamo pravo izbora hoćemo li ući u ovakav floor ili ne. Na slici 12 zaokružena je vrijednost opcije. Uočimo za početak da već sada ako usporedimo vrijednosti opcije na slikama 12 i 13 zbog zaokruživanja imamo malu razliku u vrijednosti cap opcije iako su podaci na slikama izravno preuzeti s Bloomberg-a. Ono što možemo vidjeti u desnom kutu slike 12 jesu tzv."Grci" [18] koji mjere izloženost riziku, odnosno mjere utjecaj pojedinih varijabli na vrijednost opcije. Generalno,

[18]Više moguće pronaći u [16] poglavlje 17.

pretpostavimo da cijenu opcije opisujemo funkcijom $f(S, K, t, r, \sigma)$, gdje je S vezana imovina, K izvršna cijena ili izvršna stopa , r i t su kamatna stopa i vrijeme dospijeća, te σ volatilnost. "Grci" su parcijalne derivacije funkcije f:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial f}{\partial S} && delta \\
\Gamma &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} && gama \\
\rho &= \frac{\partial f}{\partial r} && ro \\
\theta &= \frac{\partial f}{\partial t} && theta \\
\nu &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} && vega.
\end{aligned}$$

Deltu opcije već smo prethodno spomenuli, mjeri promjenu u odnosu na promjenu tržišne cijene, odnosno vezane imovine. Gama je mjera promjene delte, ro je mjera promjene kamatne stope dok su theta i vega mjere promjene vremena dospijeća i volatilnosti. Na slici 12 je $\Delta = DV01 = 1\,480.18$. Promjena je mjerena u baznim točkama (basis points, oznaka bp) što znači da ako se vrijednost vezane imovine, LIBOR-a, promjeni za 1pb= $0.01\% = 0.0001$ vrijednost opcije promijenit će se za 1 480.18. Vrijednost game jednaka je $Gamma(1bp) = 36.14$ što znači da će se vrijednost opcije promijeniti za 36.14 ako se vrijednost Δ promjeni za 1bp. Dalje možemo vidjeti da će se vrijednost opcije promijeniti za 3 116.87 ako se volatilnost promjeni za 1%, te će se vrijednost opcije smanjiti za 18.87 ukoliko trenutak dospijeća bude jedan dan ranije. Pogledajmo detaljnije iznos prvog flooret-a sa slike 13. Prva isplata je šest mjeseci nakon početka floor-a odnosno na dan 9.2.2020.. Imamo sljedeće podatke: LIBOR stopa (Reset rate) $R_1(0) = 1.39\%$, volatilnost $\sigma_1 = 51.67\%$, $t_1 = 365/360 = 1.01389$ zbog toga što smo dogovorili opciju s početkom za godinu dana, a način izračuna je kao što možemo vidjeti na slici 12 jednak ACT/360, odnosno (trenutak ugovaranja opcije - trenutak početka flooret-a)/360, $\delta_1 = 183/360 = 0.5083$ odnosno vrijeme između početka flooret-a i trenutka isplate izraženo u godinama, $P(0, t_2) = 0.975561$ je diskontni faktor koji je također izračunat u Bloomberg-u (stupac Discount). Uvrštavajući prethodne podatke u jednadžbu (107) slijedi

$$d_1 = \frac{ln(0.0139/0.014) + 0.5167^2 \cdot 1.01389/2}{0.5167\sqrt{1.01389}} = 0.24589607,$$

$$d_1 = \frac{ln(0.0139/0.014) - 0.5167^2 \cdot 1.01389/2}{0.5167\sqrt{1.01389}} = -0.27080393,$$

$$floor_1(0) = 10\,000\,000 \cdot 0.5083 \cdot 0.975561[0.014N(-d_2) - 0.0139N(-d_1)] = 14\,427.49$$

Razlika koja nastaje zbog zaokruživanja i zbog toga što u Bloomberg-u broj dana u godini možda nije uzet točno 365 jednaka je $14\,427.49 - 14\,293.44 = 134.05$. U sljedećoj tablici izračunate su vrijednosti preostalih opcija za svaki flooret.

i	σ_i^2	t_i	$\sigma\sqrt{t_i}$	$\ln(R_i(0)/r_{floor})$	d_1	d_2	δ_i	$floor_i(0)$
2	0.2131	1.52	0.6528	-0.0575	0.2384	-0.4145	0.503	18 942.22
3	0.2931	2.02	0.7656	-0.0279	0.3463	-0.4193	0.511	21 223.97
4	0.3957	2.53	0.8896	-0.0966	0.3362	-0.5534	0.503	25 304.36
5	0.4453	3.04	0.9437	-0.0073	0.4641	-0.4796	0.511	24 852.93
6	0.5387	3.55	1.0379	-0.0312	0.4889	-0.5490	0.503	26 973.40
7	0.5073	4.05	1.0072	0.0480	0.5513	-0.4559	0.511	24 885.70
8	0.5795	4.56	1.0766	0.0455	0.5805	-0.4961	0.506	26 123.19

