# Kompleksni brojevi u svakodnevnom životu

**Ilić, Marina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:164:365777

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

Repository - Faculty of Maritime Studies - Split - Repository - Faculty of Maritime Studies Split for permanent storage and preservation of digital resources of the institution









**SVEUČILIŠTE U SPLITU**

**POMORSKI FAKULTET U SPLITU**

**MARINA ILIĆ**

# KOMPLEKSNI BROJEVI U SVAKODNEVNOM ŽIVOTU

**ZAVRŠNI RAD**

**SPLIT, 2017.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**

**POMORSKI FAKULTET U SPLITU**

**POMORSKI MENADŽMENT**

# KOMPLEKSNI BROJEVI U SVAKODNEVNOM ŽIVOTU

**ZAVRŠNI RAD**

**MENTOR:**

**prof. Goran Kovačević**

**STUDENT**

**Marina Ilić**

**(MB:0171259044)**

**SPLIT, 2017.**

# SAŽETAK

Tek u 16. stoljeću, za potrebe rješenja kubne jednadžbe, uvedeni su kompleksni brojevi i operacije s njima. Po mnogim mišljenjima, uvođenje kompleksnih brojeva uvelike je olakšalo rješavanje i razumijevanje određenih problema. Danas se, moglo bi se reći, kompleksni brojevi koriste svugdje. Između ostalog, u različitim znanstvenim područjima i drugim srodnim područjima unutar tih znanosti kao što su: obrada signala, geometrija, elektrotehnika itd.

Ipak, važno je uočiti da je njihova primjena korisna, ali nije neophodna.



**Ključne riječi:** *kompleksni brojevi, primjena kompleksnih brojeva, geometrija, obrada signala*



# ABSTRACT

Yet in the 16th century, in order to solve the cubic equation, complex numbers and operations were introduced with them. By many opinions, the introduction of complex numbers has greatly facilitated solving and understanding of certain problems. Nowadays, you can say that complex numbers are used everywhere. Among other things, in various scientific fields and other related fields within these sciences such as: signal analysis, geometry, electrical engineering etc.

However, it is important to note that their use is useful but not necessary.



**Key words:** *complex numbers, complex number application, geometry, signal analysis*

**SADRŽAJ**

**1. UVOD ..... 1**

**2. KOMPLEKSNI BROJEVI ..... 2**

**2.1. POVIJEST KOMPLEKSNOG BROJA ..... 2**

**2.2. ELEMENTI KOMPLEKSNOG BROJA ..... 3**

**3. PRIMJENA KOMPLEKSNIH BROJEVA ..... 8**

**3.1. PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI I ELEKTROMAGNETIZMU ..... 8**

**3.2. ANALIZA SIGNALA ..... 13**

**3.3. FRAKTALI ..... 19**

**3.4. TEORIJA KONTROLE ..... 21**

**4. ZAKLJUČAK ..... 26**

**POPIS SLIKA ..... 27**

**LITERATURA ..... 28**

# 1. UVOD

Prikupljanjem i kombiniranjem različitih, već objavljenih stručnih i znanstvenih radova, te priručnika, obrađena je tema kompleksni brojevi i primjena kompleksnih brojeva u različitim znanstvenim i srodnim područjima.

U prvom dijelu obrađen je realni i imaginarni dio kompleksnog broja, matematičke operacije s kompleksnim brojevima te kompleksna ravnina, kako bi se u drugom dijelu, lakše razumjela problematika i ciljevi njihove primjene.

Kompleksni i imaginarni brojevi već dugo fasciniraju ne samo matematičare, nego i širu javnost. Teorija funkcija definiranih na dijelu kompleksne ravnine i s kompleksnim vrijednostima, isprepleće se sa skoro svim granama moderne matematike, a primjenjuje se u fizici, elektrotehnici, geometriji i drugim srodnim područjima unutar navedenih znanosti.

U drugom dijelu koji se odnosi na primjenu kompleksnih brojeva, ukratko je opisan strujni krug uz kompleksne brojeve, malo detaljnije je obrađena Fourierova i Laplaceova transformacija, a pred kraj, ukratko su prikazani i neki zaista fascinantni fraktali.

Kroz različite primjere i kroz metode rješavanja nekih zadataka pokušat će se pojednostavniti razumijevanje primjene kompleksnih brojeva i dati do znanja da kompleksno ne znači kompliciranо, te da se njihovom primjenom često lakše mogu riješiti određeni problemi ili lakše razumjeti već riješeni problemi.

# 2. KOMPLEKSNI BROJEVI

## 2.1. POVIJEST KOMPLEKSNOG BROJA

Mnogi smatraju da su kompleksni brojevi uvedeni kako bi svaka kvadratna jednadžba imala rješenje. Npr. jednadžba

$$x^2 + 1 = 0$$

nema realnih rješenja, ali uvođenjem kompleksnih brojeva dobiva rješenja $x = i$ i $x = -i$. Kasnije se počinje govoriti kako svaka algebarska jednadžba stupnja *n* ima točno *n* rješenja. Kao primjer navodimo jednadžbu:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

koja ima točno četiri rješenja, dvostruko rješenje $x = 1$ i jednostruka rješenja $x = i$ i $x = -i$.

Bezoutova teorija[1] kaže da se dvije algebarske krivulje reda *m/n* sijeku u točno *m/n* točaka (računajući kratnosti i točke beskonačnosti), a ta teorija ne bi vrijedila bez kompleksnih brojeva. Npr. pravac $y = x + 2$ ne siječe kružnicu $x^2 + y^2 = 1$, ako se uključuju samo realna rješenja, međutim siječe u točkama $\left(-1 - i\sqrt{2}/2, 1 - i\sqrt{2}/2\right)$ i $\left(-1 + i\sqrt{2}/2, 1 + i\sqrt{2}/2\right)$. I to je jedan od razloga zbog kojih su matematičari uveli korijene negativnih brojeva i same kompleksne brojeve.

Problem rješavanja kubne jednadžbe riješen je tek u 16. stoljeću. Za potrebe rješavanja uvedeni su kompleksni brojevi i operacije s njima. Sustavna teorija kompleksnih brojeva prvi put se pojavila 1572. godine u *Algebri* talijanskog matematičara Rafaela Bombellia[2].

Navedimo još neke zanimljive informacije vezane za povijest kompleksnih brojeva. Prvi oblik zadatka s obilježjem imaginarnog broja pojavljuje se 50 godina pr. Krista u djelu Stereometrica[3] Herona iz Aleksandrije.

Rene Descartes pridonosi razvoju kompleksnih brojeva uvodeći izraz *realni* i *imaginarni.*

1545. godine Girolamo Cardano[4] kompleksne brojeve naziva *fiktivnima.* Njegova želja je bila da podijeli 10 na dva dijela tako da njihov umnožak bude 40. Ta je rješenja pronašao uz izjavu da bi računanje tih brojeva bilo zahtjevno i besmisleno.

Caspar Wessel[5] uvodi način grafičkog prikazivanja kompleksnih brojeva, što je 1799. i objavljeno, ali nije dobilo na velikom značaju. Tek 100 godina poslije, za tu njegovu ideju o grafičkom prikazu kompleksnih brojeva, priznate su mu zasluge. Neovisno o Wesselu, Gauss je svojim utjecajem postigao univerzalno prihvaćanje kompleksnih brojeva smjestivši ih u ravninu.

1702. godine Gottfried Wilhelm von Leibniz[6] je opisao kompleksne brojeve kao: „prekrasni proizvod misaonog rada, gotovo amfibijski između stvari koje jesu i stvari koje nisu“.

## 2.2. ELEMENTI KOMPLEKSNOG BROJA

U skupu realnih brojeva kvadratni korijen može se računati samo iz nenegativnih brojeva jer ne postoji realan broj koji kvadriran daje negativan broj. Broj $\sqrt{-1}$ zvat ćemo imaginarnom jedinicom i označavati ga s $i$. Dakle, za $i$ vrijedi $i^2 = -1$. Tako je onda $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$. Svaki broj oblika $yi$, gdje je $y \in \mathbb{R}$, nazivamo imaginarnim brojem.

