Numerička integracija

Buljan, Sanela

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sanela Buljan

Numerička integracija

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sanela Buljan

Numerička integracija

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2015.

Sadržaj

Sažetak

Tema ovog završnog rada je numerička integracija. U uvodnom dijelu rad će se bazirati na problemu površine i samom definiranju određenog integrala. Glavni dio ovog rada biti će posvećen metodama za numeričko integriranje. Detaljnije ćemo obraditi trapeznu formulu, Newton-Cotesovu formulu te Simpsonovo pravilo.

Ključne riječi

problem površine, Darbouxova suma, Riemannov integral, određeni integral, Newton-Leibnizova formula, metoda supstitucije, parcijalna integracija, numeričko integriranje, aproksimacija, pogreška aproksimacije, trapezno pravilo, Newton-Cotesova formula, Simpsonovo pravilo

Abstract

The theme of this final paper is a numerical integration. In the first part work will be based on problem areas and the definition of definite integrals. The main part of the paper will be dedicated on methods for numerical integration. More details will be processed to trapezodial formula, Newton-Cotes formula and Simpson's rule.

Key words

problem areas, Darboux sum, Riemann integral, definite integral, Newton-Leibniz formula, method of supstitution, partial integration, numerical integration, approximation, approximation error, trapezodial formula, Newton-Cotes formula, Simpson's rule

Uvod

Problem određivanja površine likova u ravnini bio je poznat u Egiptu prije više od 4 000 godina. Oni su poznavali neke jednostavnije formule koje su kasnije preuzeli Grci te se među njima današnjem sistemu traženja površine najviše približio Arhimed. On je skupom pravokutnika prekrivao trženu površinu ili u lik upisivao pravokutnike te zbrojem površina pravokutnika aproksimirao površinu lika. Upravno na toj ideji je Riemann zasnovao pojam odeđenog integrala.

Ovaj završni rad ima zadatak pojasniti pojam određenog integrala krenuvši od problema površine pa sve do metoda za rješavanje određenih integrala. Najvažnija za rješavanje određenog integrala je Newton-Cotesova formula. Prvi dio rada, koji pojašnjava pojam određenog integrala se najviše temelji na knjizi Matematika, za koju su zaslužni M.Crnjac, D.Jukić i R.Scitovski.

Glavni zadatak rada je obraditi metode za numeričko rješavanje određenih integrala, pri čemu će uvelike pomoći knjiga profesora Rudolfa Scitovskog, Numerička matematika. Numeričke metode se koriste kada primitivnu funkciju ne možemo dobiti pomoću standardnih metoda ili kada je podintegralna funkcija definirana u samo nekoliko točaka. U drugom poglavlju ćemo detaljnije pojasniti trapezno pravilo, Newton-Cotesovu formulu te Simpsonovo pravilo za numeričku integraciju. Dotaći ćemo se osnovnih i generaliziranih formula te odeđivanja pogrešaka aproksimacije. Također, spomenuti ćemo i algoritme ovih metoda te napraviti usporedbu koja metoda daje bolju aproksimaciju.

