Primjena određenog integrala

Bujadinović, Tena

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:079044

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tena Bujadinović

Primjena određenog integrala

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Tena Bujadinović

Primjena određenog integrala

Završni rad

Voditelj: izv.prof.dr.sc. Kristian Sabo

Osijek, 2016.

Sažetak. Tema je završnog rada primjena određenog integrala. U prvom ćemo dijelu izložiti ključne tvrdnje ovoga rada i objasniti što je određeni integral te svojstva određenoga integrala. Glavni dio ovog rada bit će posvećen primjeni određenoga integrala, računanje površine ravninskih likova, duljina luka ravninske krivulje, računanje volumena rotacijskih tijela, površine rotacijskih ploha, nepravi integral i još neke druge primjene. Navest ću neke primjere i zadatke te pobliže objasniti svaku temu zasebno.

Ključne riječi: problem površine, Darbouxova suma, određeni integral, svojstva određenog integrala, računanje površine ravninskih likova, duljina luka ravninske krivulje, računanje volumena rotacijskih tijela, površina rotacijskih ploha, ostale primjene.

Abstract. The theme of this final paper is a applications of definite integrals. In the first part work will definite the main statements and explain the definition of definite integral and some characteristics od definite integral. The main part of the paper will be dedicated to applications of definite integrals, area of plain fugure,arc lenght of a plane curve, calculating volume of rotated fugure, calculating area of rotated figure ,improper integal and its other applications. I will give some examples and exercises and explain each subject.

Key words: problem areas, Darboux sum, definite integral, characteristics of definite integral,area of plain fugure, arc lenght of a plane curve, calculating volume of rotated fugure, calculating area of rotated figure , other applications of definite integrals.

Sadržaj

1 Uvod **4**

2 Računanje površine lika u ravnini **8**

3 Duljina luka ravninske krivulje **10**

4 Računanje volumena rotacijskih tijela **12**

5 Površine rotacijskih ploha **13**

6 Nepravi integral **15**

7 Neke druge primjene **16**
7.1 Akceleracija-brzina-put 16
7.2 Brzina kemijske reakcije. Količina tvari 17
7.3 Specifična toplina-količina topline 17
7.4 Sila-rad 17
7.5 Masa, momenti i težišta 18

1 Uvod

Jedan od problema koji vodi do određenoga integrala je problem površine. Površine trokuta, kvadrata, pravokutnika itd. poznate su nam još iz osnovne škole i ne predstavljaju nam problem jer za njihovo računanje postoje "gotove" formule. Taj problem želimo proširiti na općenitije skupove, odnosno želimo rješavati probleme kao što su: računanje volumena tijela koji nastaje rotacijom krivulja oko zadane osi ili izračunati duljinu luka krivulje.

Primjena određenog integrala

Određeni integral

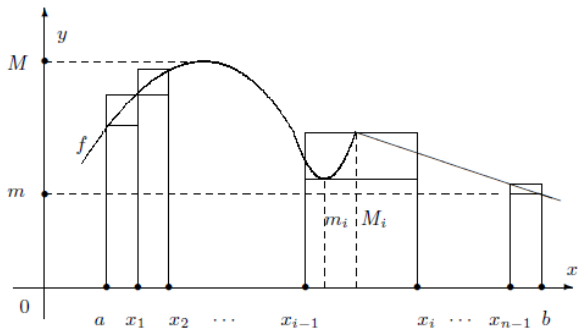
Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $I = [a, b]$ tj. neka postoje realni brojevi M i m ((Slika 1.) takvi da vrijedi $m \leq f(x) \leq M$, za svaki $x \in [a, b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Tada za svaki $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ postoje brojevi:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

gdje je: $m \leq m_i \leq M_i \leq M$. U svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1 \dots n$ odaberimo točku ξ_i. Prema definiciji supremuma i infimuma je $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ pa iz prethodnih nejednakosti dobivamo

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M \quad (1)$$

.