Ukupna suma svih flooret opcija iznosi

$$\sum_{i=1}^{8} floor_i(0) = 182\,733.26,$$

što znači da je razlika u našem izračunu i Bloomberg-a jednaka 1 182.17 što nije toliko velika razlika budući da je nominalna vrijednost 10 000 000 i opcija traje 4 godine. Ono što još možemo vidjeti na slici 13 je intrinzična, unutarnja vrijednost opcije (Intrisic PV). To je vrijednost koja pokazuje profit za trenutno izvršenje opcije. Odnosno, to je sadašnja vrijednost razlike koju je prodavatelj floor opcije dužan platiti u određenom trenutku ako je tržišna stopa, LIBOR, pala ispod izvršne kamatne stope. U prvom trenutku intrinzična vrijednost imovine jednaka je

$$10\,000\,000 \cdot 0.975561 \cdot 183/360 \cdot (0.014 - 0.0139) = 445.33.$$

Analogno možemo izračunati preostale vrijednosti koje su prikazane u tablici 1. U

	Intrinzična imovina (SV)
2	3 811.51
3	1 897.98
4	6 205.90
5	495.68
6	2 041.38
7	0
8	0

Tablica 1: Intrinzična imovina floor opcije

trenucima u kojima je vrijednost izvršne stope iznad tržišne ne ostvarujemo zaradu, odnosno intrinzična vrijednost imovine je 0. U nastavku možemo vidjeti vrijednost cap opcije dogovorene na isti datum 7.8.2019. s istim stopama, istom nominalnom vrijednosti te istim vremenom trajanja. Na slici 14 prikazana je ova cap opcija na Bloomberg-u, a na slici 15 tablica s podacima preuzeta s Bloomberg-a.

Za početak možemo izračunati intrinzičnu imovinu. Vrijednosti su prikazane u tablici 2. Možemo uočiti da je intrinzična vrijednost u svim trenucima osim u posljednja dva jednaka 0 zbog toga što je u svim trenucima izvršna stopa iznad razine LIBOR-a. Iz tog razloga i vrijednost cap opcije je manja. S obzirom na tako predviđenu situaciju možda bi bilo za očekivati i veću razliku u cijeni opcija, no izvršna stopa uvijek je vrlo blizu tržišne stope. Budući da je izračun skoro jednak

Slika 14: Cap opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om.

Expiry	Pay Date	Days	Notional	Cap Strike	Cap Vols	Reset Rate	Payment	Discount	Intrinsic PV	Time PV	PV
08/06/2020	02/09/2021	183	10,000,000.00	1.40	51.67	1.39	14,195.26	0.98	-	13,848.34	13,848.34
02/05/2021	08/09/2021	181	10,000,000.00	1.40	52.96	1.32	15,475.76	0.97	-	15,002.60	15,002.60
08/05/2021	02/09/2022	184	10,000,000.00	1.40	53.84	1.36	19,918.03	0.96	-	19,181.65	19,181.65
02/07/2022	08/09/2022	181	10,000,000.00	1.40	55.89	1.27	19,816.67	0.96	-	18,968.73	18,968.73
08/05/2022	02/09/2023	184	10,000,000.00	1.40	54.16	1.39	25,439.95	0.95	-	24,188.07	24,188.07
02/07/2023	08/09/2023	181	10,000,000.00	1.40	55.11	1.36	26,230.36	0.94	-	24,779.09	24,779.09
08/07/2023	02/09/2024	184	10,000,000.00	1.40	50.05	1.47	29,878.66	0.94	3,301.90	24,724.42	28,026.32
02/07/2024	08/09/2024	182	10,000,000.00	1.40	50.41	1.47	31,160.65	0.93	3,065.40	25,959.91	29,025.32
											173,020.12

Slika 15: Tablica s podacima cap opcije preuzeta s Bloomberg-a.

	Intrinzična imovina (SV)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	3 301.80
8	3 065.63

Tablica 2: Intrinzična imovina cap opcije

izračunu floor opcije u nastavku je samo tablica s izračunima pojedinih opcija za svaki caplet.

i	σ_i^2	t_i	$\sigma\sqrt{t_i}$	$\ln(R_i(0)/r_{cap})$	d_1	d_2	$cap_i(0)$
1	0.1353	1.01	0.5167	-0.0064	0.2478	-0.2725	13 982.16
2	0.2131	1.52	0.6528	-0.0575	0.2384	-0.4145	15 130.71
3	0.2931	2.02	0.7656	-0.0279	0.3463	-0.4193	19 325.99
4	0.3957	2.53	0.8896	-0.0966	0.3362	-0.5534	19 098.45
5	0.4453	3.04	0.9437	-0.0073	0.4641	-0.4796	24 357.25
6	0.5387	3.55	1.0379	-0.0312	0.4889	-0.5490	24 932.02
7	0.5073	4.05	1.0072	0.0480	0.5513	-0.4559	28 187.50
8	0.5795	4.56	1.0766	0.0455	0.5805	-0.4961	29 188.82