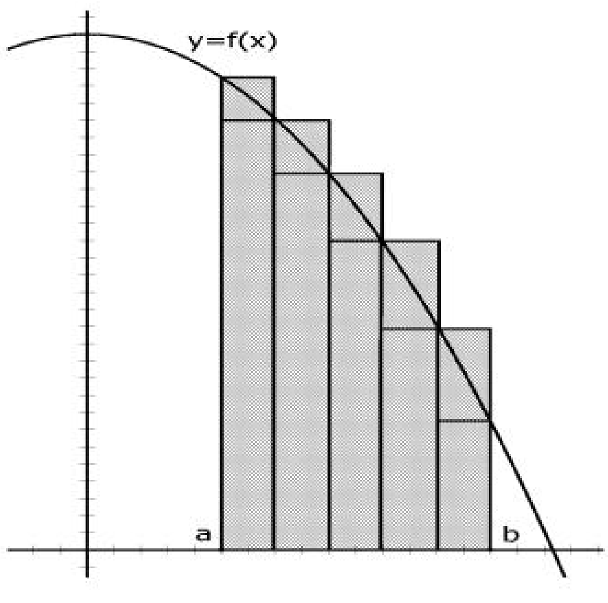
1 Određeni integrali

1.1 Problem površine

Neka je zadana pozitivna realna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je omeđena na segmentu $[a, b]$. Promotrimo sada područje omeđeno grafom funkcije f, pravcima $x = a$ i $x = b$ te x-osi. Takvo područje ćemo nazivati pseudotrapez ili krivolinijski trapez T. Sada nas zanima kako odrediti površinu tog pseudotrapeza. Definirajmo particiju $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ segmenta $[a, b]$ tako da vrijedi $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ uz $x_i = a + ih$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, ..., n$. Kako bismo mogli odrediti površinu pseudotrapeza T, pravcima $x = x_0, x = x_1, ..., x = x_{n-1}, x = x_n$ ćemo podijeliti pseudotrapez T na pseudotrapeze $T_1, T_2, ..., T_n$. Baza pseudotrapeza T_i je segment $[x_{i-1}, x_i]$. Funkcija f je prema pretpostavci omeđena na segmentu $[a, b]$ pa zbog toga znamo da je omeđena i na segmentu $[x_{i-1}, x_i], i = 1, ...n$ te na tom segmentu ima supremum M_i i infimum m_i, tj.

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Nadalje, opisujemo pravokutnike P_i čija je baza duljine $x_i - x_{i-1}$, a visina M_i. Također, opisujemo pravokutnike p_i duljine baze $x_i - x_{i-1}$ i visine m_i. (Slika 1)



Slika 1: Područje čiju površinu želimo odrediti

Primjetimo da je $p_i \subseteq T_i \subseteq P_i, i = 1, ..., n$. Iz monotonosti i aditivnosti1 površine uočavamo da površinu pseudotrapeza možemo odozdo aproksimirati s $A(P_u)$, a odozgo s $A(P_o)$. Skup P_0 je opisan, a skup P_u upisan pseudotrapezu T, gdje apsolutna pogreška aproksimacije nije veća od

$$A(P_o) - A(P_u) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Također, uočavamo da samo onda kada za neki realan $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i $P = x_0, x_1, ..., x_n$ tako da je

$$A(P_o) - A(P_u) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon$$

vrijedi promatrati površinu pseudotrapeza T. To nas dovodi do pojma određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ koji će biti definiran pomoću donje i gornje Darbouxove sume, tj.

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Ukupnu površinu pravokutnika upisanih pseudotrapezu T predstavlja donja Darbouxova suma, dok gornja Darbouxova suma predstavlja ukupnu površinu pravokutnika opisanih pseudotrapezu T. Budući da je $s(f, P)$ omeđen odozgo, a $S(f, P)$ odozdo, definiramo donji Riemannov integral

$$I_*(f, [a, b]) = sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$$

te gornji Riemannov integral s

$$I^*(f, [a, b]) = inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}\},$$

gdje je $\mathcal{P}$ skup svih particija od $[a, b]$. Zaključujemo da je

$$I_*(f, [a, b]) \leqslant I^*(f, [a, b])$$

ako je f omeđena na $[a, b]$.
Ako je

$$I_*(f, [a, b]) = I^*(f, [a, b]),$$

onda je funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu ili samo integrabilna na $[a, b]$. Određenim integralom nazivamo broj

$$I = (f, [a, b]) = I_*(f, [a, b]) = I^*(f, [a, b])$$

te ga označavamo s

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Tada je f podintegralna funkcija, a $[a, b]$ područje integracije. Sada se možemo vratiti na početni problem te površinu psudotrapeza T definirati kao.

$$A(T) = \int_a^b f(x)dx.$$

Svojstva određenih integrala [1]:

1.

$$\int_a^b cdx = c(b - a), \ c = const.$$

2.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

4.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

5.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

1.2 Metode za računanje određenog integrala

Sada kada smo definirali odeđeni integral prirodno je da nas zanima kako ćemo ga izračunati. Najprije ćemo definirati primitivnu funkciju funkcije f. Svaka funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x),$$

za svaki $x \in [a, b]$ naziva se primitivna funkcija funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sada dolazimo do ključne formule za računanje određenog integrala. To je Newton-Leibnizova formula.

