Osnovni koncepti teorije brojeva u osnovnoškolskoj matematici

Jurjak, Kristina

Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Kristina Jurjak

Osnovni koncepti teorije brojeva u osnovnoškolskoj matematici

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2020.

Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Kristina Jurjak

Osnovni koncepti teorije brojeva u osnovnoškolskoj matematici

Diplomski rad

Kolegiji: Metodika nastave matematike I, Metodika nastave matematike II, Uvod u teoriju brojeva

Mentor: dr. sc. Sanda Bujačić Babić

Rijeka, srpanj 2020.

Sadržaj

Sažetak

Teorija brojeva je grana matematike koja se bavi (prirodnim, cijelim) brojevima. Danas je razvoj teorije brojeva vrlo intenzivan i odmaknut od elementarnog pojma broja, tako da se ona, između ostalog, bavi vrlo naprednim aktualnim pojmovima iz matematike kao što su eliptičke krivulje, modularne forme, kriptografija, a nalazi svoju primjenu u širokom spektru djelatnosti. Teorija brojeva se u osnovnoj školi obrađuje na elementarnom nivou, u nastavnim jedinicama kao što su Parni i neparni brojevi, Djeljivost, Djelitelj, Višekratnik, Prosti i složeni brojevi, Rastavljanje broja na proste faktore, Najveći zajednički djelitelj, Najmanji zajednički višekratnik,... Obrada spomenutih nastavnih jedinica prilagođena je uzrastu učenika, a cilj joj je upoznati ih s pojmom broja, određenim skupovima brojeva i svojstvima brojeva. U ovom diplomskom radu predložene su aktivnosti za poticajno i aktivno učenje matematike učenika osnovnih škola. Teme su odabrane iz područja teorije brojeva, a aktivnosti su prilagođene suvremenom pristupu poučavanju. Osim toga, u radu su izdvojeni i riješeni zadatci iz područja teorije brojeva koji su se pojavljivali na različitim razinama natjecanja učenika osnovnih škola. Na samom kraju rada prokomentirani su odgovori nastavnika matematike u osnovnim školama sakupljeni kratkom anketom, a povezani s temama kojima se rad bavi. Osim analizom ankete i spomenutih aktivnosti koje se mogu primijeniti u nastavi te izvannastavnom učenju, rad se bavi i aktualnim temama vezanim uz reformu školstva.

Ključne riječi

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika, igrifikacija, suvremeni pristup učenju i poučavanju, teorija brojeva, parni i neparni brojevi, djeljivost, višekratnik, djelitelj, svojstva djeljivosti, prosti i složeni brojevi, rastav broja na proste faktore, Pitagorine trojke, natjecanja iz matematike

1 Uvod

„Kraljevski" način za razumijevanje matematike ne postoji. Onaj tko želi shvatiti matematiku mora raditi. Isto vrijedi i za kraljeve.

Euklid

Proteklih se nekoliko godina u hrvatski odgojno-obrazovni sustav uvode brojne promjene. Odmak od tradicionalnog načina učenja i poučavanja pokušava se postići stavljanjem naglaska na odgojno-obrazovne ishode učenja (za razliku od dosadašnje usmjerenosti sadržajima propisanima nastavnim planom i programom). U ovom diplomskom radu odabrano je nekoliko tema iz područja teorije brojeva koje su primjerene uzrastu učenika osnovne škole: Parni i neparni brojevi, Djeljivost, Višekratnik i djelitelj, Djeljivost s 2, 5, 10, 3 i 9, Svojstva djeljivosti, Prosti i složeni brojevi, Rastavljanje broja na proste faktore i Pitagorine trojke. Svaka od njih smještena je u kontekst Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika i opisana, ne samo kroz teoriju, već i kroz primjere iz prakse preuzete iz aktualnih udžbenika. Osim toga, za svaku od navedenih tema ponuđeni su primjeri suvremenog pristupa poučavanju korištenjem elemenata igrifikacije kroz uporabu različitih digitalnih alata, uvođenjem aktivnosti za rad u paru i grupama te implementacijom primjerenih tehnika aktivnog učenja i poučavanja. Pojmovi najveći zajednički djelitelj, najmanji zajednički višekratnik i relativno prosti brojevi[1] također se obrađuju u osnovnoj školi i spadaju u sadržaje povezane s teorijom brojeva. Iako su oni u ovom radu izostavljeni, za njih vrijede jednaki zaključci kao i za ostale spomenute pojmove o kojima su doneseni zaključci tijekom pisanja ovog rada: pri obradi novih nastavnih jedinica nastavnici trebaju biti inovativni, nastojati učenicima što bolje objasniti matematičke pojmove i pritom izbjegavati automatizirano rješavanje zadataka te ukazivati na primjenu matematike u svakodnevnom životu kroz igru i dinamiku u poučavanju. S obzirom da nastavne jedinice iz teorije brojeva koje se obrađuju u osnovnoj školi učenicima nisu uvijek jednostavne za razumijevanje i usvajanje, provedena je i anketa kojom se ispituje mišljenje osnovnoškolskih nastavnika matematike o metodama poučavanja i poboljšanom pristupu poučavanja tih nastavnih jedinica. Ovaj diplomski rad zamišljen je tako da se kroz niz zanimljivih i praktičnih primjera aktivnosti za uvođenje suvremenog pristupa u nastavu matematike daju prijedlozi nastavnicima koji u svoje poučavanje žele uvesti dozu inovativnosti istovremeno se prilagođavajući prilikama u svom razredu i pazeći na individualni pristup svakom učeniku.

[1]Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika očekivani odgojno - obrazovni ishodi povezani s pojmovima najmanji zajednički višekratnik, najveći zajednički djelitelj i relativno prosti brojevi prebačeni su s 5. na 6. razred.

2 Škola za život

Zbog izrazito velike dostupnosti informacija i ubrzanog razvoja tehnologije, posljednjih se godina naglašava važnost pojma cjeloživotnog učenja. Kako hrvatsko društvo ne bi zaostajalo za europskom razvojnom politikom i njezinim ciljevima[2], Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske (u daljnjem tekstu Ministarstvo) provodi niz mjera među kojima je i odluka o donošenju novih Kurikuluma za nastavne predmete koji postepeno zamjenjuju do tada važeće Nastavne planove i programe. Glavni ciljevi ove reforme i novih Kurikuluma su povećanje kompetencija učenika u rješavanju problema, povećanje zadovoljstva učenika te motivacija učitelja i nastavnika koji provode reformu. U nastavni proces nastoji se uvesti više informacijsko-komunikacijske tehnologije kako bi učenici u svakom trenutku bili svjesni da su im sve informacije dostupne. Zadaća nastavnika sada nije više samo prenošenje informacija, nego i ukazivanje na mjesto gdje se te informacije nalaze i kako do njih doći. Da bi provjerili primjenjivost novih metoda rada, oblika nastave i nastavnih sredstava koje donose novi kurikulumi, Ministarstvo započinje provođenje eksperimentalnog programa pod nazivom „Škola za život".

2.1 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj potpisana je 14. siječnja 2019. godine. Što se tiče matematike u osnovnoj školi, kao što je već spomenuto, novi Kurikulum uvodi se postepeno i to kako je planirano sljedećom tablicom.

Školska godina	Razredi koji ulaze u reformu
2019./2020.	1. i 5.
2020./2021.	2., 3., 6. i 7.
2021./2022.	4. i 8.

Tablica 1: Početak primjene Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika za pojedine razrede

[2]Europski sustavi obrazovanja prilagođavaju se zahtjevima društva okruženog cjeloživotnim učenjem, društva utemeljenog na znanju i potrebi za nadopunjavanjem stečenog redovnog obrazovanja aktualnim temama i inovacijama kako bi se potaknuo veći gospodarski rast i više boljih radnih mjesta te bi time Europa postala najkompetentnije i najdinamičnije gospodarstvo svijeta [9].

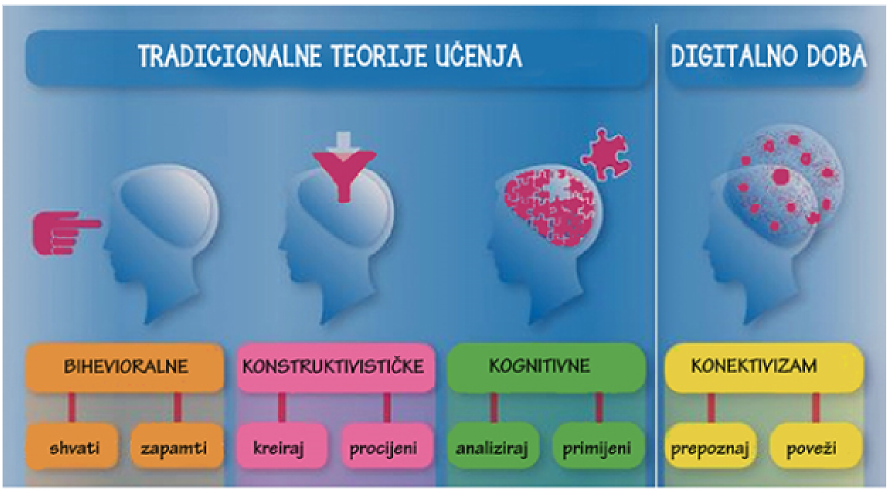
S obzirom da je matematika jedan od vrlo važnih čimbenika u razvoju i informatičkom opismenjavanju društva kojem se danas teži, jasno je da je njezino razumijevanje bitan element za razvoj životnih vještina učenika, poboljšanja kvalitete ne samo profesionalnog, nego i osobnog te društvenog života. Da bi učenici ostvarili vlastite potencijale, Kurikulum je zamišljen tako da učenike, kroz propisane ishode učenja i metode rada, potiče na kreativnost, preciznost, sustavnost, apstraktno mišljenje i kritičko promišljanje koje im pomaže pri uočavanju i rješavanju problema kojima su svakodnevno okruženi [8]. Kroz učenje i poučavanje nastavnog predmeta Matematika isprepliću se i povezuju matematički procesi [3] i domene. Domene su područja matematike u koja su grupirani srodni koncepti, a udio količine pojmova i koncepata iz pojedine domene koje učenici trebaju savladati tijekom određene godine učenja matematike ovisi o kognitivnom razvoju učenika i prilagođen je postepenoj i sustavnoj izgradnji cjelokupnog matematičkog obrazovanja. Spomenute domene su: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost.
Teorija brojeva je grana matematike koja se ponajprije bavi proučavanjem svojstava skupa prirodnih brojeva [2]. Teme iz područja teorije brojeva koje opisujemo u ovom radu spadaju u domenu Brojevi jer su koncepti iz domene Brojevi osnova svim ostalim matematičkim konceptima i na njima se gradi daljnje učenje matematike.

2.2 Nastava na daljinu

Jedan od najvećih nedostataka današnjeg obrazovanja je nedovoljna povezanost školskih sadržaja s iskustvima učenika, njihovom okolinom i trenutnim zbivanjima u svijetu koji ih okružuje. Zbog toga se teži konstruktivističkom pristupu nastavi koji zahtjeva da znanje bude rezultat učenikove interakcije sa svijetom koji ga okružuje, da učenici što više samostalno pronalaze, procjenjuju i obrađuju informacije te stvaraju teorije na temelju kojih donose odluke. To znači da bi učenici prilikom učenja što više trebali samostalno raditi na problemima povezanima s gradivom, koristiti i izrađivati mentalne mape, raditi na projektima, itd. S obzirom da je u Hrvatskoj (i u svijetu) tijekom pisanja ovog diplomskog rada proglašena pandemija COVID - 19, prema uputama Ministarstva, 16. ožujka 2020. počinje se provoditi nastava na daljinu u svim osnovnim i srednjim školama Republike Hrvatske. Razredna nastava se djelomično vraća u škole 11. svibnja 2020. - škole su dobile dopuštenje i upute o provođenju nastave s manjim grupama učenika. 25.

[3] Matematički procesi su prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje i primjena tehnologije.

svibnja 2020. razredna nastava u potpunosti se vraća normalnom održavanju nastave (uz određene propisane mjere opreza), dok je predmetna nastava kraj nastavne godine dočekala u nastavi na daljinu. Učenici i nastavnici za svoj su rad koristili virtualne razrede kreirane na različitim digitalnim platformama (*Yammer*, *Teams*, *Edmodo*,...) gdje su se izmjenjivale sve potrebne obavijesti, dok su se za razmjenu materijala, osim virtualnih učionica, koristile i web stranice škola, *Viber*, e-mail, *Zoom*,... Ravnatelji, stručne službe, razredna vijeća i pomagači bili su u stalnom kontaktu, dok su razrednici održavali redoviti kontakt tek s nekolicinom učenika i roditelja. Ovakav način rada ima puno prednosti, ali puno je i nedostataka. Naime, iako je individualni pristup koji donosi nastava na daljinu odgovarao učenicima koji u učionici nisu mogli doći do izražaja, jednako kao i samostalna organizacija vremena za učenje (nastava se nije slušala u realnom vremenu), brojne su i mane. Neki učenici nisu ozbiljno shvaćali obaveze koje podrazumijeva online nastava i svjesno odlučuju ne pohađati takav oblik nastave. Također, neki su učenici imali tehničkih poteškoća, dok neki nisu imali dovoljno informatičkog znanja. Nastavnici su kontinuirano provodili mjere podrške, pomoći i poticanja na rad, kako za učenike tako i za njihove roditelje. Bez obzira na to hoće li se u budućnosti ovaj period nastave pokazati uspješnim ili ne, ono što je sigurno, je da se je ubrzao proces uvođenja suvremenih metoda poučavanja i ranije spomenutih elemenata konstruktivističkog pristupa nastavi. Internet omogućava brzo stvaranje, reproduciranje, dijeljenje i razmjenu podataka i informacija između učenika i učitelja te je otvorio prostor novoj teoriji učenja, konektivizmu.