Kompleksni broj je svaki broj $z$ koji dopušta zapis $z = x + yi$, gdje su $x$ i $y$ realni brojevi. Takav zapis se naziva algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja $z$. Broj $x$ se naziva realni dio, a $y$ imaginarni dio kompleksnog broja $z$. Piše se:

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

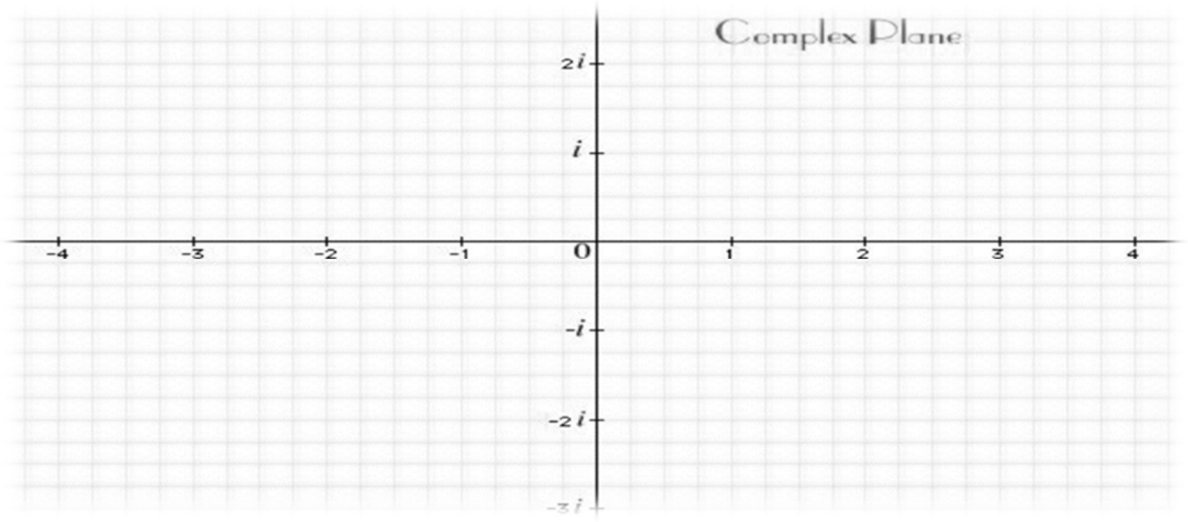
Svaki realni broj $x$ je kompleksan jer se može zapisati u obliku $x + 0i$. Svaki imaginarni broj $yi$ je kompleksan jer se može zapisati u obliku $0 + yi$. Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C}$. Dakle, $\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Ako je $z$ kompleksni broj s algebarskim prikazom $z = x + yi$, onda se broj $x - yi$ označava sa $\overline{z}$ i naziva konjugirano kompleksni broj broja $z$.

Brojevi $z$ i $\overline{z}$ čine jedan par kompleksno konjugiranih brojeva. Njihovi realni dijelovi su jednaki, a imaginarni dijelovi su suprotni realni brojevi. Vrijedi: $\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$. Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva uvijek je nenegativan realan broj.

Svaki kompleksni broj $z = x + yi$ može se poistovjetiti s točkom $(x, y)$ u koordinatnoj ravnini i obratno, uz uobičajeni Kartezijev koordinatni sustav. Apscise predstavljaju realne, a ordinate imaginarne dijelove pa se koordinatne osi u ovom slučaju zovu realna i imaginarna os. Na realnoj osi tada se nalaze svi čisto realni brojevi, a na imaginarnoj osi svi čisto imaginarni brojevi.

Koordinatna ravnina na kojoj su smješteni svi kompleksni brojevi poznata je kao kompleksna ili Gaussova ravnina.

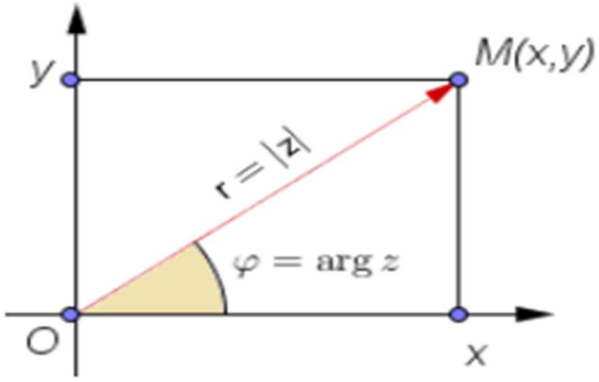



Slika 1. Kompleksna ravnina

Apsolutnu vrijednost ili modul kompleksnog broja $z$ označavamo s $|z|$. Ako je $z = x + yi$ algebarski prikaz broja $z$, onda je $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Geometrijski, gledano u kompleksnoj ravnini, apsolutna vrijednost broja $z = x + yi$ predstavlja udaljenost točke $(x, y)$ od ishodišta.

Bitno je spomenuti i trigonometrijski prikaz kompleksnog broja. Već smo napomenuli da je točka $(x, y)$ Gaussove ravnine jednoznačno pridružena algebarskom prikazu $z = x + yi$ kompleksnog broja $z$. Tu točku možemo opisati i zadavanjem koordinata $r$ i $\varphi$, gdje je $r = |z|$ i $\varphi$ kut što ga radij-vektor $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ zatvara s vektorom $\vec{i}$, tj. s pozitivnim smjerom osi $x$. Koordinate $r$ i $\varphi$ nazivamo polarnim koordinatama kompleksnog broja $z$. Za kut $\varphi$ još koristimo oznaku $\arg z$ i nazivamo ga argumentom od $z$. Dakle, pišemo $\varphi = \arg z$.




Slika 2. Položaj točke $M(x, y)$ opisan polarnim koordinatama

Nije teško vidjeti da je $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ i $\sin\varphi = \frac{y}{r}$. Stoga vrijedi zapis:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

koji se naziva trigonometrijski prikaz kompleksnog broja $z$.

Napišimo još i Eulerovu formulu, koja povezuje trigonometrijske funkcije sinus i kosinus s eksponencijalnom funkcijom. Za bilo koji broj $x$ vrijedi:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Bitno je napomenuti da se u toj formuli vrijednost kuta $x$ mjeri u radijanima, a ne u stupnjevima.

Eulerova formula može se predstaviti na način da funkcija $e^{ix}$ rotira oko koordinatnog početka kompleksne ravnine pri čemu $x$ prima vrijednost iz domene realnih brojeva. U tom slučaju $x$ je kut između osi, koja prolazi ishodištem kompleksne ravnine i odgovarajućom

točkom na jediničnoj kružnici, i pozitivne realne osi. Pri tome os (vektor u kompleksnoj ravnini) rotira u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
Eulerova formula omogućava prijelaz iz prikaza kompleksnog broja u Kartezijevim koordinatama u prikaz u polarnim koordinatama.

Prikaz kompleksnih brojeva u polarnim koordinatama pojednostavnjuje složenije operacije s kompleksnim brojevima, kao što su množenje i potenciranje, a iz razloga što se bilo koji broj $z = x + iy$ može zapisati kao:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Onda je:

$$z = x - iy = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|e^{-i\varphi}, \text{ gdje je}$$

$x = \mathrm{Re}(z),$
$y = \mathrm{Im}(z),$
$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}.$

Eulerova formula omogućava da funkcije kosinus i sinus zapišemo pomoću eksponencijalne funkcije.

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Te formule izvodimo rješavanjem sustava

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$$

s nepoznanicama $\cos x$ i $\sin x$.

Osnovne operacije s kompleksnim brojevima su zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Operacije zbrajanja i množenja su komutativne i asocijativne te su povezane svojstvom distributivnosti. Skup $\mathbb{C}$ je zatvoren s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje. To znači da je rezultat tih operacija s bilo koja 2 kompleksna broja opet kompleksan broj. Inače, kompleksni brojevi se zbrajaju (oduzimaju) tako što im se posebno zbrajaju (oduzimaju) realni, a posebno imaginarni dijelovi.