Ukupna suma svih caplet-a iznosi

$$\sum_{i=1}^{8} cap_i = 174\,202.91,$$

što znači da je razlika u našem izračunu cap opcije i Bloomberg-a jednaka $1\,182,79$. U prethodnim primjerima izvršne stope bile su jednake $r_{cap} = r_{floor} = 1.4\%$ pa ove opcije možemo promatrati kao call i put odnosno možemo vidjeti da vrijedi call-put paritet

$$cap_i - floor_i = L\delta_i(R_i - 0.014). \tag{108}$$

i	cap_i	$floor_i$	$cap_i - floor_i$	$L\delta_i(R_i - 0.014)$
1	13 982.16	14 427.49	- 445.33	- 445.33
2	15 130.71	18 942.22	- 3 811.51	- 3 811.51
3	19 325.99	21 223.97	- 1 897.98	- 1 897.98
4	19 098.45	25 304.36	- 6 205.90	- 6 205.90
5	24 357.25	24 852.93	- 495.68	- 495.68
6	24 932.02	26 973.40	- 2 041.38	- 2 041.38
7	28 187.50	24 885.70	3 301.80	3 301.80
8	29 188.82	26 123.19	3 065.63	3 065.63

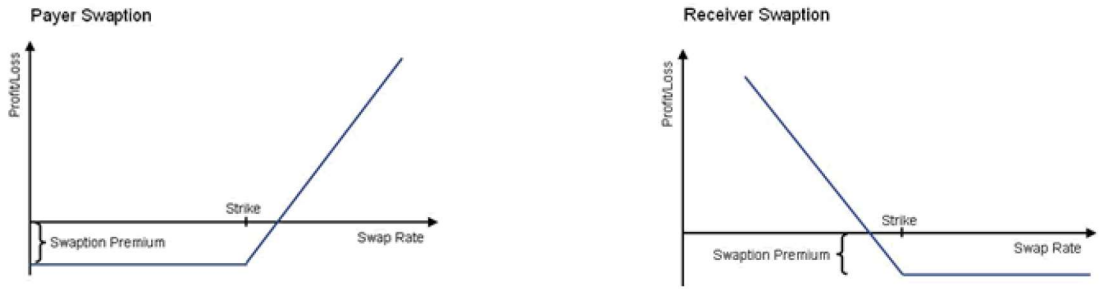
Također možemo uočiti da su to vrijednosti prethodno izračunatih intrinzičnih imovina čije vrijednosti možemo naći u tablicama 1 i 2, razlika je u odnosu na tablicu 1 u predznaku budući da smo u tom slučaju računali $L\delta_i(0.014\% - R_i)$. Budući da je $L\delta_i(R_i - 0.014\%)$ zapravo vrijednost jedne isplate swap ugovora, označimo je sa $swap_i$, vrijedi

$$cap_i - floor_i = swap_i. \tag{109}$$

5.3 Swap opcije

Swap opcije (tzv. swaptions) su opcije koje vlasniku daju pravo na zamjenu fiksne i varijabilne kamatne stope, odnosno ulazak u kamatni swap. Kupac i prodavatelj dogovaraju vrijeme početka opcije, nominalnu vrijednost, fiksnu stopu te vrijeme dospijeća. Razdoblje od početka do kraja trajanja opcije naziva se tenor. Jednako kao kod kamatnog swapa postoje dvije strane, kupac tzv. payer swaption i prodavatelj tzv. receiver swaption, odnosno postoje call i put swap opcije. Kod call opcije kupac, payer, ima pravo ali ne i obvezu ući u swap i plaćati fiksnu stopu, dok

kod put swap opcije kupac ima pravo ali ne i obvezu ući u kamatni swap i primati fiksnu kamatnu stopu, odnosno biti receiver. Ono što odgovara kupcu put opcije, odnosno prodavatelju call opcije, je porast kamatnih stopa dok kupcu call opcije, odnosno prodavatelju put opcije, odogovara pad kamatnih stopa. To smo zaključili na prethodno objašnjenom primjeru swap ugovora u poglavlju 4.4, a možemo vidjeti i na slici 16. Odredimo za početak cijenu call swap opcije. Pretpostavimo



Slika 16: Prikaz vrijednosti call i put swap opcija.

da se nalazimo u poziciji kupca call opcije, odnosno ako odlučimo iskoristiti opciju plaćat ćemo fiksnu stopu, a primati promjenjivu kamatnu stopu. Pretpostavimo da je nominalna vrijednost swap ugovora jednaka L te da je opcija sklopljena u trenutku $t_0 = 0$. Pretpostavimo da je početak opcije, odnosno vrijeme ulaska u swap u trenutku t_n , a prva isplata u trenutku t_{n+1}. Pretpostavimo također da imamo $m-n$ isplata, odnosno zadnja isplata je u trenutku trenutka t_m pri čemu je $t_0 < t_n < t_m$. Označimo sa $r_{swaption}$ ugovorenu fiksnu stopu. Vrijednost swap ugovora u trenutku t_i, $i = n+1, \dots m$ jednaka je

$$L\delta_i max(R_{swap}(t_i) - r_{swaption}, 0), \tag{110}$$

pri čemu je $R_{swap}(t)$ pravedna swap stopa, odnosno stopa za koju je vrijednost ovog swap ugovora koji traje od trenutka t_n do t_m jednaka 0 i definirana je