Teorem 1. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad [2]$$

Primjer 1. Koristeći Newton- Leibnizovu formulu izračunajte sljedeći određeni integral.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{6}} = -\Big[\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big] = -\Big(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Također, kod rješavanja određenog integrala možemo koristiti metodu supstitucije. Glavna ideja te metode je da se supstituira integracijska varijabla. Koristeći ovu metodu određeni integral možemo riješiti na dva načina. Možemo prvo napraviti supstituciju i računati neodređeni integral te nakon što pronađemo primitivnu funkciju vratimo početnu varijablu. Drugi način je da integracijsku varijablu mijenjamo direktno u određenom integralu te pritom mijenjamo i granice integracije. Kod metode supstitucije važna je sljedeća formula koja vrijedi za neprekidnu funkciju f na intervalu $[a, b]$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, takvu da je φ' neprekidna i $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, i glasi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Primjer 2. Koristeći metodu supstitucije izračunajte sljedeći određeni integral.

$$\int_1^2 9x^2(x^3+2)^2 dx$$

Integral ćemo riješiti na drugi način, tj. supstituirat ćemo i podintegralnu funkciju i granice u isto vrijeme. Uvodimo supstituciju $t = x^3 + 2$ iz koje deriviranjem dobijemo $dt = 3x^2dx$. Uvrštavanjem granica u supstituciju dobijemo da za $x = 1$ slijedi $t = 3$, a za $x = 2$ slijedi $t = 10$. Sada imamo:

$$\int_1^2 9x^2(x^3+2)^2 dx = \int_3^{10} 3t^2 dt = t^3 \Big|_3^{10} = 10^3 - 3^3 = 973.$$

Ako su $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne i derivabilne funkcije na [a,b], slijedi da su $u'v$ i uv' integrabilne na tom intervalu i tada dolazimo do još jedne metode za računanje određenog integrala, tj.do formule

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Primjer 3. Koristeći metodu parcijalne integracije izračunajte sljedeći određeni integral.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$$

Stavimo da je $u = x$ iz čega slijedi $du = dx$ te stavimo $dv = \sin x dx$ iz čega slijedi da je $v = \cos x$. Sada pomoću formule za parcijalnu integraciju dobivamo:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx = x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = (\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}) - \sin \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$

Daljnjim računom dobijemo rješenje $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

2 Numerička integracija

U prethodnom poglavlju smo pokazali kako računamo određene integrale, ali što kada se dogodi da elementarnim metodama ne možemo doći do primitivne funkcije ili da je podintegralna funkcija poznata u samo konačno mnogo točaka. To su npr. Fresnelovi integrali:

$$I = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt, \qquad J = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt, \quad s > 0$$

gdje primitivna funkcija nije poznata, ili

$$f(x) = \sin x - \ln x + e^x,$$

gdje je funkcija f poznata samo na intervalu $[0.2, 1]$. U tom slučaju ćemo podintegralnu funkciju f interpolirat nekom jednostavnijom funkcijom ψ i tako aproksimativno izračunati vrijednot integrala I, tj njegovu približnu vrijednost ili aproksimaciju.

$$I^\star = \int_a^b \psi(x)dx$$

Pri tome, moramo paziti da za aproksimirajuću funkciju ψ i za zadanu točnost $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$\Delta I^\star = |I - I^\star| < \varepsilon$$

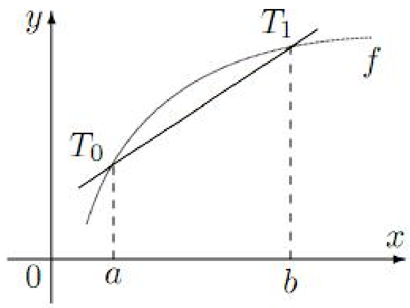
2.1 Trapezno pravilo

Jedna od formula koju ćemo koristiti za numeričku integraciju naziva se trapezno pravilo. Najprije ćemo funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, koristeći čvorove interpolacije $x_0 = a$ i $x_1 = b$, interpolirati interpolacijskim polinomom P_1. (Slika 2)

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad [3]$$

Graf te funkcije je pravac i on prolazi točkama $T_0 = (a, f(a))$ i $T_1 = (b, f(b))$. Sada je približna vrijednost ili aproksimacija integrala $I = \int_a^b f(x)dx$ jednaka

$$I^\star = \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b - a}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big]$$



Slika 2: Trapezno pravilo

Ako je funkcija f zadana na segmentu $[a,b]$ koji je velik i pogreška aproksimacije će biti velika. Zbog toga ćemo interval $[a,b]$ podijeliti na više podintervala te primjeniti trapezno pravilo na svakom od njih (Slika 3). Pretpostavimo sada da imamo $n+1$ ekvidistantno raspoređenih točaka $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ tako da $x_1 - x_0 = ... = x_n - x_{n-1} =: h$ i $x_0 = a, ..., x_n = b$ u kojima poznajemo funkciju $f \in C^2([a,b])$. Uočimo da točke $x_0, x_1, ..., x_n$ dijele $[a,b]$ na n podintervala jednake duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Nadalje, neka je $y_i = f(x_i)$, gdje je $i = 0, 1, ..., n$. Sada na svakom podintervalu primjenjujemo trapezno pravilo te za interval $[x_{i-1}, x_i]$ dobivamo:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) - \frac{h^3}{12} f''(c_i), \quad c_i \in < x_{i-1}, x_i > .$$