Kod množenja kompleksnih brojeva pojavljuju se potencije imaginarne jedinice. Potencije imaginarne jedinice su:

$$i^1 = 1,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1.$$

Nije teško vidjeti da nije potrebno računanje većih potencija od ovih koje smo napisali jer se one periodički ponavljaju. Kompleksni brojevi se dijele racionalizacijom nazivnika. Racionalizacija nazivnika je postupak u kojem se eliminira korijen u nazivniku. U tu svrhu se koristi jednakost

$$(x - yi)(x + yi) = x^2 + y^2.$$

Da bismo se ,,oslobodili" broja $i$ u nazivniku potrebno je brojnik i nazivnik pomnožiti s brojem koji je konjugirano kompleksan nazivniku (dakle, proširujemo zadani razlomak). Na taj način dijeljenje kompleksnih brojeva svodimo na množenje kompleksnih brojeva.

# 3. PRIMJENA KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kompleksni brojevi imaju konkretne i bitne uloge u različitim znanstvenim područjima i drugim srodnim područjima unutar tih znanosti. Tu spadaju obrada signala, elektrotehnika i elektromagnetizam, geometrija fraktala i trokuta, dinamika fluida, analiza vibracija, teorija kontrole i druge znanosti.

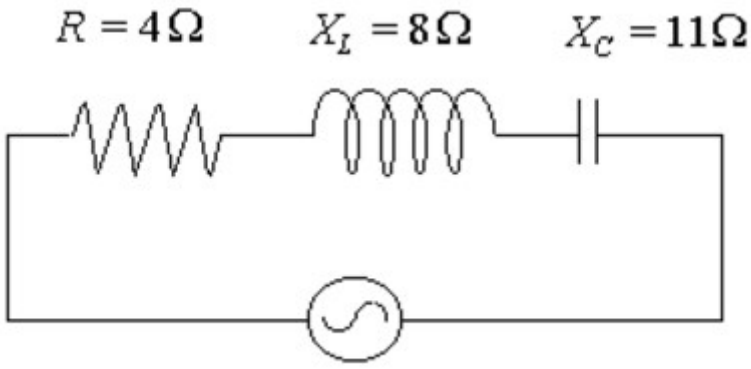
Najjednostavniji i zanimljiv primjer primjene kompleksnih brojeva je primjer jednog električnog piano-a čija svaka tipka proizvodi drukčiji ton. Kontrola glasnoće mijenja amplitudu (glasnoću) svih tipki za istu veličinu (iznos). Na taj način prikazano je kako realni brojevi afektiraju signale. Zamisle li se filteri sada, koji omogućuju da neke tipke proizvode dublje tonove, a neke nježnije, ovisno o frekvenciji, to predstavlja kompleksne brojeve. Dakle, oni omogućuju izračune nekih „dodatnih dimenzija".

## 3.1. PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI I ELEKTROMAGNETIZMU

Jedna od najvažnijih primjena kompleksnih brojeva vezana je uz teoriju elektriciteta, odnosno izmjenične struje.

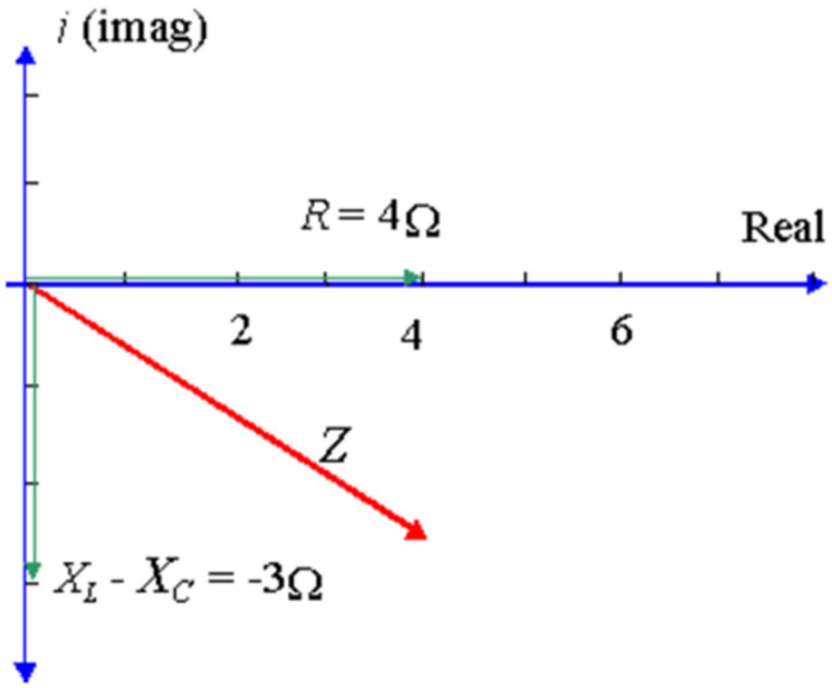
Za opis izmjeničnog napona potrebna su dva parametra: faza i amplituda. Stoga se izmjenični napon opisuje uređenim parom amplitude i faze, što se može shvatiti kao vektor (radij-vektor točke) u ravnini s Kartezijevim koordinatnim sustavom ili kao kompleksan broj u kompleksnoj ravnini. To se vrlo često primjenjuje jer su računi jednostavniji. Naime, računi sa sinusima i kosinusima realnih brojeva se tako, pomoću Eulerove formule[7], svode na račune s eksponencijalnim funkcijama.

Kao primjer primjene naveden je zadatak dizajniranja jednostavnog strujnog kruga s izmjeničnom strujom i određivanje njegove kompleksne impedancije, koju ćemo označavati sa $\underline{Z}$. Inače, impedancija $Z = |\underline{Z}|$ je ukupan električni otpor u strujnom krugu izmjenične struje.




Slika 3. Strujni krug

U kompleksnoj ravnini mogu se lako prikazati vrijednosti otpora kondenzatora $X_C$, otpornika $R$ i induktora $X_L$. Tu se otpor otpornika prikazuje na realnoj osi, dok se otpor induktora nalazi na pozitivnom dijelu, a otpor kondenzatora na negativnom dijelu imaginarne osi. Imaginarnu jedinicu ovdje označavamo s $j$ jer se u fizici struja označava s $i$.




Slika 4. Prikaz otpora u kompleksnoj ravnini

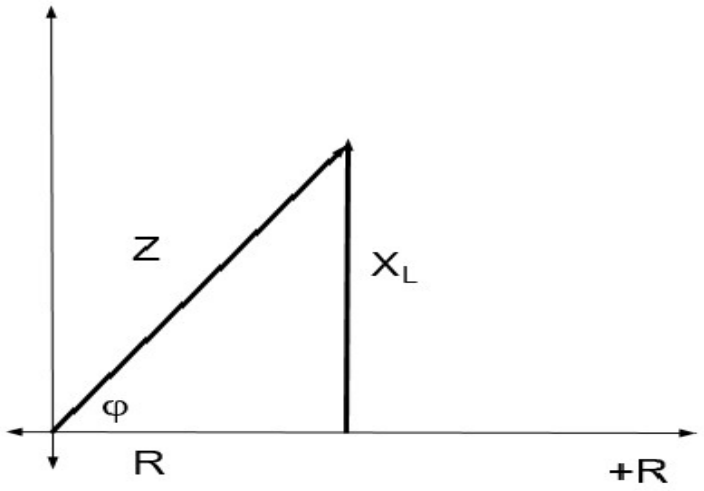
S obzirom da je $X_L - X_C = 8\Omega - 11\Omega = -3\Omega,$ dobivamo da je kompleksna impedancija $\underline{Z} = (4 - 3j)\Omega.$ Dobiveno rješenje možemo zapisati i u polarnim koordinatama. Uz malo računanja, dobije se: $r = 5,\ \varphi = -36.87^{\circ}.$

Oblik strujnog kruga jednostavno je opisan kroz dva broja - napon $V$ i struju $i.$ Također može postojati električni kapacitet $C$ i induktivitet $L$ koji opisuju tendenciju odupiranja promjenama napona i struje. Struja $i$ i napon $V$ su dva realna broja koji se također mogu iskazati u kompleksnom zapisu $z = V + ij.$ Isto tako, kapacitet $C$ i induktivitet $L$ se mogu promatrati u kompleksnom zapisu $w = C + Lj.$

Primjer: Izračun serijskog spoja izmjenične impedancije.

Svitak radnog otpora $R = 20\Omega$ i induktiviteta $L = 240mH,$ priključen je ne mrežu frekvencije $50Hz.$ Odredimo kompleksnu impedanciju svitka u ortogonalnom (algebarskom), polarnom i eksponencijalnom obliku.