Slika 1: Pregled teorija učenja[11]

Konektivizam je moderna teorija koja zagovara korištenje informacijsko - komunikacijske tehnologije u nastavi, a u korištenju društvenih mreža vidi vrlo velik potencijal i prostor za napredak i učenje. Većina aktivnosti i primjera suvremenog načina poučavanja obrađena u ovom radu koristi elemente informacijsko-komunikacijske tehnologije te je prilagođena korištenju za nastavu na daljinu.

2.3 Igrifikacija

Još jedan pojam koji je bitno spomenuti i razumjeti prije nego započnemo priču o teoriji brojeva, a koji je usko povezan s novim metodama učenja i poučavanja te informacijsko-komunikacijskom tehnologijom, je igrifikacija. Ona je dodatak klasičnom korištenju tehnologije za potrebe nastave, a potiče interes učenika i njihovu motivaciju. Igrifikaciju možemo objasniti kao postupak korištenja elemenata igre (pravila, razine, bodovi, značke, nagrade, avatari, ljestvice poretka) u aktivnostima koje nisu igra. Ciljevi igrifikacije u obrazovanju su unapređenje učenja i rješavanje problema, odnosno poticanje promjene stava učenika prema odgojno-obrazovnim ciljevima (iz nezanimljivog i obaveznog u zabavno, dinamično i korisno). Elementi igrifikacije u ovom radu koriste se kako bi učenicima u nastavi približili osnovne koncepte teorije brojeva i sastavni su dio ovog diplomskog rada.

Slika 2: Elementi igrifikacije

3 Teorija brojeva u redovnoj nastavi matematike

Matematika je kraljica znanosti, a teorija brojeva je kraljica matematike.

Karl Friedrich Gauss [4]

Kraljica matematike, kako ju je nazvao Gauss, ni 165 godina nakon njegove smrti nije u nastavi matematike zauzela mjesto koje zaslužuje. Bez obzira na to što se već dugi niz godina reformama školstva pokušava promijeniti opće mišljenje o matematici, asocijacija na pojam matematike većini ljudi (pa i učenicima) je i dalje računanje[5]. Pod pojmom računanja podrazumijevaju se osnovne računske operacije u skupu racionalnih brojeva. Učenici su skloni govoriti da im to što rade na nastavi matematike „neće nikad u životu trebati". Naravno, misleći na sve ostale pojmove i koncepte koji nisu računanje. No, nisu ni svjesni koliko bi se njihove sposobnosti računanja poboljšale i unaprijedile, kada bi samo nešto malo više znali o svojstvima brojeva s kojima računaju. Jedan od mogućih uzroka nezainteresiranosti učenika i indiferentnosti prema matematici je dojam da je matematika konstantna i nepromijenjiva, da se ne razvija. Stoga je odgovornost učitelja matematike da postepeno mijenjaju taj stav, a proces započinje u njihovim učionicama. Spoznaja da se neke matematičke slutnje bezuspješno pokušavaju dokazati već godinama bila bi pokazatelj da je matematika itekako živa znanost, da se razvija i napreduje. Istina je da su se sve tvrdnje povezane s geometrijom u moderno doba uspjele dokazati, no to nije slučaj s tvrdnjama iz područja teorije brojeva. U matematici ima još mnogo neriješenih problema, ali ljepota i privlačnost teorije brojeva je u tome što su ti problemi lako razumljivi, čak i mlađim učenicima.

3.1 Parni i neparni brojevi

S pojmovima parnosti i neparnosti brojeva učenici osnovnih škola susreću se vrlo rano, već u 2. razredu. Vjerojatno bi se začudili, no prema Nastavnom planu i programu (koji se školske godine 2019./2020. još uvijek smatra valjanim dokumentom za sve razrede osnovne škole osim 1. i 5. razreda) ovi

[4]Karl Friedrich Gauss (1777.-1855.) je njemački matematičar i astronom (konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta, osnovni teorem algebre, Gaussova krivulja, Gaussova ravnina, Gaussov zakon za magnetsko polje, Gaussov zakon za električno polje, ...)

[5]U zemljama anglosaksonskog govornog područja, školski predmet koji uključuje proučavanje temeljnih koncepata iz teorije brojeva zove se *Calculus* što u prijevodu znači *račun.*

se pojmovi prvi puta spominju na nastavi Prirode i društva. Od učenika se, prije nego su na matematici čuli za pojmove parnosti i neparnosti prirodnih brojeva, očekuje da zapamte kako se s desne strane ulice nalaze kuće s parnim kućnim brojevima, a s lijeve strane ulice kuće s neparnim kućnim brojevima. Učenici do tada znaju množiti i dijeliti prirodnim brojevima do 10, a tablicu množenja i dijeljenja pamte pomoću „matematičke pjesmice”, tj. nabrajanja višekratnika prirodnih brojeva do 10. Dakle, u 2. razredu osnovne škole učenici kažu da su *parni brojevi višekratnici broja 2, tj. brojevi 2, 4, 6, 8, 10, 12,...* Zanimljiva je činjenica iz prakse da čak jedna trećina učenika na kraju 4. razreda osnovne škole ima velikih problema oko određivanja parnosti (ili neparnosti) troznamenkastog broja. Problem vrlo vjerojatno leži u tome što se od samog početka predstavljanja ovog gradiva nastoji da učenici nauče nešto napamet, a to nikako ne može rezultirati razumijevanjem niti dugotrajnim pamćenjem. U sljedećem odjeljku promotrit ćemo način uvođenja parnih i neparnih brojeva te zadatke koje nude aktualni udžbenici.

3.1.1 Parni i neparni brojevi u višim razredima OŠ

Način na koji se u 5. razredu uvode (već ranije poznati) pojmovi parnosti i neparnosti (prirodnih) brojeva i potiče razmišljanje o tome kako se parni brojevi razlikuju od neparnih je vrlo jednostavan i podrazumijeva da učenici intuitivno mogu razlikovati ta dva skupa brojeva. U nastavku slijedi tipičan primjer iz prakse kojim se učenici uvode u problematiku ove nastavne jedinice.

Primjer 1 *Učiteljica iz matematike je učenicima zadala zadatak koji je potrebno odraditi u paru. 5.d razred broji 17 učenika. Ima li svaki učenik 5.d razreda svoj par?*

Učenici, nakon ovog primjera za motivaciju, prebrojavaju parove učenika i dolaze do zaključka da u 5.d razredu ima 8 parova, da jedan učenik nema para te da je broj 17 neparan broj. Na taj način razvija se metoda utvrđivanja parnosti prirodnih brojeva koja je vrlo slična primjeni definicije parnih (neparnih) brojeva:

Definicija 1 ***Parni prirodni brojevi*** *su brojevi koje možemo podijeliti brojem 2 bez ostatka.[5]*

Definicija 2 ***Neparni prirodni brojevi*** *su brojevi koje ne možemo podijeliti brojem 2 bez ostatka. [5]*

No, bez obzira na to, ne nude svi autori udžbenika učenicima prethodnu definiciju, već neki od njih preporučuju razvrstavanje znamenke jedinice u dva skupa: *parnim je brojevima znamenka jedinica* $0, 2, 4, 6$ *ili* 8 , dok je *neparnim brojevima znamenka jedinica* $1, 3, 5, 7$ *ili* 9 [3] [6]. Ranije spomenute definicije parnosti (neparnosti) dolaze do izražaja tek kasnije, kada se počinje s obradom cjeline Djeljivost. Promotrimo nekoliko zadataka iz aktualnih udžbenika matematike. Vrlo je bitno napomenuti kako se koncept parnih i neparnih brojeva u 5. razredu osnovne škole spominje u kontekstu proučavanja skupa Prirodnih brojeva i njegovih svojstava, stoga je za ostvarivanje ishoda povezanih s parnim i neparnim brojevima koje bi učenici trebali usvojiti predviđeno vrlo malo vremena. Konkretno, govorimo o jednom školskom satu za obradu skupa prirodnih brojeva (čitanje, zapisivanje, matematički zapis skupa prirodnih brojeva s nulom, svojstva, podjela na parne i neparne brojeve).

Sljedeće zadatke autori aktualnih udžbenika predložili su za vrednovanje usvojenosti ishoda povezanih s parnim i neparnim brojevima. Za prvi zadatak razina usvojenosti je zadovoljavajuća, što u Bloomovoj taksonomiji[6] odgovara razini činjeničnog znanja, tj. nižoj kognitivnoj domeni. Učenici prepoznaju informaciju (znanje o znamenki jedinici i njezinom utjecaju na parnost i neparnost) te odabiru tražene brojeve.

Zadatak 1 *Prepiši brojeve 6161, 142, 525252, 2930, 60007 i 889, a zatim zaokruži neparne. [6]*

Za drugi zadatak razina usvojenosti je dobra, što odgovara razini razumijevanja, odnosno ovladavanja (konceptualno znanje). To je i dalje niža kognitivna domena, a ovom vrstom zadataka provjerava se jesu li učenici sposobni grupirati, svrstati, klasificirati, razlikovati ili smjestiti određeni pojam u odgovarajući skup.

Zadatak 2 *Brojeve 9, 10, 15, 22, 48, 5454, 171717, 1, 903, 2003 razvrstaj na parne i neparne te ih zapiši kao elemente skupa P (parni brojevi) i elemente skupa N (neparni brojevi). [3]*

Treći izabrani zadatak provjerava vrlo dobru razinu usvojenosti znanja, što odgovara višoj razini razumijevanja, odnosno proceduralnom znanju. Učenici bi za rješavanje zadatka trebali odabrati te u novoj, konkretnoj situaciji upotrijebiti odgovarajuće ranije naučene koncepte (ovdje se osim neparnosti, kao i u Zadatku 2, provjerava i usvojenost znanja o pojmu skup).

[6]Bloomova taksonomija je sustav klasifikacije odgojno - obrazovnih ishoda, sastoji se od četiri kategorije znanja (činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno znanje) te šest razina kognitivnih procesa (zapamti, objasni, primijeni, analiziraj, vrednuj, stvaraj).

Zadatak 3 *Zapišite zadani skup nabrajanjem njegovih elemenata:*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je neparan broj, } n > 23\}.$$

Koliko zadani skup ima elemenata? [5]

Četvrtim zadatkom provjerava se izvrsna razina usvojenosti znanja, tj. metakognitivno znanje. Najprije bi učenici trebali skicirati zadatak, identificirati uzorak ponavljanja, ispitati svoju pretpostavku na nekoliko primjera te nakon toga donijeti zaključak i riješiti zadatak.

Zadatak 4 *Promotri jednadžbu:* $7158 + x = 41784$. *Ne izračunavajući* x *odgovori je li* x *paran ili neparan broj? Objasni. [4]*

Pitanje je mogu li učenici analizirati problem do razine da zaključe kako je zbroj parnog i neparnog broja uvijek neparan broj, a da je zbroj dva parna broja uvijek paran broj? Ovaj zadatak pravi je primjer korištenja teorije brojeva u nastavi matematike i za njegovo rješavanje dovoljno je znati nekoliko tvrdnji koje vrijede za parne i neparne brojeve. Na koji način uvesti ove tvrdnje u nastavu matematike i koristiti ih? U tradicionalnom pristupu poučavanju, u kojem je naglasak na gradivo koje učitelj treba izložiti, dovoljno bi bilo učenicima zapisati željene činjenice (bez objašnjenja i dokaza) te ih početi koristiti u rješavanju zadataka. U sljedećem odjeljku pokazat ćemo teorijsku podlogu, a nakon toga dati prijedlog kako uvesti dane tvrdnje u nastavu matematike koristeći suvremeniji pristup.

3.1.2 Teorijska podloga

Tijekom nastave učenicima se zadaju tipični zadatci na temu parnosti i neparnosti, tj. zadatci za čije se rješavanje koriste činjenice (tvrdnje) koje vrijede za parne, odnosno neparne brojeve. Takvu vrstu zadataka češće čuju i rješavaju djeca koja pohađaju dodatnu nastavu matematike. Ove tvrdnje bile su poznate još pitagorejcima[7], a njihove inačice zapisane su 300. g. pr. Kr. u Euklidovim elementima[8] (IX. knjiga u kojoj se nalaze rezultati pitagorejske aritmetike). Da ne bi došlo do pukog nabrajanja, prepisivanja i učenja matematike napamet, sljedeće tvrdnje, iako su jednostavne, lako razumljive i

[7]Pitagorejci su sljedbenici učenja grčkog filozofa Pitagore.

[8]Euklidovi Elementi su djelo grčkog matematičara Euklida (od 330. do 260. pr. Kr.), od kulturnog su i povjesnog značaja za cjelokupno ljudsko znanje te su vrlo važni za matematiku jer se u njima iznose rezultati pitagorejske aritmetike, geometrijske algebre, dokaz o postojanju pet pravilnih poliedara, ...

primjerene učenicima, ne pokazuju se (i ne dokazuju) na nastavi matematike u osnovnoj školi, no vrlo se često spominju i koriste. Učenici u 5. razredu još uvijek ne poznaju cijele brojeve. Teorem naveden u nastavku govori o cijelim brojevima, ali vrijedi i za prirodne jer je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Teorem 1 *Za cijele brojeve vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Zbroj parnog broja neparnih brojeva je paran broj.

b) Zbroj neparnog broja neparnih brojeva je neparan broj.

c) Zbroj parnih brojeva je paran broj.

d) Umnožak neparnih brojeva je neparan broj.

e) Umnožak cijelog broja i parnog broja je paran broj.

Uočimo da vrijede općenite tvrdnje:

- zbroj parno mnogo neparnih brojeva i proizvoljno mnogo parnih brojeva je paran broj
- zbroj neparno mnogo neparnih brojeva i proizvoljno mnogo parnih brojeva je neparan broj

Za dokazivanje ovih tvrdnji potrebno je prisjetiti se još jedne definicije parnog i neparnog broja:

Definicija 3 *Cijeli broj n je paran ako vrijedi n=2k, $k \in \mathbb{Z}$.[2]*

Definicija 4 *Cijeli broj n je neparan ako vrijedi n=2k+1, $k \in \mathbb{Z}$.[2]*

Za potrebe ovog rada, raspisat ćemo dokaze za tvrdnje *c)* i *e)*.