Slika 1: subdivizija segmenta I te prikaz brojeva M_i,m_i,M,m

Određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ definiramao pomoću sljedećih suma funkcije f vezanih uz subdiviziju P:

1. donja Darbouxova suma:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}),$$

2. gornja Darbouxova suma:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}),$$

3. integralna suma

$$\sigma(f, P, \{\xi_1, \dots \xi_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Množenjem nejednakosti (1) s $(x_i - x_{i-1})$ te sumiranjem po i od 1 do n dobivamo:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_1, \dots \xi_n\}) \leq S(f,P) \leq M(b-a) \quad (2)$$

Napomena 1.1. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna i omeđena funkcija ,a T pseudotrapez omeđen grafom fukncije f , $x-$osi i pravcima $x = a$, $x = b$ kao na (Slika 1.) Donja Darbouxova suma predstavlja ukupnu površinu pravokutnika upisanih pseudotrapezu T. Gornja Darbouxova suma predstavlja ukupnu površinu pravokutnika opisanih pseudotrapezu.*

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih subdivizija segmenta $[a,b]$. Nejednakost (2) vrijedi za svaku subdiviziju P i govori nam da je skup $\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$ omeđen odozgo, a skup $\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$ omeđen odozdo. Onda postoje brojevi:

$$I_\star(f,[a,b]) = \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$$

$$I^\star(f,[a,b]) = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$$

Broj $I_\star(f,[a,b])$ nazivamo **donjim Riemannovim integralom**, a broj $I^\star(f,[a,b])$ **gornjim Riemannovim integralom** funkcije f na segmentu $[a,b]$.

Iz nejednakosti (2) dobivamo da za svaku subdiviziju $P \in \mathcal{P}$ vrijedi:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq I_\star(f,[a,b]) \quad i \quad I^\star(f,[a,b]) \leq S(f,P) \leq M(b-a) \quad (3)$$

Dva osnovna svojstva Darbouxovih suma:[1]

1. a) Za bilo koje dvije subdivizije P i P' segmenta $[a,b]$ takve da je $P \subseteq P'$ vrijedi:

   $$s(f,P) \leq s(f,P') \quad i \quad S(f,P) \geq S(f,P'),$$

   tj. ako neku subdiviziju profinimo s konačno mnogo točaka onda se gornja Darbouxova suma neće povećati, a donja Darbouxova suma se neće smanjiti.
   b) Za bilo koje dvije subdivizije P_1 I P_2 segmenta $[a,b]$ vrijedi:

   $$s(f,P_1) \leq S(f,P_2),$$

   tj. bilo koja donja Darbouxova suma nije veća od bilo koje gornje Darbouxove sume.

2. Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $[a,b]$, onda je

   $$I_\star(f,[a,b]) \leq I^\star(f,[a,b]).$$

Iz (3) i prethodne tvrdnje dobivamo:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq I_\star(f,[a,b]) \leq I^\star(f,[a,b]) \leq S(f,P) \leq M(b-a) \quad (4)$$

Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neka je omeđena na segmentu $[a,b]$, a $[a,b]$ segment realnih brojeva. Ako je $I_\star(f,[a,b]) = I^\star(f,[a,b])$, onda za funkciju f kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili kraće **integrabilna** na segmentu $[a,b]$, a realan broj:

$$I(f,[a,b]) = I_\star(f,[a,b]) = I^\star(f,[a,b])$$

nazivamo **određenim integralom** funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označavamo s:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Segment $[a,b]$ je područje integracije, f podintegralna funkcija i x varijabla po kojoj se integrira. Kažemo da je točka a **donja granica**, a točka b **gornja granica integracije**. Po definiciji uzimamo da je

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad i \quad \int_a^b f(x)dx = 0$$

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ možemo aproksimirati gornjom $S(f,P)$ ili donjom $s(f,P)$ Darbouxovom sumom. Prema (4) je:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,P)$$

odakle vidimo da apsolutna greška te aproksimacije nije veća od broja $S(f,P) - s(f,P)$. Slično ako aproksimiramo oređeni integral nekom integralnom sumom $\sigma(f,P,\{\xi_1 \dots \xi_n\})$, onda apsolutna greška aproksimacije neće bit veća od $S(f,P) - s(f,P)$ jer je $s(f,P) \leq \sigma(f,P\{\xi_1 \dots \xi_n\}) \leq S(f,P)$. Sljedeća definicija govori nam da se aproksimacija može učiniti dovoljno točno.

Definicija 1.2. *[1] Omeđena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna na segmentu $[a,b]$ onda i samo onda ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.*

Teorem. 1.3. ***Riemannov teorem****[1]*
Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, onda je ona i integrabilna na $[a,b]$.

Teorem. 1.4. ***Teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije****[1]*
Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Geometrijski gledano moguće je pronaći takav broj $c \in [a,b]$ da površina psudotrapeza ispod grafa funkcije bude jednaka površini pravokutnika s bazom (b-a) i visinom f(c).