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t,t_n) - P(t,t_m)}{A_{n,m}(t)}, \tag{111}$$

pri čemu je

$$A_{n,m}(t) = \sum_{i=n+1}^{m} \delta_i P(t,t_i).$$

Ako usporedimo jednadžbe (110) i (89) budući da nam je R_{swap} varijabilna forward stopa vidimo da je jedina razlika u tome što umjesto $(R_{swap} - r_{swaption})$ imamo $max(R_{swap} - r_{swaption}, 0)$. Naravno, razlog tome je to što u ovom slučaju imamo opciju, odnosno biramo hoćemo li izvršiti zamjenu ili ne. Jednako tako možemo uočiti da je jedina razlika jednadžbi (111) i (91) u diskontiranju.

Pretpostavimo da je $R_{swap}(t)$ log-normalno distribuirana slučajna varijabla te da je standardna devijacija od $ln(R_{swap}(t))$ konstanta i iznosi $\sigma_{n,m}\sqrt{t_n}$. Budući da je swap kamatna stopa martingal u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik kada

za numerar uzmemo anuitetni faktor, slijedi zbog (96) i prema Teoremu 3 da je vrijednost call swap opcije u trenutku ugovaranje $t_0 = 0$, jednaka

$$f_{swap_{call}} = LA_{n,m}(0)\left(R_{swap}(0)N(d_1) - r_{swaption}N(d_2)\right), \tag{112}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(R_{swap}(0)/r_{swaption}) \pm \sigma_{n,m}^2 t_n/2}{\sigma_{n,m}\sqrt{t_n}}. \tag{113}$$

Uočimo da je prethodna formula također proširenje Black formule u svijetu neutralnom na rizik kada za numerar uzmemo anuitetni faktor. Na sličan način možemo odrediti vrijednost put opcije

$$f_{swap_{put}} = LA_{n,m}(0)\left(r_{swaption}N(-d_2) - R_{swap}(0)N(-d_1)\right), \tag{114}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln(R_{swap}(0)/r_{swaption}) \pm \sigma_{n,m}^2 t_n/2}{\sigma_{n,m}\sqrt{t_n}}. \tag{115}$$

5.3.1 Primjer swap opcije koristeći Bloomberg

Pretpostavimo da želimo sklopiti swap opciju na dan 7.8.2019. s početkom za godinu dana, odnosno jednako kao i kod cap i floor opcija na dan 9.8.2019. i datumom dospijeća 9.8.2024. i istom fiksnom stopom od 1.4% i šestomjesečnim LIBOR-om. Ono što možemo vidjeti sa slike 11 je da je u tom vremenu predviđeno da će varijabilna kamatna stopa biti niža od fiksne kamatne stope prvih šest isplata dok će u preostale dvije biti iznad fiksne stope. Ono što bi nam odgovaralo je da se u ovom slučaju nalazimo u poziciji u kojoj plaćamo varijabilnu stopu, a primamo fiksnu budući da ćemo tako u većini slučaja plaćati nižu kamatnu stopu. Iz tog ulazimo u long receiver poziciju, odnosno kupujemo put opciju. Na slici 17 prikazana je swap opcija.

Volatilnost je konstantna i ponovno izračunata u Bloomberg-u i iznosi 52.61%. Osim toga u Bloomberg-u je izračunata i swap kamatna stopa, $R_{swap}(0) = 1.383524\%$ (ATM (at-the-money) Strike) za koju je vrijednost swap ugovora jednaka 0. Budući da nemamo podatak o tome na koji način su definirane i izračunate vrijednosti LIBOR-a u Bloomberg-u, odnosno opisujemo li LIBOR jednadžbom (80), nećemo za izračun koristiti jednadžbu (111) već ćemo je odrediti koristeći procijenjene vrijednosti LIBOR stope preuzete s Bloomberg-a prikazane u tablici 3 i pomoću podataka na kojima je prikazan novčani tok swap ugovora prikazan na slici 18.

Na slici (18) vidimo da je vrijednost swap ugovora uz fiksnu stopu 1.4% jednaka 6 371.60. Za početak ćemo izračunati sadašnje vrijednosti svih isplata, a nakon toga ćemo izračunati swap kamatnu stopu. Prisjetimo se, budući da se nalazimo u poziciji u kojoj plaćamo varijabilnu stopu u svakom trenutku isplate moramo platiti

$$L \cdot \delta_i \cdot R_{LIBOR},$$

a primamo iznos

$$L \cdot \delta_i \cdot r_{swaption}.$$

Slika 17: Swap opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om.