Dokaz:

b) Treba dokazati da je zbroj parnih brojeva paran broj. Pretpostavimo da su $A, B, C, D, \ldots$ parni brojevi. Prema definiciji 3 možemo pisati da je $A = 2a$, $B = 2b$, $C = 2c$, $D = 2d$, $\ldots$ za neke cijele brojeve $a, b, c, d, \ldots$. Zbrojimo li zadane parne brojeve, dobivamo:

$$A + B + C + D + \cdots = 2a + 2b + 2c + 2d + \ldots$$

Koristeći svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju koje vrijedi za cijele brojeve, dobivamo

$$A + B + C + D + \cdots = 2(a + b + c + d + \dots)$$

čime je tvrdnja dokazana.[9]

f) Treba dokazati da je umnožak bilo kojeg cijelog broja s parnim brojem paran broj. Ovu tvrdnju možemo podijeliti na dva slučaja. U prvom slučaju prvi faktor je paran cijeli broj, a u drugom slučaju je prvi faktor neparan cijeli broj. U oba slučaja je drugi faktor paran. Ovim slučajevima pokrivene su sve mogućnosti.

1. Neka su zadani cijeli brojevi C i D. Oba broja su parna pa ih prema definiciji 3 možemo zapisati kao $C = 2c$ i $D = 2d$ za neke $c, d \in \mathbb{Z}$. Umnožak ova dva broja je:

$$\begin{aligned} C \cdot D &= 2c \cdot 2d \\ C \cdot D &= 2(2cd) \end{aligned}$$

Koristeći svojstva komutativnosti i asocijativnosti koja vrijede za množenje cijelih brojeva, umnožak dva parna broja zapisali smo u obliku dvostrukog cijelog broja $2cd$, što je po definiciji 3 paran broj.

2. Neka su zadani cijeli brojevi K i L. K je neparan, a L je paran pa ih prema definicijama 4 i 3 možemo zapisati kao $K = 2k + 1$ i $L = 2l$ respektivno za neke $k, l \in \mathbb{Z}$. Umnožak ova dva broja je:

$$\begin{aligned} K \cdot L &= (2k + 1) \cdot 2l \\ K \cdot L &= 4kl + 2l \\ K \cdot L &= 2(2kl + l). \end{aligned}$$

Koristeći svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju, umnožak jednog neparnog i jednog parnog cijelog broja zapisali smo u obliku dvostrukog cijelog broja $2kl + l$, što je po definiciji paran broj.

$\square$

[9] $a + b + c + d + \dots$ je cijeli broj zbog svojstva zatvorenosti zbrajanja na skupu cijelih brojeva.

Učenici u osnovnoj školi ne znaju što znači dokazivanje tvrdnje i na koji način se to radi. Njihov uzrast vrlo će se često zadovoljiti samo primjerima koji potkrepljuju danu tvrdnju te će oni rijetko preispitivati definicije ili tvrdnje iz udžbenika. No, jako je važno već tada naglašavati učenicima da se svaka matematička tvrdnja treba dokazati i da, ako nešto vrijedi za određeni broj promatranih primjera, ne znači nužno da vrijedi za baš sve primjere.

3.1.3 Suvremeni pristup poučavanju

U posljednje se vrijeme u nastavi matematike vrlo velik naglasak stavlja na igrifikaciju. Opće je poznato da učenici lakše uče ako im je gradivo predstavljeno pomoću igre, lakše pamte nove pojmove, usvajaju nova znanja, motiviraniji su, aktivniji i samim time zainteresiraniji i usredotočeniji na nastavu. Zbog toga učitelji ulažu velike napore u pripremanje različitih aktivnosti i igara koje bi mogli predstaviti učenicima i na taj ih način animirati. Jedna od igara koja je primjerena učenicima razredne nastave, kao i učenicima 5. razreda (a jednako je primjenjiva za korištenje na satu obrade novog gradiva kao i na satu vježbe i usustavljivanja znanja) je inačica igre Dan-noć.

Primjer 2 *Učiteljica nabraja prirodne brojeve. Ukoliko kaže broj koji je neparan, učenici moraju čučnuti, ako pak kaže broj koji je paran, učenici moraju ustati.*

U tim godinama učenici vole svaki oblik pozitivnog natjecanja pa se ovoj igri može dodati pravilo koje uključuje ispadanje iz igre, tj. igranje do konačnog pobjednika koji onda može biti nagrađen (npr. vođenjem igre ili formativnom ocjenom).

Igra u razredu na temu parnosti i neparnosti prirodnih brojeva

Vratimo se sada na pitanje uvođenja tvrdnji iz teorije brojeva u nastavu matematike bez njihovog iskazivanja i dokazivanja. Postoji li način da učenici sami dođu do tih tvrdnji? Sljedeći primjer opisuje aktivnost podijeljenu na dva dijela. Prvi dio je predviđen za održavanje u razredu, nakon obrade i rasprave o parnim i neparnim brojevima, a drugi dio je predviđen za domaću zadaću. Učenike bih podijelila u parove. Problem timova ili manjih grupa je u tome što se vrlo često dogodi da dvoje ili troje učenika radi, a ostali koji možda nisu dovoljno dobro shvatili gradivo (ili jednostavno ne žele sudjelovati) se „sakriju" u grupi i ne može ih se detektirati na vrijeme. Na kraju, aktivnost za njih nema nikakve koristi. Zbog toga više volim aktivnosti u paru - učenici koji ne razumiju zadatak se odmah jave, a učenici koji su u paru s nekim tko ne razumije, potrude se da njihov prijatelj shvati zadatak. Na taj način potiče se i vršnjačka pomoć. Svaki učenik 5. razreda je u sklopu reforme školstva dobio na korištenje tablet „Škole za život”[10]. Jedan od ciljeva ove reforme je učenike čim više privikavati i osposobiti za korištenje informacijsko - komunikacijske tehnologije, stoga bi se učenicima zadatci prikazivali na tabletu. Na isti način bi učenici i odgovarali na pitanja. Cilj ove aktivnosti je čim prije odgovoriti na svih 8 postavljenih pitanja (proći 8. razinu), a par koji prvi dođe do rješenja će biti nagrađen formativnom ocjenom.

Zadatak 5 *1. Upiši dva parna prirodna broja čiji je zbroj 108.*

2. Upiši tri neparna prirodna broja čiji je zbroj 105.

3. Upiši četiri neparna prirodna broja čiji je zbroj 111.

4. Upiši pet parnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 102.

5. Upiši šest neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 116.

6. Upiši sedam neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 112.

7. Upiši osam parnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 115.

8. Upiši devet parnih brojeva čiji je zbroj 107.

Neke od ovih zadataka nije moguće riješiti pa je (osim upisivanja rješenja) učenicima ponuđena mogućnost odabira „ne postoje takvi brojevi”. Kako bi se izbjeglo korištenje tipke „ne postoje takvi brojevi” bez razmišljanja, u aktivnost se može implementirati i „skok unatrag” koji učenike u tom slučaju vraća na nižu razinu. Drugi dio aktivnosti, koji bi bio za domaću zadaću, je zadati učenicima da razmisle o matematičkim zakonitostima koje se javljaju u ovom zadatku. Kada su mogli pronaći tražene brojeve? U kojem slučaju traženi brojevi nisu postojali? Kako je na odabir brojeva utjecao zadani zbroj, kako broj pribrojnika, a kako parnost, odnosno neparnost pribrojnika? Postoji li neka veza i mogu li je oni pronaći i objasniti? Na taj bi način učenici, iako nisu nikad vidjeli ni čuli za tvrdnje Teorema 1, razmišljali o njima i primjenjivali ih, ali što je najvažnije i pokušali ih objasniti. Zadaće u kojima učenici pokažu kako prepoznaju relevantne elemente problema i naslućuju metode rješavanja, uspješno primjene odabranu metodu, provjere ispravnost svojih postupaka i generaliziraju rješenje, mogu se

[10]skolazazivot.hr/ucitelji/ - obavijest o isporuci tableta školama i osposobljavanju istih

vrednovati sumativnom ocjenom (vrednovanje naučenog), a element ocjenjivanja je rješavanje problema.

Pokazali smo da koncepti parnosti i neparnosti ovise o pitanju je li broj djeljiv brojem 2. U sljedećem poglavlju pokazujemo kako ovaj koncept možemo primijeniti u svrhu proučavanja brojeva koji su, osim s brojem 2, djeljivi i s nekim drugim brojevima.

3.2 Djeljivost

Ne dijele svi autori osnovnoškolskih udžbenika isto mišljenje oko toga kako započeti obrađivanje cjeline Djeljivost u 5. razredu. Jedan od načina je krenuti od samog pojma djeljivosti pa se započinje primjerom sljedećeg tipa:

Primjer 3 *Kako će 3 učenika pravedno podijeliti bombonjeru u kojoj se nalazi* 30 *čokoladica? Kako će* 7 *učenika pravedno podijeliti tu istu bombonjeru [6]?*

Nakon rasprave oko toga je li broj 30 djeljiv brojevima 3 i 7 i hoće li rezultat tog dijeljenja imati ostatak ili ne, učenicima se nudi definicija pojma djeljivosti.

Definicija 5 *Prirodni broj a je djeljiv prirodnim brojem b ako prilikom dijeljenja a:b nema ostatka [5].*

Sljedeći pojmovi koji se obrađuju u tim udžbenicima su pojmovi *djelitelja* i *višekratnika*. No, neki autori započinju cjelinu Djeljivost opisujući i definirajući upravo te pojmove. Pogledajmo kako se definiraju te nekoliko odabranih zadataka povezanih s pojmom djelitelja odnosno višekratnika.

3.2.1 Višekratnik i djelitelj

Definicija 6 *Višekratnik nekog prirodnog broja jest svaki umnožak tog broja prirodnim brojem [5].*

Definicija 7 *Djelitelji nekog broja oni su brojevi kojima je taj broj djeljiv [3].*

Neki autori definiciju višekratnika (kao i definiciju djelitelja) uopće ne nude, već te pojmove objašnjavaju isključivo kroz primjere.

Primjer 4 *Činjenicu da je broj 18 djeljiv brojem 3 iskazujemo na sljedeći način: broj 18 je višekratnik broja 3, a broj 3 je djelitelj broja 18 [6].*

Za razliku od do sada navedenih opisnih definicija, jedan od udžbenika nudi malo apstraktniju:

Definicija 8 *Broj b višekratnik je prirodnog broja a ako postoji takav prirodni broj n da vrijedi $b = n \cdot a$ [4].*

Osim definicija, u ovoj cjelini učenici trebaju usvojiti i svojstva djelitelja i višekratnika, tj. uče da je svaki broj sam sebi višekratnik i da svaki broj ima beskonačno mnogo višekratnika. S druge strane, trebaju usvojiti da je najmanji djelitelj svakog prirodnog broja broj 1, da svaki prirodni broj ima konačno mnogo djelitelja, a da je najveći djelitelj svakog prirodnog broja sam taj broj. Ove činjenice učenicima mogu djelovati zbunjujuće ukoliko pojmovi višekratnika i djelitelja nisu do kraja usvojeni. Takvi učenici vrlo često zamjenjuju ove pojmove, a zadatci povezani s tim gradivom su im komplicirani i teški. Pogledajmo dva odabrana zadataka. Oba provjeravaju višu razinu razumijevanja - prvi vrlo dobru, a drugi izvrsnu.

Zadatak 6 *Prodavačica Kvakić je ispred trgovine objesila cjenik za kekse. No, već je prvi kupac prodavačicu upozorio na pogrešku u cjeniku. Pronađi je i ti [3].*

Broj kutija keksa	1	2	3	4	5
Iznos u kunama	24	48	72	86	120

Tablica 2: Zadatak 6

Zadatak 7 *Dan je opis tajanstvenog broja: broj je manji od 90, višekratnik je broja 15, djeljiv je s 9. Koji je to broj [4]?*

Oba dana primjera svode se na to da učenici najprije analizom zadatka dođu do zaključka kako najprije moraju pronaći višekratnike traženih brojeva. Time je Zadatak 6 riješen, jer primjećuju da broj 86 nije višekratnik broja 24, odnosno prodavačica je pogrešno napisala cijenu za četiri kutije keksa. U Zadatku 7, nakon što učenici nabroje višekratnike broja 15 koji su manji od 90, još moraju pronaći onaj višekratnik koji je djeljiv brojem 9. Eliminacijom dolaze do zaključka da je broj koji traže broj 45.

Višekratnici i djelitelji u svakodnevnom životu

Pogledajmo kako učenicima možemo približiti pojmove višekratnika i djelitelja povezujući ih sa stvarima kojima su okruženi i koje svakodnevno koriste.

Zadatak 8 *Na koliko različitih načina možeš platiti račun od 500 kuna, ako je uvjet da moraš platiti novčanicama/kovanicama istih vrijednosti? Ispiši svaki mogući način! Jesi li pritom koristio sve apoene? Koje novčanice ili kovanice ne možeš koristiti? Zašto?*

Ovaj zadatak primjeren je za domaću zadaću nakon obrade nastavnih jedinica Djelitelj i Višekratnik. Učenicima je potrebno objasniti pojam apoen. Na taj način sat matematike povezujemo s međupredmetnom temom[11] Poduzetništvo jer učenici, osim ishoda propisanih Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika, razvijaju ekonomsku i financijsku pismenost. Također, treba ih podsjetiti da razmisle i o kovanicama od 5, 10, 20 i 50 lipa i potaknuti ih na preračunavanje jedinica za novac (kuna u lipe i obrnuto), čime će ponoviti nastavnu jedinicu obrađenu na samom početku 5. razreda.