Teorem. 1.5. ***Darbouxov teorem****[1]*
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i (P_n) bilo koji niz subdivizija segmenta [a,b] sa svojstvom da $\delta(P_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Tada su nizovi Darbouxovih suma $(S(f,P_n))$ i $(s,(f,P_n))$ konvergentni i pri tome vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = I^\star(f,[a,b]), \quad \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = I_\star(f,[a,b]).$$

Ako je funkcija f omeđena i integrabilna na segmentu $[a,b]$, onda je:

$$\int_a^b f(x)dx = I^\star(f,[a,b]) = I_\star(f,[a,b]).$$

Prema Darbouxovom teoremu, za bilo koji niz (P_n) subdivizija segmenta [a,b] takav da je $\lim_{n\to\infty}\delta(P_n)=0$, vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

Osnovna svojstva određenog integrala

U nastavku navodimo neka od svojstva određenog integrala, koja su proizašla neposredno iz definicije ili svojstava integralnih suma:

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$,
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$,
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad c=const$,
4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. Granična vrijednost integralne sume ne ovisi o subdiviziji intervala $[a,b]$, neka je $c\in[a,b]$ djelišna točka u svakoj subdiviziji. Vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{1.1}$$

   Ovo svojstvo vrijedi i u slučaju ako je f integrabilna na najdužem od intervala $[a,b]$, $[a,c]$, i $[c,b]$, onda je integrabilna i na ostalima i vrijedi (1.1), bez obzira na raspored točaka a,b i c.

6. Ako je $f(x)>0$ na $I=[a,b]$, $a<b$, onda je $S(\Delta)>0$, pa vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx > 0, \quad f(x)>0, \quad a<b$$

7. $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \quad ako \quad je \quad f(x)<g(x), \quad (a<b)$
8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|dx$.

2 Računanje površine lika u ravnini

Površinu pseudotrapeza omeđenoga lukom krivulje $y = f(x)$, apscisnom osi i dvjema paralelama s ordinatnom osi ($x = a, x = b$) izračunavamo po formuli :

$$P = \int_a^b f(x)dx \quad odnosno \quad P = \int_a^b ydx.$$

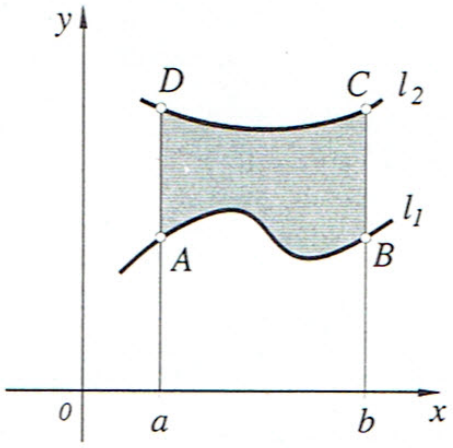
Zanima nas kako izračunati površinu između dvije krivulje.

Ako nas zanima površina između dvije krivulje l_1 i l_2 čije su jednadžbe

$$y = f_1(x) \text{ i } y = f_2(x), \quad (f_1(x) \leq f_2(x), \quad za \quad x \in [a, b],)$$

onda se površina ograničena tim krivuljama i pravcima $x = a$ i $x = b$ dobiva oduzimanjem površine $aABb$ od površine $aDCb$ kao što vidimo na (Slika 2.) odnosno pomoću formule:

$$P = P_2 - P_1 = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{2.1}$$



Slika 2: Površina ograničena krivuljama l_1 i l_2 te pravcima $x = a$ i $x = b$

Formulu (2.1) možemo koristiti i za izračunavanje površine ograničene zatvorenom krivuljom koja je presječena pravcem $x = c$ u dvije točke.

Primjer 2.1. *[2] Izračunati površinu između parabola* $y = \sqrt{x}$ *i* $y = x^2$ *čije su presječne točke* $O = (0, 0)$ *i* $A = (1, 1)$

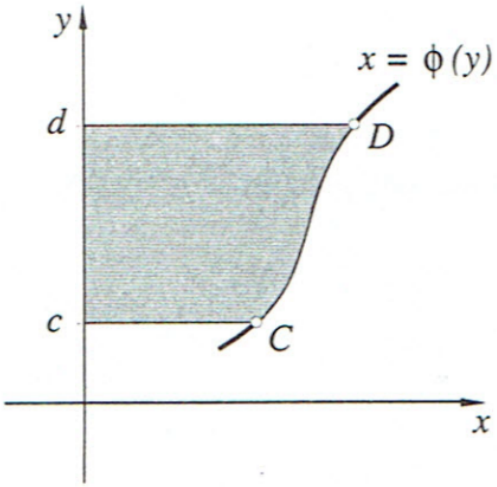
$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$$