$R = 20\Omega$
$L = 240mH = 0.24H$
$f = 50Hz$
$\underline{Z} = ?$




Slika 5. Skica zadatka

$$\underline{Z} = R + jX_L = R + j\omega L = R + j2\pi f \cdot L \approx (20 + j75.36)\Omega;$$

$$r = Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2} \approx \sqrt{20^2 + 75.36^2}\Omega = \sqrt{400 + 5679.13}\Omega = \sqrt{6079.13}\Omega \approx 77.9688\Omega;$$

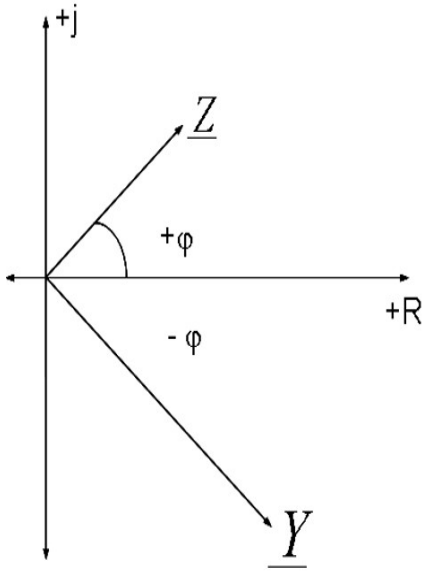
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X_L}{R} \approx \operatorname{arctg}\frac{75.36}{20} = \operatorname{arctg} 3.768 \approx 1.31138 \approx 75.1749^\circ;$$

$$\underline{Z} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \approx 77.9688(\cos 75.1749^\circ + j\sin 75.1749^\circ)\Omega;$$

$$\underline{Z} = re^{j\varphi} \approx 77.9688e^{j1.31138}\Omega.$$

U ovom slučaju $Z$ predstavlja impedanciju (tj. prividni ili ukupni otpor), $R$ rezistanciju (radni ili omski otpor), $X_L$ i $X_C$ reaktanciju (reaktivni otpor, odnosno induktivni i kapacitivni otpor); $\underline{Z}$ je kompleksna impedancija.

Izračunajmo još i kompleksnu impedanciju svitka (ortogonalni i polarni oblik) kompleksne admitancije $\underline{Y} = (0.03 - j0.01)S.$




Slika 6. Skica zadatka

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0.03 - j0.01}\Omega$$

$$r = |\underline{Y}| = \sqrt{0.03^2 + 0.01^2}S = \sqrt{0.001}S \approx 0.0316S$$

$$-\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-0.01}{0.03} = \operatorname{arctg}(-0.\overline{3}) \approx -0.321751 \approx -18.44^\circ$$

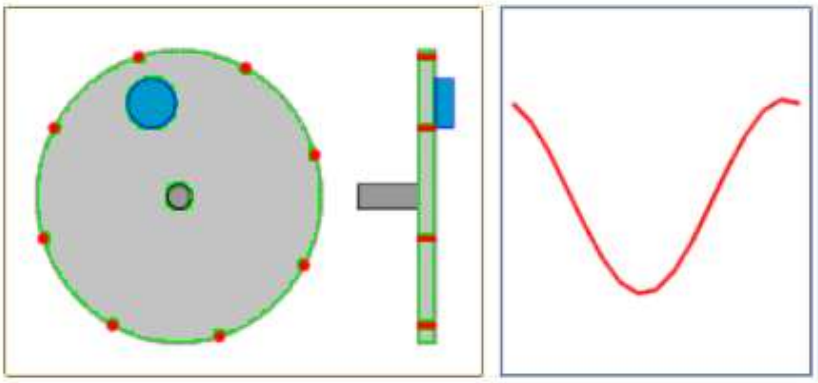
$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{r\left[\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)\right]} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\cos 0 + j\sin 0}{\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + j\sin\varphi) \approx$$

$$\approx 31.646(\cos 18.44^\circ + j\sin 18.44^\circ)\Omega \approx (30 + j10)\Omega.$$

Nadalje, kompleksni brojevi se često koriste u elektronici. Elektronika proučava i koristi sustave čiji se rad temelji na kontroli protoka elektrona i drugih nositelja električnog naboja od dijelova od kojih su izgrađeni. U ovom slučaju primjena kompleksnih brojeva pojednostavnjuje razumijevanje i analiziranje izmjeničnih signala. Kako bi se shvatilo koliko primjena kompleksnih brojeva pojednostavnjuje rješavanje pojedinih problema treba znati prepoznati gdje ih se i kako može primijeniti.

Za dobivanje jasne slike primjene i značenja naveden je mehanički primjer, odnosno zamišljeni kolut koji rotira i na kojem se nalazi još jedan manji kolut koji kruži skupa s njim, i koji rotira jednakom brzinom.



Slika 7. Rotiranje koluta i sinusoida

Promatrajući sliku i rotiranje, poprečno, dobiva se drukčija slika, odnosno mali plavi kolut oscilira gore dolje. Ako se osciliranje plavog koluta (poprečno promatrano) ucrta na graf, uzimajući u obzir da se kreće stalno istom brzinom, kao rezultat nastaju sinusoidni valovi koji osciliraju kroz jedan ciklus svaki put kada plavi kolut napravi puni krug.

Navedeni primjer se može primijeniti pri analiziranju i razmatranju bilo kojeg osciliranja u elektroničkim sklopovima. Dakle, i struja i naponi su nešto što oscilira jednakom brzinom. Ono što je vidljivo predstavlja realni dio, a neke druge promjene koje se mogu događati i koje je moguće zamisliti predstavljaju imaginarni dio. Ono što je vidno prilikom tih oscilacija određeno je faznim kutom koji se mijenja ovisno o vremenu i kretanju.

Zamišljene oscilacije sinusoidnih valova i promjene faznih kutova koje uzrokuju te oscilacije svojom konstantnom brzinom, poznate su kao frekvencija signala.

## 3.2. ANALIZA SIGNALA

Signal je medij, odnosno nosilac određene informacije. Tako npr. električni signali nose informacije o temperaturi, o adresi Web poslužitelja, o visini glasa i tako dalje.

Kompleksni brojevi se upotrebljavaju u analizi signala i drugim srodnim poljima kao prikladan opis za periodičku izmjenu signala. Za sinusoidni val određene frekvencije, apsolutna vrijednost $|z|$ predstavlja amplitudu, a argument $\arg(z)$ predstavlja fazu.

Fourier[8] je u svojim analizama tvrdio da se svaki signal s realnom vrijednošću može napisati kao zbroj periodičkih funkcija oblika $x(t) = Ae^{i\omega t}$, gdje $\omega$ predstavlja kutnu frekvenciju, a $A$ fazu i amplitudu.

Fourierove analize proizlaze iz ideje da se svaka periodička funkcija-signal može zapisati kao suma (ne nužno konačna) sinusa različitih faza, amplituda i frekvencija. Takva suma se naziva Fourierov red. Motivacija pri stvaranju analiza bila je ideja da se riješi problem parcijalne diferencijalne jednadžbe za širenje topline u čvrstim tijelima. Fourierova tvrdnja da se sve funkcije mogu razviti u trigonometrijski red stvorila je kod drugih matematičara otpor prema prihvaćanju njegovog rada o širenju topline. Ipak, u današnjem svijetu uznapredovale tehnike i tehnologije, mogli bismo reći da su Fourierove ideje svakim danom sve razvijenije. Tu spadaju: diskretna Fourierova transformacija i algoritam za brzo i efikasno izračunavanje DFT u vremenu i brza Fourierova transformacija koja je temelj velikog dijela modernih multimedijskih primjena, kao što su MP3, JPEG itd.

Iako je prilikom razvoja funkcije u Fourierov red postavljen uvjet da ta funkcija bude periodična, njegov rad se može primijeniti i na neperiodične funkcije u nekim intervalima, uz uvjet da ih se učini periodičnima. Tako možemo uzeti da je interval na kojem promatramo neku funkciju zapravo period te funkcije.