Savršeni broj

Jedan od repozitorija digitalnih obrazovnih sadržaja [12] dostupnih učenicima predlaže, kao izbornu temu za proučavanje, da učenici samostalno istraže i izrade plakat na temu savršenih brojeva. Pojam savršenog broja nije obrađen u osnovnoškolskim udžbenicima matematike, no mogao bi se učenicima ponuditi kao pojam za proučavanje na dodatnoj nastavi matematike ili kao dodatni materijali za rad darovitim učenicima. U nastavku slijede definicija i karakterizacija savršenih brojeva, te kratki pregled povijesti proučavanja istih. Osim toga ponudit ćemo i aktivnost za učenike, na temu savršenih brojeva, u redovnoj, ali i dodatnoj nastavi matematike.

Definicija 9 *Prirodan broj N savršen je broj ako je jednak sumi svojih pravih djelitelja* [12].

Samo ime ovih brojeva potječe od Pitagorejaca koji su bili skloni brojevima pridavati mistične osobine. Za njih je svojstvo broja 6 (da je jednak zbroju svojih pravih djelitelja) bilo toliko značajno, da su ga prozvali *savršenim brojem.* No, osim matematičkih svojstava, savršeni brojevi imali su i religijski značaj. Tako je, zbog savršenosti broja 6, Bog stvarao svijet 6 dana. Drugi po redu savršeni broj je broj 28, a to je broj dana za koji Mjesec obiđe Zemlju. Problemom određivanja općenitog oblika savršenih brojeva bavio se Euklid u

[11]Međupredmetne teme su teme općeljudskih vrijednosti i kompetencija za život u 21. stoljeću i kao takve su svakodnevno prisutne u odgojno obrazovnom radu (Osobni i socijalni razvoj, Učiti kako učiti, Građanski odgoj i obrazovanje, Zdravlje, Poduzetništvo, Uporaba informacijske i komunikacijske tehnologije i Održivi razvoj) [9].

[12]Pravi djelitelji broja N su svi pozitivni djelitelji tog broja, osim N.

Elementima (Knjiga IX). Uočio je da prva četiri savršena broja može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1(1+2) = 2 \cdot 3, \\ 28 &= 2^2(1+2+2^2) = 4 \cdot 7, \\ 496 &= 2^4(1+2+2^2+2^3+2^4) = 16 \cdot 31, \\ 8128 &= 2^6(1+2+2^2+\ldots 2^6) = 64 \cdot 127. \end{aligned}$$

Preskakanje brojeva

$$\begin{aligned} 90 &= 2^3(1+2+2^2+2^3) = 8 \cdot 15, \\ 2016 &= 2^5(1+2+2^2+\ldots 2^5) = 32 \cdot 63, \end{aligned}$$

Euklid je objasnio činjenicom da su brojevi 15 i 63 (faktori u raspisu savršenog broja na faktore) složeni, za razliku od brojeva 3, 7, 31 i 127 koji su redom prosti. Nakon Euklida, mnogi su matematičari proučavali svojstva savršenih brojeva, a zbog toga što su poznavali tek prva četiri, nastale su neke hipoteze koje su se kasnije ispostavile netočnima. Na primjer, oko 100. godine prije Krista, vjerovalo se da su parnim savršenim brojevima znamenke jedinice naizmjence 6 i 8 te da postoji točno jedan jednoznamenkasti, jedan dvoznamenkasti, jedan troznamenkasti, itd. savršeni broj. Obje pretpostavke opovrgnuo je Cataldi[13] koji je otkrio peti, šesti i sedmi savršeni broj. Ispostavilo se da peti savršeni broj nije peteroznamenkasti (33550336), dok je i petom i šestom (8589869056) savršenom broju znamenka jedinica broj 6. U ovom trenutku poznato je 49 savršenih brojeva i svaki od njih je parni broj. Postupak ispitivanja opisanih svojstava danas obavljaju računala, a provjereni su brojevi do 10^{1500}. Do sada nije pronađen ni jedan neparan savršeni broj i iako se smatra da on ne postoji, tu pretpostavku nitko nije uspio dokazati. Slijedi primjer aktivnosti na temu savršenih brojeva, koji istovremeno provjerava usvojenost ishoda nastavne jedinice Djelitelj i potiče na otkrivanje i istraživanje novog pojma:

Zadatak 9 *Savršeni broj je prirodan broj jednak zbroju svojih djelitelja, uključujući jedinicu, ali ne i samoga sebe. Na primjer, broj 6 je savršeni broj. Njegovi djelitelji su 1, 2, 3 i 6. Ako zbrojimo njegove djelitelje (bez broja 6), dobijemo rezultat* $1+2+3=6$. *Pronađi još jedan savršeni broj koji je veći od 10 a manji od 30.*

Ovaj zadatak primjeren je za redovnu nastavu i može koristiti za vrednovanje naučenog nakon obrađene nastavne jedinice Djelitelj. Učenici koji

[13]Pietro Antonio Cataldi (1548. – 1626.) je talijanski matematičar i astronom, osim teorijom brojeva bavi se i analiziranjem vojnih problema.

pohađaju dodatnu nastavu mogli bi pokušati samostalno doći do karakterizacije savršenog broja. U za njih primjerenom obliku trebalo bi uočiti da *ako sa $\sigma(N)$ označimo sumu svih pozitivnih djelitelja od N (uključujući i N), N je savršen ako vrijedi $\sigma(N) = 2N$* . Nakon što na redovnom satu pronađu drugi savršeni broj (broj 28), učiteljica im na dodatnoj nastavi daje upute za rad:

Primjer 5 *Pronađi još jedno (savršeno) svojstvo savršenih brojeva! Najprije za svaki od dva savršena broja koja poznaješ zapiši zbroj svih njegovih djelitelja. Nakon toga dobiveni zbroj zapiši u obliku umnoška, tako da je jedan od faktora broj 2. Što primjećuješ? Koji je drugi faktor? Kako bi izgledao zbroj djelitelja savršenog broja N?*

Učenici bi raspisivanjem ovog primjera dobili:

$$\begin{aligned} 1+2+3+6 &= 12 = 2 \cdot 6 \\ 1+2+4+7+14+28 &= 56 = 2 \cdot 28. \end{aligned}$$

Trebali bi primjetiti da je drugi faktor zapisanog umnoška upravo savršeni broj čije su djelitelje zbrajali. Učiteljica, kao pomoć kod odgovora na zadnje pitanje, na ploču može zapisati:

$$\begin{aligned} \sigma(6) &= 2 \cdot 6 \\ \sigma(28) &= 2 \cdot 28. \end{aligned}$$

Učenici preslikavanjem primjera s ploče zapisuju da zbroj djelitelja savršenog broja N možemo zapisati kao $\sigma(N) = 2 \cdot N$.

3.2.2 Djeljivost s 2, 5, 10, 3 i 9

Kada govorimo o djeljivosti prirodnih brojeva brojevima 2, 5, 10, 3 i 9, govorimo o pravilima koje učenici moraju naučiti da bi ih mogli primjenjivati u zadatcima. U nastavku slijede pravila o djeljivosti preuzeta iz aktualnih udžbenika za 5. razred osnovne škole.

Teorem 2 *Prirodni broj djeljiv je s* 10 *ako mu je posljednja znamenka* 0. *[4]*

Teorem 3 *Prirodni broj djeljiv je s* 5 *ako mu je posljednja znamenka* 0 *ili* 5. *[4]*

Teorem 4 *Prirodni broj djeljiv je s* 2 *ako mu je posljednja znamenka* 0, 2, 4, 6 *ili* 8. *[4]*

Teorem 5 *Prirodni broj djeljiv je s* 3 *ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s* 3. *[4]*

Teorem 6 *Prirodni broj djeljiv je s* 9 *ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s* 9. *[4]*

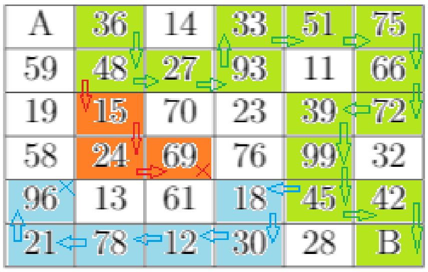
Zbog toga što učenici ova pravila ne dokazuju, nego ih uče napamet, postoji veliki rizik od nerazumijevanja. Da bi se izbjeglo nerazumijevanje i brzo zaboravljanje ovih pravila, u poučavanju ovog koncepta preporuča se korištenje raznih igara i inovativnih metoda. Jedan od takvih primjera koji sadrži elemente igrifikacije je i zadatak prikazan u nastavku. Učenici, osim što moraju prepoznati brojeve djeljive brojem 3, trebaju prijeći put od mjesta A do mjesta B po određenim pravilima. Ovim zadatkom učenici, osim provjere usvojenosti znanja i vještina, uvježbavaju svoju strpljivost i sposobnost praćenja uputa. Zadatak može poslužiti za kratko razredno natjecanje i vrednovanje naučenog.

Zadatak 10 *Zadana je ploča na kojoj su polja označena dvoznamenkastim brojevima. Označi polja kojima treba proći kako bismo od točke A došli do točke B. Kretati se možemo samo poljima na kojima su brojevi djeljivi s* 3. *Iz jednog polja prelazimo u drugo polje tako da idemo lijevo ili desno, gore ili dolje, ali ne dijagonalno.[6]*

A	36	14	33	51	75
59	48	27	93	11	66
19	15	70	23	39	72
58	24	69	76	99	32
96	13	61	18	45	42
21	78	12	30	28	B

Tablica 3: Zadatak 10

Učenici za rješavanje ovog zadatka sami biraju strategiju. Jedna od opcija je da najprije od ponuđenih brojeva izdvoje sve one koji su djeljivi brojem 3 (mogu ih obojiti ili zaokružiti), a nakon toga prema danim uputama traže put od točke A do točke B. Druga opcija je da krenu od točke A, traže moguće putove i eleminiraju ona polja na kojima su brojevi koji nisu djeljivi brojem 3. Slika 3 pokazuje drugu objašnjenu strategiju - pokušaja i pogreške. Zelena staza prikazuje konačno rješenje, dok narančasta i plava staza vode u „slijepu ulicu".

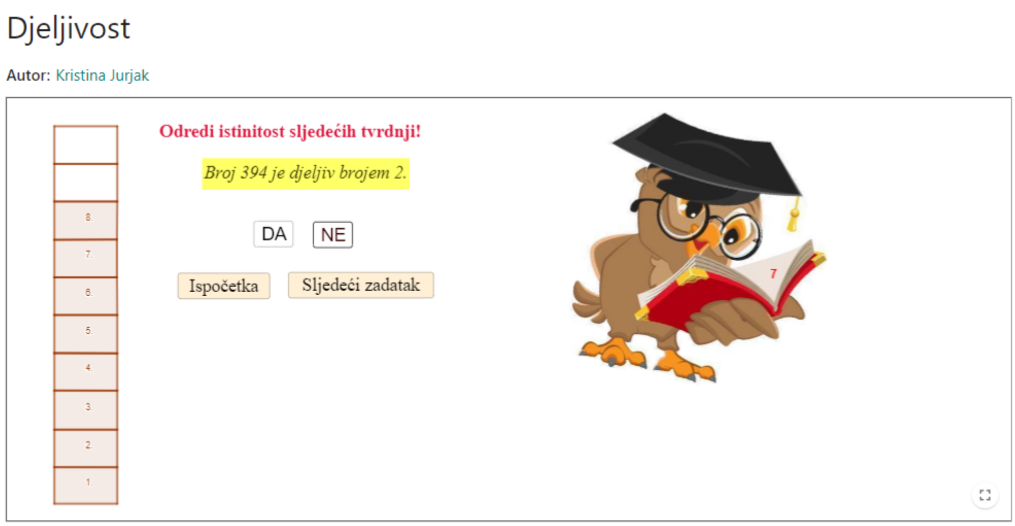


A	36	14	33	51	75
59	48	27	93	11	66
19	15	70	23	39	72
58	24	69	76	99	32
96	13	61	18	45	42
21	78	12	30	28	B

Slika 3: Rješenje Zadatka 10

Ono što je sada vrlo aktualno, a primjenjivo je u (online) nastavi matematike su kvizovi (provjere usvojenosti znanja i vještina) pripremljeni u različitim digitalnim alatima. Bilo da su sredstvo vrednovanja naučenog ili ih učitelji koriste kao izlazne kartice, samovrednovanje ili vršnjačko vrednovanje, bilo da se koriste kao domaće zadaće ili tijekom sata kao ponavljanje, vrlo su efikasni, a što je najvažnije, učenici ih vole. Sljedeći primjer je primjer kviza izrađenog u *GeoGebri*[14] za potrebe kolegija Primjena računala u nastavi matematike (2. godina preddiplomskog studija Matematike na Odjelu za matematiku Svučilišta u Rijeci).