Površinu pseudotrapeza koji je omeđen ordinatnom osi, lukom krivulje i dvjema paralelama s apscisnom osi (tj. pravcima $y = c$ i $y = d$)(Slika 3.). Analogno formuli

$$P = \int_a^b f(x)dx$$

može se dobiti

$$P = \int_c^d xdy \quad tj \quad P = \int_c^d \phi(y)dy$$

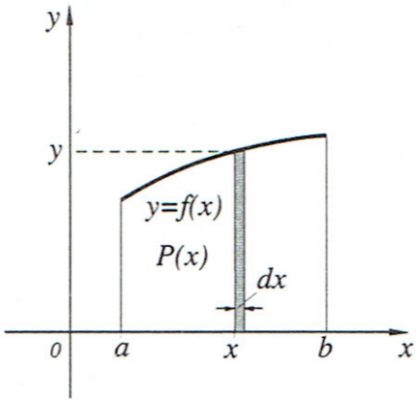


Slika 3: Površina psudotrapeza omeđenog ordinatnom osi, lukom krivulje, te pravcima $y = c$ i $y = d$

Napomena 2.2. *Neka je*

$$P(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Tada je $\frac{dP}{dx} = f(x)$. *Diferencijal površine* (dP) *zove se i element površine. Geometrijski gledano to je pravokutnik visine* $f(x)$ *i po volji male baze* dx *što je prikazano na (Slika 4.)*



Slika 4: Istaknut diferencijal površine tj. pravokutnik visine $f(x)$ i baze dx

Zapis

$$P = \int_a^b f(x)dx = \int_{x=a}^{x=b} dP$$

upućuje nas da površina pseudotrapeza nastaje sumiranjem odnosno integriranjem tih elemenata. Takav način izražavanja koristan je i u teheničkoj praksi.

Računanje površine lika u ravnini u polarnim koordinatama

Naš je cilj pokazati kako određujemo površinu skupa koji je omeđen krivuljama koje su u polarnim koordinatama. Zadani skup ne iscrpljujemo pravokutnicima nego kružnim isječcima.

Neka je $\rho = f(\varphi)$, gdje je $f(\varphi) \geq 0$ jednadžba krivulje u polarnim koordinatama, te $f(\varphi)$ funkcija koja je neprekidna na intervalu

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$

koji leže u granicama $[0, 2\pi]$ ili u granicama $[-\pi, \pi]$ tada se figura ograničena lukom krivulje $\rho = f(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ naziva krivolinijskim sektorom.
Ako podijelimo interval $[\alpha, \beta]$ na podintervale $[\alpha, \varphi_1], [\varphi_1, \varphi_2] \ldots [\varphi_{n-1}, \beta]$. Tada zapravo toj podjeli na podintervale odgovara podjela krivolinijskog sektora na n parcijalnih krivolinijskih sektora ograničenih lukom krivulje $\rho = f(\varphi)$ i polupravcima

$$\varphi = \alpha, \varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi = \beta$$

Neka je

$$\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$$

Ako bi iz ishodišta opisali kružni luk polumjera $\rho_i = \varphi(\xi_i)$ tada je $\frac{1}{2}\rho_i^2\sigma_i = \frac{1}{2}f(\xi_i)^2\sigma_i$ površina kružnog sektora polumjera $\rho_i = \varphi(\xi_i)$ te centralnog kuta $\sigma_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Ako formiramo sumu

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\xi_i)^2 \sigma_i$$

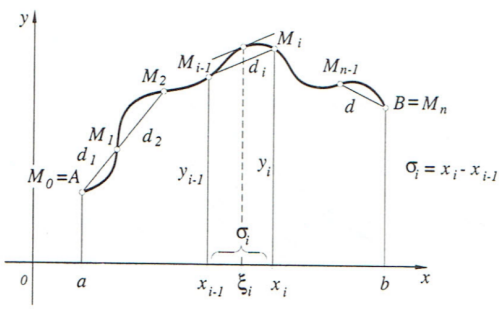
tada ta suma predstavlja Riemannovu integralnu sumu neprekidne fukncije $\frac{1}{2}\rho^2 = \frac{1}{2}f(\varphi)^2$ na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Definicija 2.3. *[2] Površina krivolinijskog sektora granična je vrijednost integralnih suma, tj. određeni integral*

$$\lim \sum_i \frac{1}{2}\rho_i^2\sigma_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\varphi)^2 d\varphi.$$

3 Duljina luka ravninske krivulje

Računanje duljine luke ravinske krvulje naziva se rektifikacija. Oganičavamo se na krivulju kojoj sve točke leže u istoj ravini. Neka je funckija $y = f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i neka u tom intervalu ima neprekidnu prvu derivaciju. Neka je ta funkcija dana kao na (Slika 5.), ono što moramo definirati je što podrazumijevamo pod duljinom luka AB.