Pretpostavimo da za neku periodičnu funkciju (ili signal) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s periodom $2\pi$, treba odrediti $a_0, a_k, \phi_k \in \mathbb{R}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ tako da u skoro svakoj točki intervala $[-\pi, \pi]$ vrijedi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k \cdot x + \phi_k), \quad n \geq 0,$$

gdje je $a_k$ amplituda, a $\phi_k$ ima ulogu faze za sinusnu funkciju frekvencije $k$. Zaseban član $\frac{a_0}{2}$ služi za translaciju funkcije duž osi $y$. Navedena funkcijska jednakost može se primjenom adicijske formule za sinusnu funkciju

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

napisati u obliku:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\left[\sin(kx)\cos\phi_k+\cos(kx)\sin\phi_k\right]= \\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\sin\phi_k\cos(kx)+a_k\cos\phi_k\sin(kx)\right],\quad n\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

U novoj formuli $\sin\phi_k$ i $\cos\phi_k$ ne ovise ni o varijabli $x$ ni o $k$. To su brojevi koji su dio koeficijenta uz $\cos(kx)$ i $\sin(kx)$. Stoga se mogu definirati novi koeficijenti $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ u kojima će implicitno biti uključen i $\phi_k$. Tako se dobiva:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right],\quad n\geq 0. \tag{2}$$

Sada se traženje Fourierova reda svodi na traženje koeficijenata $a_k$ i $b_k$. Stoga više nije potrebno eksplicitno promatranje faze pojedine sinus funkcije, već je dovoljno tražiti koeficijente, odnosno amplitude uz sinus i kosinus.

Postavlja se pitanje vrijedi li navedena formula za svaku periodičnu funkciju $f(x)$ i može li se svaka periodička funkcija zapisati kao suma sinusa i kosinusa različitih amplituda i frekvencija ? Da bismo bolje razumjeli odgovor na postavljeno pitanje, prisjetimo se elementarne tvrdnje diferencijalnog računa koja kaže da je zbroj dviju $m-$puta derivabilnih funkcija, gdje je $m\in\mathbb{N}$, također $m-$puta derivabilna funkcija. Sinus i kosinus su $m-$puta derivabilne funkcije, pa je i svaka njihova konačna suma takva. Uz sve navedene činjenice, čini se da je nemoguće razviti nederivabilnu funkciju u ovako definiran Fourierov red.

Uzmimo da u jednakosti $(2)$ $n\to\infty$ (time povećavamo točnost te jednakosti ako red na njenoj desnoj strani konvergira) pa pokušajmo odrediti koeficijente $c_k$ za $k\in\mathbb{Z}$ tako da vrijedi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}.$$

Pri izvođenju formula za koeficijente $c_k$ koristit ćemo Eulerovu formulu i sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} z+\overline{z}&=\operatorname{Re}(z)+\cancel{i\operatorname{Im}(z)}+\operatorname{Re}(z)-\cancel{i\operatorname{Im}(z)}=2\operatorname{Re}(z),\\ z-\overline{z}&=\cancel{\operatorname{Re}(z)}+i\operatorname{Im}(z)-\cancel{\operatorname{Re}(z)}+i\operatorname{Im}(z)=2i\operatorname{Im}(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Pretpostavimo najprije da za svaki $k\in\mathbb{N}$ postoji $c_k$ takav da vrijedi funkcijska jednakost

$$c_k e^{ikx}+\overline{c_k e^{ikx}}=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx).$$

Izraz

$$c_k e^{ikx}+\overline{c_k e^{ikx}}=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

je ekvivalentan izrazu:

$$c_k\left[\cos(kx)+i\sin(kx)\right]+\overline{c_k}\left[\cos(kx)-i\sin(kx)\right]=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx),$$

tj. izrazu

$$\left(c_k+\overline{c_k}\right)\cos(kx)+i\left(c_k-\overline{c_k}\right)\sin(kx)=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

iz kojeg, po $(3)$, slijede jednakosti:

$$\begin{aligned} a_k&=c_k+\overline{c_k}=2\operatorname{Re}(c_k),\\ b_k&=i\left(c_k-\overline{c_k}\right)=i\cdot 2i\operatorname{Im}(c_k)=-2\operatorname{Im}(c_k). \end{aligned}$$

Stoga je $a_k+ib_k=2\operatorname{Re}(c_k)-2i\operatorname{Im}(c_k)$ i

$$\overline{c_k}=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)\Leftrightarrow c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k). \tag{4}$$

Nadalje, primijetimo da za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \overline{c_k e^{ikx}}&=\overline{c_k}\cdot\overline{e^{ikx}}=\overline{c_k}\cdot\overline{\left[\cos(kx)+i\sin(kx)\right]}=\overline{c_k}\left[\cos(kx)-i\sin(kx)\right]\overset{(*)}{=}\\ &\overset{(*)}{=}\overline{c_k}\left[\cos(-kx)+i\sin(-kx)\right]=\overline{c_k}\cdot e^{i(-kx)}=\overline{c_k}\cdot e^{i(-k)x}=\overline{c_k}\cdot e^{-ikx} \end{aligned} \tag{5}$$

U jednakosti $(*)$ koristili smo neparnost funkcije sinus i parnost funkcije kosinus.

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ uvedimo oznaku: $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Onda iz jednakosti $(5)$ slijedi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k e^{ikx} + \overline{c_k} \cdot e^{i(-k)x}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{i(-k)x}\right] \overset{(**)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{i(-k)x} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Jednakost $(**)$ vrijedi samo ako redovi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{i(-k)x}$ konvergiraju.

Uzmemo li još da je $b_0 = 0$ (a to možemo napraviti jer je ionako $\sin(0x) = \sin 0 = 0$), po $(4)$, imamo:

$$c_0 = c_0 e^{i\cdot 0\cdot x} = \frac{1}{2}(a_0 - ib_0) = \frac{a_0}{2}$$

pa zaista možemo pisati

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Računanje koeficijenta $c_j$ za funkciju $f(x)$ zadanu na segmentu $[-\pi, \pi]$ izvodi se dijeljenjem jednakosti

$$f(x) = \ldots + c_{j-1} e^{i(j-1)x} + c_j e^{ijx} + c_{j+1} e^{i(j+1)x} + \ldots,$$

s $e^{ijx}$ (što je različito od nule). Slijedi da je:

$$c_j = f(x) e^{-ijx} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq j}}^{\infty} c_k e^{i(k-j)x},$$

za svaki $c_j \in \mathbb{Z}$. Uzmemo li da je $c_j$ konstanta, integriranjem obje strane zadnje jednakosti po varijabli $x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$, dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_j dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq j}}^{\infty} c_k e^{i(k-j)x} dx,$$

$$c_j \pi - (-c_j \pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq j}}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-j)x} dx,$$

$$2\pi c_j = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq j}}^{\infty} \frac{1}{i(k-j)} c_k \left[e^{i(k-j)\pi} - e^{-i(k-j)\pi}\right],$$

za $j \in \mathbb{Z}$. Uočimo da je i $k - j \in \mathbb{Z}$. Stoga je

$$e^{i(k-j)\pi} - e^{-i(k-j)\pi} = 2i\sin(k-j)\pi = 0$$

i time se cijela suma poništila. Ako se jednadžba podijeli s $2\pi$, dobije se formula za $j-$ti koeficijent Fourierovog reda:

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos(jx) - i\sin(jx)\right]dx =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx}_{=\mathrm{Re}(c_j)} + i\underbrace{\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)\,dx\right]}_{=\mathrm{Im}(c_j)}.$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos(kx) - i\sin(kx)\right]dx =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx}_{=\mathrm{Re}(c_k)} + i\underbrace{\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\right]}_{=\mathrm{Im}(c_k)}$$

pa je

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}_0$$

i

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Primjer: Nađimo Fourierov red $S(x)$ funkcije $f(x) = x, \quad -\pi \le x \le \pi.$

Kako je zadana funkcija $f$ neparna, onda je $a_k = 0$ za svaki $k \ge 0$.
Za svaki $k \ge 1$ vrijedi:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ v = \int \sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{array}\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{k}\cos(k\pi) =$$
$$= \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Dakle,

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)=2\left[\sin x-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\ldots\right].$$

Primijetimo da je zadana funkcija $f$ neprekidna. Stoga, po Dirichletovom teoremu, u svakoj točki $x\in\langle -\pi,\pi\rangle$ vrijedi:

$$f(x)=S(x).$$

Osim toga je

$$S(-\pi)=S(\pi)=0=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2},$$

gdje je

$$f(-\pi+)=\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+} x=-\pi,$$
$$f(\pi-)=\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-} x=\pi.$$

Postoji puno praktičnih razloga zbog kojih se frekvencija prikazuje u obliku trigonometrijske sume. Ako je $f(x)$ signal (električni napon ili zvuk kojeg proizvodi neki instrument), onda prikaz tog signala u obliku trigonometrijske sume opisuje frekvencije pribrojnika u toj sumi. Sinusoida $\sin(kx)$ ima temeljni period $2\pi$ i frekvenciju $k$, odnosno titra $k$ puta u intervalu $0\le x\le 2\pi$. Npr. signal $2\sin x-50\sin(3x)+10\sin(200x)$ sadrži pribrojnike s frekvencijama 1, 3, 200. S obzirom na veličine koeficijenata koji se nalaze ispred funkcije sinus, pribrojnik s frekvencijom 3 ima puno veći utjecaj od preostalih dvaju pribrojnika. Ti pribrojnici se zovu harmonici.