Svođenjem na sadašnju vrijednost dobivamo sadašnje vrijednosti svih isplata i uplata te sumiranjem razlika dobivamo vrijednost swap ugovora. U sljedećoj tablici prikazane su vrijednosti isplata:

	$R_{LIBOR}(\%)$
9.2.2021	1.36674
9.8.2021	1.34917
9.2.2022	1.35702
9.8.2022	1.26755
9.2.2023	1.39974
9.8.2023	1.36901
9.2.2024	1.48266
9.8.2024	1.48000

Tablica 3: LIBOR stopa swap ugovora

Slika 18: Novčani tok swap ugovora na koji smo dogovorili opciju

i	$R_{LIBOR_i}(\%)$	$r_{swaption}(\%)$	δ_i	Uplate	Isplate	Dobiti/gubitak	SV_i
1	1.36674	1.4	0.508	71 166.67	-69 475.95	1 690.72	1 649.24
2	1.34917	1.4	0.503	70 388.89	-67 833.27	2 555.62	2 477.11
3	1.35702	1.4	0.511	71 555.56	-69 358.80	2 196.76	2 115.18
4	1.26755	1.4	0.503	70 388.89	-63 729.60	6 659.29	6 373.12
5	1.39974	1.4	0.511	71 555.56	-71 542.27	13.29	12.63
6	1.36901	1.4	0.503	70 388.89	-68 830.78	1 558.11	1 471.46
7	1.48266	1.4	0.511	71 555.56	-75 780.40	-4 224.84	-3 961.53
8	1.48000	1.4	0.506	70 777.78	-74 822.22	-4 044.44	-3 765.75

Vrijednost swap ugovora prema našem izračunu jednaka je

$$\sum_{i=1}^{8} SV_i = 6\,371.46.$$

Uočavamo male razlike u odnosu na izračune s Bloomberg-a prikazane na slici 18. Dalje želimo odrediti swap kamatnu stopu R_{swap} u odnosu na koju vrijednost swap ugovora 0. Da bi vrijednost swap ugovora bila 0 mora vrijediti

$$\sum_{i=n}^{m} \delta_i P(0,t_{i+1}) R_{LIBOR_i} = \sum_{i=1}^{8} \delta_i P(0,t_{i+1}) R_{swap}(0),$$

tj.

$$R_{swap}(0) = \frac{\sum_{i=1}^{8} \delta_i P(0,t_{i+1}) R_{LIBOR_i}}{\sum_{i=1}^{8} \delta_i P(0,t_{i+1})} = \frac{\sum_{i=1}^{8} \delta_i P(0,t_{i+1}) R_{LIBOR_i}}{A_{1,8}(0)}.$$

Koristeći podatke iz prethodne tablice i diskontne vrijednosti sa slike 18 slijedi

$$\sum_{i=1}^{8} \delta_i P(0,t_{i+1}) R_{LIBOR_i} = 0.51 \cdot 0.975 \cdot 0.01367 + \ldots + 0.51 \cdot 0.931 \cdot 0.01480 = 0.0535027,$$

$$A_{1,8}(0) = 0.51 \cdot 0.975 + 0.5 \cdot 0.969 + \ldots + 0.51 \cdot 0.931 = 3.867132,$$

$$R_{swap}(0) = \frac{0.0535027}{3.867132} = 1.383524062.$$

Swap stopa koju smo dobili izračunom jednaka je swap stopi koju je izračunao Bloomberg. Pogledajmo sada vrijednost swap opcije. Nominalna vrijednost jednaka je $L = 10\,000\,000$, $r_{swaption} = 1.4\%$, $R_{swap}(0) = 1.383524\%$, $A_{1,8}(0) = 3.867132$ uvrštavajući vrijednosti u jednadžbu (114) dobivamo sljedeće

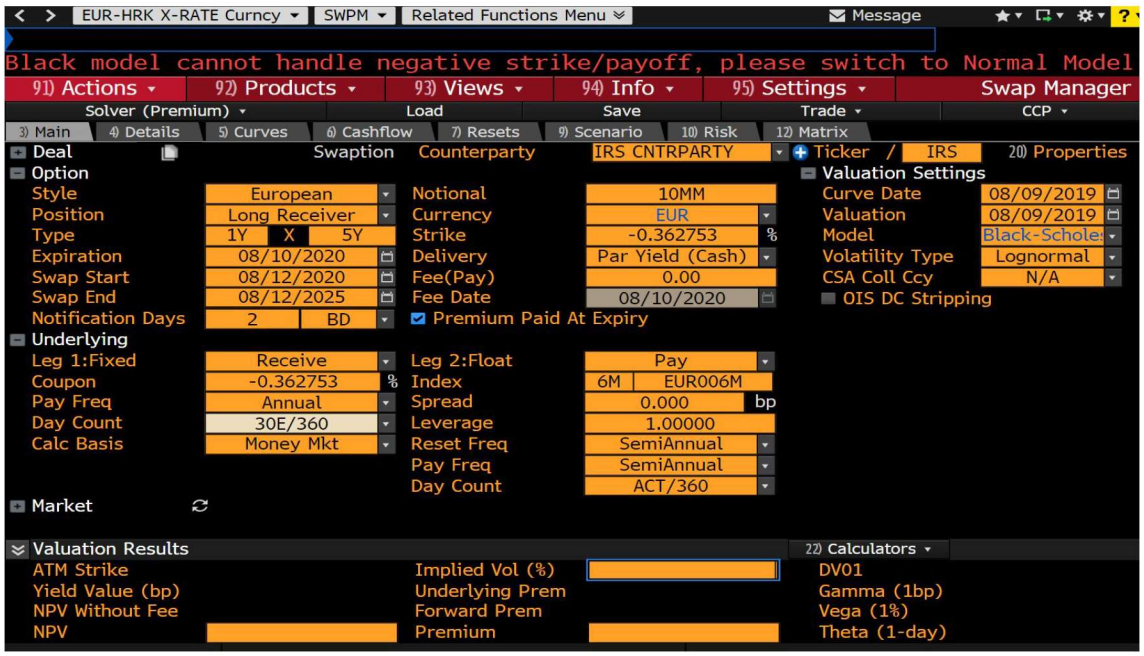
$$d_1 = \frac{ln(0.01383524/0.014) + 0.05261^2(365/360)/2}{0.5261\sqrt{(365/360)}} = 0.242522965,$$