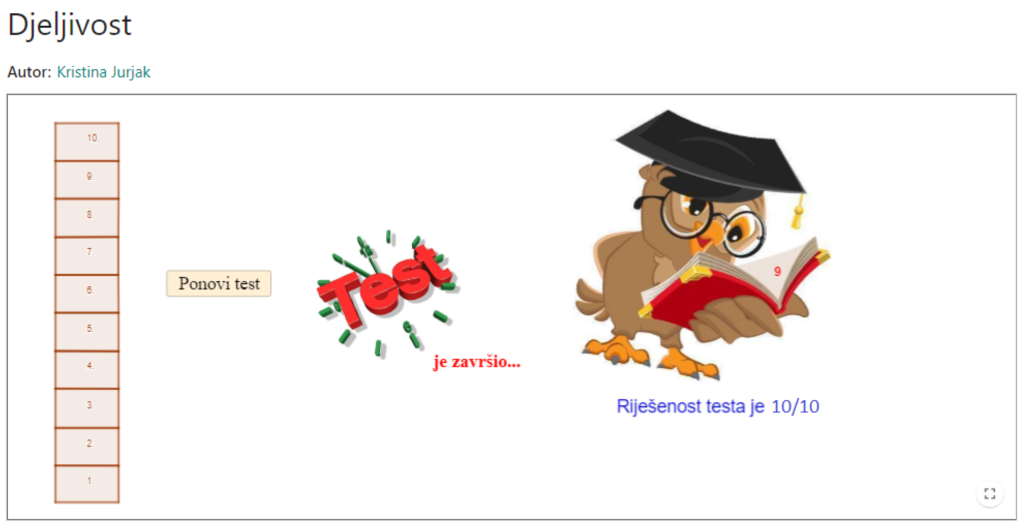
Kviz u GeoGebri



Slika 4: Elementi igrifikacije (razine, bodovi)

[14] geogebra.org

Cilj ovog kviza je da učenici (na satu, ali i kod kuće) uvježbavaju i usvajaju svojstva djeljivosti prirodnih brojeva. Kviz je osmišljen tako da se izmjenjuje 10 različitih brojeva - potrebno je odgovoriti na 10 različitih pitanja. Učenici u svakom pitanju određuju je li neki prirodan broj djeljiv brojevima 10, 5, 2, 3 i 9, tj. prisjećaju se pravila djeljivosti navedenih brojeva. *GeoGebra* odmah ispravlja kviz, odnosno ispisuje se je li zadatak točno riješen ili nije. Kviz završava nakon 10. pitanja i program ispisuje broj točno riješenih zadataka. Ako učionica nije opremljena tako da svaki učenik ima pristup svom računalu, kviz je moguće riješiti i zajednički (potrebno ga je prilagoditi, npr. povećati broj pitanja).



Slika 5: Elementi igrifikacije (cilj, nagrada)

Ovaj i slični kvizovi u *GeoGebri* (ili nekom drugom programu) odlični su za motivaciju na početku sata. Učenicima je zanimljivije korištenje računala kod ponavljanja, kviz je napravljen tako da se može ponavljati neograničeni broj puta, nije potrebno izmišljati nova pitanja jer ih računalo generira samo te se na taj način štedi vrijeme. Isto tako, ovakvi kvizovi mogu se prilagoditi i koristiti kao kratke provjere znanja ili diktati – provjere koje učitelji ne moraju ispravljati ručno. Još jedan primjer kviza izrađenog u *Google Formsu* priložen je na ovoj poveznici (bit.ly/djeljivost2). On je pripremljen za vrednovanje naučenog nakon obrađene nastavne cjeline Djeljivost.

3.2.3 Svojstva djeljivosti

Ovo poglavlje započet ćemo primjerom.

Primjer 6 *Teta Greta ima po jednu novčanicu od* 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 *i* 1000 *kn. Za plaćanje parkiranja potrebne su joj kovanice od* 5 *kn. Može li ona ukupnu svotu razmijeniti u kovanice od* 5 *kn?*

Ovaj primjer moguće je riješiti na dva načina. Prvi način je onaj kojeg će se većina učenika odmah sjetiti. Najprije zbrojimo vrijednosti svih novčanica koje ima teta Greta, a nakon toga dobiveni zbroj podijelimo brojem 5. Drugi način uključuje poznavanje pravila za djeljivost zbroja. Naime, vrijedi:

Teorem 7 *Ako su svi pribrojnici djeljivi nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem. [3]*

Potrebno je primjetiti da je u primjeru 6 svaki od pribrojnika djeljiv brojem 5 (znamenke jedinice svih pribrojnika su 0 ili 5) pa zbog toga vrijedi da je i njihov zbroj djeljiv brojem 5, tj. ukupna svota može se razmijeniti u kovanice od 5 kuna. Osim pravila o djeljivosti zbroja, u udžbenicima stoje i pravila o djeljivost razlike i umnoška.

Teorem 8 *Ako su i umanjenik i umanjitelj djeljivi nekim brojem, onda je i razlika djeljiva tim brojem. [3]*

Teorem 9 *Ako je barem jedan od faktora djeljiv nekim brojem, i umnožak je djeljiv tim brojem. [3]*

Mnogi učenici ova pravila nauče napamet i ne mogu ih s razumijevanjem primijeniti na zadatke. U nastavku slijedi primjer tehnike aktivnog učenja i poučavanja koja je primjenjiva za potrebe usustavljivanja znanja i razumijevanja pravila o djeljivosti zbroja, razlike i umnoška.

Tehnika aktivnog učenja i poučavanja - Posadimo naše stablo[15]

Tehnike aktivnog učenja i poučavanja karakteristične su za nastavu usmjerenu na učenika. Prednosti koje donosi ovakva vrsta nastave su bolja motivacija, djelotvornije učenje, bolje zadržavanje znanja i njegova uporaba, stjecanje vještina za cjeloživotno učenje,... Ako učitelj tijekom nastave koristi neku od metoda aktivnog učenja i poučavanja, naglasak je na aktivnosti

[15] Tehnika aktivnog učenja i poučavanja - Posadimo naše stablo osmišljena je za potrebe kolegija Didaktika 2 (2. godina diplomskog studija Matematike i informatike, smjer nastavnički na Odjelu za matematiku Svučilišta u Rijeci).

učenika te je subjekt u nastavnom procesu sam učenik. U razredu vlada suradnička atmosfera, rad je organiziran po parovima ili grupama, a učitelj je moderator nastavnog procesa.

Osmišljena tehnika aktivnog učenja i poučavanja [7] primjerena je za više razrede osnovne škole, ali i za srednju školu. Vrlo se lijepo može uklopiti za potrebe školskih projekata (obilježavanje Dana planeta Zemlje ili Zeleni dan). Može se koristiti u svrhu uvježbavanja i usustavljivanja znanja, može služiti samostalnom učenju, kao i radu u paru.

Slika 6: Tehnika aktivnog učenja i poučavanja - Posadimo naše stablo [7]

Ovdje ću opisati aktivnost za rad u paru. Učitelj najprije dijeli učenike u parove i svaki član para dobije list papira na kojem je nacrtana slika polovice stabla. U korijenu stabla (i na jednoj i na drugoj polovici papira) nalazi se isti zadatak:

Zadatak 11 *Je li umnožak* $4325 \cdot 5365$ *djeljiv brojem* 3*?*

Svaki par dobiva svoj zadatak. Neki od njih su umnošci, neki zbrojevi, a neki razlike. Svaki član para rješava zadatak na svoj način, po koracima, i zapisuje ga unutar oblačića koji će kasnije činiti jedan dio krošnje stabla. Koraci se upisuju od korijena prema vrhu stabla, gdje će biti zapisano konačno rješenje. Kada su završili s rješavanjem, parovi spajaju svoje polovice u jedno zajedničko stablo. Sljedeći zadatak za učenike je međusobno komentirati dobiveno stablo (vršnjačko vrednovanje), usporediti načine rješavanja, raspraviti jesu li koristili isti princip zaključivanja, jesu li koristili iste definicije i tvrdnje za zadane pojmove, uočiti čiji je način rješavanja brži (ako su koristili različite) i jesu li oba rješenja točna. Svi radovi se nakon toga stavljaju na pano, tj. razred sadi svoju razrednu šumu. Cilj ove aktivnosti je da učenici otkriju više načina za rješavanje određenog problema i da nauče poštovati tuđe mišljenje, dok učitelji otkrivaju matematičke osobnosti[16] svojih učenika i potiču međusobnu suradnju učenika unutar razrednog odjela.

3.3 Prosti i složeni brojevi

Ovo poglavlje započet ćemo s primjerom aktivnosti za zajednički rad cijelog razreda. Odrađivala bi se na satu obrade novog gradiva, a cilj je da učenici samostalno izrade plakat na kojem bi bilo prikazano Eratostenovo sito[17].

3.3.1 Aktivnost: Eratostenovo sito

Učitelj je tijekom ove aktivnosti moderator: postavlja pitanja, usmjerava i daje upute. Za provođenje aktivnosti potrebno je pripremiti bijeli papir (veličine primjerene za plakat) na kojem je već isprintana tablica prirodnih brojeva do 100. Osim toga, učenici dobivaju iste takve tablice veličine primjerene za umetanje u bilježnice. Prije ove aktivnosti učenici nisu čuli za pojmove složenih i prostih brojeva, a slijedeći upute koje daje učitelj trebali bi samostalno doći do njihovih definicija i svojstava.

Zadatak 12 *Slijedi upute i odgovori na sljedeća pitanja. Svoje odgovore zapiši u bilježnicu i na papir pripremljen za plakat.*

1. *Kako se zovu brojevi prikazani u tablici?*
2. *Zaokruži broj 2.*
3. *Prekriži sve višekratnike broja 2 koji su veći od 2.*

[16] Matematička osobnost je stil učenja matematike i pristupa matematičkoj problematici.

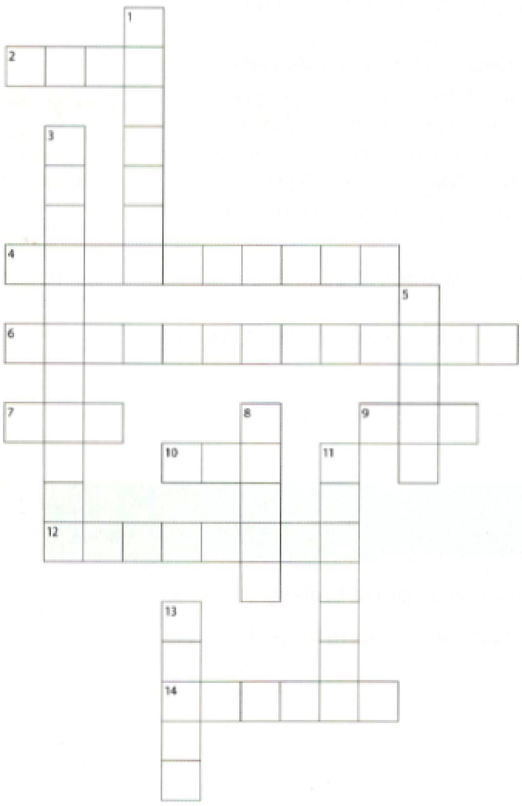
[17] Eratostenovo sito je algoritam za pronalaženje prostih brojeva koji je dobio naziv po starogrčkom matematičaru i geografu Eratostenu (276. - 194. g.p.n.e.). Eratosten je prvi izračunao opseg Zemlje (duljina Zemljina ekvatora je približno 40000 km). [5]

4. *Zaokruži prvi sljedeći neprekriženi broj (broj 3).*
5. *Prekriži sve višekratnike broja 3 koji su veći od 3.*
6. *Ponavljaj postupak dok ne zaokružiš i prekrižiš sve zapisane brojeve.*
7. *Kvadratiće u kojem se nalaze zaokruženi brojevi oboji crvenom bojom a kvadratiće u kojem se nalaze prekriženi brojevi oboji zelenom bojom.*
8. *Promotri zaokružene brojeve i njihove djelitelje. Kakvi su njihovi djelitelji? Koliko ih ima?*
9. *Zapiši: Prirodni broj koji ima točno dva djelitelja (samoga sebe i broj 1), nazivamo* ***prost broj*** *ili* ***prim broj****. [4]*
10. *Promotri prekrižene brojeve. Koliko oni imaju djelitelja?*
11. *Zapiši: Prirodni broj koji ima više od dva djelitelja nazivamo* ***složeni broj****. [4]*
12. *Je li broj 1 prosti ili složeni broj? Koliko on ima djelitelja?*
13. *Zapiši:* ***Broj 1*** *ima točno jednog djelitelja, samog sebe, pa nije* ***ni prost ni složen****. [4]*
14. *Ispiši parne proste brojeve. Koliko ih ima? Zašto?*
15. *Zapiši: Broj 2 je jedini paran prost broj. [4]*
16. *Koji je najmanji prost broj?*
17. *Postoje samo dva prosta broja čija je razlika 1. Imenuj ih. [3]*
18. *Između kojih dvaju prostih brojeva nema nijednog prirodnog broja? [3]*
19. *Postoji li prost broj veći od 5 čija je posljednja znamenka 5? Objasni. [3]*
20. *Je li umnožak dvaju prostih brojeva prost broj? Objasni! [5]*
21. *Čine li svi prosti i svi složeni brojevi cijeli skup* $\mathbb{N}$*? [5]*

Na kraju ove aktivnosti plakat bi se smjestio u razred i učenici bi za vrijeme nastave mogli vidjeti proste (obojeni crvenom bojom) i složene (obojeni zelenom bojom) brojeve te njihove definicije i svojstva. Na taj način u nastavi je ostvareno načelo zornosti, kao i načela motivacije i aktivnosti i samostalnosti.

Slika 7: Eratostenovo sito

Da bi i načelo postojanosti znanja bilo ostvareno, učenicima se može zadati da rješavaju križaljku [5] prikazanu u nastavku (pitanja su prikazana na sljedećoj stranici). Ukoliko je ne stignu riješiti na satu, dovršavaju zadatak za domaću zadaću.