Jedna od glavnih zadaća signalne analize jest eliminacija visokofrekventnih zvukova, a jedan od načina je i primjena prije spomenutih Fourierovih analiza, odnosno redova, tako da visokofrekventni koeficijenti $a_k$ i $b_k$, za velike $k$, budu jednaki 0.

Drugi zadatak signalne analize je sažimanje podataka. Tu je cilj poslati signal s najmanjim mogućim brojem podataka. Jedan pristup rješavanja takvog problema je opet prikaz signala u obliku trigonometrijske sume, te slanje samo onih koeficijenata $a_k$ i $b_k$ koji su veći od zadane tolerancije. Manji koeficijenti imaju zanemariv utjecaj na funkciju, pa se mogu odbaciti.

## 3.3. FRAKTALI

Fraktali su geometrijski objekti čija je fraktalna dimenzija (vrijednost koja daje uvid u to u kojoj mjeri neki fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi) strogo veća od topološke dimenzije (broj smjerova u kojima se može ići u određenom objektu). To znači da je određeni fraktal moguće uvećati beskonačno puta, a da se svakim povećanjem vide neki novi detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi i da količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka.

Fraktali se sastoje od umanjenih inačica samih sebe, ali su toliko nepravilni da se ne mogu opisati jednostavnom geometrijom.

Postoji mnogo načina na koji se fraktali klasificiraju. Jedan od njih je svrstavanje po stupnju sličnosti. Prvu skupinu čine potpuno samoslični fraktali, tj. oni čiji je svaki dio identičan cijelom fraktalu. Tu spadaju svi geometrijski fraktali (trokuti, Hilbertova krivulja, Cantorov skup, Kochova krivulja). Gotovo samoslični fraktali formiraju drugu skupinu. To su fraktali čiji je svaki dio iskrivljena kopija cjeline (Mandelbrotov i Julijin skup). Treća skupina su fraktali statičke samosličnosti, odnosno oni koji ne sadrže kopije samog sebe, ali neke osobine, kao na primjer fraktalna dimenzija, ostaju iste pri različitim mjerilima (Perlinov šum).

Prema načinu nastanka razlikuju se tri podvrste. To su: iterativni koji nastaju rotiranjem ili translatiranjem kopije, te mogućim zamjenjivanjem nekog elementa kopijom, rekurzivni koji su određeni rekurzivnom matematičkom formulom koja određuje pripada li određena točka prostora (npr. kompleksne ravnine) skupu ili ne pripada i treća skupina - slučajni ili random fraktali koji posjeduju najmanji stupanj samosličnosti (to su najčešće prirodni fraktali, kao npr. obale, drveće, oblaci, …).

Što se tiče primjene fraktala, najjednostavnija se odnosi na primjenu u računalnoj grafici za crtanje terena, posebno planina. Pomoću sustava iteriranih funkcija u tri dimenzije moguće je kreirati raznoliko raslinje (drveće, grmove i slično). Od manje važnih primjena tu je predviđanje nekih stohastičkih procesa kao što su potresi, slaganje snopova optičkih vlakana, oponašanje rada neuronskih mreža za razvoj umjetne inteligencije i tako dalje.

Kao najkompleksnija skupina fraktala navedeni su Julijin skup i „očaravajući“ Mandelbrotov skup.

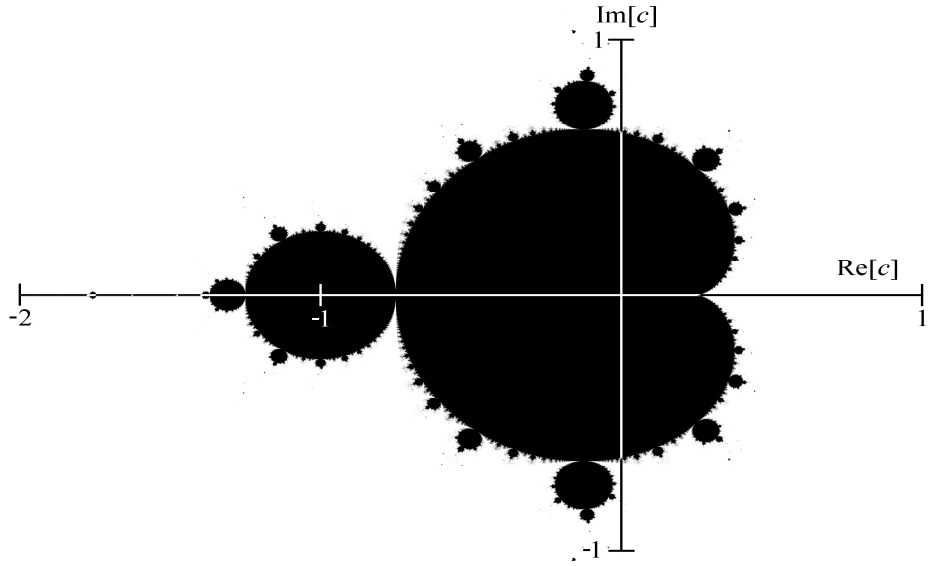
Julijin skup je dobio ime po francuskom matematičaru Gastonu Juliji. Taj skup je granica dvaju skupova točaka $z_0 = x + yi$: onog gdje niz $z_{n+1} = f\left(z_n\right),$ za proizvoljno odabranu funkciju $f,$ konvergira nekoj vrijednosti te onog gdje taj niz divergira (teži u beskonačnost).

Julijin skup se obično, kao i svi algebarski fraktali, prikazuje tako da su točke koje konvergiraju crne, a one koje divergiraju su u raznim nijansama iste ili različitih boja. Nijansa boja ovisi o brzini kojom niz raste. Što se više odmičemo od Julijinog skupa, niz brže raste.

Još jedna osobina, važna za fraktale, jeste povezanost odnosno nepovezanost. Julijin je skup povezan, ako je skup kojeg okružuje kompaktan (cjelovit/jedinstven).

Mandelbrotov skup je skup točaka $c$ kompleksne ravnine za koje je Julijin skup povezan. Ime je dobio po francusko-američkom matematičaru Benoitu Mandelbrotu.

Mandelbrotov skup je zatvoren skup kojemu su sve točke unutar kruga polumjera 2 sa središtem u ishodištu. Točka $c$ pripada Mandelbrotovom skupu samo ako vrijedi $\left|f_c^n\left(0\right)\right| \leq 2$ za sve $n \geq 0.$ Dakle, ako je apsolutna vrijednost od $f_c^n\left(0\right),$ za neki $n \geq 0,$ veća od 2, niz će divergirati, odnosno težiti u beskonačnost.