$$d_2 = \frac{ln(0.01383524/0.014) - 0.05261^2(365/360)/2}{0.5261\sqrt{(365/360)}} = -0.287217909,$$

$$\begin{aligned} f_{swap_{put}} &= 10\,000\,000 \cdot 3.867132\,(0.014 \cdot N(-0.24) - 0.01383524 \cdot N(0.28)) \\ &= 38\,671\,321.86\,(0.014 \cdot 0.6130 - 0.01383524 \cdot 0.4042) \\ &= 115\,640.82. \end{aligned}$$

Razlika u odnosu na Bloomberg je $115\,640.82 - 115\,381.63 = 259.19$.

Na slici 19 prikazana je swap opcija u kojoj umjesto šestomjesečnog LIBOR-a želimo koristiti šestomjesečni EURIBOR(Euro Interbank Offered Rate).



Slika 19: Swap opcija s tržišnom stopom šestomjesečnim EURIBOR-om.

EURIBOR je referentna kamatna stopa koja se određuje dnevno kao prosječna stopa na europskom međubankarskom tržištu. U ovom slučaju ne možemo odrediti vrijednost opcije koristeći Black model zbog toga što je EURIBOR često negativna stopa. Rješenje problema navodimo u nastavku.

5.4 Generalizirani modeli

Nedostatak prethodnog Black modela je pretpostavka log-normalne distribucije forward kamatne stope. Nakon financijske krize 2007.-2009. godine države poput Švicarske, Finske, Danske u kojim postoji snažna valuta bile su preplavljene depozitima iz inozemstva te su kako bi odvratile tu poplavu banke počele plaćati negativnu kamatnu stopu. Odnosno, banke u tim državama zaračunaju određenu proviziju za držanje depozita u bankama. Iz tog razloga je EURIBOR često negativna kamatna stopa.

5.4.1 Shifted Black model

Jedan od modela koji rješava prethodni problem je Shifted Black model ili Shifted lognormal model. U ovom modelu dodan je pomak Θ na forward kamatnu stopu $F_t = F(t,T,S)$, odnosno forward kamatna stopa definirana je sljedećom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom:

$$dF_t = \sigma(F_t - \Theta)dB_t, \tag{116}$$

pri čemu je $\Theta < 0$, $F_t - \Theta > 0$, $\sigma > 0$ i $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje. U tom slučaju vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka je

$$c_{shift} = P(0,T)[(F_0 - \Theta)N(d_1) - (K - \Theta)N(d_2)] \tag{117}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{ln\left((F_0 - \Theta)/(K - \Theta)\right) \pm \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}}. \tag{118}$$

Odnosno vrijednost put opcije u $t = 0$ jednaka je

$$p_{shift} = P(0,T)[(K - \Theta)N(-d_2) - (F_0 - \Theta)N(-d_1))]. \tag{119}$$

Pomak je dodan i na vrijednost K pa je još jedna pretpostavka ovog modela i $K - \Theta > 0$. Tada je $ln\left((F_0 - \Theta)/(K - \Theta)\right)$ dobro definirano, a forward kamatne stope mogu poprimiti negativne vrijednosti, odnosno moguće vrijednosti forward kamatnih stopa pripadaju intervalu (Θ, ∞), $\Theta < 0$.

5.4.2 Bachelier model

Bachelier model pretpostavlja da je vezana imovina normalno distribuirana i tako omogućuje da forward kamatne stope budu negativne. Forward kamatne stope u tom slučaju opisujemo sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$dF_t = \sigma dB_t.$$

Vrijednost call i put opcije Bachelier modela u trenutku $t = 0$ jednake su

$$c_{Bachelier} = P(0,T)[(F_0 - K)N(d) + \sigma T N^{'}(d)], \tag{120}$$

$$p_{Bachelier} = P(0,T)[(K - F_0)N^{'}(-d) + \sigma T N(d)], \tag{121}$$

gdje je

$$d = \frac{F_0 - K}{\sigma\sqrt{T}},$$

a N i $N^{'}$ funkcija gustoće i distribucije standardne normalne razdiobe

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}} dx, \tag{122}$$

$$N^{'}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}. \tag{123}$$

Bloomberg u slučaju negativnih kamatnih stopa za izračun predlaže korištenje Bachelier-ovog modela.