Slika 5: Ravninska krivulja čija nas duljina zanima

Definicija 3.1. *[2]*

Duljina s luka $\overset{\frown}{AB}$ na nekoj krivulji $y = f(x)$ granična je vrijednost kojoj teži duljina upisane poligonske crte $AM_1M_2...M_{n-1}B$ kada broj tetiva neograničeno raste, a duljina najveće tetive teži ka nuli.

Simbolički

$$s = \lim_{m(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} di, \quad (m(\Delta) = \max_{1\le i\le n} \sigma_i)$$

Duljina $\overline{M_{i-1}M_i}$ tetive je

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Po Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti je

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

Prema tome je

$$s = \lim_{m(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\sigma_i.$$

Suma u prethodnom izrazu predstavlja Riemannovu integralnu sumu neprekidne funkcije $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ pa je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

ili

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$$

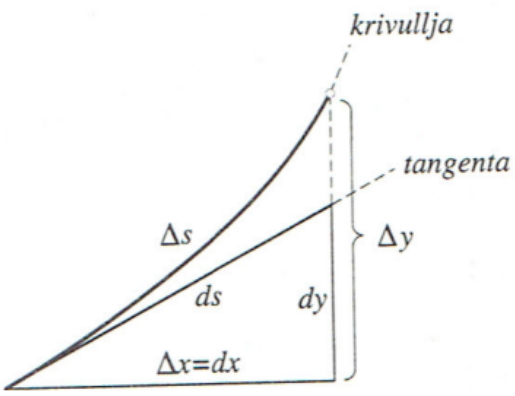
ili

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Diferencijal luka je dan sa

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Geometrijsko značenje diferencijala luka ds i od Δs dano je na (Slika 6.) i vidimo da je ds odrezak na tangenti.



Slika 6: Geometrijsko značenje diferencijala luka (ds) i prirasta luka (Δs)

Neka je krivulja zadana u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$ pa je

$$dx = \dot{x}(t)dt, \quad dy = \dot{y}(t)dt,$$

Onda je

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt,$$

te je duljina luka

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt,$$

a t_1 i t_2 su vrijednosti parametra koji pripadaju krajevima luka $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

Primjer 3.2. *[2] Izračunajte duljinu luka funkcije $y = chx$ od točke $(0, 1)$ do točke sa apscisom $x > 0$.*
Lako se pokaže da vrijedi $ch^2x - sh^2x = 1$ pa je onda

$$1 + y'^2 = 1 + sh^2x = ch^2x$$

tj.

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^x chxdx = shx.$$

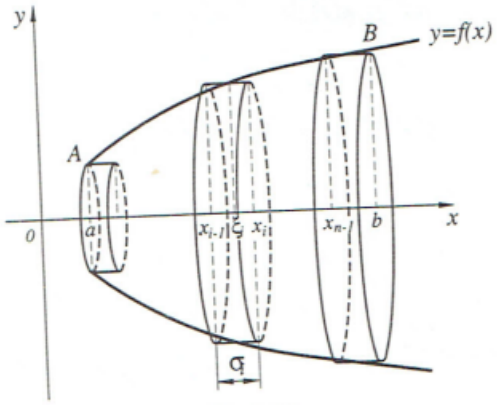
4 Računanje volumena rotacijskih tijela

Promatramo tijelo nastalo rotacijom luka krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ gdje je $f(x)$ neprekidna funkcija i $f(x) \geq 0$. Svakoj subdiviziji Δ intervala $[a, b]$ na subintervale $[x_{i-1}, x_i]$ jednaka je podjela rotacijskog tijela na slojeve s visinama σ_i. Uzmimo proizvoljnu točku $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tada volumen cilindričnog tijela predstavlja $\pi\eta_i^2\sigma_i = \pi f(\xi_i)^2$ gdje je σ_i visina, i polumjer osnovke $\eta_i = f(\xi_i)$ kao što je označeno na (Slika 7.)