Slika 8. Mandelbrotov skup u kompleksnoj ravnini

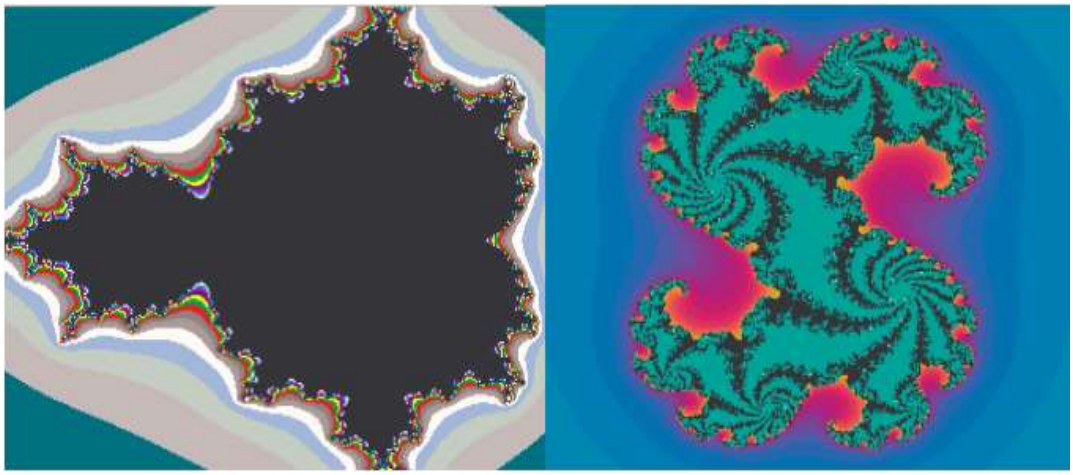
Mandelbrotov skup je kvazi samosličan, a to znači da se u njemu pojavljuju izmijenjene verzije njega samog. Izmijenjene su uglavnom zbog skupova točaka koji „vire“ iz njih povezujući ih s glavnim dijelom.

Moguće je napraviti Mandelbrotov skup pomoću funkcije:

$$f\left(z_{n-1}\right) = z_n^b + c, \quad b > 2.$$

Takve skupove nazivamo multibrot skupovima.

Kako Mandelbrotov skup obuhvaća i Julijine skupove, može se reći da je Mandelbrotov skup u stvari grafički prikaz skupa kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini.



Slika 9. Mandelbrotov i Julijin fraktalni skup

### 3.4. TEORIJA KONTROLE

Kontrolna teorija je interdisciplinarna grana inženjerske i računalne matematike koja se bavi proučavanjem ponašanja dinamičkih sustava s ulaznim jedinicama i kako se njihovo ponašanje mijenja ovisno o povratnim informacijama.

U teoriji kontrole, sustavi se transformiraju s vremenske domene u frekvencijsku domenu uz pomoć Laplaceove transformacije. Laplaceova transformacija rješava odziv sustava za bilo koji valni oblik. Tumači se kao transformacija iz područja vremena, gdje su ulazne i izlazne veličine funkcije vremena $t$, u područje kompleksne kružne frekvencije $p$.

Laplaceova transformacija je linearni operator na funkciji $f$ s realnim argumentom $t$ $(t \geq 0)$, koji je transformira u funkciju $F$ s kompleksnim argumentom $p$. Preciznije, Laplaceova transformacija (slika) funkcije $f(t)$ je funkcija $F(p)$ definirana sa:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

a umjesto $F(p)$, često se koristi i oznaka $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Primjer: Nađimo Laplaceovu sliku funkcije $f(t)=t.$

Najprije ćemo pokazati da za svaki $p\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ vrijedi da je $\int e^{pt}dt=\frac{1}{p}e^{pt}+C.$

Već znamo da je za svaki $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\int e^{pt}dt=\frac{1}{p}e^{pt}+C.$$

Pokažimo da isto vrijedi i za $p=iw,\ w\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

$$\int e^{pt}dt=\int e^{iwt}dt=\int(\cos wt+i\sin wt)dt=\int\cos wtdt+i\int\sin wtdt=$$
$$=\frac{1}{w}\sin wt-\frac{i}{w}\cos wt+C=-\frac{i}{w}(\cos wt+i\sin wt)+C=\frac{1}{iw}e^{iwt}+C=\frac{1}{p}e^{pt}+C.$$

Preostaje još provjeriti slučaj kad je $p=s+iw,\ s,w\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

$$\int e^{pt}dt=\int e^{(s+iw)t}dt=\int e^{st}(\cos wt+i\sin wt)dt=\underbrace{\int e^{st}\cos wtdt}_{=I_1}+i\underbrace{\int e^{st}\sin wtdt}_{=I_2}=$$
$$=\frac{e^{st}}{s^2+w^2}\left[(w+is)\sin wt+(s-iw)\cos wt\right]+C=$$
$$=\frac{e^{st}}{(s-iw)(s+iw)}\left[i(s-iw)\sin wt+(s-iw)\cos wt\right]+C=\frac{e^{st}}{s+iw}(\cos wt+i\sin wt)+C=$$
$$=\frac{e^{st}}{s+iw}e^{iwt}+C=\frac{1}{s+iw}e^{(s+iw)t}+C=\frac{1}{p}e^{pt}+C.$$

Rješenje integrala $I_1$ i $I_2$ :

$$I_1 = \int e^{st}\cos wt dt = \begin{bmatrix} u = e^{st} \Rightarrow du = se^{st}dt \\ v = \int \cos wt dt = \frac{1}{w}\sin wt \end{bmatrix} = \frac{e^{st}}{w}\sin wt - \frac{s}{w}\int e^{st}\sin wt dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{st} \Rightarrow du = se^{st}dt \\ v = \int \sin wt dt = -\frac{1}{w}\cos wt \end{bmatrix} = \frac{e^{st}}{w}\sin wt + \frac{s}{w^2}e^{st}\cos wt - \frac{s^2}{w^2}I_1$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{e^{st}}{s^2+w^2}\left(w\sin wt + s\cos wt\right) + C_1$$

$$I_2 = \int e^{st}\sin wt dt = \frac{e^{st}\sin wt - wI_1}{s} = \frac{e^{st}}{s}\sin wt - \frac{e^{st}}{s^2+w^2}\left(\frac{w^2}{s}\sin wt + w\cos wt\right) + C_2 =$$

$$= \frac{e^{st}}{s\left(s^2+w^2\right)}\left(s^2\sin wt + \cancel{w^2\sin wt} - \cancel{w^2\sin wt} - ws\cos wt\right) + C_2 =$$

$$= \frac{e^{st}}{s^2+w^2}\left(s\sin wt - w\cos wt\right) + C_2.$$

Nakon što smo pokazali da je za svaki $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\int e^{pt}dt = \frac{1}{p}e^{pt} + C,$$

prelazimo na određivanje Laplaceove transformacije zadane funkcije $f$. Označimo s $D_F$ domenu tražene funkcije $F$.

$$F(0) = \int_0^\infty te^{0t}dt = \int_0^\infty tdt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b tdt = \infty \text{ pa } 0 \notin D_F;$$

$$p = s + iw \neq 0 \Rightarrow F(p) = \int_0^\infty te^{-pt}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-pt}dt = \begin{bmatrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ v = \int e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^b + \frac{1}{p}\int_0^b e^{-pt}\right) = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t}{p} + \frac{1}{p^2}\right)e^{-pt}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{p^2}\left[1 - (pb+1)e^{-pb}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}(pb+1)e^{-pb} = p\lim_{b\to\infty}be^{-pb} + \lim_{b\to\infty}e^{-pb} = p\lim_{b\to\infty}be^{-(s+iw)b} + \lim_{b\to\infty}e^{-(s+iw)b} =$$

$$= p\lim_{b\to\infty}be^{-sb}\left(\cos wb - i\sin wb\right) + \lim_{b\to\infty}e^{-sb}\left(\cos wb - i\sin wb\right) =$$

$$= p\lim_{b\to\infty}be^{-sb}\cos wb - ip\lim_{b\to\infty}be^{-sb}\sin wb + \lim_{b\to\infty}e^{-sb}\cos wb - i\lim_{b\to\infty}e^{-sb}\sin wb.$$

Za $s \le 0$ nijedan od limesa u zadnjoj jednakosti ne postoji.