5.5 Zaključak

U radu smo se fokusirali na tri najpopularnije opcije OTC tržišta, cap, floor i swap opcije. Vidjeli smo da su formule za vrednovanje ovih opcija proširenje Black modela. Za svaku od opcija naveli smo jedan primjer te smo uz pomoć bankarskog softvera Bloomberg odredili njihovu cijenu. Vidjeli smo da se cijena koju smo dobili koristeći Bloomberg ne razlikuje značajno od cijene koji smo izračunali koristeći proširenje Black modela. Razlika koja postoji nastaje zbog razlika u zaokruživanju i nedostatka informacija o načinu izračuna koji koristi Bloomberg. Problem se pojavljuje kada vezana imovina za koju određujemo vrijednost opcije poprima negativne vrijednosti, kao u slučaju EURIBOR kamatne stope, zbog toga što je pretpostavka Black modela da je vezana imovina log-normalno distribuirana slučajna varijabla. Zbog toga smo na kraju rada naveli dva generalizirana modela koja se u posljednje vrijeme sve više koriste u praksi zbog toga što većina referentnih kamatnih stopa može poprimiti negativne vrijednosti.

Sažetak

Ideja rada je primjena Black model za vrednovanje opcija na OTC tržištu. Na početku rada predstavljen je model Brownovog gibanja te model geometrijskog Brownovog gibanja koji služi kao osnova za modeliranje cijena vezane imovine. Nadalje, budući da je Black model proširenje Black-Scholes-Mertonovog modela za vrednovanje call i put opcija u nastavku su predstavljene osnovne teorijske pretpostavke Black-Scholes-Mertonovog modela koji nasljeđuje i sam Black model. U radu proširujemo Black model, odnosno predstavljen je model kod kojeg kamatne stope opisujemo slučajnim procesom. Za proširenje Black modela vrlo bitna bit će ekvivalentna martingalna mjera te tržišna cijena rizika, Sharpeov omjer. U četvrtom poglavlju predstavljeno je tržište obveznica i kamatnih stopa te su nakon toga detaljnije analizirane tri najpopularnije opcije na OTC tržištu, cap, floor te swap opcije. Za svaku od opcija analiziran je primjer za koji su podaci preuzeti s bankarskog softvera Bloomberg. Na kraju rada prokomentiran je problem Black modela te su navedena dva generalizirana modela koja se češće koriste u praksi.

Ključne riječi

Brownovo gibanje, call opcije, put opcije, Black-Scholes-Mertonov model, Black model, Sharpeov omjer, numerar, OTC tržište, swap kamatna stopa, obveznice bez kupona, cap opcije, floor opcije, swap opcije.

Pricing of Interest rate options on OTC market

Abstract

The main idea of this graduate thesis is to apply the Black model to evaluate interest rate options in the OTC market. At the beginning of thesis, a model of Brown motion is presented, as well as a model of geometric Brown motion which is used as basis for modeling the prices of underlying assets. Furthermore, basic theoretical results about Black-Scholes-Merton model and Black model are presented. We extend Black model by assuming that interest rates are stohastic. The equivalent martingale measure and the market price of the risk (Sharpe ratio) will be very important to extend the Black model. In chapter four we introduced the bond and interest rate markets and then we analyzed the three most popular options on the OTC market, cap, floor and swap options. For each option an example in Bloomberg software is given. At the end of the paper one problem of Black model is discussed and as a solution of that problem two generalized models that are more commonly used in practice are introduced.

Key words

Brown motion, call option, put option, Black-Scholes-Merton model, Black model, Sharpe ratio, numerar, OTC market, swap rate, zero-coupon bonds , cap option, floor option, swaption.

Popis slika

1 Novčani tokovi kuponske obveznice 21
2 Obveznica bez kupona 21
3 Kretanje šestomjesečnog LIBOR-a u razdoblju od 6.8.2018. do 6.8.2019. 24
4 Kamatni swap 27
5 Primjer swap ugovora u trajanju od 5 godina s nominalom 10 000 000 USD, fiksnom stopom 1.5% i varijabilnom stopom koja je šestomjesečni LIBOR sklopljen na 6.8.2019. 28
6 Novčani tok swapa ugovora 29
7 Predviđeni LIBOR na 6.8.2019 30
8 Varijabilna i fiksna kamatna stopa na 6.8.2019. 31
9 Primjer swap ugovora u trajanju od 5 godina s nominalom 10 000 000 USD, fiksnom stopom 1.5% i varijabilnom stopom koja je šestomjesečni LIBOR sklopljen na 7.8.2019 31
10 Promjena LIBOR stope u posljednjih 17 dana 32
11 Varijabilna i fiksna kamatna stopa na 7.8.2019. 32
12 Floor opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om. 36
13 Tablica s podacima floor opcije preuzeta s Bloomberg-a. 36
14 Cap opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om. 39
15 Tablica s podacima cap opcije preuzeta s Bloomberg-a. 39
16 Prikaz vrijednosti call i put swap opcija. 41
17 Swap opcija sklopljena na 8.7.2019. s početkom za godinu dana i trajanjem 5 godina, nominalnom vrijednošću 10 000 000, izvršnom stopom 1.4% te tržišnom stopom šestomjesečnim LIBOR-om. 43
18 Novčani tok swap ugovora na koji smo dogovorili opciju 44
19 Swap opcija s tržišnom stopom šestomjesečnim EURIBOR-om. . . . 45