Iz toga slijedi

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i).$$

Budući da je funkcija f'' neprekidna na intervalu $< a, b >$, postoji $c \in < a, b >$ tako da je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = f''(c).$$

Uvrstimo li $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = f''(c)$ u $I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i)$ dobivamo generalizirano trapezno pravilo:

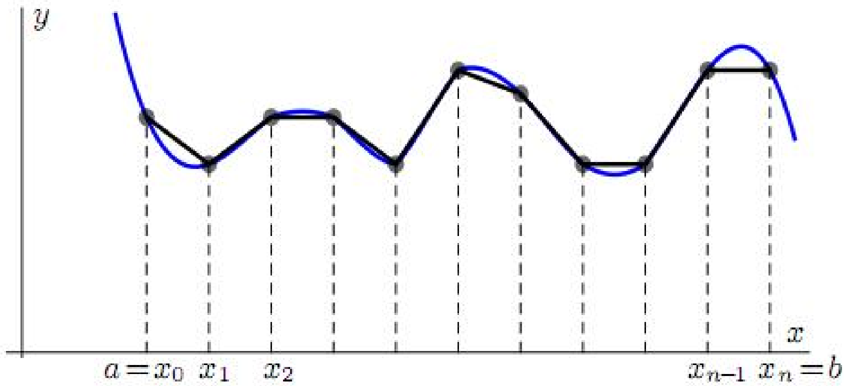
$$I = I^\star + E_n,$$

gdje je $I^\star = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n)$, a $E_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c)$. Apsolutnu pogrešku $\Delta I^\star$ aproksimacije $I^\star$ uz zadanu točnost $\varepsilon > 0$ možemo ocijeniti:

$$\Delta I^\star = |E_n| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M_2 < \varepsilon,$$

gdje je $M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Iz toga možemo odrediti i broj n, tj. broj podintervala na koji je potrebno podijeliti $[a, b]$ kako bismo mogli primjeniti generalizirano trapezno pravilo i postići točnost ε.

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{12}}.$$



Slika 3: Generalizirano trapezno pravilo

U programskom paketu Mathematica možemo implementirati algoritam koji izračunava približnu vrijednost integrala funkcije f primjenom generalizirane trapezne formule.

Algoritam 1.
Input: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;
Input: $a, b, M_2, \varepsilon > 0$; $\left(M_2 = \max_{x\in[a,b]|f''(x)|}\right)$ [4]
1: Izračunati: $n = \lfloor (b-a)\sqrt{\frac{M_2(b-a)}{12\varepsilon}} \rfloor + 1$;
2: Staviti: $h = (b-a)/n$;
3: Izračunati: $Int = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1} n - 1 f(a + i * h)\right)$;
Output: n, Int

Primjer 4. Izračunajte integral $\int_1^3 x^2 \ln x dx, \;\; \varepsilon = 0.1.$

U prvom dijelu primjera koristiti ćemo trapezno pravilo, tj. formulu

$$I^\star = \frac{b-a}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big].$$

Najprije ćemo izračunati $f(a)$ i $f(b)$:

$$f(a) = f(1) = 1^2 \ln 1 = 0, \quad f(b) = f(3) = 3^2 \ln 3 = 9.88751$$

Uvrstimo to u trapeznu formulu:

$$I^\star = \frac{b-a}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big] = (3-1)\frac{0 + 9.88751}{2} = 9.88751.$$

Sada ćemo odrediti potreban broj koraka kako bi se odredila aproksimacija od I uz točnost $\varepsilon = 0.1$ primjenom generalizirane trapezne formule.

$$I = I^\star + E_n,$$

gdje je $I^\star = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n)$, a $E_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c)$. Kako bi mogli dobiti potreban broj koraka, moramo izračunati drugu derivaciju funkcije$f$ i onda M_2:

$$f''(x) = 2\ln x + 3$$

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \max_{x\in[1,3]} |2\ln x + 3| = 5.19722$$

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon}\cdot\frac{b-a}{12}} = (3-1)\sqrt{\frac{5.19722}{0.1}\cdot\frac{3-1}{12}} = 5.88$$