Slika 8: Križaljka [5]

VODORAVNO

2. Djelitelj broja 80.

4. Koliko višekratnika ima zadani broj?

6. Prirodni brojevi koji imaju točno dva djelitelja.

7. Djelitelj prirodnog broja kojemu su posljednje dvije znamenke 00.

9. Djelitelj prirodnog broja kojemu je posljednja znamenka 5.

10. Jedini paran prosti broj.

12. Rezultat dijeljenja.

14. Kažemo da je zadani broj ____________ nekim brojem ako ga možemo podijeliti bez ostatka.

OKOMITO

1. Rezultat množenja.

3. Umnožak zadanog broja i bilo kojega prirodnog broja zadanom je broju ____________ .

5. Djelitelj prirodnog broja kojemu je posljednja znamenka 0.

8. Višekratnik broja 2 je __________ broj.

11. Brojevi koje množimo.

13. Prirodni broj koji ima samo jednog djelitelja.

Slika 9: Križaljka - zadatci [5]

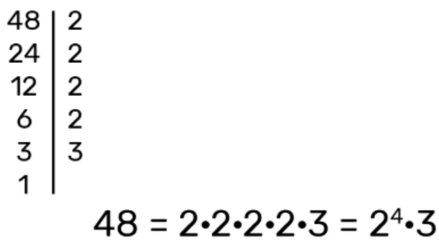
3.3.2 Rastavljanje broja na proste faktore

Pitagora i njegovi sljedbenici složene su brojeve nazivali ugodnim brojevima jer su ih mogli zapisati u obliku umnoška na više načina. Proste brojeve nazivali su neugodnim brojevima [3]. Slijedi aktivnost kojom se ostvaruju ishodi iz nastavne jedinice Rastavljanje broja na proste faktore i koristi se relativno novi pedagoški pristup koji se zove obrnuta učionica. Zamisao ove metode je da se učenici prije dolaska na nastavni sat, samostalno (kod kuće) pripreme, upoznaju se s novim pojmovima i nastavnim materijalom koji je unaprijed pripremio učitelj, a vrijeme u razredu koristi se za usustavljivanje znanja, vježbu, rješavanje problemskih zadataka, međusobnu raspravu učenika i demonstraciju naučenog. Na taj se način znanje stječe kod kuće, a u školi se odmah nakon toga objašnjavaju eventualne nejasnoće te se tako skraćuje vrijeme koje učenici troše na čekanje povratne informacije o svom učenju. I u ovom načinu poučavanja učenike se stavlja u centar poučavanja, a učitelj je mentor koji potiče učenike na samostalno učenje i rješavanje problema, što je u skladu sa suvremenim pristupima učenju i poučavanju.

Aktivnost: obrnuta učionica

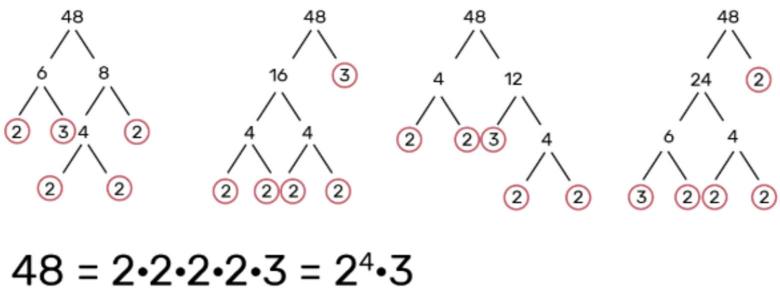
Učenici su podijeljeni u dvije grupe. Ovisno o tome nalaze li se u imeniku pod parnim ili neparnim rednim brojem, dobivaju zadatak proučiti i uvježbati jedan od dva algoritma za rastavljanje prirodnih brojeva na proste faktore koji su ponuđeni u pripremljenim materijalima.

Algoritam 1 *Broj dijelimo najmanjim prostim brojem s kojim je djeljiv. Dobiveni količnik opet dijelimo s najmanjim prostim brojem kojim je djeljiv. Postupak ponavljamo dok kao količnik ne dobijemo broj* 1. *Na kraju proste brojeve s kojima smo dijelili zapišemo u obliku umnoška. To je traženi umnožak prostih faktora. [3]*



Slika 10: Prikaz algoritma 1 [12]

Algoritam 2 *[Brojevno stablo] Broj najprije zapišemo kao umnožak neka dva broja (prva koja prepoznamo iz tablice množenja ili s pomoću pravila djeljivosti). Svaki od tih brojeva koji nije prost, nastavljamo pisati kao umnožak neka dva broja. Postupak ponavljamo dok ne ostanu samo prosti faktori. Zbog preglednosti, zaokružimo svaki dobiveni prosti faktor. Na kraju dobivene proste brojeve zapišemo kao umnožak. [12]*



Slika 11: Prikaz algoritma 2 [12]

Nakon što učenici samostalno prouče zadane algoritme, na satu će iste demonstrirati nastavniku i ostalim učenicima. Ono što bi trebali samostalno zaključiti, a utvrditi na nastavi zajedno s nastavnikom, jest da vrijede sljedeće tvrdnje:

- Svaki složeni broj može se rastaviti na proste faktore. [4]

- Zbog svojstva komutativnosti množenja, rastav broja na proste faktore može se zapisati na više načina. [4]

- Prost broj ne možemo dalje rastavljati na proste faktore. [5]

- Svaki prirodni broj ima jedinstven rastav na proste faktore ako poredak faktora ne uzimamo u obzir. [6]

U opisanom pristupu poučavanju preporuča se snimanje vlastitih video materijala, tj. korištenje digitalne tehnologije za pripremanje zadataka koje će učenici dobiti unaprijed. Smatra se da učenici, bez obzira na sva upozorenja prevelike „konzumacije ekrana”, prepoznaju ovo okruženje i način učenja kao nešto što je normalno i njima dobro poznato te ga jako dobro prihvaćaju.

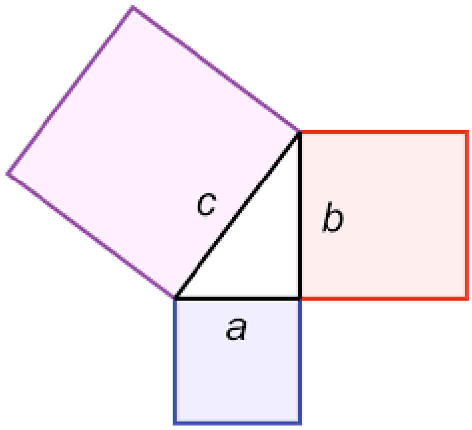
3.4 Teorija brojeva u geometriji

U nastavku ovog diplomskog rada povezat ćemo teoriju brojeva s geometrijom te dati neke primjere aktivnosti za rad učenika na nastavi matematike. Poznato je da je geometrija igrala vrlo veliku ulogu u životima starih civilizacija, a arheološka nalazišta na području Mezopotamije potvrđuju da Babilonci nisu bili iznimka.

Slika 12: Plimpton 322

Mala glinena pločica poznata pod nazivom Plimpton 322 otkrivena je početkom 20. stoljeća na području današnjeg Iraka[18]. Ova pločica je najstarija i najtočnija trigonometrijska tablica na svijetu i smatra se da su je ljudi koristili za izračune pri gradnji palača, hramova i tunela. Pločica sadrži 4 stupca i 15 redaka brojeva zapisanih klinastim pismom u sustavu baze 60. Novija istraživanja pokazuju da Plimpton 322 opisuje oblike pravokutnih trokuta koristeći trigonometriju koja se temelji na omjerima[19] i razlikuje se od one koju mi danas koristimo te se zbog toga smatra da su Babilonci poznavali trigonometriju trokuta čak 1000 godina prije Grka. Na pločici su zapravo ispisani brojevi koje mi danas zovemo Pitagorine trojke.

3.4.1 Pitagorine trojke



Slika 13: Pitagorin trokut

Definicija 10 *Pravokutni trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi zovemo Pitagorin trokut. [2]*

Definicija 11 *Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) zovemo Pitagorina trojka ako su x i y duljine kateta, a z duljina hipotenuze nekog Pitagorinog trokuta, tj. ako vrijedi:*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ukoliko su pritom brojevi x, y i z relativno prosti[20], onda kažemo da je (x, y, z) primitivna Pitagorina trojka. [2]

[18]Pločicu Plimpton 322 pronašao je arheolog, akademik, diplomat i trgovac antikviteta Edgar Banks, čiji je život bio inspiracija u nastajanju filmova o Indiani Jonesu.

[19]Trigonometrijska tablica omogućuje nam da koristimo jedan poznati omjer stranica pravokutnog trokuta kako bi se odredila druga dva nepoznata omjera.

[20]Relativno prosti brojevi su prirodni brojevi čiji je jedini zajednički djelitelj 1.

Jednostavnije rečeno, Pitagorinu trojku čine tri prirodna broja koja zadovoljavaju Pitagorin poučak. Na sljedećoj slici prikazane su sve Pitagorine trojke čiji su elementi manji ili jednaki 50.

$(3,4,5)$	$(12,16,20)$	$(18,24,30)$	$(24,32,40)$
$(6,8,10)$	$(15,20,25)$	$(16,30,34)$	$(9,40,41)$
$(5,12,13)$	$(7,24,25)$	$21,28,35)$	$(27,36,45)$
$(9,12,15)$	$(10,24,26)$	$(12,35,37)$	$(30,40,50)$
$(8,15,17)$	$(20,21,29)$	$(15,36,39)$	$(14,48,50)$

Tablica 4: Pitagorine trojke

Učenici se s ovim pojmovima susreću u prvom polugodištu 8. razreda, a osim što promatraju Pitagorin poučak i njegov obrat, promatraju i primjene Pitagorinog poučka na pojedine geometrijske likove. Iako proučavanje Pitagorinih trokuta nije primjereno uzrastu učenika osnovne škole, jer su oni u uskoj vezi s rješavanjem diofantskih jednadžbi[21] (diofantske jednadžbe uvode se u dodatnoj nastavi matematike za potrebe natjecanja), ovakvu vrstu zadataka možemo geometrijski interpretirati te ih na taj način prilagoditi nastavi matematike u osnovnoj školi. Pogledajmo i riješimo dva primjera takvih zadataka. Dakle, umjesto „riješi diofantsku jednadžbu" zadatak zadajemo ovako:

Zadatak 13 *Pronađi sve Pitagorine trojke čiji su elementi tri uzastopna prirodna broja.*

Rješenje
Za Pitagorine trojke čiji su elementi a, b i c vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Neka su $a = b - 1$, b i $c = b + 1$ tri uzastopna prirodna broja. Možemo pisati:

$$\begin{aligned} (b-1)^2 + b^2 &= (b+1)^2, \\ b^2 - 2b + 1 + b^2 &= b^2 + 2b + 1. \end{aligned}$$

Ako od jedne i druge strane jednakosti oduzmemo $b^2 + 1$, dobivamo:

$$\begin{aligned} -2b + b^2 &= 2b, \\ b^2 &= 2b + 2b, \\ b^2 &= 4b. \end{aligned}$$

[21]Diofantska jednadžba je općenito neodređena polinomnu jednadžba ili neodređena jednadžba nekog drugog oblika čija se rješenja nalaze u skupu prirodnih brojeva.

Jednadžbu podijelimo s b (b je različit od 0 jer je prirodan broj) i dobijemo $b = 4$. Iz toga slijedi da je $a = 3$ i $c = 5$, tj. jedina trojka za koju vrijedi uvjet zadatka je $(3, 4, 5)$[22].
Prethodnim zadatkom učenici će, osim uvježbavanja koncepata cjeline Pitagorin poučak, ponoviti i koncepte cjeline Kvadriranje jer je potrebno prisjetiti se kako kvadriramo zbroj, a kako razliku kvadrata. U sljedećem zadatku, uz već spomenute koncepte, učenici će se prisjetiti i djeljivosti prirodnih brojeva.

Zadatak 14 *Dokaži da je u svakom Pitagorinom trokutu duljina barem jedne katete djeljiva s* 3.

Rješenje
Za duljine stranica Pitagorinog trokuta a, b i c vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze tog trokuta. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je trojka (a, b, c) primitivna, tj. da su brojevi a, b i c relativno prosti brojevi. Pretpostavimo da ni jedna kateta nema duljinu djeljivu s 3. Što to znači za kvadrate tih duljina? Uzmimo neki prirodni broj koji nije djeljiv s 3 i kvadrirajmo ga. Pišemo:

$$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1,$$

gdje je k element skupa prirodnih brojeva. Kada bi taj kvadrat željeli podijeliti s 3, dobili bi ostatak 1:

$$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3k(3k \pm 2) + 1.$$

S obzirom da mi u zadatku promatramo zbroj kvadrata $a^2 + b^2$, možemo ga zapisati kao zbroj kvadrata brojeva koji nisu djeljivi s 3:

$$a^2 + b^2 = 3k(3k \pm 2) + 1 + 3m(3m \pm 2) + 1,$$

gdje su k i m elementi skupa prirodnih brojeva. Zaključujemo da bi zbroj kvadrata takva dva broja, podijeljen brojem 3 dao ostatak 2.
Pogledajmo sada izraz $a^2 + b^2 = c^2$ i podijelimo ga brojem 3. U slučaju kada je duljina stranice c djeljiva s 3, zbroj kvadrata s lijeve strane pri djeljenju s 3 imao bi ostatak 0, što smo pokazali da ne vrijedi. U slučaju da stranica duljine c nije djeljiva s 3, zbroj kvadrata s lijeve strane pri djeljenju s 3 morao bi imati ostatak 1, što također ne vrijedi. Dakle, u oba slučaja dolazimo do kontradikcije. Početna pretpostavka da ni jedna kateta nema duljinu djeljivu s 3 je pogrešna. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

[22]Pravokutan trokut čije su duljine stranica 3, 4 i 5 jediničnih dužina naziva se Egipatski trokut.

4 Teorija brojeva na natjecanjima iz matematike

Osim redovne nastave matematike u osnovnoj školi nastavnici se pripremaju i za dodatnu nastavu matematike. Uz darovite učenike, dodatnu nastavu matematike obično pohađaju i odlični učenici. Ona je usko povezana s natjecanjima iz matematike jer se kroz rad na dodatnoj nastavi učenici zapravo pripremaju za natjecanja. Nastavnici ovdje imaju veliku ulogu u usmjeravanju i poticanju rada učenika jer uspjeh (ili neuspjeh) na natjecanju može uvelike utjecati na samopouzdanje učenika te odnos i interes prema matematici. Prvo natjecanje na području današnje Hrvatske na kojem su sudjelovali učenici osnovnih škola (7. i 8. razredi) održano je 1965.godine. Danas se natjecanja provode na četiri razine: školsko, općinsko/gradsko, županijsko i regionalno/državno[23]. U nastavku je odabrano nekoliko zadataka iz područja teorije brojeva koji su primjereni različitim uzrastima i preuzeti su s različitih razina natjecanja.

Zadatak 15 (5.r - školsko/gradsko natjecanje 2015.)