Popis tablica

1 Intrinzična imovina floor opcije 38
2 Intrinzična imovina cap opcije 39
3 LIBOR stopa swap ugovora 43

Literatura

[1] F.BLACK, M.SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, vol.81, No.3 (May-Jun.1973), pp.637-654, https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf

[2] A.BRECCIA, *Interest Rate Models I: Short Rate Models*, Materijali s predavanja, School of Economics, Mathematics and Statistics, Birbeck College, University of London, 2012., www.bbk.ac.uk/ems/for_students/msc_finEng/pricing_emms014p/ab7.pdf

[3] B.BASRAK, *Matematičke financije*, Materijali s predavanja, PMF-MO, Zagreb, 2009., https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/MFEsve.pdf

[4] DAMIR FILIPOVIĆ, *Interest Rate Models*, Materijali s predavanja , University of Munich, Munich ,2005. https://docplayer.net/4652973-Interest-rate-models-damir-filipovic-university-of-munich.html

[5] DAVID CAI, Derivatives, Materijali s predavanja, New York University, New York ,2006. www.math.nyu.edu/~cai/Courses/Derivatives/lecture11.pdf, www.math.nyu.edu/~cai/Courses/Derivatives/lecture10.pdf.

[6] J.HULL, A.WHITE, *Forward rate volatilities, swap rate volatilities and implementation of the LIBOR market model*, Joseph L.Rotman School of Management, University of Toronto, 1999.

[7] J.HULL, A.WHITE, *Pricing Interest-Rate Derivative Securities*, The Review of Financial Studies, University of Toronto, USA, 1990.

[8] M.H.A.DAVIS, *Stohastic Differential Equations and Interest Rate Models*, MSc Course in Mathematics and Finance, Imperial College London, London, 2012.

[9] N.PRIVAULT, *Notes on Stohastic Finance*, Materijali s predavanja, School of Physical and Mathematical Sciences, Nanyang Technological University, Singapore, 2019., https://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/indext.html

[10] R. van HANDEL, *Stochastic Calculus, Filtering, and Stohastic Control*, Materijali s predavanja, version: May 29,2007.

[11] S.ZEYTUN, A.GUPTA, *A Comparative Study of Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*, Fraunhofer Institute for Technical and Industrial Mathematics, Germany, 2007.

[12] S.FEDOTOV, *Introduction to Financial Mathematics*, Materijali s predavanja, University of Manchester, 2010.

[13] Z.VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Materijali s predavanja, PMF-MO, Zagreb, 2009., https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/MFEsve.pdf

[14] Y.K. KWOK, *Interest Rate Models and Bond Pricing*, Materijali s predavanja , Germany, 2007. https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma571/03_04/P_Ch06.pdf

[15] D.BRIGO, F.MERCURIO, *Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*, Springer, Gemrmay, 2001.,

[16] JOHN C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives*, 7.izdanje, Pearson Education, 2009.

[17] JOHN C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives Solutions Manual*, 8.izdanje, Pearson Education, 2012.

[18] JUSTIN LONDON, *Modeling Derivatives in C++*, John Wiley Sons,Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.

[19] P.WILMOTT,S.HOWISON,J.DEWYNNE *The Mathematics of Financial Derivatives*, University of Cambridge, USA, 1995.

[20] S.N.NEFTCI, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2.izdanje, Academic Press, 2000.

[21] T.MIKOSCH, *Elementary Stochastic Calculus, With Finance In View*, World Scientific Publishing Co., 1998.

Životopis

Rođena sam 3. lipnja 1994. u Rijeci. Pohađala sam Osnovnu školu Skrad od 2000. do 2008. godine te sam nakon toga upisala prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Delnice. Nakon završetka srednje škole, 2012. godine, upisala sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Rijeci. 2015. godine stječem naziv prvostupnice matematike te iste godine upisujem diplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom studija obavljala sam jednomjesečnu stručnu praksu u Zagrebačkoj banci na Odjelu za strateško upravljanje i kontrolu kreditnog rizika. Nakon prakse u Zagrebačkoj banci u rujnu 2017. godine obavila sam dvomjesečnu praksu u sklopu IAESTE programa na Nacionalnom tehničkom sveučilištu u Ateni u Grčkoj. U rujnu 2018. godine upisujem program za pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičku izobrazbu na Filozofskom fakultetu u Osijeku te uspješno završavam s programom u ožujku 2019. godine. Istog mjeseca krećem i sa šestomjesečnom stručnom praksom u Zagrebačkoj banci na Odjelu za tržišne i likvidnosne rizike gdje sam trenutno zaposlena.