Izraz

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\eta_i^2\sigma_i$$

predstavlja sumu volumena tako cilindričnih tijela, gledano sa strane analize to je integralna suma za neprekidnu funkciju $\pi f(x)^2$



Slika 7: Cilindrično tijelo čiji volumen računamo

Definicija 4.1. *[2] Volumen rotacijskog tijela granična je vrijednost posljednje integralne sume tj.*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Napomena 4.2. *Volumni element je* $dV = \pi y^2 dx$ *pa je tada volumen dan sa*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Ako luk krivulje $x = \phi(y)$ *rotira oko ordinatne osi na* $[c, d]$ *intervalu, tada je volumen jednak:*

$$V = \int_c^d x^2 dy = \int_c^d \phi(y)^2 dy.$$

Primjer 4.3. *[2] Izračunati volumen tijela nastaloga rotacijom elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *oko y-osi.*

$$V = \pi \int_{-b}^{b} x^2 dy = \pi \frac{a^2}{b^2} \int_{-b}^{b} (b^2 - y^2) dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

5 Površine rotacijskih ploha

Računat ćemo površinu rotacijske plohe, tj. određivati površinu plašta rotacijskoga tijela. Kako smo luk $\overset{\frown}{AB}$ podijelili na parcijalne lukove $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$,...,$\overset{\frown}{M_{n-1}B}$ te konstruirajmo poligonsku crtu $AM_1 \dots M_i \dots B$ s vrhovima u krajnjim točkama luka kao na (Slika 8.) Svaki će dio poligonske crte pri rotaciji opisati površinu plašta krnjeg kružnog stošca.

Definicija 5.1. *[2] Površinom rotacijske plohe naziva se granična vrijednost kojoj teži površina nastala rotacijom upisane poligonske crte.*

Neka je S duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ i podijelimo interval $\overline{OS}$ točkama

$$O = s_0 < s_1 < \cdots < s_i < \cdots < s_n = S$$

Rotacijom dijela $\overline{M_{i-1}M_i}$ poligonske crte nastaje krnji kružni stožac. Površina plašta nastala rotacijom jednaka je

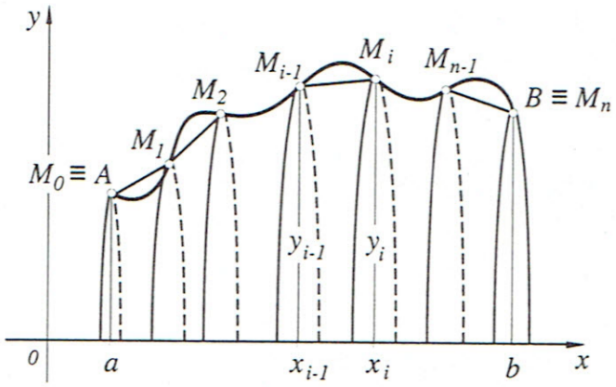
$$2\pi\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\overline{M_{i-1}M_i}$$

Prema poznatoj formuli za površinu plašta krnjeg kružnog stošca

$$m=2\pi\frac{R+r}{2}s$$

gdje je onda u našem slučaju

$$R=y_i,\quad r=y_{i-1},\quad s=\overline{M_{i-1}M_i}$$



Slika 8 :Podjela luka $\overset{\frown}{AB}$ na parcijalne lukove $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2},\ldots,\overset{\frown}{M_{n-1}B}$ te poligonska crta s vrhovima u krajnjim točkama

Površina rotacijske plohe nastale rotacijom poligonske crte je

$$\pi\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i-1})\overline{M_{i-1}M_i}\quad(1)$$

Ako duljine $\overline{M_{i-1}M_i}$ zamjenimo duljinama odgovarajućih lukova, dobivamo sumu

$$\pi\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i-1})(s_i-s_{i-1})\quad(2)$$

(2) predstavlja zbroj dvije integralne sume za funkciju $y(s)$, pri čemu je

$$\lim_{\max|s_i-s_{i-1}|\to 0}(\pi\sum_{i=1}^{n}y_i(s_i-s_{i-1}))=\lim_{\max|s_i-s_{i-1}|\to 0}(\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}(s_i-s_{i-1}))=\pi\int_0^s y\,ds$$

te je

$$\lim_{\max|s_i-s_{i-1}|\to 0}(\pi\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i-1})(s_i-s_{i-1}))=2\pi\int_0^s y(s)\,ds$$

