Izgradnja eksponencijalne funkcije

Baljkas, Lucija

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:798218

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-10**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Baljkas

IZGRADNJA EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mom didi...

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu postupno izgrađujemo eksponencijalnu funkciju. Krenut ćemo od izgradnje realnih brojeva, tj. aksioma realnih brojeva. Na početku ćemo definirati pojam binarne operacije, pojam grupe, prstena, polja, pojam uređenog polja te pojam polja realnih brojeva. Definirat ćemo pojam infimuma i supremuma.
Pomoću pojma induktivnog skupa doći ćemo do prirodnih, te potom cijelih i racionalnih brojeva. Intuitivno jasan pojam funkcije precizno ćemo definirati tako da ćemo ga svesti na jednostavnije pojmove. U osnovi svih tih pojmova nalazit će se pojam skupa.
Potom ćemo definirati pojam niza kao funkciju. Dokazat ćemo bitan teorem
"Princip definicije indukcijom" te ćemo definirati $a^n, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$.
Definirat ćemo $a^m, \forall m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a potom i $a^{\frac{m}{n}}$ gdje je $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a > 0$ te ćemo provjeriti da je to dobra definicija, tj. da ne ovisi o izboru brojeva m i n. Naposljetku ćemo definirati a^x gdje je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a > 0$.
Konačno ćemo definirati eksponencijalnu funkciju s bazom $a > 0, a \neq 1$ kao
$\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ s

$$\exp_a(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokazat ćemo jedinstvenost i egzistenciju takve funkcije. Nadalje, dokazat ćemo i razna svojstva te funkcije kao što su neprekidnost, bijektivnost te naposljetku i derivabilnost. Definirat ćemo i inverznu funkciju s bazom a kao $(\exp_a)^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ koju nazivamo logaritamska funkcija te ćemo dokazati i njezinu derivabilnost. Definirat ćemo broj e kao bazu prirodnog logaritma.

Poglavlje 1

Realni brojevi

1.1 Grupa, prsten, polje

Definicija 1.1.1. *Neka je S skup te $\rho \subseteq S \times S$. Tada za ρ kažemo da je binarna relacija na skupu S.*
Ako su $x, y \in S$ takvi da je $(x, y) \in \rho$ onda pišemo $x\rho y$.

Neka je $\leq$ binarna relacija na skupu S. Za $\leq$ kažemo da je linearni uređaj na S ako vrijede sljedeća svojstva:

1) $x \leq x, \forall x \in S$ *(refleksivnost)*

2) $\forall x, y \in S\,(x \leq y \text{ i } y \leq x \Rightarrow x = y)$ *(antisimetričnost)*

3) $\forall x, y, z \in S\,(x \leq y \text{ i } y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ *(tranzitivnost)*

4) $\forall x, y \in S\,(x \leq y \text{ ili } y \leq x)$ *(usporedivost)*

Definicija 1.1.2. *Neka je S skup te $f : S \times S \to S$. Tada za f kažemo da je binarna opreacija na skupu S. Ako je f binarna operacija na skupu S te $x, y \in S$, onda umjesto $f(x, y)$ pišemo i xfy.*

Napomena 1.1.3. *Binarne operacije na skupu S označavamo s $\cdot$, $\circ$, $*$, $+$, $\bigcirc$. Dakle, kada kažemo da je $*$ binarna operacija na skupu S to znači da je*
$* : S \times S \to S$, a za $x, y \in S$, vrijednost $*$ (x,y) označavamo s $x * y$.

Definicija 1.1.4. *Za binarnu operaciju $\cdot$ na skupu S kažemo da je komutativna ako za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Definicija 1.1.5. *Za binarnu operaciju $\cdot$ na skupu S kažemo da je asocijativna ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi*
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Propozicija 1.1.6. *Neka je $\cdot$ binarna operacija na skupu S. Za $(S, \cdot)$ kažemo da je grupoid. Grupoid $(S, \cdot)$ je polugrupa ako je $\cdot$ asocijativna binarna operacija.*

Propozicija 1.1.7. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa pri čemu je $\cdot$ komutativna binarna operacija. Tada za sve $x, y, a, b \in S$ vrijedi*

$$(x \cdot y) \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot (y \cdot b).$$

Dokaz. Imamo:

$$(x \cdot y) \cdot (a \cdot b) = ((x \cdot y) \cdot a) \cdot b = (x \cdot (y \cdot a)) \cdot b = (x \cdot (a \cdot y)) \cdot b = ((x \cdot a) \cdot y) \cdot b = (x \cdot a) \cdot (y \cdot b).$$

□

Definicija 1.1.8. *Neka je $(S, \cdot)$ grupoid, i $e \in S$. Za e kažemo da je neutralni element za operaciju $\cdot$ ako je*
$$e \cdot x = x \cdot e = x, \forall x \in S.$$

Napomena 1.1.9. *(jedinstvenost neutralnog elementa) Neka je $(S, \cdot)$ grupoid te neka su e i f neutralni elementi za operaciju $\cdot$. Tada je $e = f$.*
Naime, za svaki $x \in S$ vrijedi $x \cdot e = x$ i $f \cdot x = x$. Kada u prvu jednakost uvrstimo $x = f$ a u drugu $x = e$ dobijemo $f \cdot e = f$ i $f \cdot e = e$ pa tvrdnja slijedi.

Definicija 1.1.10. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa te neka postoji neutralni element za operaciju $\cdot$. Tada kažemo da je $(S, \cdot)$ monoid.*

Napomena 1.1.11. *Neutralni element u monoidu označavamo s e.*

Definicija 1.1.12. *Neka je $(S, \cdot)$ monoid, te $x \in S$. Za $y \in S$ kažemo da je inverz od x u $(S,\cdot)$ ako je*
$$x \cdot y = y \cdot x = e.$$

Definicija 1.1.13. *Neka je $(S, \cdot)$ monoid. Za $x \in S$ kažemo da je invertibilan u $(S, \cdot)$ ako x ima inverz u $(S, \cdot)$.*

Napomena 1.1.14. *(jedinstvenost inverznog elementa) Neka je $(S, \cdot)$ monoid te $x \in S$. Neka su y_1, y_2 inverzi od x. Tada je $y_1 = y_2$.*

Evo kako dolazimo do toga.
Imamo: $x \cdot y_1 = e$. Množenjem ove jednakosti s y_2 dobivamo

$$y_2 \cdot (x \cdot y_1) = y_2 \cdot e$$

pa je

$$(y_2 \cdot x) \cdot y_1 = y_2,$$

tj.

$$e \cdot y_1 = y_2,$$

dakle $y_1 = y_2$.

Ako je $(S, \cdot)$ *monoid te ako je* $x \in S$ *invertibilan element u* $(S, \cdot)$*, onda s* x^{-1} *označavamo inverz od* x *u* $(S, \cdot)$.

Dakle,

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e,$$

za svaki invertibilan element x *od* S.

Propozicija 1.1.15. *Neka je* $(S, \cdot)$ *monoid u kojem je svaki element invertibilan. Tada za* $(S, \cdot)$ *kažemo da je* ***grupa***.

Napomena 1.1.16. *Ako je* $(S, \cdot)$ *monoid te* $x \in S$ *invertibilni element, onda je* x^{-1} *invertibilan te je* $(x^{-1})^{-1} = x$.
Naime, to odmah slijedi iz $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ *i definicije inverznog elementa.*

Propozicija 1.1.17. *(skraćivanje u grupi)*

Neka je $(S, \cdot)$ *grupa te neka su* $a, b, c \in S$ *takvi da je* $a \cdot b = a \cdot c$*. Tada je* $b = c$.
Analogno dobivamo da $b \cdot a = c \cdot a$ *povlači* $b = c$

Dokaz. Iz $a \cdot b = a \cdot c$ slijedi $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ pa je $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$. Stoga je

$$e \cdot b = e \cdot c.$$

Dakle,

$$b = c.$$

□

Definicija 1.1.18. *Za grupu* $(S, \cdot)$ *kažemo da je komutativna ili Abelova grupa ako je binarna operacija* $\cdot$ *komutativna, tj. ako je*

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in S.$$

Napomena 1.1.19. *Oznaku* $+$ *za binarnu operaciju obično koristimo kada je riječ o komutativnoj grupi. U tom slučaju inverz elementa* $x \in S$ *označavamo s* $-x$.

Definicija 1.1.20. *Neka je P skup te neka su $+$ i $\cdot$ binarne operacije na P tako da je $(P, +)$ Abelova grupa, $(P, \cdot)$ polugrupa, te tako da je*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

i

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x, y, z \in P.$$

Tada kažemo da je $(P, +, \cdot)$ ***PRSTEN****.*

Napomena 1.1.21. *Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda s 0 označavamo neutralni element u grupi $(P, +)$.*

Propozicija 1.1.22. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Tada za svaki $x \in P$ vrijedi*

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Dokaz. Neka je $x \in P$. Tada je $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$ pa je $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Stoga je $0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Iz ovoga slijedi (skraćivanje u grupi) da je $0 = 0 \cdot x$.
Analogno dobivamo $x \cdot 0 = 0$. □

Definicija 1.1.23. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Kažemo da je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom ako $(P, \cdot)$ ima neutralni element. Taj neutralni element nazivamo jedinica prstena $(P, +, \cdot)$ i obično označavamo s 1.*

Napomena 1.1.24. *Za prsten $(P, +, \cdot)$ kažemo da je komutativan ako je*

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in P.$$

Definicija 1.1.25. *Neka je $(P, +, \cdot)$ komutativan prsten s jedinicom. Za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je* ***polje*** *ako svaki element od P različit od nule ima inverz u monoidu $(P, \cdot)$.*

Napomena 1.1.26. *Ako je $(P, +, \cdot)$ polje onda za $x \in P, x \neq 0$, sa x^{-1} označavamo inverz od x u $(P, \cdot)$. Dakle,*

$$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x, \forall x \in P \setminus \{0\}.$$

Napomena 1.1.27. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom takav da je $0 = 1$. Tada je $P = \{0\}$. Naime, za svaki $x \in P$ imamo*

$$x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Dakle, $x = 0$.

Napomena 1.1.28. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom takav da je $0 \neq 1$. Tada 0 nema inverz u monoidu $(P, \cdot)$.*

Naime, kada bi 0 imao inverz u $(P, \cdot)$ postojao bi $y \in P$ takav da je $0 \cdot y = 1$, no $0 \cdot y = 0$ pa bi slijedilo da je $0 = 1$.

Dakle, ako je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom i P ima bar dva elementa, onda $(P, \cdot)$ nije grupa.

Definicija 1.1.29. *Za prsten $(P, +, \cdot)$ kažemo da je integralna domena ako ne postoje $x, y \in P$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, takvi da je $x \cdot y = 0$.*

Propozicija 1.1.30. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Tada je $(P, +, \cdot)$ integralna domena.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x, y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ te $x \cdot y = 0$.
$\Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$
$\Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$
$\Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0, \Rightarrow\Leftarrow$.
Zaključak: $(P, +, \cdot)$ je integralna domena. □

1.2 Uređeni prsten

Definicija 1.2.1. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $\leq$ uređaj na P. Za $(P, +, \cdot, \leq)$ kažemo da je uređeni prsten ako za sve $x, y \in P$ takve da je $x \leq y$ vrijedi $x + z \leq y + z$, za svaki $z \in P$, te ako za sve $x, y \in P$ takve da je $0 \leq x$ i $0 \leq y$ vrijedi $0 \leq x \cdot y$.*

Definicija 1.2.2. *Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom onda za $x \in P$ kažemo da je invertibilan element u $(P, +, \cdot)$ ako je x invertibilan u monoidu $(P, \cdot)$.*

Napomena 1.2.3. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Tada za svaki $x \in P$ vrijedi $-(-x) = x$. To vrijedi prema napomeni 1.1.16. Nadalje, iz iste napomene slijedi ako je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom te x invertibilan element u tom prstenu onda je x^{-1} također invertibilan te vrijedi*

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

Napomena 1.2.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten.*

1) *Neka su $x, y, x', y' \in P$ takvi da je $x \leq y$ i $x' \leq y'$. Tada je $x + x' \leq y + y'$.*
   Naime,
   iz $x \leq y$ slijedi $x + x' \leq y + x'$.
   iz $x' \leq y'$ slijedi $x' + y \leq y' + y$.
   iz $x' + y = y + x'$ i tranzitivnosti od $\leq$ slijedi da je $x + x' \leq y + y'$.

2) *Ako je $x \in P$ takav da je $0 \leq x$ onda je $-x \leq 0$.*
   Naime,
   $0 \leq x \Rightarrow 0 + (-x) \leq x + (-x)$ pa je $-x \leq 0$.

Propozicija 1.2.5. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka su $x, y \in P$. Tada je $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, $x \cdot (-y) = -x \cdot y$ te $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.*

Dokaz. Imamo: $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$
Slijedi,
$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Analogno dobivamo da je
$$x \cdot (-y) = -x \cdot y.$$

Sada je,
$$(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-x \cdot y) = x \cdot y.$$

□

Napomena 1.2.6. *Neka je* $(G, +)$ *Abelova grupa. Za* $x, y \in G$ *definiramo* $x - y = x + (-y)$.

Propozicija 1.2.7. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten. Tada za sve* $x, y, z \in P$ *vrijedi*
$$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$$

i
$$(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z.$$

Dokaz. Imamo:
$$x \cdot (y - z) = x \cdot (y + (-z)) = x \cdot y + x \cdot (-z) = x \cdot y + (-x \cdot z) = x \cdot y - x \cdot z$$
$$(x - y) \cdot z = (x + (-y)) \cdot z = x \cdot z + (-y) \cdot z = x \cdot z + (-y \cdot z) = x \cdot z - y \cdot z.$$

□

Napomena 1.2.8. *Ako je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten te ako su* $a, b \in P$ *onda je* $a \leq b$ *ako i samo ako je* $0 \leq b - a$.

Propozicija 1.2.9. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten te neka su* $a, b, c \in P$ *takvi da je* $a \leq b$ *te* $0 \leq c$. *Tada je* $a \cdot c \leq b \cdot c$ *te* $c \cdot a \leq c \cdot b$.

Dokaz. Iz $a \leq b$ slijedi $0 \leq b - a$ pa iz definicije uređenog prstena slijedi $0 \leq (b - a) \cdot c$.
Slijedi $0 \leq b \cdot c - a \cdot c$ pa je
$$a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Analogno dobivamo
$$c \cdot a \leq c \cdot b.$$

□

Napomena 1.2.10. *Ako je* $\leq$ *uređaj na skupu* S *onda s* $<$ *označavamo relaciju na* S *definiranu s* $x < y$ *ako je* $x \leq y$ *i* $x \neq y$.

Napomena 1.2.11.

Neka je S *skup te* $\leq$ *uređaj na* S. *Neka su* $x, y, z \in S$ *takvi da je* $x < y$ *i* $y \leq z$. *Tada je* $x < z$.

Zašto?
Iz $x < y$ *slijedi* $x \leq y$ *pa iz tranzitivnosti relacije* $\leq$ *slijedi* $x \leq z$.
Dokažimo da je $x \neq z$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x = z$
Iz $y \leq z$ *slijedi* $y \leq x$ *što zajedno s* $x \leq y$ *povlači da je* $x = y$.
No, ovo je u kontradikciji s $x < y$.
Dakle, $x \neq z$ *pa je* $x < z$.
Analogno dobivamo da $x \leq y$ *i* $y < z$ *povlači* $x < z$.

Uočimo i ovo:
Ako su $x, y \in S$ *takvi da je* $x \neq y$ *onda je* $x < y$ *ili* $y < x$
(svojstvo usporedivosti relacije $\leq$ *kaže da je* $x \leq y$ *ili* $y \leq x$ *pa zbog* $x \neq y$ *slijedi tvrdnja).*

Propozicija 1.2.12. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten te neka su* $x, y, z \in P$ *takvi da je* $x < y$. *Tada je*

$$x + z < y + z.$$

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi $x \leq y$ pa je $x + z \leq y + z$.
Pretpostavimo da je $x + z = y + z$. Iz ovoga slijedi $x = y$ (skraćivanje u grupi).
No, ovo je kontradikcija s $x < y$.
Dakle, $x + z \neq y + z$ pa je

$$x + z < y + z.$$

□

Propozicija 1.2.13. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten te neka su* $x, y \in P$

1) *Ako je* $x \leq 0$ *i* $0 \leq y$ *onda je* $x \cdot y \leq 0$

2) *Ako je* $0 \leq x$ *i* $y \leq 0$ *onda je* $x \cdot y \leq 0$

3) Ako je $x \leq 0$ *i* $y \leq 0$ *onda je* $0 \leq x \cdot y$

Dokaz.

1) Iz $x \leq 0$ slijedi

$$x + (-x) \leq 0 + (-x),$$

tj.

$$0 \leq -x.$$

Zajedno s $0 \leq y$ ovo povlači $0 \leq (-x) \cdot y$.
Stoga je

$$0 \leq -(x \cdot y).$$

Dakle,

$$0 + x \cdot y \leq -(x \cdot y) + x \cdot y, \; tj. \; x \cdot y \leq 0.$$

2) Ovu tvrdnju dokazujemo analogno.

3) Iz $x \leq 0$ i $y \leq 0$ slijedi $0 \leq -x$ i $0 \leq -y$ pa je $0 \leq (-x) \cdot (-y)$, tj. $0 \leq x \cdot y$. □

Propozicija 1.2.14. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten tako da je* $(P, +, \cdot)$ *integralna domena. Neka su* $x, y \in P$.

1) Ako je $0 < x$ *i* $0 < y$ *onda je* $0 < x \cdot y$.

2) Ako je $x < 0$ *i* $0 < y$ *onda je* $x \cdot y < 0$.

3) Ako je $0 < x$ *i* $y < 0$ *onda je* $x \cdot y < 0$.

4) Ako je $x < 0$ *i* $y < 0$ *onda je* $0 < x \cdot z$.

Dokaz. 1) Iz $0 < x$ i $0 < y$ slijedi $0 \leq x$ i $0 \leq y$ pa je $0 \leq x \cdot y$.
Iz $x \neq 0$ i $y \neq 0$ slijedi da je $x \cdot y \neq 0$.
Dakle,

$$0 < x \cdot y.$$

Tvrdnje 2), 3), 4) dokazujemo analogno koristeći propoziciju 1.2.13. □

Propozicija 1.2.15. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten. Ako je* $(P, +, \cdot)$ *integralna domena te* $a, b, c \in P$ *takvi da je* $a < b$ *i* $0 < c$ *onda je*

$$a \cdot c < b \cdot c.$$

Dokaz. Iz $a < b$ slijedi $0 < b - a$ (prema propoziciji 1.2.12.).
Stoga iz propozicije 1.2.14. slijedi $0 < (b - a) \cdot c$, tj. $0 < b \cdot c - a \cdot c$ pa prema propoziciji 1.2.12. slijedi

$$a \cdot c < b \cdot c.$$

□

Propozicija 1.2.16. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten tako da je* $(P, +, \cdot)$ *komutativna integralna domena. Neka su* $a, b, c, d \in P$ *takvi da je* $0 < a < b$ *i* $0 < c < d$*. Tada je*

$$a \cdot c < b \cdot d.$$

Dokaz. Iz $a < b$ i $0 < c$ te prethodne propozicije slijedi da je $a \cdot c < b \cdot c$. Nadalje, iz iste propozicije te iz $c < d$ i $0 < b$ slijedi $c \cdot b < d \cdot b$.
Iz ovoga slijedi $a \cdot c < b \cdot d$. □

Propozicija 1.2.17. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten pri čemu je* $(P, +, \cdot)$ *prsten s jedinicom. Pretpostavimo da je* $0 \neq 1$*. Tada je*

$$0 < 1.$$

Dokaz. Sigurno je $0 \leq 1$ ili $1 \leq 0$.
Pretpostavimo da je $1 \leq 0$.
Dakle, $1 \leq 0$ i $1 \leq 0$ pa prema propoziciji 1.2.13. 3) imamo $0 \leq 1 \cdot 1$, tj. $0 \leq 1$.
Ovo zajedno s $1 \leq 0$ daje $0 = 1$. $\Rightarrow\Leftarrow$.
Dakle, $0 \leq 1$ pa je $0 < 1$. □

Propozicija 1.2.18. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeno polje. Neka je* $x \in P$.

1) Ako je $0 < x$ *onda je* $0 < x^{-1}$

2) Ako je $x < 0$ *onda je* $x^{-1} < 0$.

Dokaz. 1) Iz $0 < x$ slijedi $0 \neq x$ pa zaključujemo da je $0 \neq 1$ (u suprotnome bismo imali $P = \{0\}$).
Uočimo da je $x^{-1} \neq 0$. Naime, $x^{-1} = 0$ povlači da je $0 = 0 \cdot x = x^{-1} \cdot x = 1$.
Stoga je $x^{-1} < 0$ ili $0 < x^{-1}$.
Pretpostavimo $x^{-1} < 0$. Iz propozicije 1.2.14. sada slijedi da je $x \cdot x^{-1} < 0$, tj. $1 < 0$.
No, prema propoziciji 1.2.17. imamo $0 < 1$. Ovo je kontradikcija.
Prema tome $0 < x^{-1}$.
Analogno dobivamo da vrijedi tvrdnja 2). □

Uočimo sljedeće:
Ako je $(P, +, \cdot)$ polje te ako su $x, y \in P$ i $x \neq 0$ i $y \neq 0$ onda je

$$x \cdot y \neq 0$$

i

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$$

1.3 Uređeno polje

Definicija 1.3.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten takav da je $(P, +, \cdot)$ polje, takav da je $0 \neq 1$ te takav da vrijedi sljedeće (**aksiom potpunosti**):*

Ako su S i T neprazni podskupovi od P takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$,

onda postoji $z \in P$ takav da je $x \leq z$ i $z \leq y$, za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$.

Tada za $(P, +, \cdot, \leq)$ kažemo da je potpuno uređeno polje.

*Za potpuno uređeno polje još kažemo da je **polje realnih brojeva**.*

Od sad pa nadalje smatramo da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ jedno potpuno uređeno polje, tj. polje realnih brojeva.
*Za elemente skupa $\mathbb{R}$ kažemo da su **realni brojevi**.*
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je gornja međa skupa S ako je
$x \leq a$ za svaki $x \in S$.
Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji bar jedan $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gornja međa od S.
Analogno definiramo pojam donje međe te odozdo omeđenog skupa.

Primjer 1.3.2. *1) Skup $\mathbb{R}$ nije odozgo omeđen. U suprotnome bi postojao $a \in \mathbb{R}$ tako da je $x \leq a$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. No, ovo je nemoguće jer je $a < a + 1$ (slijedi iz $0 < 1$). Analogno zaključujemo da $\mathbb{R}$ nije odozdo omeđen.*

2) Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$. Tada je S odozgo omeđen, ali nije odozdo omeđen.

1.4 Supremum, infimum

Definicija 1.4.1. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Definiramo skupove:*
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
$[a, b\,\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $\langle a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Nadalje, definiramo $\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ *i* $\langle a, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.
Analogno definiramo skupove: $\langle -\infty, a\,]$, $[a, +\infty\rangle$.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. *Za* S *kažemo da je* ***omeđen skup*** *ako je* S *omeđen odozdo i odozgo.*

Definicija 1.4.2. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te* $a \in \mathbb{R}$. *Za* a *kažemo da je* **supremum** *skupa* S *ako je* a *najmanja gornja međa skupa* S, *tj. ako vrijedi:*

1) *a je gornja međa skupa S.*

2) *ako je b bilo koja gornja međa skupa S, onda je $a \leq b$.*

Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$ *te da su* a_1,$a_2 \in \mathbb{R}$ *takvi da je* a_1 *supremum od* S *i* a_2 *supremum od* S. *Tada je* $a_1 = a_2$.
Naime, imamo $a_1 \leq a_2$ *jer je* a_1 *supremum od* S, *a* a_2 *gornja međa od* S.
Isto tako, imamo $a_2 \leq a_1$.

Napomena 1.4.3. *Supremum skupa* S *označavamo sa* $\sup S$.

Primjer 1.4.4. *Broj* 1 *je supremum skupa* $[0, 1\,]$. *Iz definicije skupa* $[0, 1\,]$ *odmah slijedi da je 1 gornja međa tog skupa. S druge strane ako je* b *gornja međa od* $[0, 1\,]$ *onda je* $1 \leq b$ *jer je* $1 \in [0, 1\,]$.

Definicija 1.4.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $a \in S$. *Za* a *kažemo da je najveći element skupa* S *ili maksimum od* S *ako je* $x \leq a$ *za svaki* $x \in S$.
Uočimo sljedeće: ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ *i* $a \in \mathbb{R}$ *onda je* a *maksimum od* S *ako i samo ako je* a *gornja međa od* S *i* $a \in S$.

Nadalje, vrijedi sljedeće: ako je a *maksimum skupa* S *onda je* a *supremum skupa* S.
Naime, a *je očito gornja međa skupa* S, *a ako je* b *gornja međa skupa* S *onda je* $a \leq b$ *jer je* $a \in S$.

Lema 1.4.6. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $1 < x$. *Tada je*

$$0 < x^{-1} < 1.$$

Dokaz. Iz $0 < 1$ slijedi $0 < x$. Stoga je $0 < x^{-1}$. Sada, $1 < x$ i $0 < x^{-1}$ povlači (prema propoziciji 1.2.15.) $x^{-1} < 1$. □

Lema 1.4.7. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$0 < y < x.$$

Dokaz. Uočimo prvo da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je $0 < \alpha < 1$.
Naime, postoji broj $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $1 < \beta$ (npr. $\beta = 1 + 1$) pa možemo uzeti $\alpha = \beta^{-1}$.
Iz $0 < x$ i $0 < \alpha$ slijedi $0 < x \cdot \alpha$. S druge strane, iz $\alpha < 1$ i $0 < x$ slijedi $\alpha \cdot x < 1 \cdot x$, tj. $\alpha \cdot x < x$.
Dakle, imamo $0 < x \cdot \alpha < x$. □

Propozicija 1.4.8. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$x < z < y.$$

Dokaz.

Iz $x < y$ slijedi $0 < y - x$ pa prema prethodnoj lemi postoji $r \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < r < y - x$.
Iz ovoga slijedi

$$x < x + r < y.$$

□

Primjer 1.4.9. *a) Broj 1 je supremum skupa $\langle -\infty, 1\rangle$. Očito je 1 gornja međa ovog skupa.*

Pretpostavimo da je b neka gornja međa skupa $\langle$ -$\infty, 1\rangle$. Tvrdimo da je $1 \leq b$.
Pretpostavimo suprotno.
Općenito ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da ne vrijedi $x \leq y$ onda je $y < x$. Stoga je $b < 1$. Prema prethodnoj propoziciji postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $b < z < 1$. Iz ovoga slijedi $z \in \langle -\infty, 1\rangle$.
Budući da je b gornja međa skupa $\langle -\infty, 1\rangle$ (jer je njegov supremum) imamo $z \leq b$. No, ovo je u kontradikciji s $b < z$.
Dakle, $1 \leq b$. Prema tome, 1 je supremum skupa $\langle -\infty, 1\rangle$.
Uočimo da skup $\langle -\infty, 1\rangle$ nema maksimum.

Ima li svaki podskup od $\mathbb{R}$ supremum?
Ne. Naime, ako skup ima supremum onda je očito odozgo omeđen, a postoje podskupovi od $\mathbb{R}$ koji nisu odozgo omeđen.
Stoga se postavlja sljedeće pitanje. Ima li svaki odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ supremum?

Primjer 1.4.10. *Svaki broj je gornja međa praznog skupa. Stoga prazni skup nema najmanju gornju među. Dakle, prazan skup nema supremum, a odozgo je omeđen.*

Teorem 1.4.11. *(postojanje supremuma) Svaki odozgo omeđen neprazan podskup od $\mathbb{R}$ ima supremum.*

Dokaz. Neka je S odozgo omeđen neprazan podskup od $\mathbb{R}$. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Skup T je neprazan jer je S odozgo omeđen.
Imamo, dakle $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$ te $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.
Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.
Iz ovoga slijedi da je z gornja međa skupa S te da je manji ili jednak od svake druge gornje međe skupa S. Stoga je z supremum od S. □

Napomena 1.4.12. *Ako su $x, y \in \mathbb{R}$ onda $x \geq y$ znači $y \leq x$, a $x > y$ znači $y < x$.*

Propozicija 1.4.13. ***(karakterizacija supremuma)*** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a supremum skupa S ako i samo ako je a gornja međa od S te za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je a supremum od S. Jasno je da je tada a gornja međa od S. Neka je $\varepsilon > 0$.
Dokažimo da postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $x \leq a - \varepsilon$ za svaki $x \in S$. Iz ovoga slijedi da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa S. Budući da je a supremum skupa S vrijedi $a \leq a - \varepsilon$.
No, ovo je nemoguće jer je $\varepsilon > 0$.
Dakle, postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je a gornja međa od S te da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.
Dokažimo da je a supremum od S. Neka je b gornja međa skupa S. Želimo dokazati da je $a \leq b$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $b < a$. Neka je $\varepsilon = a - b$.
Tada je $\varepsilon > 0$ pa postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. No, $a - \varepsilon = b$, dakle $b < x$.
Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je b gornja međa od S. Stoga je

$$a \leq b.$$

Zaključak, a je supremum od S. □

Definicija 1.4.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***infimum*** *skupa S ako je a najveća donja međa od S, tj. ako vrijedi:*

1) a je donja međa od S

2) ako je b donja međa od S, onda je $b \leq a$.