Iz čega slijedi da je $n = 6$. Sada možemo izračunati:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_i = a + ih = 1 + i\cdot\frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, ..., 6$$

x_i	y_i
1	0
$\frac{4}{3}$	0.51143
$\frac{5}{3}$	1.41896
$\frac{6}{3}$	2.77258
$\frac{7}{3}$	4.613066
$\frac{8}{3}$	6.97478
$\frac{9}{3}$	9.88751

Sada, kada imamo sve podatke, uvrštavamo ih u generaliziranu trapeznu formulu:

$$I^\star = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n) = \frac{1}{6}\Big(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6\Big) = 7.07820.$$

Egzaktno rješavajući integral $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ dobijemo rješenje 6.9986 te vidimo da je ova aproksimacija puno bolja od one koju dobijemo rješavajući taj integral običnom trapeznom formulom.

2.2 Newton-Cotesova formula

Druga formula za numeričko rješavanje integrala je Newton-Cotesova ili kvadratna formula. Cilj ove formule je također što bolja aproksimacija funkcije f i time bolja aproksimacija integrala I. Interval $[a, b]$, isto kao i kod trapezne formule, dijelimo na n jednakih podintervala čvorovima $x_i = a + ih$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$. Funkciju f ćemo tada aproksimirati Lagrangeovim interpolacijskim polinomom n-tog reda

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)p_k(x), \quad p_k(x) = \prod_{i=0,\quad i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Aproksimaciju $I^\star$ integrala I možemo dobiti kao

$$I^\star = \int_a^b P_n(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p_k(x)dx\right)f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k),$$

gdje su $w_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b p_k(x)dx$ težine. Uvodimo supstituciju $x = a + (b-a)t$ kako bi spomenute težine bile jednostavnije

$$w_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b p_k(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{i=0,\quad i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}dx = \int_0^1 \prod_{i=0,\quad i\neq k} \frac{nt - i}{k - i}dt$$

Tako dolazimo do Newton-Cotesove ili kvadratne formule n-tog reda za aproksimaciju integrala I.

$$\int_a^b P_n(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k), \quad w_k = \int_0^1 \prod_{i=0,\quad i\neq k}^{n} \frac{nt - i}{k - i}dt$$

2.3 Simpsonovo pravilo

Treća metoda koju ćemo spomenuti naziva se Simpsonovo pravilo. To pravilo se dobije iz Newton-Cotesove formule za $n = 2$. U tom slučaju je $x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$ (Slika 4).
Izračunajmo prvo težine w_0, w_1, w_2 :

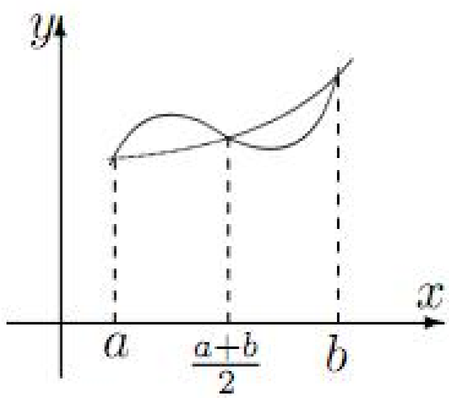
$$w_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)(2t-2)dt = \frac{1}{6}$$

$$w_1 = -\int_0^1 2t(2t-2)dt = \frac{2}{3}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 2t(2t-1)dt = \frac{1}{6}$$

Iz toga lako slijedi Simpsonovo pravilo:

$$I^\star = \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)$$



Slika 4: Simpsonovo pravilo

Pogreška aproksimacije je jednaka

$$E = I - I^\star = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(c), \quad c \in < a, b >$$