Uz dovoljno veliki $b,$ za sve $s, w \in \mathbb{R}$ takve da je $\sqrt{s^2 + w^2} > 0,$ vrijedi:

$$-be^{-sb} \le e^{-sb} \cos wb,\ e^{-sb} \sin wb,\ be^{-sb} \cos wb,\ be^{-sb} \sin wb \le be^{-sb}.$$

Za $s > 0$ je

$$\lim_{b\to\infty} be^{-sb} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^{sb}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{se^{sb}} = 0^+$$

pa je $\lim_{b\to\infty} (pb+1)e^{-pb} = 0.$

Dakle, $\mathrm{Re}(p) = s > 0 \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p^2}.$

Primijetimo da je $D_F = \{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(p) > 0\}.$

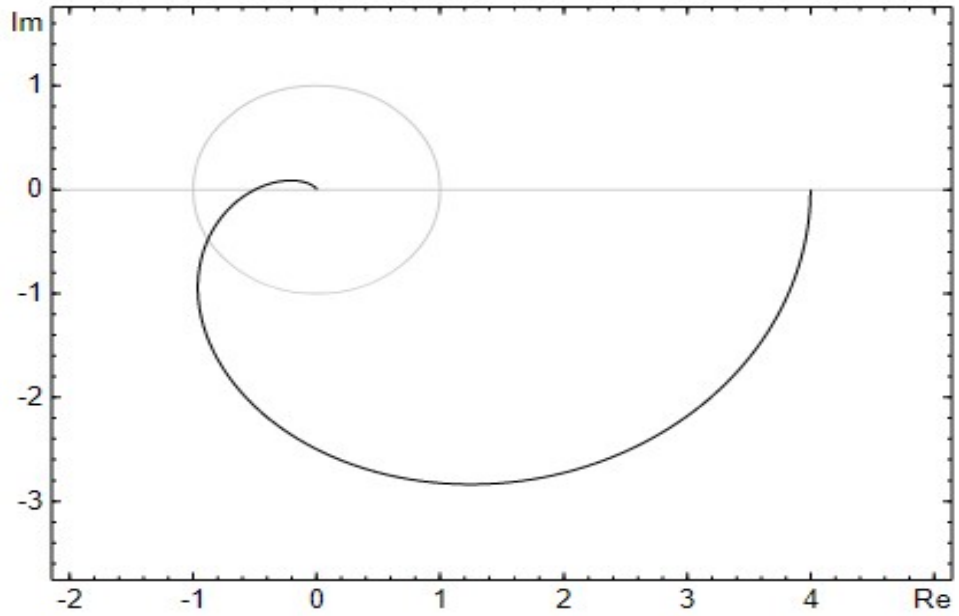
U primjeni je ova transformacija u osnovi bijektivna. Laplaceova transformacija je povezana s Fourierovom transformacijom, no ipak Laplaceova transformacija rješava odziv sustava za bilo koji valni oblik.

Polovi i nule tog sustava se analiziraju kroz kompleksnu ravninu. Navedeno se primjenjuje u geometrijskom mjestu korijena i u tehnikama Nyquistovog i Nicholsovog dijagrama. Nyquistova tehnika i Nicholsova tehnika su tehnike koje se koriste za analiziranje određenog sustava, odnosno hoće li sustav biti stabilan ili ne.

Za metodu geometrijskog mjesta korijena posebno je važno jesu li polovi i nule smješteni na lijevoj ili desnoj polovici kompleksne ravnine, odnosno je li im realni dio veći ili manji od nule. Ako linearni, vremensko nepromjenjiv (LTI) sustav, ima polove na desnoj polovici koordinatnog sustava - bit će nestabilan, ako su na lijevoj polovici, bit će stabilan, a ako su na imaginarnoj osi, onda će imati graničnu stabilnost.

Nyquistov dijagram je parametarski dijagram prijenosne funkcije. Najčešća primjena odnosi se na procjenu stabilnosti sustava s povratnom spregom. U koordinatnom sustavu, realni dio prijenosne funkcije nalazi se na osi $x,$ a imaginarni na osi $y.$ Frekvencija se dobiva kao parametar. U polarnim koordinatama, prijenosna funkcija predstavljena je kao radijalna koordinata, a faza kao kutna koordinata.

Procjena stabilnosti zatvorenog sustava s negativnom povratnom spregom vrši se primjenom Nyquistovog kriterija na Nyguistov dijagram otvorenog sustava. Sustav je lak za upotrebu čak i za sustave sa kašnjenjem i drugim neracionalnim prijenosnim funkcijama, koji se mogu činiti teškim za analizu pomoću drugih metoda. Stabilnost se određuje traženjem broja iz okruženja točke u $(-1,0)$. Raspon pojačanja stabilnosti sustava može se odrediti traženjem presjeka realne osi.




Slika 10. Nyquistov dijagram

# 4. ZAKLJUČAK

Svakodnevni, odnosno stvarni svijet sastoji se od sitnih čestica: protona, elektrona itd. Kvantna mehanika kaže da svaka od tih čestica izgleda kao val. Uobičajeni val ima određene vrijednosti, veličine, pomake i sl. u svakoj točki prostora. Amplitude (magnitude) valova u kvantnoj mehanici su kompleksne veličine. Cijeli stvarni svijet, sve što je vidljivo i opipljivo, sačinjeno je od nekih valova s kompleksnim amplitudama, što zapravo znači da se kompleksni brojevi u stvarnom životu pojavljuju svugdje.

Da bi se uočilo gdje se mogu primijeniti i kako bi se razumjela primjena i olakšanje koje pružaju kompleksni brojevi, neophodno je opširnije poznavati matematiku. To je vidljivo kroz primjere zadataka i metode koje su korištene za njihovo rješavanje.

S druge strane, primjena kompleksnih brojeva pojednostavnjuje i na neki način čini „elegantnijima“ rješenja nekih problema, ali njihova upotreba nije neophodna jer se svi problemi mogu riješiti i bez njih.

# POPIS SLIKA

Slika 1. Kompleksna ravnina ……..…….. 4
Slika 2. Položaj točke $M(x,y)$ opisan polarnim koordinatama ……... 5
Slika 3. Strujni krug ……..... 9
Slika 4. Prikaz otpora u kompleksnoj ravnini ……..…… 9
Slika 5. Skica zadatka …… 10
Slika 6. Skica zadatka …… 11
Slika 7. Rotiranje koluta i sinusoida ……..... 12
Slika 8. Mandelbrotov skup u kompleksnoj ravnini …….. 20
Slika 9. Mandelbrotov i Julijin fraktalni skup ……..... 21
Slika 10. Nyquistov dijagram ……..... 25

# LITERATURA


[1] http://e.math.hr/povmat/pov1.html , (28.05.2017)

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number#Control_theory , (28.05.2017.)

[3] http://documents.tips/documents/kompleksni-brojevi-seminarski.html , (28.05.2017.)

[4] http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/KUN08.pdf , (28.05.2017.)

[5] http://www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/complexinlife.html , (28.05.2017.)

[6] http://www.intmath.com/complex-numbers/9-impedance-phase-angle.php , (12.06.2017.)

[7] http://www.aes.hr/_download/repository/2_fourierovi_redovi(1).pdf, (12.06.2017.)

[8] http://e.math.hr/math_e_article/br19/matijevic, (12.06.2017.)

[9] http://www.zemris.fer.hr/predmeti/rg/labosi/vj9.htm., (14.06.2017.)

[10] http://e.math.hr/galerija/index.html , (14.07.2017.)

[11] file:///C:/Users/User/Downloads/cas12_Pages_4_6%20(3).pdf , (14.07.2017.)

[12] http://bs.matematika.wikia.com/wiki/Eulerova_formula#, (20.08.2017.)

[13] http://www.otsog.hr/wp-content/uploads/2014/03/Kompleksni-broj-u-elektrotehnici-2014.ppt , (27.08.2017.)

[1] Bezoutov teorem, (https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zout%27s_theorem)
[2] Rafael Bombelli, ( https://en.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli)
[3] Heron, (https://hr.wikipedia.org/wiki/Heron)
[4] Girolamo Cardano, (https://hr.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano)
[5] Caspar Wessel, (https://en.wikipedia.org/wiki/Caspar_Wessel)
[6] Gottfried Wilhelm von Leibniz (https://hr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz)
[7] Eulerova formula (https://hr.wikipedia.org/wiki/Eulerova_formula)
[8] Fourier J. (1768.-1830.) francuski matematičar i fizičar (https://bs.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier)