

# Računalni miš kao senzor pomaka s primjenom na torziono njihalo

---

Medunić, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:575431>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Maja Medunić

RAČUNALNI MIŠ KAO SENZOR POMAKA S  
PRIMJENOM NA TORZIONO NJIHALO

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI  
STUDIJ FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Maja Medunić**

Diplomski rad

**Računalni miš kao senzor pomaka s  
primjenom na torzijsko njihalo**

Voditelj diplomskog rada: izv.prof.dr.sc.Mario Basletić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.



Zahvale po potrebi. Ako zahvala nema ostaviti praznu stranicu.

## Sažetak

Kružno ili torzijsko njihalo je tijelo učvršćeno tako da može rotirati oko jedne osi. Najvažniji dio kružnog njihala je spiralna opruga, koja skupa sa kotačem sačinjava harmonijski oscilator. Cilj rada je nadodavanje eksperimentalnom postavu kružnog njihala element koji prati i bilježi pomake kotača u vremenu te na taj način služi kao precizan mjerni uređaj za proučavanje oscilacija. Za ovu svrhu koristili smo računalnog miša. U radu su objašnjeni najvažniji dijelovi eksperimentalnog postava. Opisano je kako je računalni miš uklopljen u postav korištenjem računalnog programa. Navedena su mjerenja koja su rađena i dani su njihovi rezultati.

Ključne riječi: harmonijski oscilator, kružno njihalo, računalni miš, rezonancija, rezonantna frekvencija, faktor prigušenja

# Computer mouse as displacement sensor with application to torsion pendulum

## **Abstract**

The torsion pendulum is a body fixed so that it can rotate about one axis. The most important part of the torsion pendulum is the coil spring, which together with the wheel forms a harmonic oscillator. The aim of this paper is to add to the experimental setup of a torsion pendulum an element that monitors and records wheel movements over time and thus serves as a precise measuring device for studying oscillations. We used a computer mouse for this purpose. The paper explains the most important parts of the experimental setup. It is described how a computer mouse was incorporated into the setup using a computer program. The measurements that have been made are listed and their results are given.

Keywords: harmonic oscillator, torsion pendulum, computer mouse, resonance, resonant frequency, attenuation factor

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
1.1	Općenito o harmoničkom oscilatoru . . . . .	2
1.2	Jednostavni harmonički oscilator . . . . .	3
1.3	Gušeni harmonijski oscilator . . . . .	11
1.4	Tjerani harmonički oscilator . . . . .	13
1.5	Rezonantna krivulja . . . . .	14
1.6	Primjer prisilnog i prigušenog titranja . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Eksperimentalni postav</b>	<b>17</b>
2.1	Kružno njihalo . . . . .	17
2.2	Računalni miš i program . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Rezultati eksperimenta</b>	<b>26</b>
3.1	Mjerenja, obrada podataka i rezultati za jednostavni harmonijski oscilator	27
3.2	Mjerenja, obrada podataka i rezultati za prigušeni harmonijski oscilator	31
3.3	Mjerenja, obrada podataka i rezultati za prisilni harmonijski oscilator .	34
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>40</b>
5.1	Uvod . . . . .	40
5.2	Nastavna priprema: matematičko njihalo . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Dodatak</b>	<b>55</b>
6.1	Princip rada računalnog miša . . . . .	55
6.2	Kôd računalnog programa . . . . .	57
	<b>Literatura</b>	<b>60</b>

# 1 Uvod

U ovom dijelu objasniti ćemo glavne pojmove i fizikalne zakonitosti čije je poznavanje baza za razumijevanje eksperimenta i interpretaciju dobivenih rezultata. Na kraju ćemo dati neke primjere kako se ova znanja koriste u izumima koji su u svakodnevnoj upotrebi.

## 1.1 Općenito o harmoničkom oscilatoru

U klasičnoj mehanici, harmonijskim oscilatorom smatra se svaki sustav na koji, kad je pomaknut iz ravnotežnog položaja, djeluje linearna sila koja je proporcionalna s pomakom u odnosu na taj ravnotežni položaj. Ukoliko promatramo gibanje u jednom smjeru, taj pomak možemo označiti sa  $\Delta x$ , a izraz za silu koja djeluje na sustav možemo zapisati kao:  $F = -k\Delta x$ , gdje je  $k$  konstanta koja je uvijek pozitivna. Silu za koju vrijedi ovaj izraz nazivamo povratna sila. Ona vraća tijelo u ravnotežni položaj. Smjer povratne sile uvijek je suprotan od pomaka, označeno u formuli s minusom [1].

Oscilatorno gibanje je gibanje koje se odvija oko ravnotežnog položaja. Periodičko gibanje je ponavljajuće gibanje, čije se jedno ponavljanje dogodi u vremenskom intervalu  $T$ , nazvanom period. Važno je naglasiti da je svako harmonijsko gibanje ujedno i periodično i oscilatorno. Svako oscilatorno gibanje je periodičko, no obrat ne vrijedi nužno. Primjer gibanja koje je periodičko ali nije oscilatorno, zbog čega ne spada pod harmonijska gibanja, je kruženje Zemlje oko Sunca. Isto vrijedi i za pomicanje kazaljke na satu [2].

Navest ćemo neke od primjera harmonijskih sustava iz svakodnevnog života [3].

- Dijete na ljuljački koje je izvučeno iz ravnotežnog položaja za mali kut i pušteno da se slobodno njiše.
- Djelić žice na muzičkim instrumentima.
- Bungee jumping pri kojem čovjek zakačen na elastičnu traku skače s mosta te u visećem položaju oscilira oko ravnotežnog položaja gore dolje zbog elastičnosti užeta.
- Bubnjić uha je elastična opna koja prima zvučne signale iz okoline i titra, te informacije šalje prema unutarnjem uhu [4].

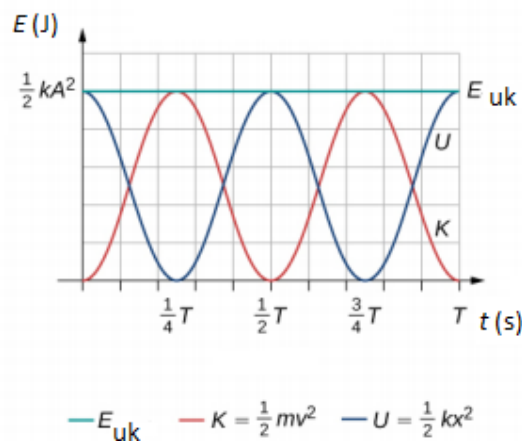
Primjer gibanja koje nije harmonijsko, a sliči harmonijskom gibanju:

- Savršeno elastični sudar loptice bačene o pod vertikalno koja zatim odskače. Iako ovo gibanje zadovoljava uvjet da je brzina u ravnotežnom položaju najveća a u maksimumu nula, odnosno najmanja, ovo gibanje se ne odvija oko ravnotežnog položaja (pod), niti je sila koja ga uzrokuje proporcionalna pomaku obzirom da se radi o gravitacijskoj sili [2].

Povratna sila ne mora biti jedina sila koja sudjeluje u formiranju oscilatornog gibanja, pa tako razlikujemo više vrsta oscilacija: jednostavni, gušeni i tjerani harmonijski oscilator.

## 1.2 Jednostavni harmonički oscilator

Glavno obilježje jednostavnog harmonijskog oscilatora je da na njega ne djeluju disipativne sile, kao što su npr. otpor fluida. Sila koja uzrokuje ovakvo gibanje je povratna sila, odnosno, povratna sila koja je proporcionalna s pomakom i koja je ujedno ukupna sila na tijelo. Mehanička energija, koju čine zbroj potencijalnih i kinetičke energije, je očuvana. Kada je potencijalna energija najmanja, tada je kinetička najveća, odnosno za jednostavne harmonijske oscilatore vrijedi da je brzina gibanja najveća u ravnotežnom položaju, dok je akceleracija najveća u amplitudnim položajima. Energija pohranjena u deformaciji jednostavnog harmonijskog oscilatora je oblik elastične potencijalne energije. Opisana je formulom  $E_{el} = kx^2/2$ , za oprugu, gdje je  $k$  konstanta opruge, a  $x$  pomak tijela na opruzi od ravnotežnog položaja, odnosno formulom  $E_{el} = mgL\theta^2/2$ , za njihalo, gdje je  $L$  duljina njihala, a  $\theta$  kut otklona njihala. Slika 1.1 prikazuje zakon očuvanja energije u jednostavnom harmonijskom oscilatoru.



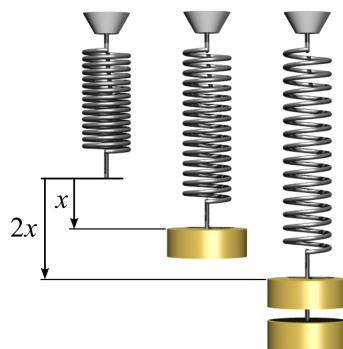
Slika 1.1: Graf mehaničkih energija za jednostavni harmonijski oscilator [5]

Amplitude jednostavnog harmonijskog oscilatora jednake su s obje strane ravnotežnog položaja, te je period svake oscilacije jednak [6].

Primjeri jednostavnih harmonijskih oscilatora su sustav tijela na opruzi i njihalo. Tijelo na opruzi je najjednostavniji primjer sustava na koji djeluje povratna sila. Na jedan kraj opruge je zakačena masa dok je drugi kraj učvršćen. Može biti postavljena vertikalno, te u tom slučaju u obzir moramo uzeti gravitaciju, ili horizontalno, na glatkoj podlozi s jako malim trenjem. Opruga slijedi Hookeov zakon:

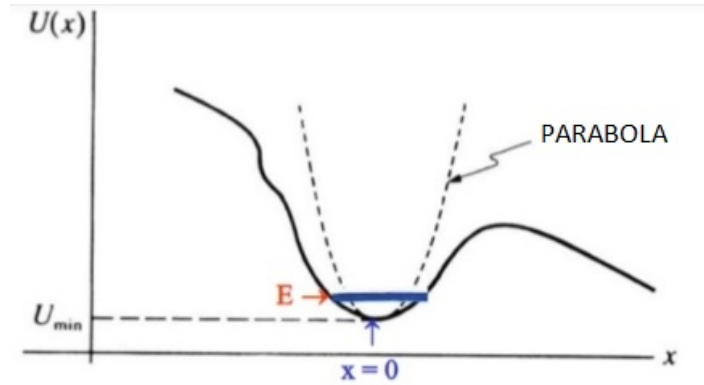
$$F = -kx, \quad (1.1)$$

gdje je  $k$  konstanta opruge koja opisuje kako se opruga opire stiskanju ili produljivanju. Što je  $k$  opruge veći, to se ona opire više, odnosno, teže ju je rastegnuti. Na slici 1.2 prikazana je opruga bez mase, te sustav opruge s jednim i dva utega.



Slika 1.2: Prikaz sustava tijela na opruzi [7]

Bitno je naglasiti da Hookeov zakon vrijedi samo za one pomake  $x$ , koji su mali u usporedbi s maksimalnom mogućom deformacijom opruge. Ukoliko su oscilacije velike, one postaju anharmonične, odnosno nelinearne [8]. Pokazat ćemo zašto Hookov zakon vrijedi samo za male pomake [10].



Slika 1.3: Graf potencijalne energije sustava tijela na opruzi [9]

Funkciju koja opisuje potencijalnu energiju sustava s oprugom prikazanu na slici 1.3 razvijamo Taylorovim razvojem oko ravnotežnog položaja:

$$U(x) = U_{\min} + x \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left. \frac{d^3U(x)}{dx^3} \right|_0 + \dots \quad (1.2)$$

Na slici 1.3 prikazan je ravnotežni položaj u točki  $x = 0$ , te ćemo to u izvodu uzeti razvoj oko nule. Prvi član ovog razvoja,  $U(x) = U_{\min}$ , je s fizikalnog gledišta proizvoljan, zato ga proglašavamo nulom i pojednostavljujemo izraz. Drugi član,  $x dU(x)/dx|_0$ , predstavlja prvu derivaciju funkcije potencijala u nuli. Sa slike 1.3 vidimo da funkcija ima lokalni minimum u  $x = 0$ , stoga ovaj član također isčezava. Više članove Taylorova razvoja zanemarimo uzimajući u obzir pretpostavku da su oscilacije oko ravnotežnog položaja male. Sada funkciju (1.2) možemo pisati skraćeno:

$$U(x) \cong \frac{1}{2!} x^2 \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_0. \quad (1.3)$$

Silu dobijamo preko potencijalne energije primjenjujući funkciju gradijenta na slijedeći način:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (1.4)$$

Za titranje u jednoj dimenziji, izraz za silu glasi:  $F(x) = -dU(x)/dx$ . Sada, definirajući konstantu opruge

$$k = \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_0 \quad (1.5)$$

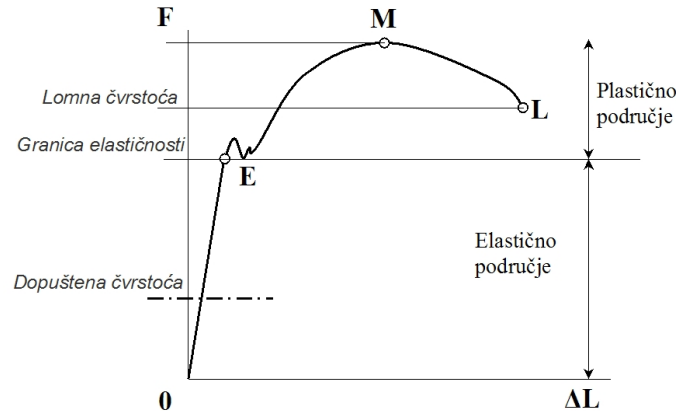
dobijamo:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \approx -kx \quad (1.6)$$



odnosno relaciju (1.1). Obzirom da smo zanemarili više članove Taylorova razvoja potencijalne energije u izvodu za silu, slijedi da je Hookeov zakon aproksimacija prvog reda pravog odgovora elastičnih tijela na primijenjenu silu, stoga zakon ne vrijedi nakon što sila pređe određenu granicu [10].

Hookeov zakon vrijedi, do neke mjere, i u mnogim drugim situacijama gdje dolazi do deformacije elastičnog tijela. Takva tijela nazivaju se linearno-elastična.



Slika 1.4: Dijagram naprezanja za meki čelik [11]

Vidimo na slici 1.4 kako je sila linearna za male pomake koji su tu naznačeni sa  $\Delta L$ . Točka E predstavlja granicu elastičnosti, odnosno granicu nakon koje kad se opruga produljiva ili sabija više ne vrijedi Hookeov zakon.

Promotrimo gibanje tijela pod utjecajem linearne sile opisane jednadžbom (1.1). Drugi Newtonov zakon nam daje jednadžbu gibanja:

$$ma = \sum_{\substack{\text{sile na} \\ \text{tijelo}}} F \quad (1.7)$$

Sada, znajući da jedina sila koja daje gibanje je povratna sila, možemo pisati:

$$ma = -kx \quad (1.8)$$

Za akceleraciju,  $a$ , vrijedi:

$$a = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad (1.9)$$

To se još piše kao:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.10)$$

gdje smo uveli pokratu:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} > 0 \quad (1.11)$$

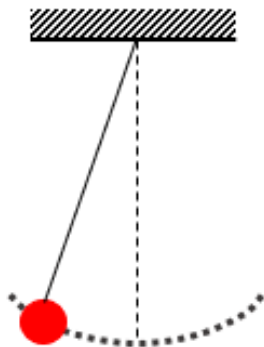
Jednadžba (1.10) je diferencijalna jednadžba drugog reda i njena rješenja su:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1.12)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante koje se određuju iz početnih uvjeta.  $\omega$  još nazivamo kružnom frekvencijom i ona je povezana s periodom  $T$  i frekvencijom  $f$  putem relacija:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.13)$$

Osim sustavom tijela na opruzi, harmonijsko gibanje se može realizirati i njihalom - fizikalnim tijelom koje se njiše oko ravnotežnih položaja. Kod opruge smo analizirali položaj u vremenu jer je linijsko gibanje bilo pravilno sinusoidalno. Kod njihala umjesto ovisnosti položaja o vremenu promatramo ovisnost kuta odklona  $\theta$  o vremenu. Najjednostavnije njihalo je jednostavno matematičko njihalo, koje je prikazano na slici 1.5.

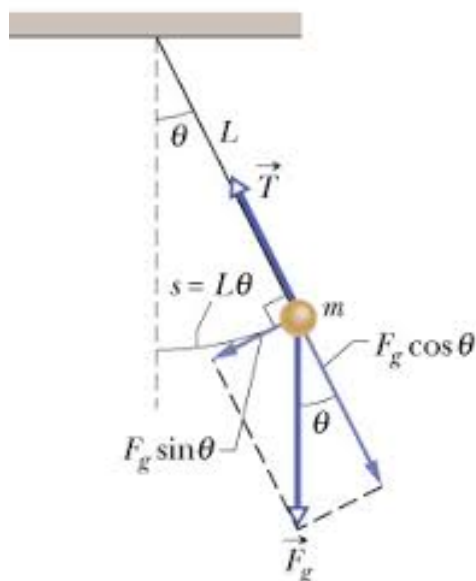


Slika 1.5: Prikaz jednostavnog matematičkog njihala [12]

Za ovo njihalo koristimo slijedeće aproksimacije:

1. Nit na kojoj je ovješeno tijelo je bezmasena i nerastezljiva.
2. Tijelo ovješeno na nit je točkasta masa
3. Otpor zraka je zanemariv
4. Gravitacijsko polje je uniformno

Njihalo je izvučeno iz ravnotežnog položaja i pušteno da se giba pod utjecajem gravitacijske sile. Rastav sila prikazan je na slici 1.6.



Slika 1.6: Dijagram i rastav sila na matematičkom njihalu [13]

Iz rastava sila, prikazanog na slici 1.6, vidimo da je suma svih sila jednaka tangencijalnoj komponenti sile teže,  $F_{g_{\text{tan}}}$ :

$$\sum F = F_{g_{\text{tan}}} = -mg \sin \theta \quad (1.14)$$

Za opisivanje gibanja koristimo (1.7) i pišemo:

$$ma_{\text{tan}} = -mg \sin \theta, \quad (1.15)$$

gdje je  $a_{\text{tan}}$  tangencijalna komponenta akceleracije, za koju vrijedi:

$$a_{\text{tan}} = L\ddot{\theta} \quad (1.16)$$

Sada iz (1.15) i (1.16) dobijamo diferencijalnu jednadžbu koja opisuje gibanje:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (1.17)$$

Ova jednadžba nije rješiva, pa koristimo aproksimaciju malih kutova:

$$\sin \theta \approx \theta \quad (1.18)$$

i uvodeći pokratu:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (1.19)$$

dobivamo:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (1.20)$$

Ova jednadžba je istog oblika kao (1.10), stoga ima sinusoidalno rješenje.

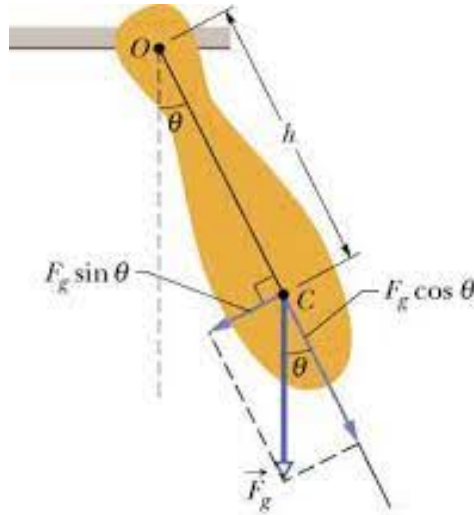
Za fizikalno njihalo ne možemo reći da je većina mase smještena u jednoj točki njihala, već je masa raspoređena cijelom duljinom njihala. To je čvrsto tijelo koje rotira oko osi definirane točkom ovjesišta. Za čvrsto tijelo koje rotira oko neke osi za opisivanje gibanja, osim jednadžbe (1.7), koristimo i kutni oblik drugog Newtonova zakona:

$$\sum_{\substack{\text{momenti sile} \\ \text{na tijelo}}} M = I\alpha = I\ddot{\theta}, \quad (1.21)$$

gdje je  $I$  moment tromosti krutog tijela oko osi rotacije, gdje je  $\alpha$  kutna akceleracija tijela.

Moment sile opisan je sa:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.22)$$



Slika 1.7: Dijagram i rastav sila na fizikalnom njihalu [13]

Na slici 1.7, prikazan je rastav sila,  $L$  je udaljenost osi rotacije  $O$  od težišta tijela  $C$ . Ukupna sila na tijelo je tangencijalna komponenta sile teže, stoga je ukupni moment sile na tijelo:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{g_{\text{tan}}}| = -Lmg \sin \theta \quad (1.23)$$

Sada iz relacija (1.21) i (1.23) dobijamo izraz za diferencijalnu jednadžbu gibanja:

$$I\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \quad (1.24)$$

Ova jednadžba nije rješiva, pa opet uzimamo aproksimaciju malih kutova (1.18). Uvodeći pokratu:

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I} \quad (1.25)$$

dobijamo:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (1.26)$$

Ova jednadžba je istog oblika kao (1.10), stoga ima sinusoidalno rješenje.

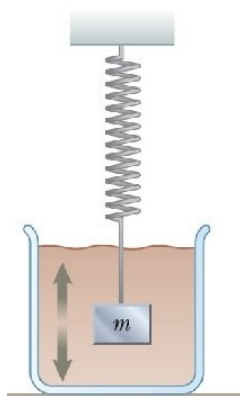
U oba slučaja uzeli smo u obzir bitnu aproksimaciju, aproksimaciju malih kutova. Ukoliko ne bismo aproksimirali sinus kuta samim kutom (a to ne možemo kada je riječ o većim kutovima), rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja za njhalo bilo bi puno složenije te za veće kutove rezultat više ne bi davao harmonijski oscilator. To bi se

direktno odrazilo na period oscilacija, koji u izrazu sadržava dodatne članove s kutom, koje više ne bismo mogli zanemariti. Period bi s povećanjem kuta otklona postojao sve više ovisan o tom kutu.

### 1.3 Gušeni harmonijski oscilator

Titranjem se energija gubi zbog otpora sredstva u kojem tijelo titra, trenja na objesištu ili ako nit nije potpuno nerastezljiva. Kod tijela na opruzi najvažniji gubitak energije je zbog otpora sredstva. Ako na sustav postoji neko trenje (otpor) koje uzrokuje disipaciju energije, tada će oscilacije trnuti. Ovakve oscilacije nazivamo prigušenima [14].

U realnom slučaju, fluid u kojem se sustav nalazi i eventualno podloga na kojoj leži uvijek uzrokuju neki otpor gibanju, pa titranje nikad neće biti skroz neprigušeno. Kao primjer možemo promotrit tijelo na opruzi u fluidu, čiji otpor nije zanemariv, kao što je prikazano na slici 1.8.



Slika 1.8: Sustav tijela na opruzi u fluidu [15]

Opet se jednadžba gibanja dobiva iz Newtonova zakona, međutim sada ukupna sila na tijelo nije samo elastična sila opruge već i sila otpora fluida. Otpor fluida veći je što je brzina gibanja kroz fluid veća. Sila otpora fluida je približno proporcionalna  $v^k$ , gdje je  $k$  konstanta za koju vrijedi da je  $1 \leq k \leq 2$ . Promotrimo najjednostavniji slučaj gdje je  $k = 1$ . Jednadžba (1.7) daje:

$$ma = -bv - kx \quad (1.27)$$

što se može svesti na oblik

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.28)$$

gdje smo stavili  $\gamma = b/2m$  i  $\omega_0^2 = k/m$ .

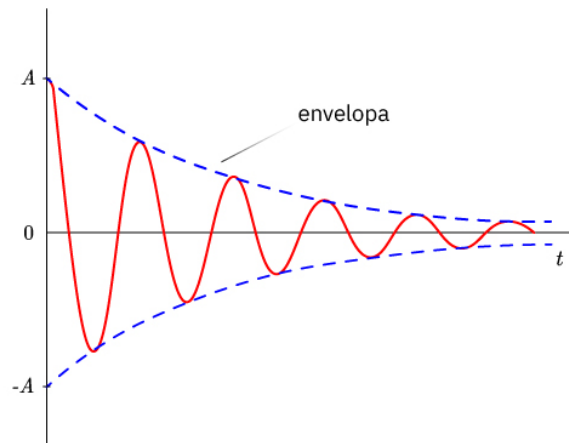
Jedno od rješenja dato je izrazom:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\Omega t - \phi) \quad (1.29)$$

gdje je kružna frekvencija oscilacija,  $\Omega$ , dana sa:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.30)$$

Početne uvjete možemo zadovoljiti prikladno odabranim konstantama  $x_0$  i  $\phi$ . Grafički prikaz ovakve funkcije dan je na slici 1.9.



Slika 1.9: Graf vremenske ovisnosti položaja kod gušenog titranja [16]

Ovisnost envelope o vremenu možemo pisati kao:

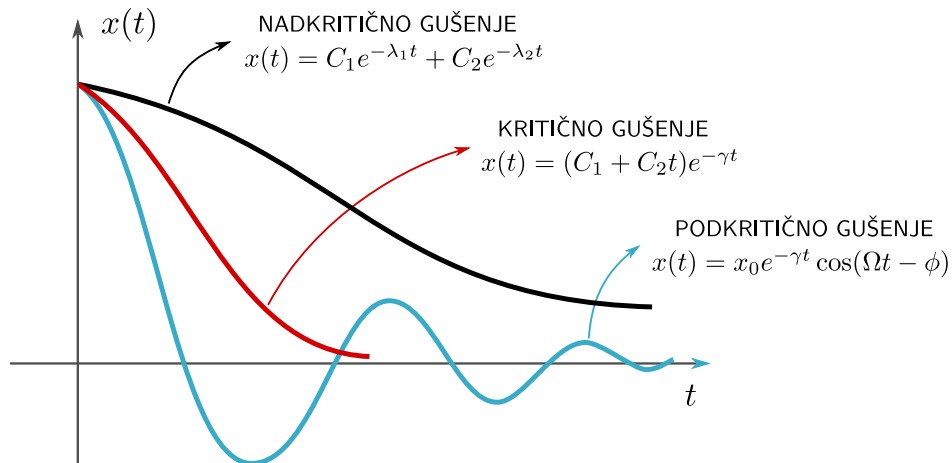
$$A(t) = x_0 e^{-\gamma t}, \quad (1.31)$$

gdje je  $\gamma$  koeficijent prigušenja.

Tri su vrste prigušenih oscilacija:

1. Podkritično gušenje postiže se kada:  $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$
2. Kritično gušenje postiže se kada:  $\omega_0^2 = \gamma^2$
3. Nadkritično gušenje postiže se kada:  $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$

Grafovi prigušenog titranja ovisno o faktoru gušenja za tri slučaja prikazani su na slici 1.10.



Slika 1.10: Graf vremenske ovisnosti položaja za tri vrste prigušenih oscilacija

## 1.4 Tjerani harmonički oscilator

Kada na sustav djeluje vanjska periodička sila, koja tjera sustav na titranje, titranje se naziva prisilno titranje. Periodičku silu možemo zapisati na slijedeći način:

$$F_{\text{pobuda}} = F \cos \omega t, \quad (1.32)$$

gdje je  $\omega$  frekvencija vanjske pobude. Sile koje djeluju na ovaj sustav su: periodička sila, povratna sila, te sila prigušenja. Koristeći (1.7) dobijamo:

$$ma = -bv - kx + F \cos \omega t \quad (1.33)$$

Diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj sustav je:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t. \quad (1.34)$$

Rješenje za gibanje ovog sustava je:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + A \cos(\omega t - \phi_0), \quad (1.35)$$

gdje je  $x_{\text{hom}}(t)$  rješenje homogene diferencijalne jednadžbe koje je dano izrazom (1.29). S obzirom da ovo rješenje trne, nakon dovoljno dugo vremena preostaje nam samo nehomogeni dio rješenja

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi_0). \quad (1.36)$$



Konstante  $A$  i  $\phi_0$  nisu određene početnim uvjetima već parametrima problema; npr:

$$A(\omega) = \frac{F/m}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad (1.37)$$

Kako u ovakvom titranju također dolazi do gušenja zbog otpora sredstva ili trenja u točkama dodira, amplituda bi trnula da joj vanjska periodička sila ne daje energiju kojom kompenzira gubitke, te tako dobijamo stalnu amplitudu oscilacija.

## 1.5 Rezonantna krivulja

Promotrimo izraz za amplitudu prisilnih oscilacija, (1.37). Vidimo da je ovo funkcija frekvencije pobude. Želimo pronaći takvu frekvenciju pobude, za koju će amplituda oscilacija biti najveća. Funkcija (1.37) ima maksimum u točki (na frekvenciji) u kojoj nazivnik ima minimum. Kako bismo odredili ovu točku, nazivnik izraza (1.37) je potrebno derivirati i izjednačiti s nulom:

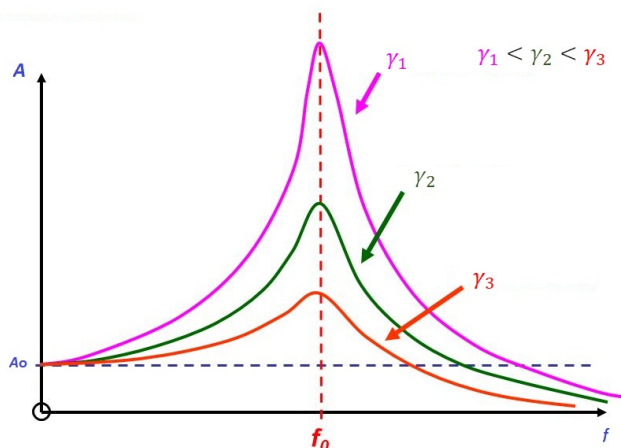
$$\frac{\partial((2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_r} = 4\omega_r(2\gamma^2 - \omega_0^2 + \omega_r^2) = 0 \quad (1.38)$$

Da bi ovo vrijedilo, izraz unutar zagrada mora biti jednak nuli. Sada je izraz za frekvenciju koja daje maksimum amplitude jednak:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (1.39)$$

Postojanje frekvencije pobude, opisane s (1.39), nazivamo pojavom rezonancije, a pripadnu frekvenciju rezonantnom frekvencijom. Ovo znači da, ukoliko primijenimo silu i zatitravamo sustav na rezonantnoj frekvenciji, amplituda koju će sustav postići biti će veća nego kad bismo zatitravali sustav na bilo kojoj drugoj frekvenciji primjenom jednake pobudne sile. Zbog ovog fenomena primjenom relativno male periodične sile na rezonantnoj frekvenciji možemo proizvesti oscilacije velikih amplituda zbog skladištenja vibracijske energije. Izraz za rezonantnu frekvenciju za sve prigušene tjerane oscilatore je isti ovaj, s tim da će faktori  $\gamma$  i  $\omega_0$  ovisiti o konkretnom sustavu [17].

Slika 1.11 prikazuje rezonantne krivulje za različita prigušenja.



Slika 1.11: Graf rezonantnih krivulja za različite jakosti prigušenja [18]

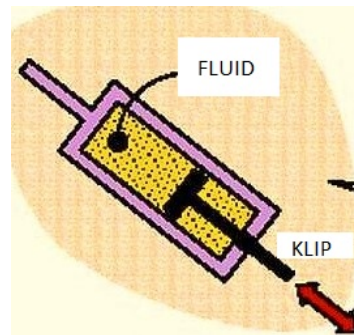
Na slici 1.11 vidimo da postoji maksimum funkcije koja opisuje ovisnost amplitude titranja o frekvenciji pobude. Taj maksimum se postiže na rezonantnoj frekvenciji. Različito obojene krivulje prikazuju rezonantnu krivulju za različite faktore gušenja. Primjećujemo da je rezonantna frekvencija u blizini vlastite te da, što je veće gušenje, to je rezonantna frekvencija manja i manje bliska vlastitoj. Također, što je faktor gušenja veći, to je maksimalna amplituda, koju se postiže na rezonantnoj frekvenciji, manja i rezonantna krivulja je šira.

## 1.6 Primjer prisilnog i prigušenog titranja

Amortizeri su uređaji na motornim vozilima, zrakoplovima i strojevima, koji služe za prigušivanje vibracija i ublažavanje udaraca, na primjer kada vozilo prelazi preko neravnina ili kada zrakoplov dodirne tlo prilikom slijetanja. Kao amortizeri služe opruge, gibnjevi, gumeni ulošci, hidraulički i pneumatski uređaji. Ideja amortizera je da apsorbira vibracijsku energiju opruge i pretvori ju u drugi oblik energije, najčešće toplinsku. Korištenje opruge: Sačinjena je od dva dijela, opruge i prigušivača. Opruga ima ulogu preuzimanja energije trešnje. U automobilima je spojena na kotač, te kad auto naiđe na neravninu energija trešnje prenese se na oprugu i opruga pohrani tu energiju tako što se sabije. Prijenos energije sa kotača na oprugu događa se putem prisilnog titranja, gdje kotač ima ulogu pobude. Dalje, opruga prenosi pohranjenu energiju prigušivaču, koji pretvara kinetičku energiju u toplinsku koja se zatim disipira. Prigušivač funkcionira gurajući klip kroz ulje koje ima veliko trenje. Ovo je oblik prigušenog titranja. Na taj način je energija opruge kontrolirano ispuštena, čime je smanjena trešnja auto-

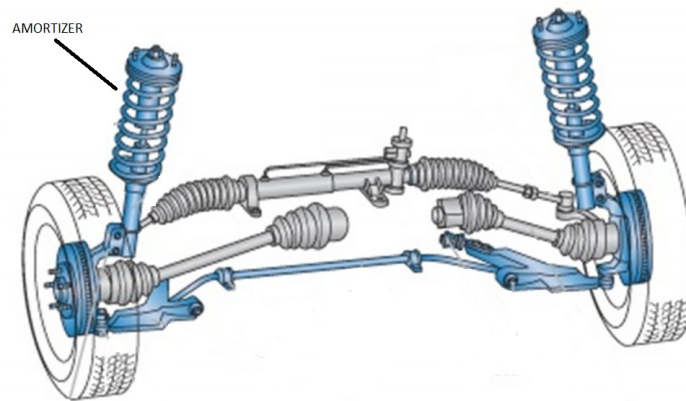
mobila [19].

Slika prikazuje pojednostavljeni prikaz prigušivača:



Slika 1.12: Prikaz viskoznog prigušivača [20]

Prikaz korištenja zavojnice i prigušivača u automobilu zajedno kao jednog dijela:



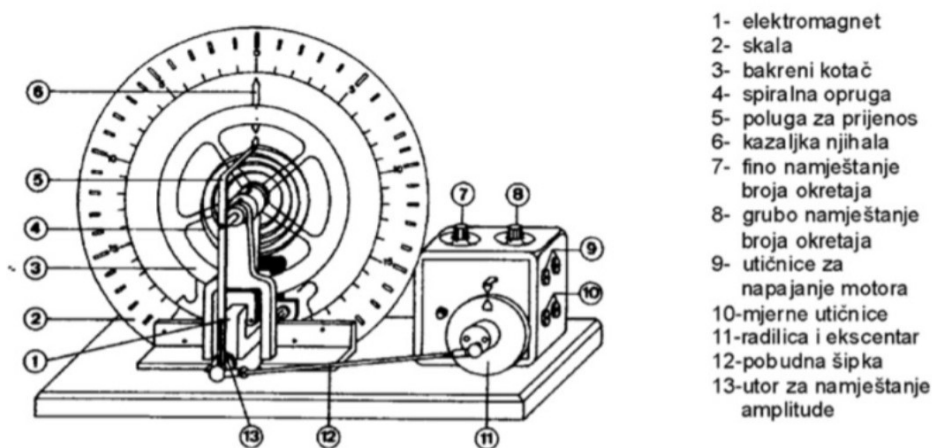
Slika 1.13: Prikaz amortizera u autu [21]

## 2 Eksperimentalni postav

Ideja diplomskog rada je nadogradnja eksperimentalnog postava, koji se koristi za izvođenje mjerenja povezanih sa slobodnim, prigušenim i prisilnim titranjem. Osnovu postava, koja se sastoji od kružnog njihala, generatora napona, ampermetra i žica, nismo mijenjali. Na postojeći postav nadodali smo laserskog miša, kojeg smo povezali s laptopom. Za popisivanje rezultata mjerenja u datoteku poslužio nam je računalni program. Cilj nadogradnje mjernog uređaja s praktikuma je ostvarivanje mogućnosti preciznije analize različitih oscilacija, slobodnih, prigušenih i prisilnih.

### 2.1 Kružno njihalo

Kružno njihalo je tijelo učvršćeno tako da može rotirati oko jedne osi i oko te osi ima moment tromosti  $I$ . Sastoji se od elemenata prikazanih na slici 2.1



Slika 2.1: Dijelovi kružnog njihala [22]

Najvažniji dio kružnog njihala je spiralna opruga učvršćena jednim krajem na osovinu koja nosi tijelo, a drugim krajem na čvrstu podlogu. Na taj način njihalo ima točno određen ravnotežni položaj, a spiralna opruga protivi se odstupanju od ravnoteže zakretnim momentom  $T$  koji je proporcionalan kutu odklona  $\varphi$ . To je torzijska opruga, najčešće u obliku arhimedove spirale, pričvršćena na kotač mehanizma nekog uređaja. Spiralna opruga uzrokuje oscilacije kotača. Najčešće se koristi u uređajima za mjerenje vremena, satovima i štopericama. Skupa sa kotačem sačinjava harmonijski oscilator [23].

Na slici 2.2 dan je prikaz korištenja spiralne opruge za mehanizam u satu:



Slika 2.2: Mehanizam sata sa spiralnom oprugom [24]

Spiralna opruga poštuje kutni oblik Hookeova zakona:

$$T(\varphi) = -D\varphi \quad (2.1)$$

U jednakosti (2.1) pojavljuje se rotacijska čvrstoća,  $D$ , analogno fizikalnoj veličini  $k$  koja se koristi za linearni oblik Hookeova zakona, (1.1). Rotacijska čvrstoća govori koliki moment  $T$  je potreban kako bi se opruga zakrenula za određeni kut  $\varphi$ . Što je  $D$  veći, to je teže rotirati oprugu, analogno ideji konstante opruge  $k$ . Ukoliko se spiralna opruga ne zakreće izvan područja elastičnosti, ona slijedi (2.1) te je zakretni moment, kojim se opruga opire zakretanju za kut  $\varphi$ , proporcionalan tom kutu [25].

Kutni oblik 2. Newtonovog zakona glasi:

$$\sum T = I\alpha \quad (2.2)$$

$\alpha$  je kutna akceleracija za koju vrijedi:

$$\alpha = \ddot{\varphi}, \quad (2.3)$$

gdje je  $I$  je moment tromosti.

Sila otpora u sredstvu proporcionalna je kutnoj brzini (kružnoj frekvenciji  $\Omega$ ), s konstantom proporcionalnosti  $C$ :

$$F_o = C\dot{\varphi} \quad (2.4)$$

Za rješavanje sustava spiralne opruge koristimo jednakosti (2.1) i (2.2) [26]. Uvo-

dimo pokrate za faktor prigušenja,  $\gamma$  i vlastitu frekvenciju kružnog njihala,  $\omega_0$ :

$$\gamma = \frac{C}{2I} \quad (2.5)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (2.6)$$

Za vlastitu frekvenciju kružnog njihala primjećujemo da je analogna vlastitoj frekvenciji opruge s masom.

Sada (2.2) daje:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (2.7)$$

Ova jednadžba analogna je diferencijalnoj jednadžbi (1.28). Njezino rješenje je oblika:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t} \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.8)$$

Za kružnu frekvenciju prigušenih oscilacija kružnog njihala,  $\Omega$ , vrijedi:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \text{ uz uvjet: } C^2 < 4DI, \quad (2.9)$$

gdje uvjet osigurava podkritično gušenje za opisani sustav kružnog njihala [22].

Bitno je naglasiti da u izvodu relacije za gibanje ovakvog sustava nema aproksimacije malih kutova kao što je bilo u slučaju matematičkog ili fizikalnog njihala, jer je princip rada ovdje potpuno drugačiji. Kod fizikalnog njihanja komponenta gravitacijske sile igra ulogu povratne sile koja uzrokuje njihanje nakon otklona od ravnoteže, dok kod kružnog njihala kružna opruga vraća njihalo u prvobitni položaj nakon otklona od ravnoteže i tako uzrokuje rotaciju njihala. Obzirom da nema aproksimacije malih kutova, relacija bi trebala vrijediti za sve otklone od ravnoteže. Primijetimo da se oscilacije kružnog njihala mogu rastaviti na  $x$ - $y$  smjerove, koji opet čine harmonijske oscilatore.

Drugi važan dio eksperimentalnog uređaja je zavojnica, kojom smo ostvarivali kontrolirano gušenje oscilacija. U kružnom njihalu koristi se zavojnica, na koju se dovede izvor struje, kao izvor magnetskog polja. Bakreni kotač se rotira kroz magnetsko polje zavojnice čime se u njemu stvaraju, zbog promjene toka magnetskog polja, vrtložne

struje prema Lenzovom pravilu. Zatim zbog vrtložnih struja u kotaču i magnetskog polja zavojnice (elektromagneta) kojem je izložen kotač, na njega nastaje Amperova sila. Nastala sila je suprotnog smjera od gibanja kotača i usporava ga te tako djeluje u svrhu prigušenja oscilacija.

Magnetsko polje zavojnice proporcionalno je struji kroz zavojnicu ( $B \sim I$ ). Vrtložne strujice proporcionalne su induciranom naponu u kotaču, odnosno promjeni magnetskog toka, dakle struji kroz zavojnicu ( $I_{\text{vrtložne}} \sim U_{\text{ind}} \sim \Delta\Phi_B \sim I$ ). Amperova sila proporcionalna je vrtložnim strujicama ( $F_A \sim I_{\text{vrtložne}}$ ) i magnetskom polju zavojnice, koje je opet proporcionalno struji ( $B \sim I$ ). Dobijemo da je sila koja usporava kotač (Amperova sila) proporcionalna kvadratu struje kroz zavojnicu, odnosno faktor gušenja proporcionalan je kvadratu struje:  $F_A \sim \gamma \sim I^2$ .

## 2.2 Računalni miš i program

Da bismo analizirali gibanje kružnog njihala, odnosno položaje u vremenu, potreban nam je dobar senzor pokreta koji očitava promjenu položaja u vremenu. Takav uređaj je upravo računalni miš, koji je lako dostupan i stoga veoma praktična ideja za nadogradnju osnovnog dijela postava kružnog njihala. U potpoglavlju 6.1 je objašnjeno detaljno o principu rada računalnog miša te kakve podatke smo mogli dobiti mjerenjima.

Računalni program podatke, koje procesor miša daje cijelo vrijeme tokom gibanja, zapisuje u datoteku. U potpoglavlju 6.2 prikazan je skraćeni kod računalnog programa te su objašnjeni njegovi glavni dijelovi.

Razmišljali smo kako obraditi mjerenja, obzirom da miš ne mjeri položaj u vremenu već komponente, gleda pomicanje u  $x$  i  $y$  smjeru u vremenu. Oba ova gibanja čije podatke smo dobili su na grafovima u ovisnosti o vremenu davala sinusoide, isto kao i ukupni položaj u ovisnosti o vremenu, što je fizikalno smisleno, jer rastav na komponente opet daje harmonijske oscilatore, (objašnjeno u potpoglavlju 2.1), međutim nijedna komponenta nije bila dovoljno velika kako bismo iz njezine analize dobili precizne rezultate. Zbog toga smo odlučili matematički odrediti ukupno gibanje.

Male pomake ukupnog gibanje nazivati ćemo  $\delta s$ , dok je položaj u datom trenutku  $s$ . Iz podataka  $\delta s$  i  $t$  radimo analizu. U ovom dijelu nam je poslužio program koji je nadograđen tako da, kada dobije podatke  $\delta x$  i  $\delta y$ , automatski radi proceduru opisanu u nastavku, te u zadnjem stupcu datoteke daje podatke  $\delta s$ . Na ovaj način, odmah po

izvođenju mjerenja dobivamo potrebne podatke u datoteci.

Kako bi se od gibanja u dva smjera dobilo gibanje u jednom smjeru, treba se postići da jedna komponenta gibanja cijelo vrijeme bude jednaka nuli. Ovisno o tome kako smo postavili miša u odnosu na aparaturu (u mišu su definirane  $x$  i  $y$  osi i ovo ne možemo mijenjati, možemo samo pomicati miša i time mijenjati položaj koordinatnog sustava). Bilo bi idealno kad bi mogli postaviti miša tako da u mjerenjima dobijemo same nule za jednu od komponenti gibanja,  $x$  ili  $y$ , ali miš se može postaviti praktički u beskonačno položaja (kutova u odnosu na kotač njihala) da je gotovo nemoguća situacija u kojoj bismo uspješno postavili miš u idealan položaj, stoga se time nismo niti zamerali već je on bio namješten uzimajući u obzir samo to da ne dodiruje aparaturu te da je laser miša uperen u podlogu koja rotira. Kut pod kojim je miš nije bio preciziran i mijenjao se svaki put kad smo iznova namještali aparaturu.

Kako smo rekli, ovisno o kutu pod kojim je postavljen miš zarotiran je  $x$ - $y$  koordinatni sustav skupa s mišem (jer je definiran i fiksiran u mišu kako bi miš mogao očitavati  $dx$  i  $dy$ ). Nama je nebitno znati koji je to kut. Ono što želimo je zarotirati  $x$ - $y$  sustav za kut takav, da, kad bi miš bio postavljen u tom smjeru, jedna komponenta bi cijelo vrijeme iščezavala. To radimo koristeći matricu rotacije, koja u sebi sadrži kut. Recimo da imamo neki vektor u 2-D prostoru, nazovimo ga  $\mathbf{r}$ . Njega možemo uvijek rastaviti na dvije komponente koje su međusobno okomite i opisuju plohu na kojoj se nalazi taj vektor. Nazivamo ih  $x$  i  $y$  komponente. Iako su one uvijek okomite međusobno, položaja, u kojima se mogu nalaziti na plohi koju definiraju, ima beskonačno, odnosno, cijeli sustav  $x$ - $y$  možemo rotirati. Vektor  $\mathbf{r}$  možemo rastaviti na  $x$  i  $y$  komponente za svaki od položaja koordinatnog sustava:

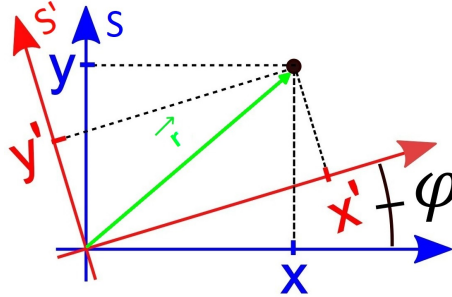
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (2.10)$$

gdje su  $\hat{\mathbf{x}}$  i  $\hat{\mathbf{y}}$  jedinični vektori koordinatnog sustava. Za različite položaje koordinatnog sustava nećemo dobiti jednake vrijednosti komponenti  $x$  i  $y$ . Usuglašen je standardni položaj  $x$ - $y$  sustava kako bi zapis vektora bio jednoznačan.  $\mathbf{x}$  se nalazi vodoravno a  $\mathbf{y}$  vertikalno. Dakle, ako  $x$ - $y$  sustav, nazovimo ga  $S$ , zarotiramo za kut  $\varphi$ , onda će se i iznosi komponenti nekog vektora, kojeg smo rastavili u  $x$ - $y$  smjeru, promijeniti.



Nazovimo ovaj novi sustav  $S'$ .

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \quad (2.11)$$



Slika 2.3: Prikaz rotacije koordinatnih osi sustava i određivanja parametara vektora u rotiranom sustavu [33]

Ideja je prikazana na slici 2.3.

Slijedi da možemo pronaći takav kut  $\theta$  za koji je  $x$  komponenta jednaka nuli, odnosno  $x' = 0$ , za svaki  $t$ . Kada pronađemo  $y$  komponentu novog sustava,  $y'$ , njome smo opisali 2-D gibanje kao 1-D. Za naš konkretni slučaj, gdje smo ukupni položaj nazivali  $s$ , značit će da vrijedi:

$$\delta y' = \delta s \quad (2.12)$$

Onda, kada nam jedna komponenta opisuje čitav položaj, možemo analizirati gibanje preko te komponente. Prvo ćemo koristiti matricu rotacije za 2-D sustav:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

kako bismo zapisali kako generalno izgledaju komponente  $\delta x$  i  $\delta y$  (mali pomaci u  $x$  i  $y$  smjeru sustava kojeg je definirao položaj miša) u  $S'$  sustavu, zarotiranom za neki kut  $\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta y' \end{pmatrix} = R(\varphi) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta x' = \delta x \cos \varphi - \delta y \sin \varphi \\ \delta y' = \delta x \sin \varphi + \delta y \cos \varphi \end{cases} \quad (2.14)$$

Tražimo  $\theta$  takav da:  $\delta x' = 0 \Rightarrow \text{tg } \theta = \delta x / \delta y$

Dobivamo:

$$\theta = \text{arctg} \frac{\delta x}{\delta y} \quad (2.15)$$

Sada pronalazimo  $\delta y'$  za ovaj kut, koji je ujedno traženi  $\delta s'$ :

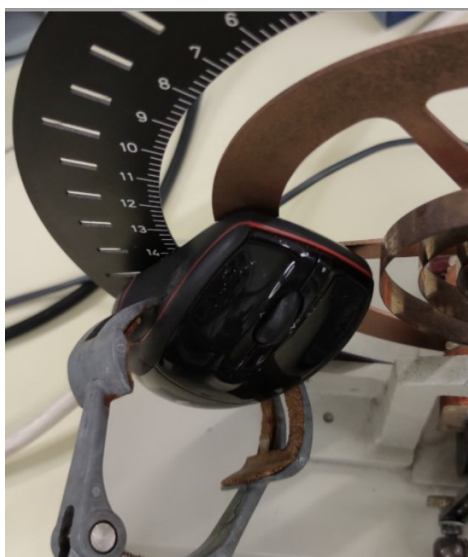
$$\delta y' = \delta x \sin \left( \arctg \frac{\delta x}{\delta y} \right) + \delta y \cos \left( \arctg \frac{\delta x}{\delta y} \right) = \delta s \quad (2.16)$$

Obzirom da nama treba ukupni položaj u vremenu, a ne pomaci u vremenu, radimo kumulativnu sumu na podacima  $\delta s$  iz čega slijedi  $s$ . Upravo opisani postupak radi nadopuna programa koja je prikazana u narednom odlomku.

```
1 # fi = kut u necrtanom sustavu
2   fi = m.atan2(dx, dy)
3
4 # ovo stavlja fi u interval [0, 2pi]
5 if fi < 0:
6     fi += m.pi
7
8 # novi dx (tj. dx' = Ds)
9 Ds = dx*m.sin(fi) + dy*m.cos(fi)
10 s += Ds # ukupni pomak
```

Što se vremena tiče, njega procesor miša već bilježi nadodavajući intervale na ukupno dotadašnje vrijeme (krećući od nekog odabranog trenutka  $t_0$  mjerenja vremena koji je zadan mišu, neovisno o našem mjerenju). U programu je dodan dio koji od trenutka oduzima  $t_0$ , kako bi dobiveni podaci vremena bili manji. Sveukupni program, dakle, uzima podatke koje procesor miša tokom mjerenja daje,  $\delta x$ ,  $\delta y$ , i pripadne  $t$ , zatim računa  $\delta s$ , i  $s$  te sve to zapisuje u datoteku. Na taj način dobijemo podatke položaja u vremenu.

Oscilacije proučavamo na kružnom njihalu. Miš će nam poslužiti kao precizan uređaj koji može očitati puno položaja i pripadnih vremena. Prije izvođenja mjerenja postavimo laserskog miša ispred kotača njihala tako da bude dovoljno udaljen kako njihalo ne bi zapiralo tokom titranja, a dovoljno blizu da senzor miša može očitati gibanje. Na slici 2.4 je prikazano kako to izgleda.



Slika 2.4: Položaj miša u odnosu na njihalo

Pomaci koje je davao računalni miš spremeni su, zajedno sa ostalim vrijednostima, u datoteku. Na slici 2.5 prikazano je kako je izgledao postav mjerenja.



Slika 2.5: Mjerni postav

Kada smo njihalo namjestili u startni položaj, pokrenuli smo program, te istovremeno pustili njihalo da se giba. Kako smo namjestili dio postava s njihalom ovisilo je o tipu oscilacija koje smo željeli postići.

Slobodne oscilacije nije moguće dobiti jer uvijek postoji kakvo takvo trenje u aparaturi (njihalu) čim su u pitanju neke rotacije pa imamo mjesta gdje su elementi pričvršćeni i mehaničko gibanje. Također ne možemo otkloniti otpor zraka, koji u ovom slučaju manje pridonosi odstupanju od idealnog slobodnog titranja, ali svejedno teoretski ne možemo reći da smo postigli slobodno titranje. Mi ćemo slobodnim titranjem zato nazivati one oscilacije kod kojih nismo uključiti dio aparature koji ciljano daje prigušenja (struju), niti dio aparature koji daje pobudu. Dakle, kako bismo do-

bili slobodne oscilacije na kružnom njihalu, izvučemo kolo iz ravnotežnog položaja rotirajući za neki kut, te ga pustimo da se giba slobodno.

Prigušivanje titranja postiže se vrtložnim strujama koje elektromagnet izaziva u bakrenom kotaču. Za ove oscilacije priključili smo generator u utičnice sa stražnje strane njihala. Okretanjem potenciometra generatora, mijenjali smo jačinu struje. Na to smo serijski spojili ampermetar kako bismo znali kolika je struja koju generator daje.

Za prisilne oscilacije ostavili smo prigušenje, ali smo još spojili istosmjerni napon za napajanje na istosmjerni elektromotor, kojem se broj okretaja može namještati okretanjem potenciometra. Elektromotor preko ekscentra, koji je pobudnom šipkom spojen na kotač njihala, pobuđuje kotač na osciliranje. Period vrtnje motora trebao se moći očitati sa potenciometra, međutim, potenciometar nije precizno pokazivao, te nam je služio samo za mijenjanje brzine vrtnje motora. Periode smo određivali iz mjerenja, obzirom da je frekvencija oscilacija kod ovakvog sustava jednaka frekvenciji pobude nakon određenog vremena. Također, rezultat koji smo dobili izvodom u uvodnom dijelu za položaj u vremenu kod prisilnih oscilacija, gdje je član s faktorom gušenja unutar eksponencijalne funkcije, govori da prigušenje figurira kod početnog dijela gibanja, te nakon određenog vremena utrne i ostane samo član sa frekvencijom pobude kao vremenski ovisna komponenta. Dakle, nakon što smo započeli mjerenje, trebalo je pričekati neko vrijeme (uzeli smo 10 perioda, odnosno čekali da njihalo 10 puta napravi puni titraj), prije nego se uključi spremanje podataka na laptopu. Tako smo u mjerenjima izbjegli onaj prijelazni period gdje se sustav još nije ustabilio. Kod nekih mjerenja smo ipak zapisivali i podatke s početka mjerenja, kako bismo probali Fourierovom analizom grafički dobiti prikaz raspodjele frekvencija u početnom dijelu ovakvih oscilacija.

### 3 Rezultati eksperimenta

Nakon izvođenja mjerenja u datoteci imamo zapisane podatke položaja u vremenu. Na slici 3.1 prikazano je kako izgleda jedna takva dobivena datoteka.

	A		B	C	D
1	dx	dy	Ds	t(sec)	s
2	-83	-7	-83.294658	0.352635	-83.294658
3	-19	0	-19.000000	0.360560	-102.294658
4	-18	1	-18.027756	0.368570	-120.322414
5	-18	0	-18.000000	0.376556	-138.322414
6	-21	-1	-21.023796	0.384568	-159.346210
7	-21	0	-21.000000	0.393557	-180.346210
8	-20	0	-20.000000	0.401567	-200.346210
9	-19	-1	-19.026298	0.409556	-219.372508
10	-24	-2	-24.083189	0.417570	-243.455697
11	-24	-2	-24.083189	0.425560	-267.538886
12	-28	-2	-28.071338	0.433572	-295.610224
13	-24	-1	-24.020824	0.441561	-319.631048
14	-25	0	-25.000000	0.449596	-344.631048
15	-24	-2	-24.083189	0.457563	-368.714237
16	-28	-2	-28.071338	0.465581	-396.785575
17	-25	0	-25.000000	0.473564	-421.785575
18	-25	0	-25.000000	0.481572	-446.785575
19	-25	-2	-25.079872	0.489554	-471.865447
20	-26	-3	-26.172505	0.498579	-498.037952
21	-25	-2	-25.079872	0.506566	-523.117824
22	-28	-2	-28.071338	0.514576	-551.189162
23	-30	-1	-30.016662	0.522566	-581.205824
24	-31	0	-31.000000	0.530577	-612.205824
25	-29	0	-29.000000	0.538558	-641.205824
26	-29	1	-29.017236	0.546566	-670.223060
27	-31	-1	-31.016125	0.554561	-701.239185
28	-33	-1	-33.015148	0.562570	-734.254333
29	-31	-6	-31.575307	0.570583	-765.829640

05-ampl=10-damp=0.50A

Slika 3.1: Prikaz datoteke s podacima mjerenja za struju prigušenja  $I = 0.5A$

Kada crtamo graf funkcije ovisnosti položaja u vremenu vidi se početni dio mjerenja, koji je sniman prije nego je gibanje započeto jer nismo mogli savršeno simultano pustiti njihalo da oscilira i pokrenuti računalni program da bilježi podatke. Taj dio podataka odrežemo. Sada se na grafu vidi krivulja oscilacija, sinusoida.

### 3.1 Mjerenja, obrada podataka i rezultati za jednostavni harmonijski oscilator

Nismo mogli postići uvjete za savršeno neprigušeno titranje, stoga i kod slobodnih oscilacija dolazi do gušenja i amplituda opada. Ipak na grafovima ovih oscilacija vidimo znatno više perioda, koje njihalo napravi prije nego se zaustavi, u odnosu na prigušene oscilacije.

Ovdje možemo odrediti kutnu frekvenciju oscilacija, koja je približna vlastitoj frekvenciji. Za svako mjerenje, pripadajuću datoteku maksimuma, njihov redni broj  $n$  i pripadna vremena  $t$ , prebacili smo u sigmaplot kako bismo na grafu prikazali te točke. Crtali smo graf ovisnosti vremena o rednom broju maksimuma. Funkcija koju graf opisuje je pravac, zato jer je gibanje periodičko. Upravo iz ovog razloga smo precizno određivali period titranja, koristeći, na grafovima ovisnosti vremena, u kojem dolazi do maksimuma, o rednom broju spomenutog maksimuma, metodu najmanjih kvadrata. Pravac, koji opisuje ovisnost vremena o rednom broju maksimuma, zapišemo matematički:

$$t(n) = a \cdot n \quad (3.1)$$

Prepoznamo:  $a = T/2$ , gdje je  $T$  period oscilacija. Određivanjem parametra  $a$ , nagiba pravca, odredili smo koliko iznosi polovica perioda. Kada to povežemo s kutnom frekvencijom (1.13) dobijamo:

$$\omega = \frac{\pi}{a} \quad (3.2)$$

Metodom najmanjih kvadrata dobit ćemo uz  $a$  i njegovu pogrešku,  $M_a$ . Sada pogrešku kutne frekvencije,  $M_\omega$ , računamo kao pogrešku ovisnih veličina:

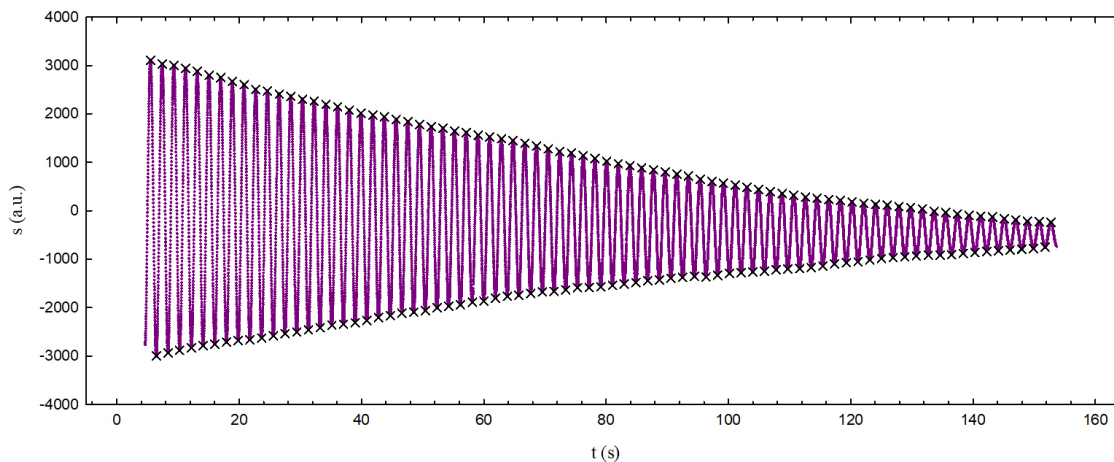
$$M_\omega = (\pi/a^2) \cdot M_a \quad (3.3)$$

Sigmaplot može računati Fourierovu analizu, pa smo prikazali raspodjelu frekvencija na grafu ovisnosti intenziteta o frekvenciji. Predočiti ćemo kasnije nekoliko ovih grafova za slobodne oscilacije, kako bi se moglo vidjeti da nisu savršeno harmonijske, odnosno da, osim glavnog vrška, koji je najizraženiji za jednu frekvenciju, postoji još dodatnih frekvencija čiji intenziteti nisu jednaki nula.

Provjerili smo valjanost pretpostavke da amplituda titranja ne ovisi o kutu otklona. Za mjerenja bez prigušenja kretali smo svaki put iz drugačijeg kuta otklona (položaja

naznačeng brojem na kotaču njihala).

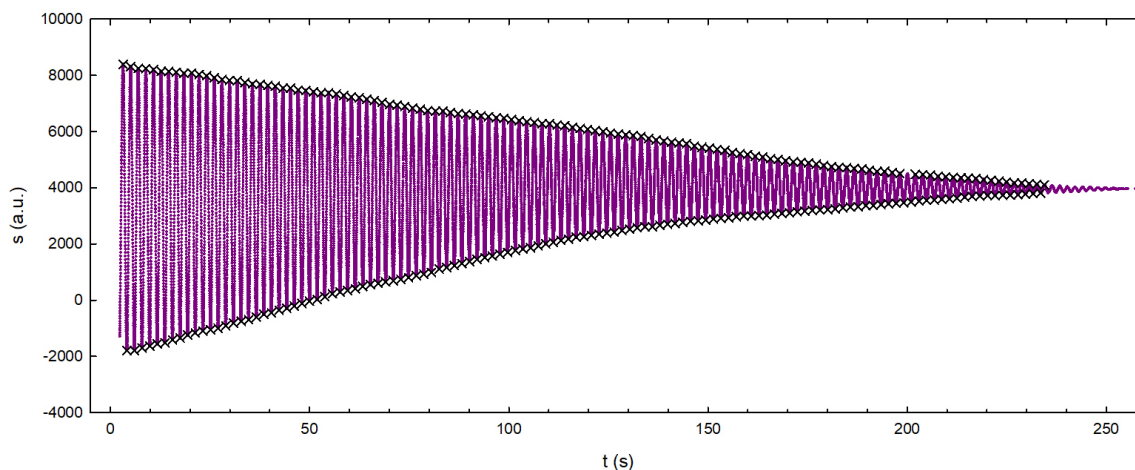
Na slici 3.2 prikazan je graf podataka dobivenih mjerenjem krećući iz pozicije naznačene na njihalu brojem 5 te su dodatno naznačeni položaji ekstrema.



Slika 3.2: Graf neprigušenog titranja sa točkama ekstrema

Metodom najmanjih kvadrata dobili smo:  $a = (0.95618 \pm 0.00003)$ . Koristeći relacije (3.2) i (3.3) određujemo kružnu frekvenciju:  $\omega = (3.2839 \pm 0.0001)\text{rad/s}$

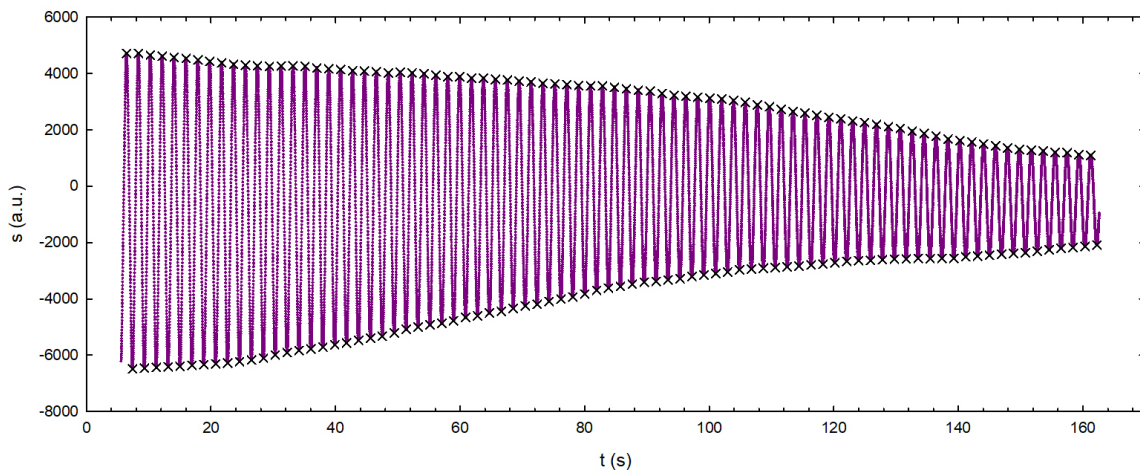
Na slici 3.3 prikazan je graf podataka dobivenih mjerenjem krećući iz pozicije naznačene na njihalu brojem 10 te su dodatno naznačeni položaji ekstrema.



Slika 3.3: Graf neprigušenog titranja sa točkama ekstrema

Metodom najmanjih kvadrata dobili smo:  $a = (0.95585 \pm 0.00006)$ . Koristeći relacije (3.2) i (3.3) određujemo kružnu frekvenciju:  $\omega = (3.2850 \pm 0.0002)\text{rad/s}$

Na slici 3.4 prikazan je graf podataka dobivenih mjerenjem krećući iz pozicije naznačene na njihalu brojem 12 te su dodatno naznačeni položaji ekstrema.

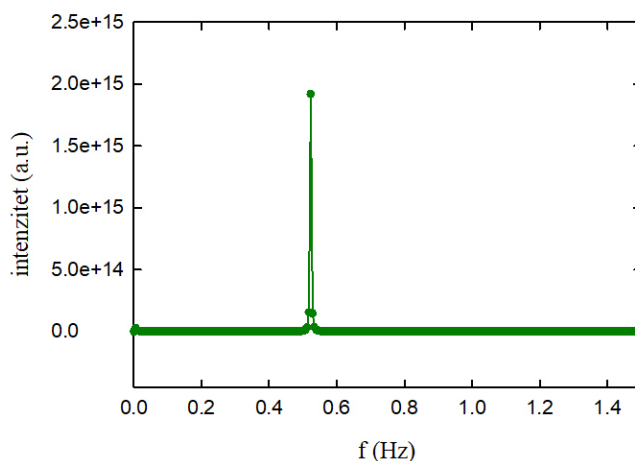


Slika 3.4: Graf neprigušenog titranja sa točkama ekstrema

Metodom najmanjih kvadrata dobili smo:  $a = (0.95587 \pm 0.00002)$ . Koristeći relacije (3.2) i (3.3) određujemo kružnu frekvenciju:  $\omega = (3.28497 \pm 0.00007)\text{rad/s}$

Iako vrijednosti za kružnu frekvenciju nisu iste, razlike su jako male pa možemo reći da ona praktički ne ovisi o kutu otklona tj. amplitudi, što je u skladu s teorijskim razmatranjima.

Za mjerenje, čiji graf je prikazan na slici 3.3, napravili smo Fourierovu analizu. Graf raspodjele frekvencija ovog titranja prikazan je na slici 3.5.



Slika 3.5: Graf raspodjele frekvencija za mjerenje neprigušenih oscilacija iz pozicije 10

Na slici 3.5 se vidi da je najveći intenzitet upravo za frekvenciju unutar intervala koji smo dobili računanjem preko metode najmanjih kvadrata. Na grafu se još može primijetiti da, iako jedna frekvencija dominira, ona nije jedina kojoj pripada intenzitet



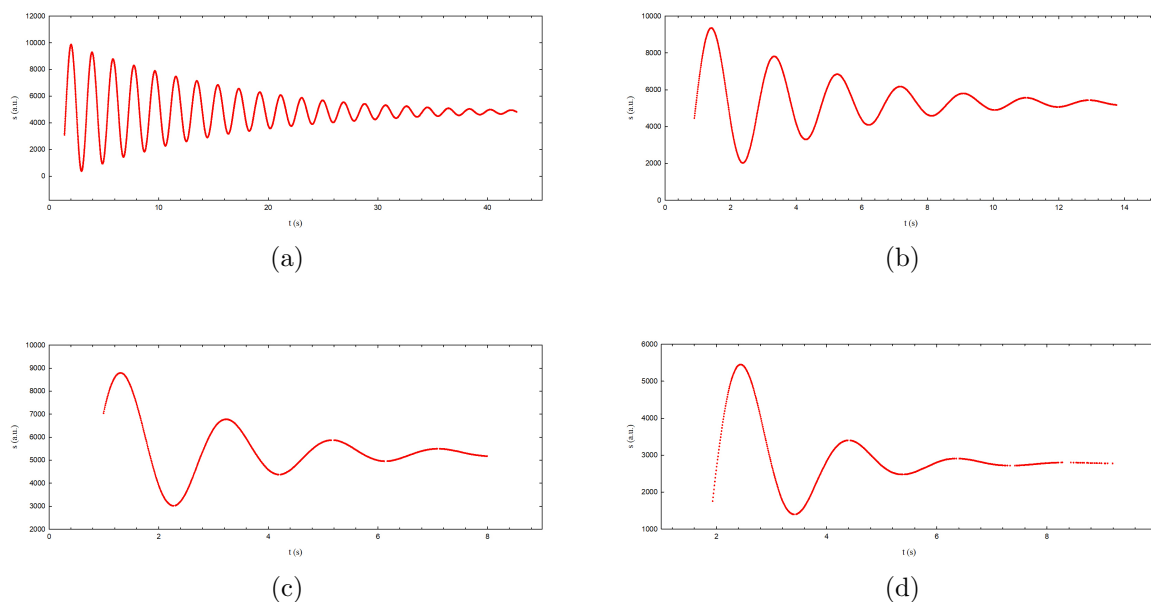
razičit od nule, što znači da realno titranje našeg kružnog njihala zaista nije savršeno harmonijsko, već mješavina harmonika s jednim izrazito dominantnim harmonikom.

## 3.2 Mjerenja, obrada podataka i rezultati za prigušeni harmonijski oscilator

Mjerenja kod prigušenih oscilacija razlikovala su se po jakosti struje koju smo puštali kroz zavojnicu elektromagneta. Napravili smo 18 mjerenja, počevši od jakosti struje  $I = 0A$ , (jako slabo prigušeno titranje, gušenje dolazi od okoline), i povećavali smo struju do  $I = 1A$ , što je maksimalna dopuštena struja kroz elektromagnet, ograničenije uređaja. Htjeli smo pokazati kakva je ovisnost faktora gušenja o struji koja teče elektromagnetom (zavojnicom). Pretpostavili smo, prema teoriji, da će ovisnost biti kvadratna. Također smo htjeli provjeriti relaciju koju smo izveli u teorijskom uvodu: formula ovisnosti frekvencije prigušenog oscilatora o gušenju.

Frekvenciju smo odredili iz podataka mjerenja, na isti način kao kod slobodnih oscilacija. Faktor prigušenja,  $\gamma$ , i njegovu grešku,  $M_\gamma$  smo odredili prilagođavajući teoretski dobivenu krivulju iz relacije (1.29) našim mjerenjima. Također smo htjeli provjeriti valjanost relacije (2.9).

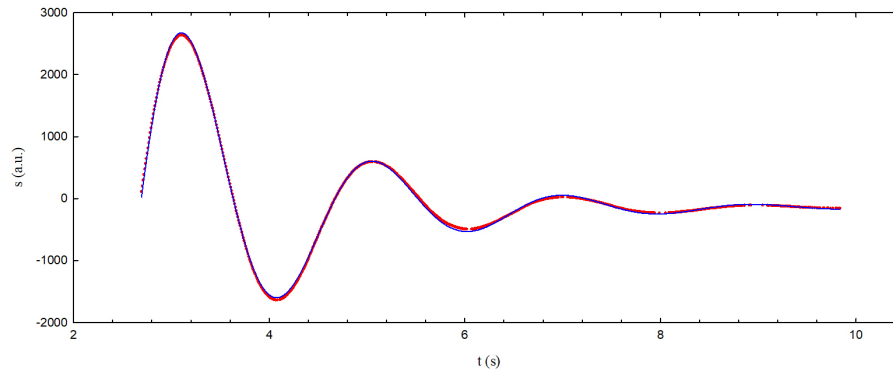
Slika 3.6 prikazuje kako izgledaju grafovi ovisnosti položaja o vremenu kod prigušenog titranja dobivenog za 4 različite struje prigušenja, krećući od otklona naznačenog brojem 10 na skali kruga.



Slika 3.6: Grafovi ovisnosti položaja o vremenu za struje prigušenja: (a)  $I = 0.3A$ , (b)  $I = 0.6A$ , (c)  $I = 0.8A$ , (d)  $I = 1.0A$

Kako je izgledao graf, koji je prikazivao mjerene podatke i podatke dobivene predviđanjem prema funkciji koja najbolje opisuje mjerene podatke za slučaj kada je jakost struje

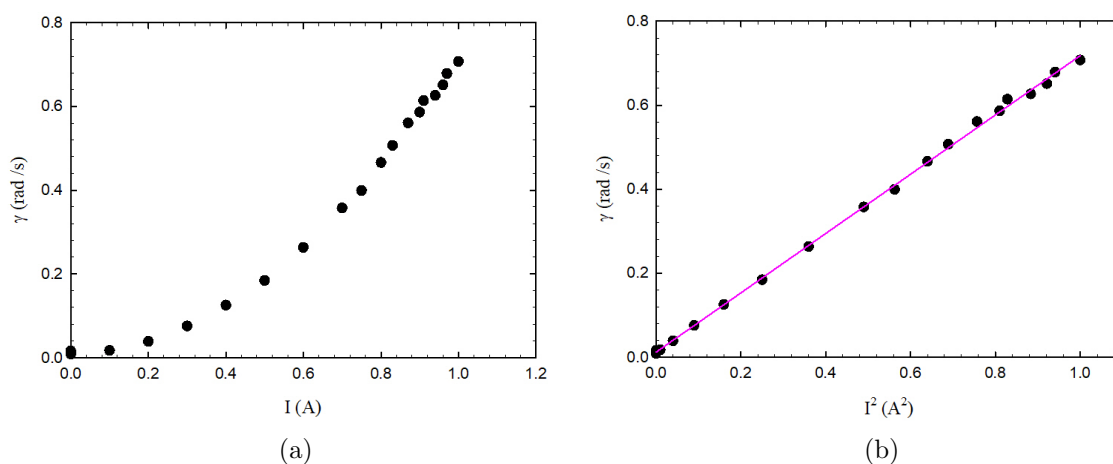
iznosila  $I = 0.97A$ , prikazuje slika 3.7 . Plava krivulja prikazuje predviđene vrijednosti.



Slika 3.7: Graf prigušenog titranja sa prilagođenom funkcijom

Iz prilagodbe krivulje dobili smo parametre  $\gamma$ , iznos amplitude, početni položaj i početno vrijeme. Za mjerenje prikazano na 3.7 dobili smo da se iznos faktora gušenja nalazi u intervalu:  $\gamma = (0.681 \pm 0.002)\text{rad/s}$ . Vidimo da je iznos pogreške par redova veličine manji od srednje vrijednosti  $\gamma$ . Interval koji bi na grafu zauzimao jedan faktor gušenja manji je od promjere točke, stoga u narednim grafovima ovisnosti  $\gamma$  o struji, nismo prikazivali grešku faktora gušenja. Isto vrijedi i za dobivene kružne frekvencije,  $\Omega$ .

Slika 3.8 prikazuje kako mijenjajući jakost struje kroz elektromagnet možemo kontrolirati iznos faktora gušenja.

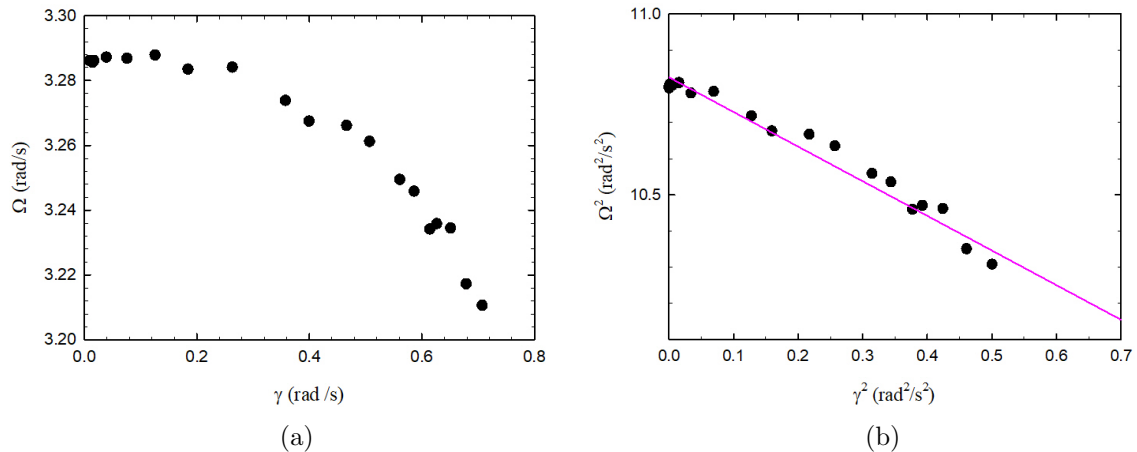


Slika 3.8: (a) Graf ovisnosti faktora gušenja o jakosti struje, (b) Graf ovisnosti faktora gušenja o kvadratu jakosti struje

Prema grafu, prikazanom na slici 3.8b, vidimo da je funkcija, koja najbolje opisuje podatke kvadrata struje i faktora gušenja, pravac. To znači da je faktor gušenja

zaista proporcionalan kvadratu struje, kako smo i pretpostavili. Metodom najmanjih kvadrata odredili smo parametre pravca:  $a = (0.706 \pm 0.005)$ .

Grafovi koji opisuju odnos frekvencije prigušenog titranja i faktora gušenja dani su na slici 3.9.



Slika 3.9: (a) Graf ovisnosti frekvencije prigušenih oscilacija o faktoru gušenja, (b) Graf ovisnosti kvadrata frekvencije prigušenih oscilacija o kvadratu faktora gušenja

Za podatke s grafa 3.9b izvršili smo prilagodbu na pravac, u skladu s relacijom (2.9). Za parametre smo dobili:  $a = (-0.91 \pm 0.04)$  i  $b = (10.818 \pm 0.009)\text{rad}^2/\text{s}^2$ . Iz parametra  $b$ , dobivamo da je:  $\omega_0 = (3.29 \pm 0.09)\text{rad/s}$ . Vrijednost  $\omega_0$  se u okviru greške slaže s prije dobivenom u potpoglavlju 3.1. S druge strane, vrijednost koeficijenta  $a$  bi, prema izrazu (2.9), trebao iznositi -1. Dobivena vrijednost je malo veća, što je vjerojatno posljedica postojanja gušenja i bez puštanja struje kroz elektromagnet.

### 3.3 Mjerenja, obrada podataka i rezultati za prisilni harmonijski oscilator

Kod mjerenja prisilnih oscilacija ideja je bila imati priključeno prigušenje i pobudu. Namjestimo određenu jakost struje (za koju sada faktor gušenja očitamo iz grafa dobivenog analizom prigušenih oscilacija), te kod svakog novog mjerenja mijenjamo frekvenciju pobude.

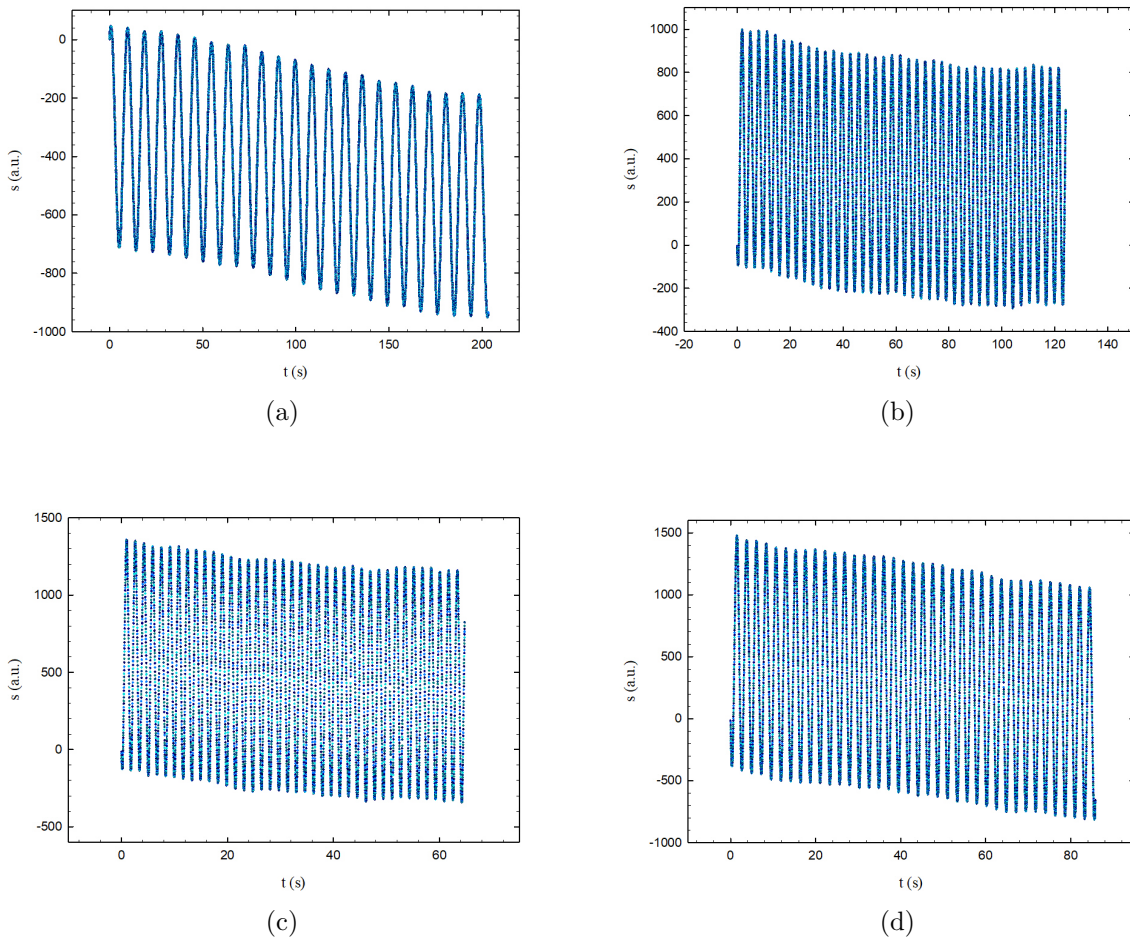
Za jednu jakost struje htjeli smo prikazati čitavu rezonantnu krivulju, te smo odradili mjerenja za puni interval frekvencija koji je uređaj (elektromotor) omogućavao. Frekvencije pobude nismo očitavali s uređaja jer je bilo nedovoljno precizno, već smo ih računali kao za prethodne oscilacije, metodom najmanjih kvadrata iz podataka mjerenja. Za određivanje amplitude titranja trebali su nam opet maksimumi, pa smo i za ovaj dio mjerenja pokrenuli program koji je ispisao u datoteku maksimume, njihov redni broj i vrijeme, za svako pojedino mjerenje. Kada smo prikazali grafički mjerenja vidjeli smo da kao da centar, odnosno ravnotežni položaj, nije fiksna. Krivulja je bila zavojita iako je kod ovakvog titranja amplituda konstantna. Dakle, nije bilo moguće samo iz vrijednosti maksimuma odrediti amplitudu. Ono što smo radili je iz podataka o maksimumima odredili više udaljenosti dvaju susjednih maksimuma, zatim našli srednju vrijednost toga. Ta vrijednost predstavljala je dvostruku amplitudu, stoga smo ju još, prije crtanja na grafu rezonancije, podijelili s 2 da dobijemo amplitudu, odnosno, neku prosječnu amplitudu. Kada smo odredili frekvencije i pripadne amplitude, mogli smo nacrtati krivulju rezonancije za struju gušenja tog niza mjerenja, koja je bila fiksna, a koju smo, kao i kod dijela s prigušenim oscilacijama, očitavali s ampermetra, serijski spojenog u krug. Kao što je rečeno, napravljen je samo jedan potpun niz mjerenja za jednu struju, tj. gušenje. Graf krivulje koju smo dobili iz ovih podataka detaljno smo usporedili s očekivanom krivuljom, kako bismo provjerili poklapanje teorijskog predviđanja sa eksperimentom, odnosno kako bismo potvrdili oblik rezonantne krivulje.

Za ostale struje smo željeli dobiti samo izgled krivulje u području oko rezonantne frekvencije, pa smo uzevši to u obzir birali frekvencije pobude na kojima smo vršili mjerenja (njih smo samo otprilike određivali štopericom tokom mjerenja da budemo sigurni da ćemo dobiti ciljano područje krivulje rezonancije, a kasnije preciznije računali). Razlog zašto smo željeli dobiti dio krivulje rezonancije u području oko rezonantne frek-

vencije za svaku struju, je da možemo usporediti rezonantne amplitude u ovisnosti o faktoru gušenja. Teoretski znamo da bi ta amplituda trebala biti manja za veći faktor gušenja, prema relaciji (1.37).

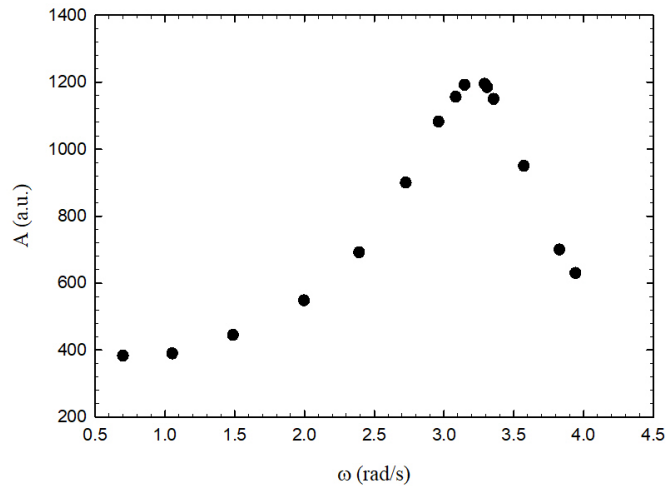
Sa grafa 3.8a smo pronašli da  $\gamma$ , za struju, za koju smo radili puni niz mjerenja,  $I = 0.82A$ , iznosi  $\gamma = 0.5\text{rad/s}$ .

Na slici 3.10 od svih mjerenja ovog niza prikazana su 4, za 4 različite frekvencije pobude.



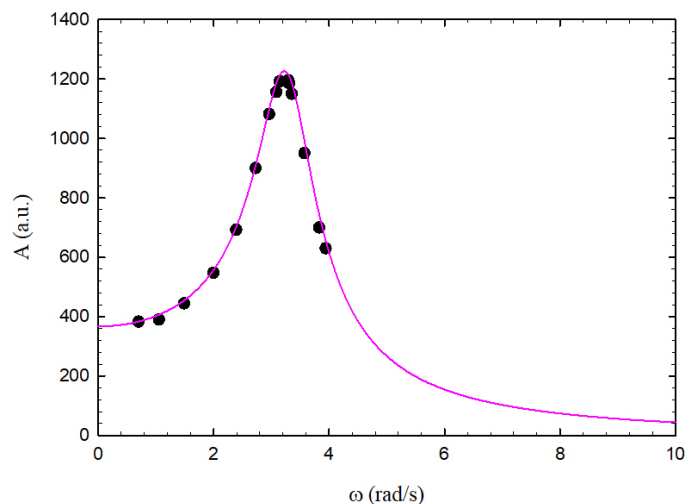
Slika 3.10: Grafovi ovisnosti položaja o vremenu za frekvencije pobude: (a)  $\omega = 0.69\text{rad/s}$ , (b)  $\omega = 2.0\text{rad/s}$ , (c)  $\omega = 3.83\text{rad/s}$ , (d)  $\omega = 2.73\text{rad/s}$ .

Za struju  $I = 0.82A$  mjerenja za puni niz različitih frekvencija pobude dao je graf ovisnosti amplitude prisilnog titranja o frekvenciji pobude prikazan na 3.11.



Slika 3.11: Graf rezonantne krivulje za  $\gamma = 0.5 \text{ rad/s}$

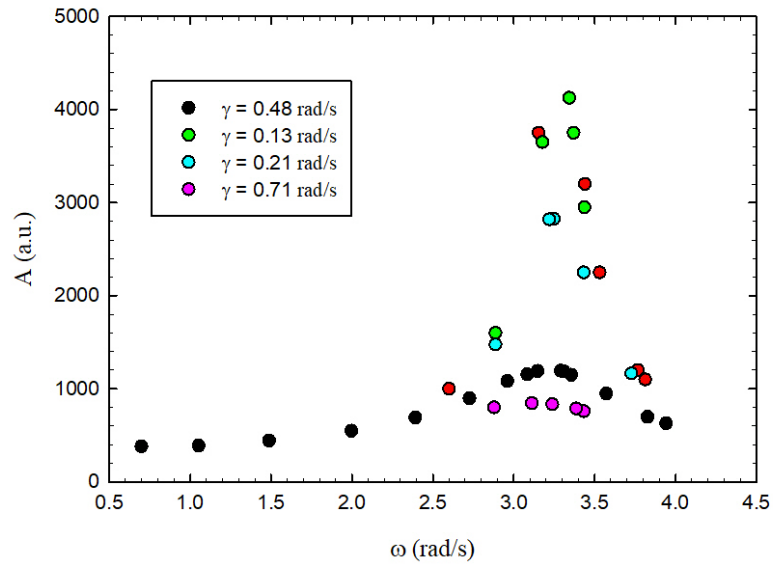
Kako bismo ustvrdili koliko dobro rezultati mjerenja slijede teorijska predviđanja, odredili smo parametre za koje dobivena teorijska krivulja, opisana relacijom (1.37), najbolje opisuje mjerenja. Na slici 3.12 roza linija prikazuje predviđenu krivulju, dok točke prikazuju podatke dobivene iz mjerenja. Kao što je rečeno, nismo mogli izmjeriti punu krivulju rezonancije zbog ograničenja uređaja kod odabira maksimalne frekvencije pobude.



Slika 3.12: Graf rezonantne krivulje za  $\gamma = 0.5 \text{ rad/s}$  s prilagođenom krivuljom

Iz prilagodbe smo dobili vrijednost faktora gušenja  $\gamma$  i  $\omega_0$ , za koje krivulja najbolje opisuje podatke mjerenja:  $\gamma = (0.499 \pm 0.006) \text{ rad/s}$  i  $\omega_0 = (3.287 \pm 0.003) \text{ rad/s}$ . Vidimo da se obje vrijednosti u okviru greške slažu s prije dobivenima, stoga zaključujemo da mjerenja zaista slijede teoriju.

Na slici 3.13 vidimo graf sa opet prethodnim podacima, na koje su nadodani podaci mjerenja u okruženju vlastite frekvencije kružnog njihala.



Slika 3.13: Graf točaka rezonantnih krivulja za različite  $\gamma$

Rezultat je u skladu s teorijskim očekivanjima, maksimalna amplituda manja je što je faktor gušenja veći.



## 4 Zaključak

Glavni zadatak nadopune eksperimentalnog postava za proučavanje oscilatornih gibanja, kružnog njihala sa zavojnicom i generatorom, bio je poboljšanje preciznosti mjerenja. Rabeći računalnog miša kao mjerni instrument, uspjeli smo pratiti jako male vremenski ovisne pomake kotača kružnog njihala, koje je izvodilo oscilatorna gibanja. Računalni program nam je omogućio zapisivanje tih podataka u datoteku te računanje i zapisivanje položaja u vremenu, iz čega smo napravili analizu tri vrste oscilacija, slobodnih, prigušenih i prisilnih. Izvođenje vježbe kružnog njihala na praktikumu, gdje izvođač prati oscilacije te rukom bilježi vremena i pripadne kuteve, ne može davati brojke koje su precizne do razine da se iz njih mogu izvući podaci koji se zaista mogu uspoređivati s teorijom. Korištenje računalnog miša i programa za praćenje gibanja i bilježenje podataka omogućuje efikasnije izvođenje mjerenja te dobivanje znatno više podataka tokom jednog mjerenja, što dodaje na kvaliteti dobivenih rezultata. Grafovi koje smo bili u mogućnosti crtati sa, na ovaj način dobivenim podacima, imaju dovoljan broj točaka te je jasno vidljiva sinusoidalna ovisnost već u startu. Već pri samom pogledu na grafove može se zaključiti o vrsti oscilacija te otprilike smjestiti mjerenja po redu jakosti prigušenja ili frekvencije pobude. Kada pogledamo brojke dobivene analizom, možemo primijetiti da su one u velikoj mjeri u skladu sa teorijskim predviđanjima, za svaku od tri vrste oscilacija.

Kod titranja, koja smo nazivali neprigušenima, računali smo vrijednosti perioda kako bismo provjerili pretpostavku da frekvencija titranja kružnog njihala ne ovisi o početnom kutu. Dobiveni intervali perioda izuzetno se dobro poklapaju, čime smo potvrdili teorijsku pretpostavku. Obzirom na brojnost i preciznost mjerenja, imalo je smisla čak i prikazati raspodjelu frekvencija na slici 3.5 te smo uvidjeli kako u realnim uvjetima nije moguće postići savršeno harmonijsko titranje.

Kod prigušenih titranja, za svako pojedino mjerenje odredili smo faktor prigušenja pripadnog oscilatornog gibanja. Grafički smo prikazali ovisnost izračunatih faktora gušenja o kvadratima pripadnih struja kroz zavojnicu, 3.8b. Na ovaj način smo provjerili i potvrdili pretpostavku da je faktor gušenja proporcionalan kvadratu struje. Iz grafa ovisnosti kvadrata kružne frekvencije o kvadratu faktora gušenja, 3.9a, pretpostavivši teorijsku ovisnost (2.9), uspjeli smo dobiti jako precizan interval za vlastitu frekvenciju kružnog njihala. Brojke su u skladu sa onima dobivenim kod prve vrste

oscilacija, gdje je srednja vrijednost kružne frekvencije oscilacija nešto manja jer nismo mogli postići savršeno neprigušeno titranje iz kojeg bi direktno računali vlastitu frekvenciju. Srednja vrijednost nagiba pravca, koja iznosi blizu jedan, je također u skladu sa teorijom.

Kod prisilnih oscilacija, grafovi prikazuju stalnu amplitudu oscilacija, koja se, za istu struju prigušenja, mijenja ovisno o frekvenciji pobude, u skladu s teorijskim očekivanjima. Niz mjerenja za jednu struju prigušenja, s punim rasponom frekvencija pobude kojeg je generator omogućavao, dao je interval u kojem se nalazi faktor gušenja. Izračunati interval zaista je obuhvaćao faktor gušenja koji je, prema rezultatima iz obrade prigušenih oscilacija, pripadao struji kroz zavojnicu za taj niz mjerenja. Na grafu 3.6 jasno se uočava kako maksimalna amplituda opada povećanjem faktora gušenja. Također, sukladno teorijskim očekivanjima, rezonantna frekvencija se pomiče ulijevo povećanjem faktora gušenja, te se krivulja širi.

Svi dobiveni rezultati bili su jako precizni i u skladu s teorijom, zbog čega zaključujemo kako je nadopuna eksperimentanog postava kružnog njihala sa računalnim mišem, kao mjernim instrumentom, i računalnim programom, koji bilježi podatke, svrshodna i korisna te u realizaciji lako izvediva.

## 5 Metodički dio

### 5.1 Uvod

Matematičko njihalo relativno je jednostavan uređaj i proučava se od 17.stoljeća. Talijanski znanstvenik Galileo Galilei započeo je eksperimente s njihovima početkom 1600-ih.

Ubrzo nakon što je počeo formalno proučavati svojstva njihala, svoja je zapažanja opisao u pismu prijatelju. Galilejevo pismo opisuje njegovo otkriće da je vrijeme potrebno da se njihalo pomakne naprijed-natrag ostalo stalno.

Kasnije je Santorio Santori, liječnik iz Venecije, počeo koristiti njihalo za mjerenje pulsa pacijenta, što je objavio 1626. u djelu Pulsilogium. Koristio je činjenicu da je period njihala obrnuto proporcionalan korjenu njegove duljine [41].

U istom stoljeću Galileova otkrića, njihala su se počela koristiti kao zamjena za nepozdane mehanizme koji pokreću satove. Prvi sat s njihovom izumio je 1656. nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, koji je došao do točnog izraza za period njihala.

[34] Galileo je pomoću njihala provodio mjerenja utjecaja gravitacije. Nije uspio odrediti gravitacijsku akceleraciju, ali je pokazao da tijela padaju stalnom akceleracijom prema tlu. Istraživao je kako visina ispuštanja objekta utječe na brzinu pada, za što mu je trebao uređaj za mjerenje vremena. Koristeći matematiku i činjenicu da njihalo oscilira konstantnim periodom, došao je do zaključka da se, pri slobodnom padu, brzina objekta povećava za jednaku vrijednost u jednakim vremenskim intervalima [42].

Znanstvenici su pretpostavljali da je Zemlja kugla koja se vrti. Međutim, tek je 1851., 200 godina nakon što je Galileo započeo svoje eksperimente, Foucault, francuski fizičar, uspio dokazati rotaciju Zemlje. Koristio je njihalo kako bi pokazao ne samo da se Zemlja vrti, već i da za to trebaju 24 sata [34]. Foucaultove demonstracije prikazuju visak koje, njišući se, izgleda kao da mijenja ravninu oscilacija, tj. da se okreće. Zapravo, njihalu je onemogućeno mijenjanje smjera oscilacija, što znači da se okreće pod ispod njihala. Njihanje njihala definira određenu ravninu, koja je sama po sebi fiksna, međutim, gledaocu sa Zemlje, koja rotira, čini se kao da se ravnina, u kojoj se njiše njihalo, rotira. Na polovima Zemlje, puna rotacija ravnine dogodit će se u 24h. Kako se spuštamo više prema ekvatoru, ovo vrijeme se produljuje. na ekvatoru ravnina ostaje fiksna u odnosu na promatrača sa Zemlje [35]. Vrijedi:

$$\omega = 360 \sin \Phi / \text{dan},$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina, a  $\Phi$  geografska širina.

Njihalo se uobičajeno sastoji od duge, lagane šipke ili niti na čijem je kraju ovješeni objekt velike mase a malog volumena. Idealizacija ovog oblika u točkastu masu na kraju besmasene nerastezljive niti duljine  $l$  poznata je kao jednostavno njihalo. Stvarno njihalo, kojem većina mase nije sadržana u jednoj točki, naziva se fizičko ili složeno njihalo.

Ukoliko je otklonjeno od ravnotežnog položaja za mali kut, oscilacije njihala su harmoničke i period gotovo ne ovisi o kutu otklona već o geometriji njihala i lokalnoj vrijednosti  $g$ , ubrzanju sile teže [36].

Svojstva njihala široko se koriste u raznim uređajima, uključujući satove, aparate koji se koriste za određivanje ubrzanja uslijed gravitacije, žiroskopske uređaje i instrumente kojima se eksperimentalno određuju momenti tromosti tijela [36].

Teme poput ove zahvalne su za školsku nastavu, zato što su se proučavale već u daloj povijesti, pa je zanimljivo učenike upoznati sa povijesnim tokom spoznaja o temi, i na taj način ih zainteresirati.

Učenici se susreću s titranjima u 3.razredu gimnazije. Nastavna jedinica matematičko njihalo dolazi nakon proučavanja titranja tijela na opruzi. Predviđena su 2 školska sata za obrađivanje ove nastavne jedinice. Nastava je istraživački usmjerena, s ciljem poticanja učenika na razvijanje sposobnosti znanstvenog razmišljanja i zaključivanja [40]. Učenike potičemo na sudjelovanje u nastavi koristeći interaktivne metode kao što su vođenje usmjerene rasprave, interaktivno izvođenje eksperimenta te konceptualna pitanja s karticama. Eksperimenti koje izvodimo su frontalni opservacijski u uvodnom dijelu, učenički istraživački u središnjem dijelu te aplikacijski u završnom dijelu.

Cilj ovog sata je upoznavanje s pojmom matematičkog njihala, te određivanje izraza za period matematičkog njihala. Kako bismo učenike zainteresirali, ubacit ćemo povijesne crtice u uvodni i središnji dio sata. Ideja uvodnog dijela je uvesti pojam njihala, i posebno jednostavnog matematičkog njihala, te demonstrirati ovo njihalo učenicima. Na

kraju uvodnog dijela izvodim opservacijski pokus, pokazujem učenicima matematičko njihalo te oni promatrajući opisuju glavne karakteristike ovakvog njihala. Zatim u središnjem dijelu provjeravamo učeničke hipoteze da period ovisi o masi, kutu otklona i duljini niti. Za prve dvije varijable provjeru radimo putem istraživačkog frontalnog pokusa, nakon kojeg učenici zaključuju da period ne ovisi o kutu otklona niti masi tijela ovješena na nit. Zatim podijelim učenike po grupama, te oni provode učenički istraživački pokus kako bi odredili kako period njihala ovisi o duljini niti. Period mjere štopericom, a tijekom mjerenja paze na provođenje kontrole varijabli. Rezultate zapisuju u tablicu u bilježnice. Zatim grafički prikazuju rezultate u Excelu, što im pomaže da izvedu zaključak da je period njihala proporcionalan korijenu duljine njihala. Nakon toga kroz vođenu raspravu matematički izvodimo izraz za period jednostavnog njihala. Učenici korake zapisuju u bilježnice. Na kraju središnjeg dijela svi koraci izvoda, istraživačko pitanje i skica postava pokusa trebaju biti na ploči, dakle koristim metodu crtanja i pisanja. Bitno je da učenici shvate kako period ne ovisi o masi kuglice niti otklonu, ukoliko je riječ o malim kutovima. Period ovisi samo o duljini niti i iznosu gravitacijske akceleracije. Za kraj, u završnom dijelu, izvodimo aplikacijski pokus koristeći mobitel i aplikaciju, s ciljem određivanja gravitacijske akceleracije, konstruirajući jednostavno njihalo, nakon čega provjeravam učeničko razumijevanje uz pomoć konceptualnih pitanja s karticama.

## 5.2 Nastavna priprema: matematičko njihalo

### Predmetni ishodi:

FIZ SŠ C.3.4. Analizira harmonijsko titranje.

- Analizira titranje matematičkog njihala.
- Opisuje ulogu gravitacije u formiranju povratne sile za jednostavno njihalo.
- Objašnjava o čemu ovisi period jednostavnog njihala.
- Povezuje jednostavno njihalo sa mehaničkim uređajima poput sata.
- Primjenjuje izraz za period matematičkog njihala.

FIZ SŠ C.3.8. Rješava fizičke probleme

- Kvalitativno zaključuje primjenjujući fizičke koncepte i zakone.
- Primjenjuje i pretvara mjerne jedinice.
- Vrednuje rješenje i rezultat.

FIZ SŠ C.3.9. Istražuje fizičke pojave.

- Istražuje pojavu s pomoću demonstracijskog pokusa.

### **Međupredmetni ishodi:**

- osr B.5.2. Suradnički uči i radi u timu.
- uku A.4/5.4.4. Kritičko mišljenje Učenik samostalno kritički promišlja i vrednuje ideje.
- pod A.5.1. Primjenjuje inovativna i kreativna rješenja.

## **TIJEK NASTAVNOG SATA**

### **UVODNI DIO SATA:**

**Sjećate li se kad ste se kao djeca igrali u parku i ljuljali na ljuljački? Kada vas je netko povukao na ljuljački i zatim pustio, što se događalo? Opišite svoje gibanje u tim trenucima.**

Učenici daju odgovore. Govore kako su se nakon što puštanja njihali naprijed-nazad dok se nisu zaustavili.

#### **Zbog čega ste se zaustavili?**

Učenici zaključuju da se zbog otpora zraka ljuljačka zaustavi nakon određenog vremena jer se gubi energija.

#### **Kako nazivamo gibanje naprijed-nazad oko točke ravnoteže?**

Podjetim se s učenicima kako smo na prethodnim satovima ovakva gibanja nazivali oscilatornima.

**U fizici postoji naziv za objekt koji je zakačen i njiše se pod utjecajem gravitacije. Kako biste vi nazvali ovakav objekt?**

Dolazimo do usuglašavanja oko naziva njihalo.

Izvučem njihalo iz ravnotežnog položaja i pustim ga da se slobodno giba, kako bi učenicima demonstrirala oscilacije.

**Njihala su relativno jednostavni uređaji koji se proučavaju od 17. sto-**

ljeća. Talijanski znanstvenik Galileo Galilei započeo je eksperimente s njihovima početkom 1600-ih.

Ubrzo nakon što je Galileo počeo formalno proučavati svojstva njihala, svoja je zapažanja opisao u pismu prijatelju. Galilejevo pismo opisuje njegovo otkriće da vrijeme potrebno da se njihalo pomakne naprijed-natrag ostaje stalno ukoliko ne mijenja geometriju njihala [34]. Ovo znači da njihalo pokazuje pravilnost u svome gibanju oko ravnotežnog položaja, period mu se ne mijenja tokom gibanja.

Što mislite, kako su kasniji znanstvenici i izumitelji mogli iskoristiti ovu informaciju o stalnom periodu kojim njihalo titra? Učenici daju prijedloge... Ispričam kako su se njihala nakon ovog otkrića počela koristiti kao zamjena za nepozdate mehanizme koji su u Galilejevo vrijeme pokretali satove.



Slika 5.1: sat s njihalom [38]

Slika 5.1 prikazuje primjer sata s njihalom.

Prvi sat s njihalom izumio je 1656. nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens i sve do 1930. satovi s njihalom bili su najprecizniji satovi [34].

Opet pokažem njihalo koje imam na stolu.

**Opservacijski pokus:** tražim učenike da opišu njihalo koje vide.

Raspravom dolazimo do najbitnijih karakteristika: njihalo koje je pojednostavljeno, na način da je većina mase, gotova sva, sadržana u malom volumenu na dnu gotovo bezmasene nerastezljive niti ili šipke, nazivamo jednostavno matematičko njihalo.

Naslov lekcije: Jednostavno matematičko njihalo

**SREDIŠNJI DIO SATA:**

**Ako želimo koristiti njihalo u uređajima koji mjere vrijeme, je li dovoljna samo spoznaja da je period titranja njihala stalan?**

Navodim učenike na ideju da nam je potrebna informacija o iznosu perioda, kao i da je on stalan tokom gibanja.

**Tako su, naravno, razmišljali i izumitelji onog doba, te su proučavajući oscilacije njihala došli do zaključaka o čemu ovisi period. Mi ćemo slijediti njihove stope i uzeti ulogu znanstvenika onog doba.**

**Razmislite i odgovorite, o čemu sve ovisi period oscilacija jednostavnog njihala?**

Učenici navode prijedloge: masa ovješnog utega, kut otklona, duljina niti..

**Pokušajte osmisliti pokus kojim možemo provjeriti vaše tvrdnje.**

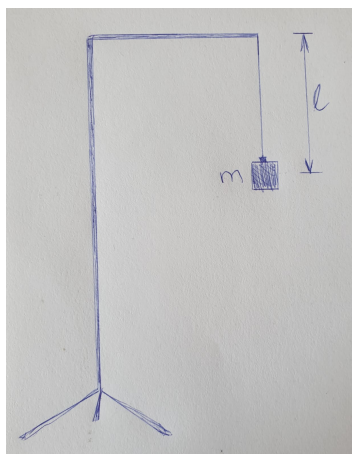
Dogovaram s učenicima eksperiment u kojem koristim jednostavno matematičko njihalo kojemu se može mijenjati duljina niti, utege različitih masa, štopericu i kutomjer.

***Istraživačko pitanje:*** O čemu i kako ovisi period jednostavnog matematičkog njihala?

***Istraživački pokus:*** pokus s jednostavnim njihalom u kojem mjereći period štopericom provjeravamo ovisi li period i kako o veličinama koje smo gore naveli.

Na stolu imam njihalo i utege različitih masa. Tražim učenike da skiciraju postav eksperimenta u svoje bilježnice, te netko crta na ploču.





Slika 5.2: Skica postava istraživačkog pokusa

Nakon svakog mjerenja, trebaju u bilježnice zapisati značenje dobivenih podataka.

Prvo provjeravamo za masu. Kako biste provjerili ovisi li period o masi?

Učenici predlažu da vješamo utege različitih masa na njihalo i za svaki uteg mjerimo period štopericom mobitela.

Na što sve moramo paziti tokom izvođenja mjerenja?

Primjećuju da moramo paziti da se druge varijable ne mijenjaju, pogotovo kut otklona, zbog kontrole varijabli.

Jedan učenik izvodi eksperiment na katedri i mijenja mase, dok ostali odbrojavaju titraje i mjere vrijeme štopericama na mobitelima.

Nakon što napravimo mjerenja, rezultate trebaju popisati u tablicu u bilježnice, a jedan učenik zapisuje na ploču

Ovisnost perioda njihala o masi utega	
$m / \text{kg}$	$T / \text{s}$
0.1	
0.2	
0.5	

Slika 5.3: Tablica za mjerenja ovisnosti perioda o masi [38]

Uočavaju da se period ne mijenja, dakle ne ovisi o masi.

Zatim na isti način provjeravamo za kut otklona, podatke opet zapisuju u tablicu.

Ovisnost perioda njihala o kutu otklona njihala	
$\alpha / ^\circ$	$T / s$
5	
10	
15	

Slika 5.4: Tablica za mjerenja ovisnosti perioda o kutu otklona  $\alpha$  [38]

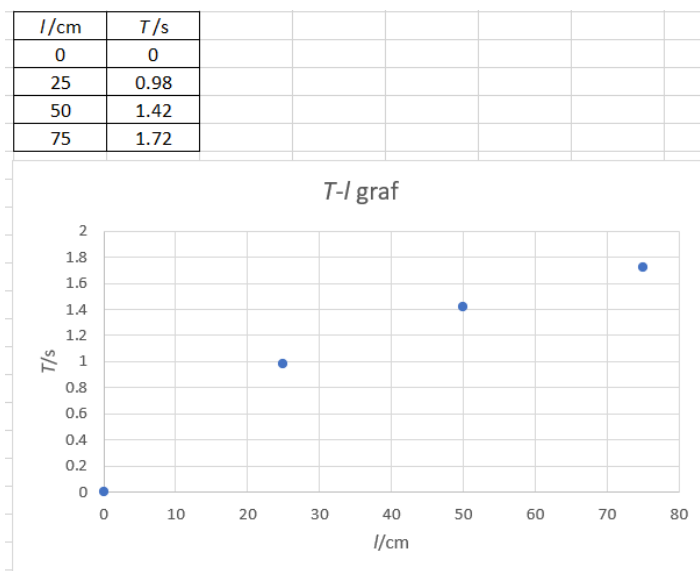
Uočavaju da se period ne mijenja, dakle ne ovisi o kutu otklona, ukoliko je mali kut.

I na kraju, nakon što ih podijelim u grupe tako da svaka grupa dobije njihalo, učenici mjere periode za različite duljine njihala.

Ovisnost perioda njihala o duljini niti	
$l / \text{cm}$	$T / s$
50	
75	
100	

Slika 5.5: Tablica za mjerenja ovisnosti perioda o duljini njihala [38]

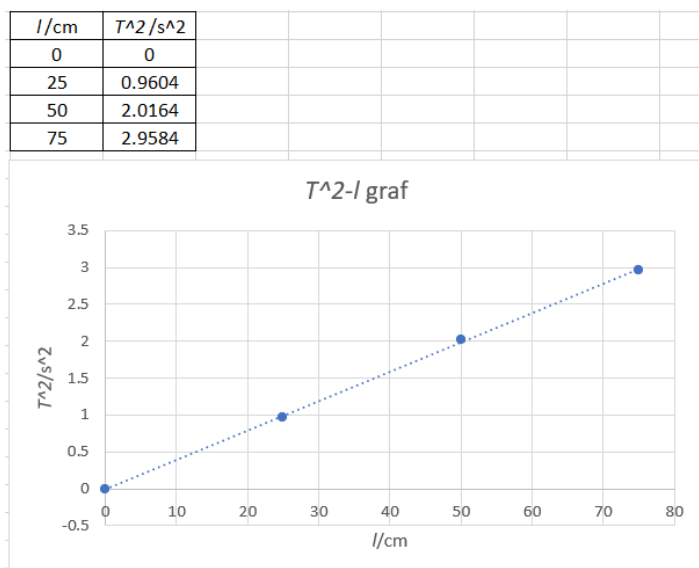
Kako bi povezali dobivene rezultate sa matematičkom operacijom, učenici u Excelu crtaju graf ovisnosti perioda o duljini njihala iz podataka dobivenih mjerenjem .



Slika 5.6: Tablica i graf ovisnosti perioda o duljini niti

Učenici uočavaju da točke ovog grafa ne mogu biti opisane pravcem.

Zatim radimo graf točaka sa kvadriranim vrijednostima perioda.



Slika 5.7: Tablica i graf ovisnosti kvadrata perioda o duljini niti

Učenici uočavaju da ove točke možemo povezati pravcem. Linearnu funkciju prilagođavamo novim podacima kako bi potvrdili da točke grafa zaista leže na pravcu. **Koliko iznosi parametar pravca  $b$ ?**

Dolazimo do zaključka da je, obzirom da pravac koji dobro opisuje točke grafa prolazi kroz ishodište, parametar  $b$  jednak nuli.

**Što to govori o odnosu kvadrata perioda i duljine njihala? U kakvoj su matematičkoj vezi?**

Učenici uočavaju da je period proporcionalan korjenu duljine i zapisuju u bilježnice rezultat grafičke analize:

$$T^2 \sim l$$

**Što smo zaključili iz eksperimenta, o čemu ovisi period njihala i na koji način?** Tražim da zapišu u bilježnice, netko pročita.  $T \sim \sqrt{l}$

Ovaj rezultat učenici zapisuju u bilježnice i na ploču kraj skice postava.

Nakon pokusa, radimo interaktivni izvod za period jednostavnog matematičkog njihala.

Huygens je pokazao da su satovi sa velikim zamahima netočni, te da ovisno o otklonu varira period njihala. Zbog ovoga su satove koje su proizvodili ograničili otklon njihala na maksimalno  $4\text{-}6^\circ$  [43]. Probat ćemo sada zajedno napraviti izvod za period jednostavnog njihala, pa ćemo vidjeti

možemo li objasniti cjeloviti izraz za period i ovo Huygensovo otkriće.

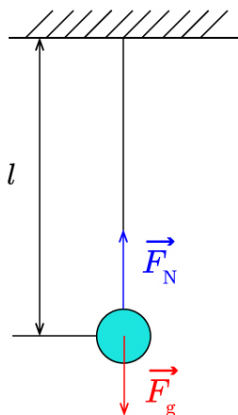
Koji zakon nam pomaže kod rješavanja izraza za gibanje tijela pod utjecajem sile i kako on glasi?

2. Newtonov zakon. Govori da suma svih sila koje djeluju na neko tijelo daje tom tijelu akceleraciju proporcionalnu rezultantnoj sili, obrnuto proporcionalnu masi:  $F_{uk} = ma$

Za početak, trebamo odrediti odakle dolazi povratna sila. Tražim učenike da daju prijedloge. **Što je prva stvar koju radimo kod analize sila?**

Prvo crtamo prikaz sila na dijagramu sila.

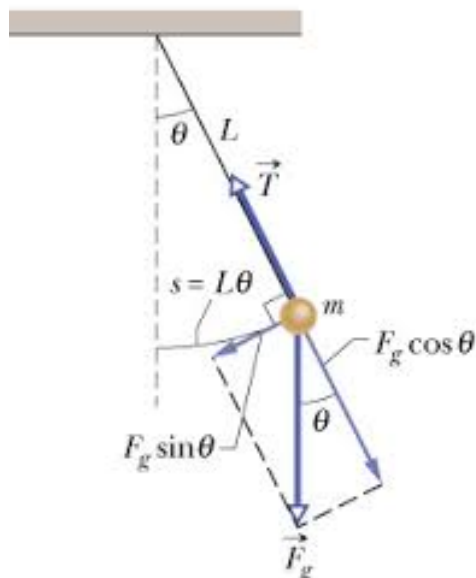
Kod matematičkog njihala otpor zraka je zanemariv, a nit bezmasena. Učenici crtaju u bilježnice dijagram sila za matematičko njihalo u ravnotežnom položaju, a zatim netko na ploču crta crtež prikazan na slici 5.8:



Slika 5.8: dijagram sila na matematičkom njihalu [38]

**Nacrtat ću na ploči jednostavno njihalo izvučeno iz ravnotežnog položaja a vi odredite kako glasi izraz za silu koja vraća tijelo u ravnotežni položaj, i odakle potječe ta sila?**

Učenici crtaju u bilježnice rastav sila, dok ja kružim razredom. Jedan učenik izlazi pred ploču kako bismo zajedno, kroz diskusiju, nacrtali točan prikaz rastava sila.



Slika 5.9: rastav sila na matematičkom njihalu [13]

Na slici 5.9 vidimo da se radijalna komponenta gravitacijske sile poništi sa napetosti niti (nit je nerastezljiva). Preostaje samo tangencijalna komponenta gravitacijske sile, koja ima ulogu povratne sile, što vidimo i iz smjera vektora sile koji pokazuje prema ravnotežnom položaju.

**Kako biste odredili iznos povratne sile, odnosno horizontalne komponente gravitacijske sile?**

Tražim da zapišu u bilježnice, dok opet hodam razredom. Opet jedan učenik na ploči zapisuje postupak:  $|F_{||}| = mg \sin \theta$

Obzirom da početni dio sinusne krivulje možemo aproksimirati pravcem, za male kutove vrijedi:  $\sin \theta = \theta$ . Uzimamo da rezultat našeg izvoda vrijedi samo za male kutove, i naziva se aproksimacija malih kutova. Zapisujemo:  $|F_{||}| = mg\theta$

Tražim da učenika sada da zapišu generalni izraz za povratnu silu:

$$F = -kx$$

Te da izraze x, koristeći trigonometrijske funkcije, preko duljine niti, l:

$$x = l \sin \theta$$

Obzirom da smo već u prethodnim koracima uzeli aproksimaciju malih kutova, napravimo tako i ovdje te dobijemo:

$$x = l\theta$$

Sada vratimo taj izraz u formulu povratne sile:

$$|F| = kl\theta$$

**Rekli smo da u ovom slučaju gravitacija igra ulogu povratne sile, koje dvije jednakosti možemo povezati?**

Izraz za horizontalnu komponentu gravitacije i izraz za povratnu silu njihala.

Tražim da zapišu u bilježnice i izraze faktor  $m/k$ .

Na ploči učenik zapisuje:

$$mg\theta = kl\theta$$

$$mg = kl$$

$$m/k = l/g$$

Kako glasi izraz za period harmonijskog titranja?

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Kako glasi izraz za period matematičkog njihala?

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

**O kojoj fizikalnoj veličini, koju možemo mijenjati, ovisi period njihala i da li je to u skladu s rezultatima mjerenja?**

Jedini faktor kojim možemo mijenjati period je duljina njihala, što je u skladu s mjerenjima.

Objasnite sada, u svoje bilježnice, zašto je Huygens primijetio da kod većih otklona dolazi do nepravilnosti, odnosno da je narušena ova pravilnost ovisnosti perioda o duljini niti njihala. U bilježnice zapisuju: izraz za period njihala vrijedi samo za male kutove, jer smo male kutove uzeli kao pretpostavku u izvodu izraza, zato je Huygens mogao uočiti nepodudarnost za veće odmake.

**Izvodom smo dobili više informacija nego iz samog eksperimenta. Ustvrdili smo da period njihala ovisi o još jednoj fizikalnoj veličini osim duljine niti. O kojoj veličini je riječ?**

Radi se o gravitacijskoj akceleraciji,  $g$ .

**Razmislite, što bi se dogodilo s periodom matematičkog njihala ukoliko bi**

## odnijeli njihalo na drugi planet, koji ima drugačiji gravitacijsku konstantu?

Učenici odgovaraju kako bi period njihala bio drugačiji kada ne bismo bili na Zemlji.

### ZAVRŠNI DIO SATA:

**Aplikacijski pokus:** Određivanje ubrzanja sile teže mobitelom kao njihalom

Tražim učenike da objasne kako bi uz pomoć matematičkog njihala provjerili koliko iznosi gravitacijska akceleracija.

Dogovaramo se oko slijedećeg načina provedbe: uzeli bi njihalo koje bismo pustili da se njiše, mjerili period te pomoću perioda i poznate duljine njihala izračunali  $g$ .

Tražim jednog učenika kao dobrovoljca za izvođenje eksperimenta frontaln pred razredom. Objasnim da je za izvođenje potreban mobitel i nerastezljivu nit, koju već imamo pripremljenu na stolu. Pomoću niti i mobitela, koji je znatno masivniji od niti, napraviti ćemo matematičko njihalo.

Koraci izvođenja eksperimenta [37]:

1. Instalirati aplikaciju Phyphox na mobilni telefon. Možete je besplatno preuzeti na vaš mobilni uređaj.

2. Otvoriti aplikaciju Phyphox i pod izbornikom Mechanics odaberati Pendulum.

3. Nakon što otvorite izbornik Pendulum u gornjoj izbornoj traci, odabrati izbornik LENGTH.

4. U gornjem desnom uglu kliknuti na tri točkice te odaberati Timed run. Odabirom ove opcije može se odgoditi početak mjerenja za 3s te odrediti da mjerenje traje 10s.

5. Zavezati mobilni telefon uzicom, pritom paziti da bude čvrsto zavezano da mobitel ne padne na pod.

6. Kada smo spremni za mjerenje kliknemo start i mjerenje počinje.

7. Ne smojemo zaboraviti njihati mobitel za vrijeme trajanja početka mjerenja od 3s te još dodatnih 10s mjerenja. Nakon isteka 13s, aplikacija će sama prestati mjeriti. Tada očitavamo mjerenja.

8. Phyphox je odredio duljinu naše niti od točke hvatišta do centra mase mobilnog uređaja.

Rezultati jednog mjerenja prikazani su na slici 5.10



Slika 5.10: podaci mjerenja phyphoxom [37]

Tražim učenike da izraze iz formule perioda  $g$ .  $g = 4\pi^2 l / T^2$

Sada preostaje samo uvrstiti dobivene brojeve u izraz za  $g$  i sporediti dobiveni rezultat s poznatim iznosom  $g$ .

Nakon ovoga učenicima postavljam konceptualna pitanja sa slajdova koje vide na projektoru, a oni podižu kartice s odgovorima, koje potom diskutiramo.

Konceptualna pitanja:

1) Što će se dogoditi s periodom matematičkog njihala ako ga odnesemo na Mars? (Prosječno gravitacijsko ubrzanje na Marsu je  $3.72076 \text{ m/s}^2$  (oko 38% od onog na Zemlji) [39])

a) ništa

**b) povećat će se**

c) smanjit će se



2) Matematičko njihalo smo izvukli iz ravnotežnog položaja za kut  $\alpha$ . Period titranja iznosio je  $T$ . Koliko će iznositi period titranja ukoliko njihalo izvučemo za kut  $2\alpha$  ?

**a) ostat će isti**

b) dvaput će se povećati

c) dvaput će se smanjiti

d)  $\sqrt{2}$  puta će se povećati

e)  $\sqrt{2}$  puta će se smanjiti

3) Frekvencija matematičkog njihala duljine  $l$  je  $f$ . Što će se dogoditi sa frekvencijom ako smanjimo duljinu njihala dva puta?

a) ostat će ista

b) dvaput će se povećati

c) dvaput će se smanjiti

**d)  $\sqrt{2}$  puta će se povećati**

e)  $\sqrt{2}$  puta će se smanjiti

4) Matematičkom njihalu želimo smanjiti period dva puta. Što trebamo učiniti?

**a) smanjiti duljinu njihala 4 puta**

b) povećati duljinu njihala 4 puta

c) smanjiti masu 2 puta

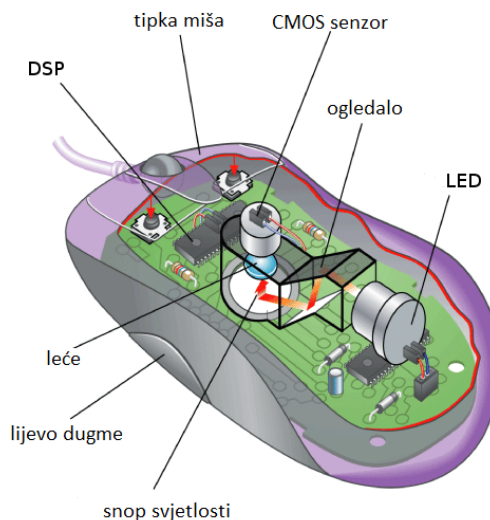
d) povećati masu 2 puta

## 6 Dodatak

### 6.1 Princip rada računalnog miša

Postoje podjele vrste miševa po različitim osnovama, naprimjer po načinu kako se povezuje s računalom. Nas, međutim zanimaju vrste miševa s obzirom na koji način im senzor pokreta radi, odnosno koji je mehanizam očitavanja položaja miša. Dvije su vrste: mehanički (miš s rotirajućom kuglicom) i optički (LED ili laser) miš.

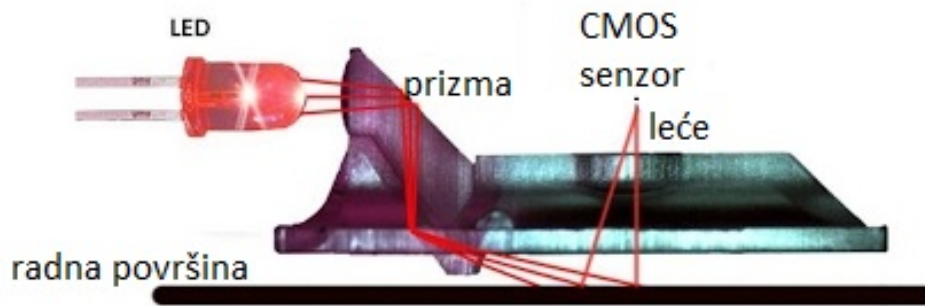
Miš s rotirajućom kuglicom je zastario i više se praktički ne upotrebljava, jer su ova druge novije dvije vrste obje znatno bolje. Također, ovaj miš zahtijeva dodir s podlogom u odnosu na koju očitava pomake, što nam svakako ne odgovara za izvođenje pokusa jer bi dodirivanje podloge čije se pomake očitava mijenjalo gibanje te podloge te bismo dobili automatski iskrivljena rješenja za gibanje. Koristili smo, dakle, optičkog miša. Da bi detektirao gibanje, optički miš koristi izvor svjetlosti, crvene (LED) ili infracrvene (laser), fotodetektor (najčešće CMOS senzor) te procesor signala [28]. Na slici 6.1 prikazan je izgled optičkog miša.



Slika 6.1: Glavni dijelovi optičkog miša [31]

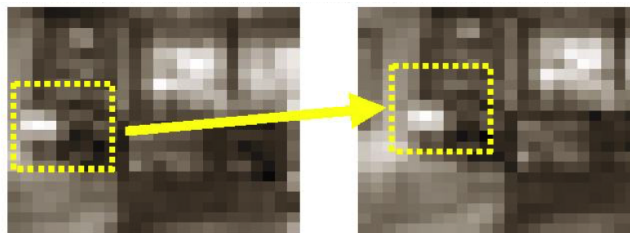
Izvor svjetlosti proizvede svjetlost koja osvjetli površinu. Ta svjetlost se reflektira nazad i dolazi kroz konvergentnu leću do CMOS senzora koji onda formira sliku lokalne površine.

Na slici 6.2 vidimo prikazan princip rada optičkog miša.



Slika 6.2: Prikaz rada optičkog miša [29]

CMOS je poluvodički element, fotodioda, koji služi kao 'elektroničko oko'. Fotodi-oda pretvara fotone (svjetlost) u elektrone (generirajući napon), primjenjujući fotona-ponski učinak, kao mala solarna ćelija. Ćelije CMOSa su okružene tranzistorima koji pojačavaju signal dobiven iz ćelija i šalje ga u konverter koji očitava naboj i prevodi različite količine naboja pojedinih ćelija u senzorne piksele (ne treba brkati sa pikse-lima na monitoru računala ili televizije) različitih intenziteta boja [27] [30]. CMOS senzor napravi tisuće slika svake sekunde i šalje ih procesoru signala na analizu. Slika 6.3 prikazuje kako dvije slike slikane mišem izgledaju. Slike koje računalni miš daje ne prikazuju kako izgleda podloga i ne daju boje, jer koristimo jednu valnu duljinu za osvjetljavanje površine. Boje nisu bitne procesoru za uspoređivanje dvaju slika, tj. dvaju položaja, dovoljni su intenziteti.



Slika 6.3: Slike dobivene pomoću senzora miša u dva različita trenutka [31]

Procesor signala uspoređuje slike kako bi odredio je li se miš pomaknuo, u kojem smjeru i kojom brzinom. Ta informacija se šalje računalu koji u skladu s informacijom ažurira poziciju miša na ekranu. On to radi u  $x$ - $y$  koordinatama, stoga su podaci koje je miš davao u mjerenjima bili popisani posebno za  $x$  i  $y$  smjer [31].

Razlika između optičkog i laserskog miša je u vrsti svjetlosti koji koriste te načinu dobivanja te svjetlosti. Optički miš koristi crvenu svjetlost dobivenu LED diodom dok laserski koristi infracrvenu svjetlost dobivenu laserskom diodom (otud i naziv). Zbog

vrste korištene svjetlosti optički miš neće raditi na prozirnim, naprimjer staklenim, površinama, jer prozirne površine znači da ne reflektira nijednu svjetlost vidljivu ljudskom oku pa tako ni crvenu. Međutim, infracrvenu svjetlost prozirne podloge reflektiraju, stoga laserski miš može raditi na staklenim površinama. Laserski miš je, dakle, osjetljiviji, i može se koristiti za sve površine, zato smo za mjerenja odabrali laserski miš, obzirom da nam je ova karakteristika bila jako bitna kako bismo mogli osigurati da miš bude da sigurnoj udaljenosti od kružnog njihala i time ne remeti mjerenja, a da i dalje registrira gibanje.

Također smo uzeli bežičnog miša kako bi baratanje bilo jednostavnije, odnosno da nas duljina kabela ne ograničava u namještanju postava.

Prije nego smo počeli mjerenja, bilo je bitno onemogućiti softversku akceleraciju miša. Softverska akceleracija miša je prilagodba miša kako bi korištenje miša bilo što efikasnije. Funkcionira na način da pomiče kursor malo dalje kada radimo brze pokrete mišem. To nam u svakodnevnoj upotrebi miša olakšava korištenje obzirom da ćemo kada želimo pomaknuti miša za veću udaljenost na ekranu refleksno napraviti brži pokret, što procesor u mišu prepoznaje kao akceleraciju i posljedično pomakne kursor na ekranu za veću udaljenost nego smo mi pomaknuli miša [32].

Iako je uobičajeno korisna, ova karakteristika miša nama smeta u izvođenju eksperimenta. Kružno njihalo cijelo vrijeme mijenja brzinu gibanja (i akceleraciju), što znači da očitavanja miša ne bi realno prikazivala pomake njihala već pomake koje procesor računa uzimajući u obzir akceleraciju, korigirane pomake. Mi želimo dobiti stvarne pomake, stoga smo nakon svakog novog iskopčavanja i ukopčavanja miša provjerili da je softverska akceleracija miša onemogućena.

## 6.2 Kôd računalnog programa

```
1 import struct
2 import time
3 import sys
4 import math as m
5
6 # default mouse path
7 mousepath = '/dev/input/mouse2'
8
9 def usage():
10     print(f"""
```

```

11 mouse.py - read mouse movements, prints movement on screen.
12 Output contains four columns: dx, dy, Ds, time and s. 'dx' and 'dy' are relative
13 movement in x/y direction, and 't' is time in seconds, approximately
14 counting from program start. The 'Ds' is 1D shift, i.e. calculated full
15 movement, with '+' and '-' sign. The 's' is total 1D position.
16
17 Exit program with ctrl-c.
18
19 Usage:
20     mouse.py [-h | --help]
21
22     -h, --help     shows usage
23
24 This program must be run as root (e.g. 'sudo'), or user
25 have to be a member of the group 'input'.
26 """
27
28 if len(sys.argv) > 1:
29     if sys.argv[1] == '-h' or sys.argv[1] == '--help':
30         usage()
31         sys.exit(0)
32
33 # Open access to mouse
34 mice = open(mousepath, 'rb')
35
36 # Initial time and position
37 t0 = time.time()
38 s = 0 # initial position, for total position calculation
39
40 while(1):
41     # citanje podataka koje posalje mis, i pripadno vrijeme
42     buf = mice.read(3) # binarni podaci
43     t = time.time() - t0
44
45     # pretvaranje binarnih podataka u integer
46     dx, dy = struct.unpack('bb', buf[1:])
47
48     # fi = kut u necrtanom sustavu
49     fi = m.atan2(dx, dy)
50
51     # ovo stavlja fi u interval [0, 2pi]
52     if fi < 0:
53         fi += m.pi
54
55     # novi dx (tj. dx' = Ds)
56     Ds = dx*m.sin(fi) + dy*m.cos(fi)
57     s += Ds # ukupni pomak
58
59     print('dx: {:3d}, dy: {:3d}, Ds: {:12.6f} t: {:12.6f}, s: {:12.6f}').

```

```
60     format(dx, dy, Ds, t, s))
61
62 mice.close()
```

## Literatura

- [1] [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical\\_and\\_Theoretical\\_Chemistry\\_Textbook\\_Maps/Supplemental\\_Modules\\_\(Physical\\_and\\_Theoretical\\_Chemistry\)/Quantum\\_Mechanics/06.\\_One\\_Dimensional\\_Harmonic\\_Oscillator/Chapter\\_5%3A\\_Harmonic\\_Oscillator](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Quantum_Mechanics/06._One_Dimensional_Harmonic_Oscillator/Chapter_5%3A_Harmonic_Oscillator), 10.6.2021.
- [2] [https://www.youtube.com/watch?v=P8rtCE7mGOs&ab\\_channel=NajamAcademy](https://www.youtube.com/watch?v=P8rtCE7mGOs&ab_channel=NajamAcademy), 10.6.2021.
- [3] <https://studiousguy.com/simple-harmonic-motion-examples-everyday-life/>, 10.6.2021.
- [4] <https://hr.neuroth.com/sluh-i-gubitak-sluha/ovako-radi-sluh/>, 10.6.2021.
- [5] [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Book%3A\\_University\\_Physics\\_I\\_-\\_Mechanics\\_Sound\\_Oscillations\\_and\\_Waves\\_\(OpenStax\)/15%3A\\_Oscillations/15.03%3A\\_Energy\\_in\\_Simple\\_Harmonic\\_Motion](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Book%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/15%3A_Oscillations/15.03%3A_Energy_in_Simple_Harmonic_Motion), 11.6.2021.
- [6] <https://courses.lumenlearning.com/physics/chapter/16-5-energy-and-the-simple-harmonic-oscillator/>, 11.6.2021.
- [7] [https://hr.wikipedia.org/wiki/Hookeov\\_zakon](https://hr.wikipedia.org/wiki/Hookeov_zakon), 11.6.2021.
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law), 14.6.2021.
- [9] <https://www.quora.com/What-is-an-example-of-non-simple-harmonic-motion>, 14.6.2021.
- [10] [https://www.reddit.com/r/Physics/comments/7d86f1/why\\_are\\_real\\_springs\\_nonlinear/](https://www.reddit.com/r/Physics/comments/7d86f1/why_are_real_springs_nonlinear/), 15.6.2021.
- [11] [https://hr.wikipedia.org/wiki/Dijagram\\_naprezanja](https://hr.wikipedia.org/wiki/Dijagram_naprezanja), 15.6.2021.
- [12] Galović Suzana, QR23-1.pdf, 2018. <http://algebra.com.hr/dodatni-zadaci/wp-content/uploads/2018/12/QR23-1.pdf>, 20.6.2021.

- [13] [http://adria.fesb.hr/~zmiletic/Fizika%202/2.%20Matematicko%20i%20fizikalno%20njihalo.%20Fazorski%20prikaz%20titranja%20i%20zbrajanje%20titranja.%20Uvod%20u%20mehanicke%20valove/Fizika2\\_Predavanje2\\_razlikovni\\_NEW.pdf](http://adria.fesb.hr/~zmiletic/Fizika%202/2.%20Matematicko%20i%20fizikalno%20njihalo.%20Fazorski%20prikaz%20titranja%20i%20zbrajanje%20titranja.%20Uvod%20u%20mehanicke%20valove/Fizika2_Predavanje2_razlikovni_NEW.pdf), 14.6.2021.
- [14] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a46bb23b-608e-45b5-b7f6-c952a83441fa/prisilno-i-priguseno-titranje.html>, 16.6.2021.
- [15] <https://slidetodoc.com/phy-151-lecture-15-15-1-motion-of/>, 16.6.2021.
- [16] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a46bb23b-608e-45b5-b7f6-c952a83441fa/prisilno-i-priguseno-titranje.html>, 16.6.2021.
- [17] <https://en.wikipedia.org/wiki/Resonance>, 14.6.2021.
- [18] <https://slideplayer.com/slide/6899930/>, 14.6.2021.
- [19] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Amortizer>, 14.6.2021.
- [20] <https://custompolyurethane.co.uk/viscous-damper/>, 16.6.2021.
- [21] <https://www.sgcarmart.com/news/writeup.php?AID=120>, 16.6.2021.
- [22] Vjezba3Titranje.pdf, 2006. <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~mpozek/pocetni1/Vjezba3Titranje.pdf>, 20.6.2021.
- [23] [https://en.wikipedia.org/wiki/Balance\\_spring](https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_spring), 16.6.2021.
- [24] <http://shipseducation.net/modules/phys/hooke/index.htm>, 16.6.2021.
- [25] [http://hades.mech.northwestern.edu/index.php/Rotational\\_Stiffness](http://hades.mech.northwestern.edu/index.php/Rotational_Stiffness), 16.6.2021.
- [26] [https://en.wikipedia.org/wiki/Balance\\_spring#Period\\_of\\_oscillation](https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_spring#Period_of_oscillation), 16.6.2021.
- [27] <https://www.photometrics.com/learn/imaging-topics/what-happens-when-light-hits-a-pixel>, 17.6.2021.



- [28] <https://ergonomictrends.com/types-of-computer-mice/>, 17.6.2021.
- [29] <http://web.michaelchughes.com/projects/material-science-of-optical-mouse>, 17.6.2021.
- [30] <https://whatis.techtarget.com/definition/CMOS-sensor>, 17.6.2021.
- [31] <http://howthingswork.org/electronics-how-an-optical-mouse-works/>, 18.6.2021.
- [32] <https://www.groovypost.com/howto/turn-off-mouse-acceleration-in-windows-10/>, 19.6.2021.
- [33] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rotation\\_of\\_coordinates.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rotation_of_coordinates.svg), 21.6.2021.
- [34] <https://sciencing.com/pendulum-scientifically-important-8710180.html>, 23.6.2021.
- [35] [https://www.youtube.com/watch?v=aMxLVDuf4VY&ab\\_channel=Dartmouth](https://www.youtube.com/watch?v=aMxLVDuf4VY&ab_channel=Dartmouth), 24.6.2021.
- [36] <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Bob+pendulum>, 24.6.2021.
- [37] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a46bb23b-608e-45b5-b7f6-c952a83441fa/izmjerimo-ubrzanje-sile-teze-pametnim-telefonom.html>, 27.6.2021.
- [38] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a46bb23b-608e-45b5-b7f6-c952a83441fa/matematicko-njihalo.html>, 29.6.2021.
- [39] [https://hr.vvikipedla.com/wiki/Gravity\\_of\\_Mars](https://hr.vvikipedla.com/wiki/Gravity_of_Mars), 1.7.2021.
- [40] [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_210.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_210.html), 25.6.2021.
- [41] <https://arxiv.org/abs/1702.05211>, 3.7.2021.
- [42] <https://scienceprojectideasforkids.com/galileos-pendulum-exp/>, 3.6.2021.

[43] [https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_clock](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_clock), 3.6.2021.