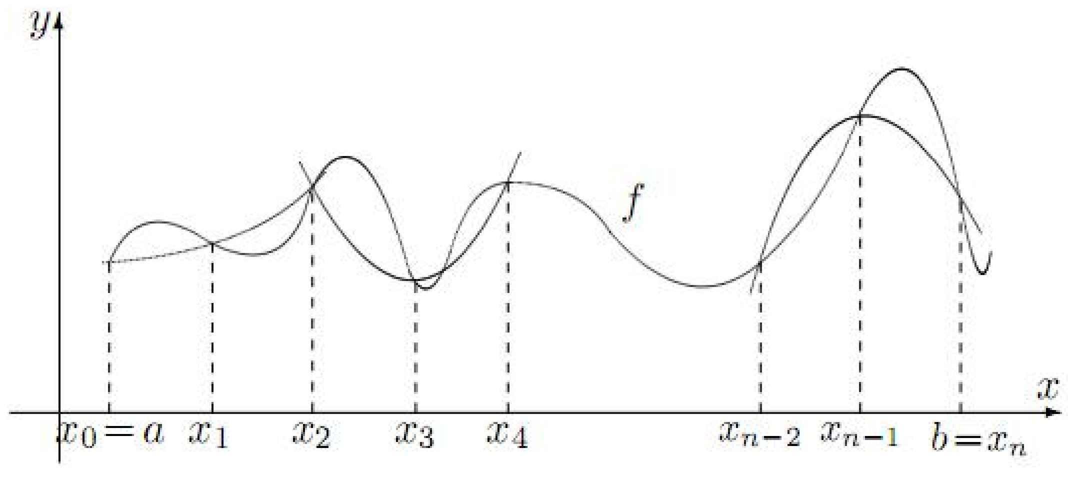
Pogreška aproksimacije E će biti veća što je interval $[a, b]$ veći. Kako bismo postigli što bolju aproksimaciju i što manju pogrešku, podijelit ćemo interval $[a, b]$ na parni broj $n = 2m$ podintervala duljine $h = \frac{b-a}{n}$ čvorovima $x_i = a + ih, \ i = 0, 1, .., n$. (Slika 5)
Označimo $y_i = f(x_i)$ te na svaka dva podintervala redom primjenimo Simpsonovo pravilo. Tada se lako pokaže da vrijedi generalizirano Simpsonovo pravilo.

$$I = I^\star + E_n,$$

$$I^\star = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2m-2})],$$

$$E_n = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$$

za neki $c \in < a, b >$.



Slika 5: Generalizirano Simpsonovo pravilo

Ako je $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ i ako je zadana točnost $\varepsilon > 0$ onda možemo ocijeniti apsolutnu pogrešku

$$\Delta I^\star = |E_n| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 < \varepsilon$$

aproksimacije $I^\star$. Iz toga dobijemo broj podintervala koji je potreban da bi se postigla zadana točnost ε

$$n > (b-a)^4\sqrt{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}.$$

Algoritam 2.

Input: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;

Input: $a, b, M_4, \varepsilon > 0$; $\left(M_4 = \max_{x\in[a,b]|f^{(4)}(x)|}\right)$

1: Izračunati: $n = \lfloor (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)}{180\varepsilon}} \rfloor + 1$; [4]

2: if n neparan then

3: $n = n + 1$;

4: end if

5: Staviti: $h = (b-a)/n$; $n_1 = \frac{n}{2}$

6: Izračunati:

$$Int = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n_1} f(a + (2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n_1-1} f(a + 2ih) \right)$$

Output: n, Int

Primjer 5. U ovom primjeru ćemo integral iz Primjera 4. izračunati pomoću generalizirane Simpsonove formule, također uz točnost $\varepsilon = 0.1$. Najprije moramo izračunati četvrtu derivaciju funkcije f:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

i

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[1,3]} |-\frac{2}{x^2}| = 2.$$

Sada možemo izračunati broj koraka potrebnih da bi se generaliziranom Simpsonovom formulom postigla točnost $\varepsilon = 0.1$

$$n > (b-a)^4\sqrt{\frac{M_4}{\varepsilon}\cdot\frac{b-a}{180}} = (3-1)^4\sqrt{\frac{2}{0.1}\cdot\frac{3-1}{180}} = 1.37317,$$

iz čega slijedi da je broj potrebnih koraka $n = 2$. Već ovdje vidimo kako je za zadanu točnost potrebno puno manje koraka nego kod trapezne formule. Izračunajmo sada

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_i = a + ih = 1 + i\cdot 1, \quad i = 0, 1, 2,$$

x_i	y_i
1	0
2	2.77258
3	9.88751

te na kraju uvrstimo sve u generaliziranu Simpsonovu formulu, tj.

$$I^\star = \frac{h}{3}[(y_0+y_{2m})+4(y_1+...+y_{2m-1})+2(y_2+...+y_{2m-2})] = \frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2) = 6.99261.$$

Osim manjeg broja koraka, možemo primjetiti da nam generalizirana Simpsonova formula daje i bolju aproksimaciju od generalizirane trapezne formule.

Literatura

[1] J. STEWART, *Calculus*, McMaster University and University of Toronto

[2] M. CRNJAC, D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Osijek, 1994.

[3] G. DAHLQUIST, A. BJORCK *Numerical methods in scientific computing, Volume 1*, 2007.

[4] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Osijek, 2015.