Granična vrijednost razlike suma (1) i (2) jednaka je nuli. Odakle je

$$\lim(\pi \sum_i (y_i + y_{i-1})\overline{M_{i-1}M_i}) = 2\pi \int_0^s y(s)ds$$

Označimo li sa $N = \sup |y(s)|$ imat ćemo

$$0 \leq \pi \sum_i (y_i+y_{i-1})(s_i-s_{i-1}) - \pi \sum_i (y_i+y_{i-1})\overline{M_{i-1}M_i} = \pi \sum_i (y_i+y_{i-1})((s_i-s_{i-1}) - \overline{M_{i-1}M_i})$$

$$\leq 2\pi N(\sum_i (s_i - s_{i-1}) - \sum_i \overline{M_{i-1}M_i})$$

Razlika duljina

$$\lim(\sum_i (s_i - s_{i-1}) - \sum_i \overline{M_i M_{i-1}})$$

jednaka je nuli. Gdje je

$$S = \sum_i (s_i - s_{i-1})$$

tj. jednako duljini cijeloga luka $\widehat{AB}$, a

$$\sum_i \overline{M_i M_{i-1}}$$

duljina je upisane poligonske crte u luku $\widehat{AB}$. Zato dalje imamo

$$\lim \pi \sum_i (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1}) = 2\pi \int_o^s y(s)ds$$

te je površina rotacijske plohe dana tom formulom. Ukoliko je krivulja dana u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ onda je

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

A ako je luk dan jednadžbom $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ tada je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

6 Nepravi integral

Želimo definirati određeni integral funkcije $f(x)$ ako funkcija nije definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$ ili ako nije ograničena na $[a, b]$. Razmatramo iduće mogućnosti: interval nije zatvoren, npr $[a, b)$, nije konačan, npr $[a, \infty)$ ili unutar intervala $[a, b]$ funkcija nije omeđena. U nastavku dajemo definicije za upravo navedene mogućnosti koje u tom slučaju nazivamo nepravim integralom.

Definicija 6.1. *[3]*

$$1. \int_a^b f(x)dx = \lim_{L\to b} f(x)dx$$

$$2. \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty} f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$

gdje c točka u kojoj funkcija nije omeđena. Ako postoje navedeni limesi onda postoje nepravi integrali.

Definicija 6.2. *[3]*

$$1. \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^a f(x)dx$$

$$2. \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^L f(x)dx$$

Cauchyjev kriterij.[3]
Cauchyjev kriterij daje nužne i dovoljne uvjete za postojanje nepravog integrala

$$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty} F(L) = \lim_{L\to\infty}\int_a^L f(x)dx$$

Cauchyjev kriterij.[3] Da bi postojao limes funkcije $F(L)$ kada $L \to \infty$ nužno je i dovoljno da bude

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists B > a)(\forall L_1)(\forall L_2)(L_1 > B \wedge L_2 > B) \Longrightarrow |F(L_2) - F(L_1)| = \Big|\int_{L_1}^{L_2} f(x)dx\Big| < \epsilon$$

Teorem. 6.3. *[3]Neka je $|f(x)| \le g(x)$ za $a \le x \le \infty$. Ako konvergira integral $\int_a^\infty g(x)dx$ tada konvergira i $\int_a^\infty f(x)dx$.*

7 Neke druge primjene

7.1 Akceleracija-brzina-put

Poznato nam je kako se put (s) mijenja s vremenom (t), tj. $s = s(t)$. Prva derivacija puta po vremenu je brzina, tj.

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Akceleracija je prva derivacija brzine po vremenu, a druga derivacija puta po vremenu tj.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Integriranjem ćemo dobiti prevaljen put od vremena t_1 do vremena t_2 ako znamo zakon $v(t)$ po kojem se brzina mijenja sa vremenom tj.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Jednom integracijom akceleracije dobivamo brzinu, a još jednim integriranjem put.

7.2 Brzina kemijske reakcije. Količina tvari

Primjena integrala moguća je i kad je zadana brzina nekog procesa, a traži se ona veličina čijom se derivacijom dobiva ta brzina. Ako je

$$v = \frac{dx}{dt}$$

brzina neke kemijske reakcije tada je $dx = vdt$ pa je

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

količina tvari koja nastaje kemijskom reakcijom u vremenskom intervalu od t_1 do t_2.

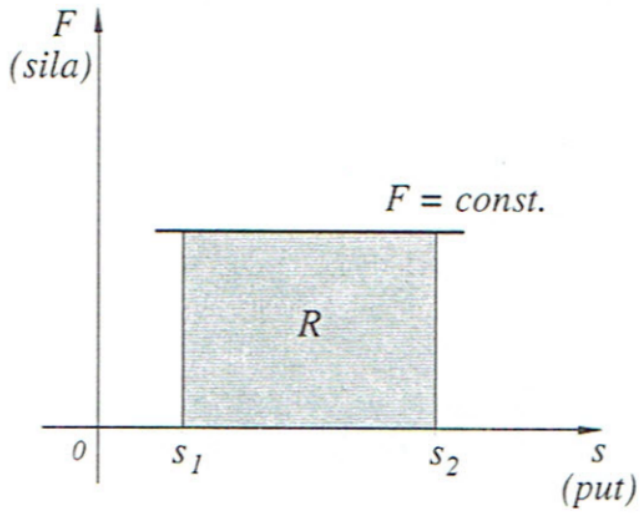
7.3 Specifična toplina-količina topline

Ako specifična toplina ovisi o temperaturi , a treba izračunati količinu topline (Q) koja je potrebna da se masa m ugrije od T_1 do T_2. Tada je $dQ = mc(T)dT$ pa je

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c(T)dT.$$

7.4 Sila-rad

Mehanički rad se definira kao produkt sile i puta. Pretpostavljamo da je sila konstantna, gibanje pravocrtno, te se smjer sile podudara sa smjerom puta. Na (Slika 9.) pravokutnik predstavlja rad izvršen na putu duljine $s_2 - s_1$ uz silu F koja je konstantna.

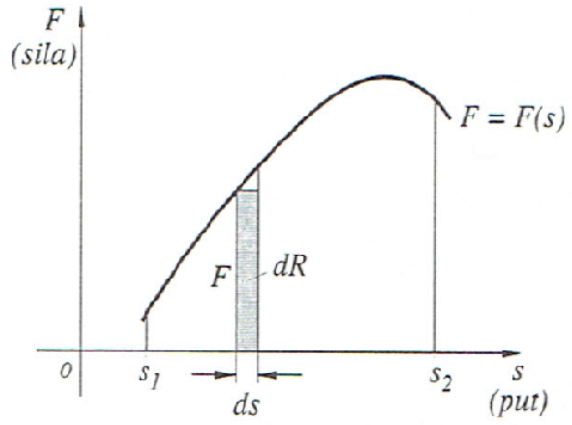


Slika 9: Rad izvršen na putu duljine $s_2 - s_1$ uz silu F koja je konstantna

Ako sila ovisi o putu dok su ostali uvjeti isti (Slika 10.). Na putu ds elementari rad će bit jednak $dR = Fds$, a rad na čitavom putu od s_1 do s_2 iznosi

$$R = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds.$$

Cijeli rad je prikazan površinom psudotrapeza iznad intervala s_1, s_2.



Slika 10: Rad prikazan površinom psudotrapeza iznad intervala s_1, s_2

7.5 Masa, momenti i težišta

Težišta i moment tromosti tijela računaju se pomoću trostrukih integrala. No ako je tijelo rotacijsko mnogo lakše dolazimo do tih veličina pomoću običnih određenih integrala.
Materijalna točka neke mase m, u odnosu na os vrtnje p, od koje je udaljena za d, stvara zakretni statički moment:

$$M_p = dm$$

Skup točaka u odnosu na os vrtnje p ima statički moment:

$$M_p = \sum_{i=1}^{n} d_i m_i$$

Točke s iste strane imaju pozitivni moment, sa suprotne negativan moment. Žica je linijsko (linearno) tijelo koje ima jednu dimenziju -duljinu, koja je puno izraženija od ostalih. Masa žice linijske gustoće ρ koja ima oblik ravninske krivulje $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Statički moment žice oko osi y pri čemu je $M_y = \int xdm = \int x\rho ds$ tj.

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\rho\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Statički moment žice oko osi x:

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\rho\sqrt{1+y'^2}dx$$

Na krivulju možemo gledati kao na točku kojoj je sva masa koncentrirana u težistu, pa je težiste ravninske krivulje $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, luka duljine

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}dx$$

jednak:

$$T = (x_T, y_T)$$

Za geometrijske krivulje gustoa je 1, a iznos mase odgovara duljini luka te krivulje.

Literatura

[1] Dr. Miljenko Crnac, Mr. Dragan Jukić, Dr. Rudolf Scitovski, MATEMATIKA `http://www.mathos.unios.hr/~mihaela/Matematika_1/Knjige/Matematika_CJS.pdf`

[2] T. Bradić,J. Pečarić, R. Roki, M. Strunje, Matematika za tehnološke fakultete, Izdavač: Element, Zagreb, Godina izdanja: 1998.

[3] P. Javor, Matematička analiza 1, 2. izdanje, Zagreb 1999.

[4] M Pačar, M. Katalinić, Inegrali s primjenom, Osijek 2012.

[5] S. Kurepa, Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje), Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.