Odredi sve prirodne brojeve oblika $\overline{9a6b9}$ *djeljive s* 3 *kojima su znamenke desetice i tisućice prosti brojevi.*

Rješenje:
Broj je djeljiv s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3. Zbog toga vrijedi da je izraz
$$9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$$
djeljiv s 3. Tisućica a i desetica b prosti su brojevi, dakle skup odgovarajućih znamenki na mjestu desetice i tisućice je $\{2, 3, 5, 7\}$. Zbroj je djeljiv brojem 3 ako je svaki pribrojnik djeljiv brojem 3. Zbog toga suma $a + b$ mora biti djeljiva brojem 3. Kombinacije brojeva koje odgovaraju su $\{2, 7\}$, $\{3, 3\}$ i $\{5, 7\}$ pa su traženi brojevi: 92679, 97629, 93639, 95679 i 97659.

Zadatak 16 (5.r - općinsko natjecanje 1985.)

Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive s 3 *kojima je posljednja znamenka jednaka umnošku ostalih dviju znamenki.*

[23]Ovisno o uzrastu (regionalno za 4. razrede i državno za ostale razrede) i mjestu u kojem se nalazi škola čiji učenici sudjeluju na natjecanju (gradsko ili općinsko) mijenja se naziv pojedine razine natjecanja.

Rješenje:
Traži se broj $\overline{abc}$ čiji je zbroj znamenki $a+b+c$ djeljiv brojem 3 i vrijedi $c = a \cdot b$. Trojke koje zadovoljavaju oba uvjeta su $(3,0,0)$, $(6,0,0)$, $(9,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,4,4)$, $(4,1,4)$, $(1,7,7)$, $(7,1,7)$, $(3,3,9)$ pa su traženi brojevi 300, 600, 900, 111, 144, 414, 177, 717 i 339.

Zadatak 17 (5.r - županijsko natjecanje 1996.)

Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 45*, a znamenka jedinica im je jednaka znamenki tisućica.*

Rješenje:
Traži se broj $\overline{abca}$ koji je djeljiv brojem 45, tj. djeljiv je brojevima 5 i 9. Iz toga slijedi da je $a = 5$ (jer prva znamenka ne može biti 0). Da bi broj bio djeljiv brojem 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv s 9. Dakle, vrijedi $b+c = 8$ ili $b+c = 17$. Uređeni parovi brojeva za koje vrijedi prva jednakost su $(0,8)$, $(8,0)$, $(1,7)$, $(7,1)$, $(2,6)$, $(6,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,4)$, dok druga jednakost vrijedi za uređene parove $(8,9)$ i $(9,8)$. Traženi brojevi su 5085, 5805, 5175, 5715, 5265, 5625, 5355, 5535, 5445, 5895 i 5985.

Zadatak 18 (8.r - regionalno natjecanje 2006.)

Zbroj kvadrata bilo kojih 2006 *uzastopnih prirodnih brojeva nije kvadrat prirodnog broja. Dokaži!*

Rješenje:
Između 2006 uzastopnih prirodnih brojeva nalaze se 1003 parna i 1003 neparna broja. Kvadrat parnog broja je oblika $(2n)^2 = 4n^2$ za prirodan broj n, a kvadrat neparnog broja je oblika $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4m(m+1)+1$ za prirodan broj m. Iz zapisanih jednakosti zaključujemo da je kvadrat parnog broja djeljiv s 4, a kvadrat neparnog broja pri djeljenju s 4 daje ostatak 1. Zapišemo li broj 1003 u obliku $1003 = 4 \cdot 250 + 3$, zaključujemo da zbroj kvadrata bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva pri djeljenju s 4 daje ostatak 3. Zbog toga što kvadrat bilo kojeg prirodnog broja pri djeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1, zbroj kvadrata bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva nije kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 19 (6.r - državno natjecanje 2012.)

Od znamenki n, $n+1$ i $n+2$ (gdje je n različit od 0) može se napisati 6 troznamenkastih brojeva čije su sve znamenke različite. Dokaži da je zbroj ovih brojeva djeljiv sa 666.

Rješenje:
Brojevi koje možemo zapisati uz pomoć zadanih znamenaka su:

$$\overline{n(n+1)(n+2)},$$
$$\overline{n(n+2)(n+1)},$$
$$\overline{(n+1)n(n+2)},$$
$$\overline{(n+1)(n+2)n},$$
$$\overline{(n+2)n(n+1)},$$
$$\overline{(n+2)(n+1)n}.$$

Zbrajanjem ispisanih brojeva dobiva se

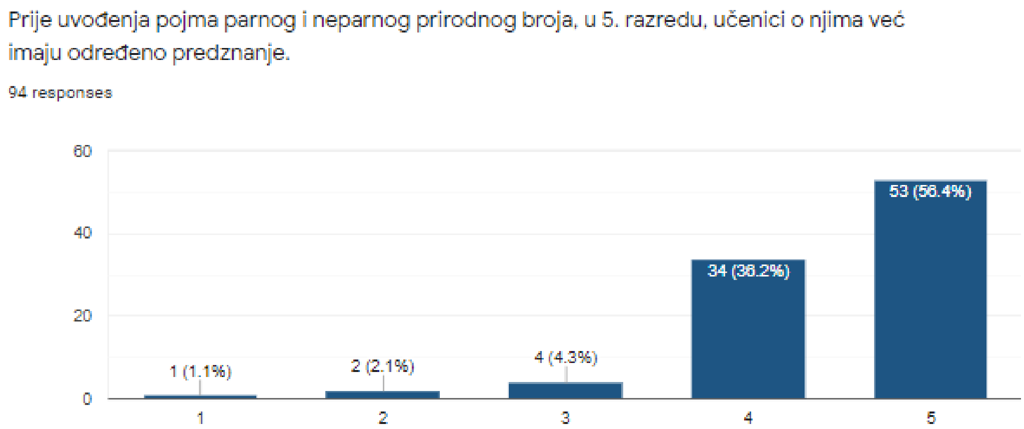
$$100(6n+6)+10(6n+6)+6n+6=111(6n+6)=666(n+1),$$

iz čega slijedi i dokazana je tvrdnja zadatka.

Na natjecanjima iz matematike ne provjerava se samo znanje učenika, već i snalaženje u problemskim zadatcima te sposobnost brzog razmišljanja. Ona ni u kom slučaju ne smiju biti kriterij prema kojem se određuje učenikov dar za matematiku te je učenicima potrebno posebno naglašavati da je od samog natjecanja važniji proces pripreme jer se njime nadopunjava temeljno matematičko obrazovanje.

5 Anketa - Što misle nastavnici matematike?

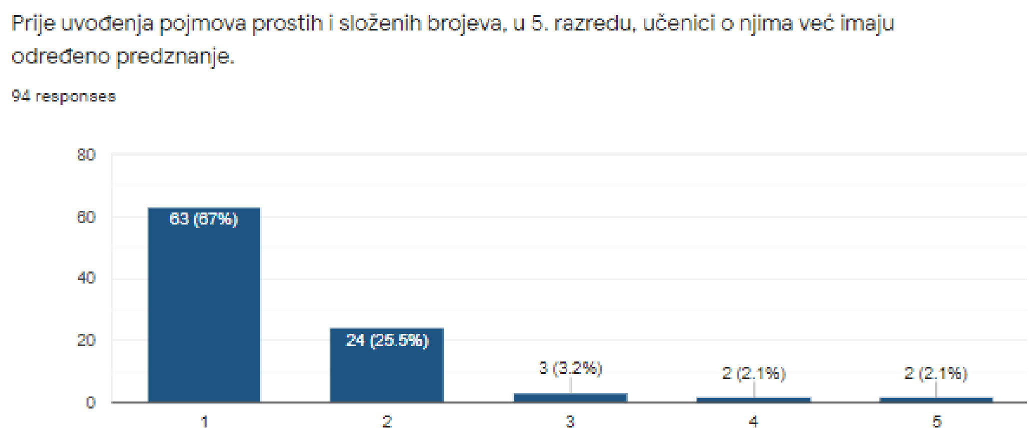
Za potrebe pisanja ovog diplomskog rada osmišljena je i distribuirana anketa[24] namijenjena osnovnoškolskim nastavnicima matematike. Njome su se, između ostalog, prikupljala mišljenja nastavnika o predznanju učenika o pojedinim temama iz teorije brojeva te o zahtjevnosti i zanimljivosti istih u usporedbi s temama iz ostalih područja matematike. Anketi je pristupilo 95 ispitanika. Nakon što su nabrojani neki od matematičkih pojmova iz teorije brojeva koje učenici proučavaju u osnovnoj školi, a dio su ovog diplomskog rada, od nastavnika matematike tražilo se da procijene stupanj slaganja s navedenim tvrdnjama od uopće se ne slažem (1) prema u potpunosti se slažem (5).



Slika 14: Tvrdnja o predznanju o parnim i neparnim brojevima

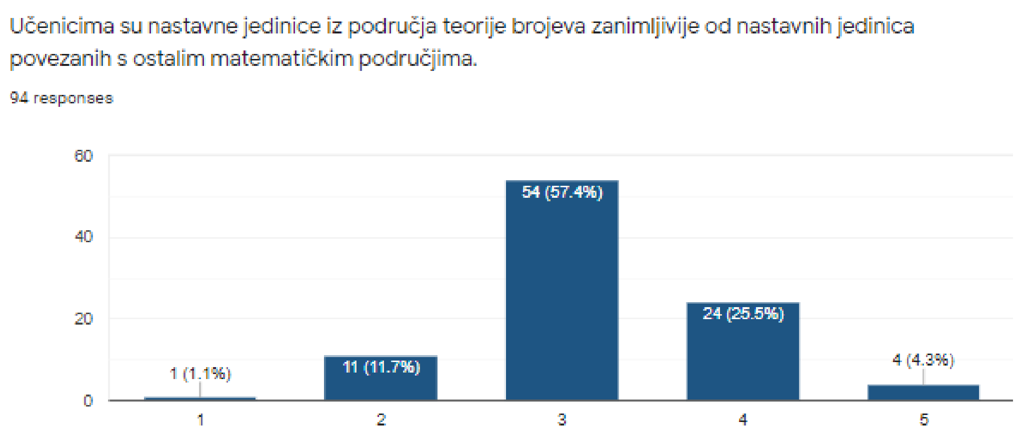
Više od 56% ispitanih nastavnika u potpunosti se slaže da učenici, prije uvođenja pojma parnog i neparnog prirodnog broja u 5. razredu o njima već imaju određeno predznanje. Mišljenja o istoj tvrdnji za pojmove djeljivost, djelitelj i višekratnik su podijeljena, dok se 67% ispitanika slaže da o pojmovima prostih i složenih brojeva učenici nemaju nikakvo predznanje. Ovakvi odgovori su očekivani s obzirom na to da se učenici s pojmovima parnih i neparnih brojeva susreću i definiraju ih još u nižim razredima osnovne škole, djeljivost, djelitelj i višekratnik spominju se, ali ne definiraju, dok su pojmovi prostih i složenih brojeva učenicima 5. razreda potpuno novi.

[24] Anketa je objavljena u privatnim Facebook grupama Nastavnici matematike i Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci a bila je dostupna od 4.6.2020. do 17.6.2020.



Slika 15: Tvrdnja o predznanju o prostim i složenim brojevima

Što se tiče zahtjevnosti ishoda iz područja teorije brojeva koje učenici moraju usvojiti u osnovnoj školi, 42% ispitanika smatra da je učenicima gradivo iz područja teorije brojeva jednako zahtjevno kao i gradivo povezano s drugim područjima matematike. Isto vrijedi i za pokazivanje interesa za gradivo iz područja teorije brojeva. 57% ispitanika misli da nema razlike u interesu učenika za ishode povezane s teorijom brojeva i ostalim područjima matematike.



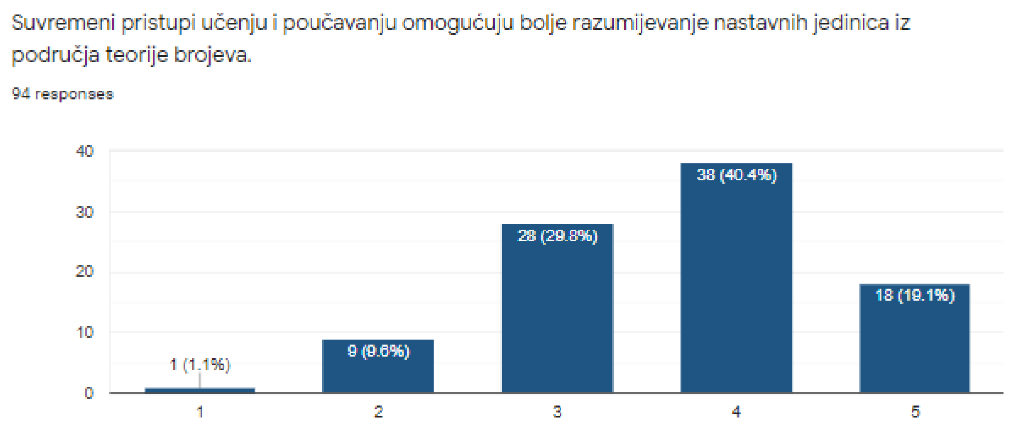
Slika 16: Usporedba interesa učenika za područja matematike povezana s teorijom brojeva i ostalim područjima matematike

Sljedećih nekoliko pitanja iz ankete odnosi se na korištenje suvremenog pristupa učenju i poučavanju, metodama poučavanja i tehnikama aktivnog učenja koje nastavnici koriste u poučavanju gradiva povezanog s teorijom brojeva. Čak 96% ispitanika odgovorilo je da u svojoj nastavi koristi suvremeni pristup učenju i poučavanju. Dakle, od svih ispitanih nastavnika, samo njih 6 koristi isključivo tradicionalni pristup učenju i poučavanju. Najviše korištena metoda suvremenog načina poučavanja je rad u paru (86 ispitanika), nakon toga slijedi rad u grupi (79 ispitanika), računalo u nastavi koristi 74 nastavnika, a elemente igrifikacije njih 49. Samo jedan ispitanik u svom radu koristi obrnutu učionicu, iz čega možemo zaključiti da ovaj pedagoški pristup još uvijek nije popularan među nastavnicima matematike.

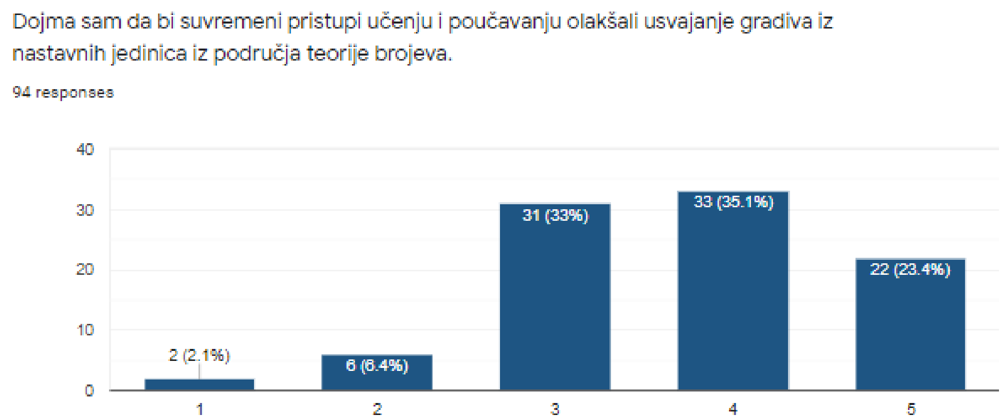
Slika 17: Korištenje tehnika aktivnog učenja i poučavanja u nastavi matematike

Na pitanje koriste li u svojoj nastavi tehnike aktivnog učenja i poučavanja, 53% nastavnika odgovorilo je potvrdno, a neke od tehnika koje su spomenuli su: oluja mozgova, istraživanje, projektni zadatci, obrnuta učionica, mentalne mape, debata,... Matematika je bez sumnje jedan od težih predmeta koje djeca slušaju u svom osnovnoškolskom obrazovanju, a nastavnici često imaju vrlo malo vremena za obradu i uvježbavanje ishoda predviđenih Kurikulumom pa je jasno da se ne može očekivati korištenje baš svih suvremenih metoda. One zahtijevaju puno uloženog vremena za manju količinu gradiva nego bi se obradilo tradicionalnim metodama. Zbog toga se svaki nastavnik oslanja na svoje iskustvo i poznavanje učenika koje poučava i na taj način pronalazi optimizirani omjer inovacije i tradicije koje implementira u svoju nastavu.

Slijede dvije tvrdnje povezane s suvremenim pristupom učenju i poučavanju oko kojih su mišljenja nastavnika podijeljena.

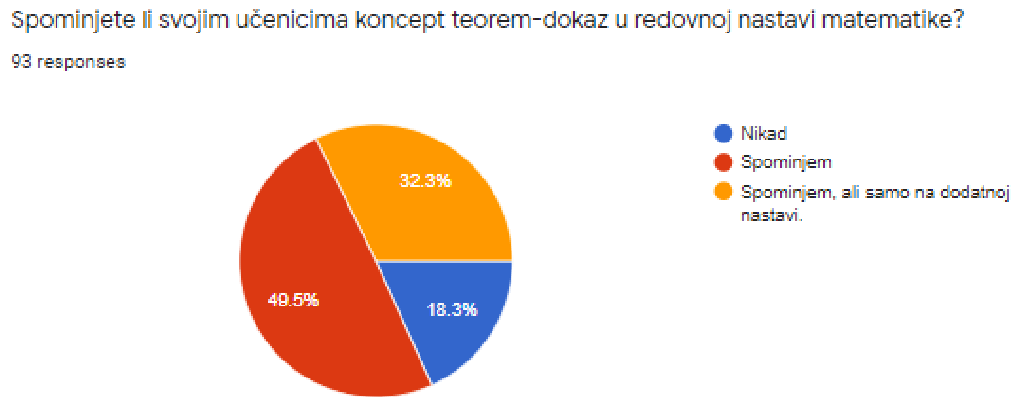


Slika 18: Razumijevanje nastavnih jedinica iz područja teorije brojeva kod korištenja suvremenog pristupa poučavanju



Slika 19: Lakše usvajanje nastavnih jedinica iz područja teorije brojeva kod korištenja suvremenog pristupa poučavanju

Nastavnici su rekli svoje mišljenje i o tome koliko je kod obrade pojedinih tema iz područja teorije brojeva pogodno korištenje računala, a koliko korištenje elemenata igrifikacije. Ispitanici se slažu da je za obradu svih pojmova iz područja teorije brojeva o kojima smo govorili u ovom diplomskom radu korištenje računala djelomično korisno. Smatram da ovi odgovori više govore o općenitom stavu nastavnika prema korištenju računala za izvođenje nastave nego konkretno o pogodnosti pojedinog pojma za obradu uz pomoć računala. U prosjeku je 10 ispitanika po pitanju odgovorilo da tema iz područja teorije brojeva nije pogodna za obradu uz pomoć računala, dok se ostali slažu da računalo može biti korisno u nastavi pri obradi ovih nastavnih jedinica. Što se tiče elemenata igrifikacije, u prosjeku 5 ispitanika po pitanju tvrdi da ih nije pogodno uvoditi kod obrade nastavnih jedinica iz područja teorije brojeva, a posebno se ističe nastavna jedinica Svojstva djeljivosti. Ostali ispitanici uvode i koriste elemente igrifikacije kod obrade spomenutih nastavnih jedinica. Za kraj ankete nastavnici su odgovorili na tri pitanja koja se odnose na njihovu nastavu, učenike i odnos njihovih učenika prema matematici. Na pitanje spominju li koncept teorem - dokaz u redovnoj nastavi matematike, 50% nastavnika odgovorilo je potvrdno, 18% ga nikad ne spominje, a 32% nastavnika ga spominje isključivo na dodatnoj nastavi matematike.



Slika 20: Koncept teorem-dokaz

Samo 4 nastavnika vjeruju da većina njihovih učenika voli matematiku, a nitko od ispitanih nastavnika ne misli suprotno. Većina ispitanika, čak 56%, donekle se slaže s prethodnom tvrdnjom. Ni jedan ispitanik ne misli da se većina njegovih učenika boji matematike, a 19 njih je u to sigurno. Ispitani nastavnici dali su različite odgovore na postavljena pitanja, no slažu se u jednom, a to je da računalo nije jedini način osuvremenjivanja nastave i da prečesto korištenje tehnologije učenicima skreće pozornost s onog bitnog. Više njih naglašava kako valja biti vrlo oprezan s uvođenjem digitalnih alata u nastavu, količinom njihovog korištenja kao i načinom na koji se koriste.

5.1 Osobni osvrt

Radim kao učitelj matematike u OŠ Petrijanec. To je škola koja ima 30% učenika romske populacije. U svakom razrednom odjeljenju integrirani su učenici romske nacionalnosti, a u predmetnoj nastavi postoje dva čista romska razreda. Naglašavam ovo zbog toga što toj djeci hrvatski jezik nije materinji i bez obzira na to što većina njih nema prilagođeni program, vrlo često se njima nastava mora u potpunosti prilagoditi i individualizirati - kako redovna, tako i online nastava. Ove školske godine predavala sam matematiku u četiri peta razreda (jedan od njih je romski razred kojem sam ujedno i razrednica) te u jednom sedmom razredu (također romski razred). Osim toga držala sam i dopunsku nastavu za sve navedene razrede. O predznanju učenika pri dolasku u 5. razred u potpunosti se slažem s ispitanicima svoje ankete. Učenicima su određeni pojmovi i koncepti poznati, ali rijetko koji učenik bi ih mogao potpuno točno definirati. Većina mojih učenika nije imala problema u savladavanju gradiva iz područja teorije brojeva, ali im je trebalo malo više vremena za usvajanje svojstava djeljivosti (djeljivost zbroja, razlike i umnoška). Smatram da im je ovo područje matematike manje zahtjevno od geometrije, ali zahtjevnije od aritmetike. Što se tiče interesa za ovo područje matematike, smatram da u njihovoj dobi još uvijek ne razmišljaju o matematici kao skupu više različitih područja pa je zbog toga njihov interes za sva područja podjednak. U mojoj nastavi zastupljene su sve metode suvremenog načina učenja i poučavanja navedene u anketi, a većina aktivnosti navedenih u radu je provedena u praksi. Za sada još uvijek nisam isprobala pristup *obrnute učionice*, ali smatram da bi se barem tri moja razreda u tome dobro snašla. Pobornik sam suvremenog pristupa učenju i poučavanju jer smatram da je s razvojem tehnologije i općenito društva kao cjeline potrebno da se svi segmenti života prilagode tom napretku, pa tako i školstvo. Iako se smatra da previše IKT-a u nastavi nije dobro za učenike zbog zanemarivanja njihovih motoričkih sposobnosti, pisanja i rada rukama, iz prakse je vidljivo da inzistiranje na nekim tradicionalnim metodama rada na učenike ne utječe dobro, pada im koncentracija i smanjuje im motivaciju. Zbog toga što učenici danas puno vremena provode na računalima te gledajući televiziju, smanjuje im se vrijeme koncentracije i vizualni su tipovi. Da bi se njihova pažnja zaokupila dovoljno dugo za usvajanje nekog novog pojma ili novih koncepata, potrebno je stalno mijenjati načine rada te na taj način držati nastavu zanimljivom. Moji učenici ne boje se matematike, ali ne bih mogla reći da im je omiljeni predmet. Svojim radom, svakodnevno pokušavam utjecati na njihova mišljenja i ukazati im na ljepotu i važnost ovog predmeta, kao i svojim pristupom njima dovesti do promjene u njihovom pristupu i razmišljanju o matematici.

6 Zaključak

Iz metodičkih udžbenika učimo o različitim metodama poučavanja matematike koje se razlikuju prema oblicima zaključivanja. Studenti matematike kroz svoje školovanje usvajaju dane metode, vježbaju i usavršavaju ih te pronalaze različite primjere iz nastave u koje bi mogli naučeno implementirati. No, vrlo brzo nakon ulaska u razred shvaćaju da nije sve baš tako lako kako izgleda u teoriji. Čini se da se teorija često odnosi na "idealne uvjete" poučavanja, na najbistriju, najzainteresiraniju i najposlušniju djecu, na mir i tišinu u razredu. Teorija brojeva smatra se kraljicom matematike jer su njeni problemi lako razumljivi, a koncepti su, iako se smatraju temeljnim matematičkim konceptima, često vrlo zahtjevni za razumijevanje, a rješavanje zadataka iz teorije brojeva često učenicima predstavlja problem. Stoga je teorija brojeva grana matematike koja predstavlja vrlo intrigantnu i izazovnu podlogu za implementaciju suvremenih metoda učenja i poučavanja. U ovom diplomskom radu osmišljeni su primjeri aktivnosti za učenike osnovne škole pomoću kojih bi elementi teorije brojeva koji se koriste u nastavi matematike bili pristupačniji i zabavniji za učenje, ne samo odličnim učenicima, već i onima kojima matematika nije jača strana ili su kroz svoje školovanje o njoj stekli negativno mišljenje. Cilj osmišljenih aktivnosti je inovativnim elementima premostiti probleme s kojima se profesori matematike često susreću, a tiču se uvriježenog mišljenja kako je matematika „zahtjevna". Na taj način matematički koncepti povezuju se s primjerima iz svakodnevnog života kako bi učenici uvidjeli široku primjenu matematike u svojoj okolini i otklonili potencijalne negativne stavove o tom školskom predmetu. Primjeri zadataka i aktivnosti koji su prikazani u ovom radu uz pomoć suvremenih metoda učenja i poučavanja pogodni su za djelomičnu ili potpunu primjenu u nastavi, ovisno o prilikama u pojedinom razredu i procjeni nastavnika. Ljepota i važnost opisanih suvremenih metoda upravo je u tome što se mogu lako prilagoditi i primijeniti na sve grane matematike predviđene Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika.

Popis tablica

Popis slika

Literatura

[1] R. Zazkis, S. R. Campbell, *Number theory in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 2006.

[2] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu 1991.

[3] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić *Matematički izazovi 5, prvi dio*, udžbenik sa zadatcima za vježbanje iz matematike za peti razred osnovne škole, Alfa, Zagreb, 2019.

[4] S. Eberling, N. Grbac, S. Janeš, I. Mrkonjić *Moja matematika 5*, udžbenik iz matematike za 5. razred osnovne škole, Alca script, Zagreb, 2019.

[5] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf *Matematika 5, I. dio*, udžbenik matematike u 5. razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[6] Z. Šikić, B. Goleš, Z. Lobor, L. Krnić *Matematika 5, 1. polugodište*, udžbenik i zbirka zadataka za peti razred osnovne škole, Profil, Zagreb, 2013.

[7] D. Ivanović, K. Jurjak, K. Pedić, M. Špiranec, *Didaktika 2: Tehnike aktivnog učenja i poučavanja, ocjenska vježba*, Rijeka, 2018.

[8] Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

[9] Izvor s interneta: Škola za život, https://skolazazivot.hr/ (pristup: 22.5.2020.)

[10] Izvor s interneta: Korištenje i stavovi nastavnika o igrifikaciji u osnovnim i srednjim školama, (pristup: 24.5.2020.)

[11] Izvor s interneta: Suvremene metode i oblici poučavanja, (pristup: 25.5.2020.)

[12] Izvor s interneta: Edutorij, (pristup: 25.5.2020.)

[13] Izvor s interneta: Number Theory and the Queen of Mathematics, (pristup: 15.6.2020.)

[14] Izvor s interneta: Antonija Horvatek: Matematika na dlanu, (pristup: 29.6.2020.)

[15] Izvor s interneta: Ana Jurasić: Matematička natjecanja darovitih učenika različitih godišta, (pristup: 29.6.2020.)