Ako je S podskup od $\mathbb{R}$, te a_1, a_2 infimumi od S onda je $a_1 = a_2$.
Neka je S podskup od $\mathbb{R}$, te $a \in S$.

*Za a kažemo da je najmanji element skupa S ili **minimum** od S ako je $a \leq x$ za svaki $x \in S$.*
Uočimo sljedeće: ako je a minimum od S onda je a infimum od S.

Napomena 1.4.15. *Infimum skupa S označavamo s* $\inf S$.

Teorem 1.4.16. *(**postojanje infimuma**) Svaki neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima infimum.*

Dokaz. Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je T skup svih donjih međa od S. Imamo $S \neq 0$, $T \neq 0$ i $y \leq x$, za svaki $y \in T$ i za svaki $x \in S$.
Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $y \leq z \leq x$ za svaki $y \in T$ i za svaki $x \in S$.
Iz ovoga slijedi da je z infimum od S. □

Dokaz sljedeće propozicije je posve analogan dokazu propozicije 1.4.13. (karakterizacija supremuma).

Propozicija 1.4.17. *(**karakterizacija infimuma**) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Tada je a infimum skupa S ako i samo ako je a donja međa od S i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$.* □

1.5 Prirodni brojevi

Definicija 1.5.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za S kažemo da je induktivan skup ako je $1 \in S$, te ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x + 1 \in S$.*

Primjer 1.5.2. *$\mathbb{R}$ je induktivan skup. Nadalje, $\langle 0, +\infty \rangle$ je induktivan.*
Naime, jasno je da je $1 \in \langle 0, \infty \rangle$. S druge strane ako je $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ onda je $0 < x$, pa iz $x < x + 1$ slijedi

$$0 < x + 1.$$

Dakle,

$$x + 1 \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Isto tako zaključujemo da je $[1, \infty]$ induktivan skup.

Primjer 1.5.3. *Skup* $S = \{1\} \cup [2, +\infty\rangle$ *je induktivan* $(2 = 1 + 1)$. *Očito je* $1 \in S$.
Ako je $x \in S$ *onda je* $x = 1$ *ili* $x \in [2, +\infty\rangle$.
Ako je $x = 1$ *onda je* $x + 1 = 2$ *pa je* $x + 1 \in S$.
Ako je $x \in [2, +\infty\rangle$ *onda je* $x + 1 \in [2, +\infty\rangle$. *Dakle*

$$x + 1 \in S.$$

Neka je $\mathbb{N}$ *presjek svih induktivnih skupova. Dakle,*

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in S \text{ za svaki induktivan skup } S\}.$$

Elemente skupa $\mathbb{N}$ *zovemo* ***prirodni brojevi***.

Propozicija 1.5.4. *1)* $\mathbb{N}$ *je induktivan skup*

2) Ako je S *induktivan skup onda je* $\mathbb{N} \subseteq S$.

Dokaz. Iz definicije od $\mathbb{N}$ je jasno da je $1 \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in \mathbb{N}$.
Neka je S bilo koji induktivan skup. Tada je $x \in S$, pa je $x + 1 \in S$. Iz ovoga zaključujemo da je $x + 1 \in \mathbb{N}$.
Dakle, $\mathbb{N}$ je induktivan skup. Time je dokazana tvrdnja 1).
Tvrdnja 2) slijedi direktno iz definicije od $\mathbb{N}$. □

Teorem 1.5.5. ***(princip indukcije)*** *Neka je* S *podskup od* $\mathbb{N}$ *takav da vrijedi sljedeće:*
1) $1 \in S$
2) ako je $x \in S$ *onda je* $x + 1 \in S$.
Tada je $S = \mathbb{N}$.

Dokaz. Iz 1) i 2) zaključujemo da je S induktivan skup. Iz prethodne propozicije 2) slijedi da je $\mathbb{N} \subseteq S$.
No, iz pretpostavke teorema imamo da je $S \subseteq \mathbb{N}$.
Dakle, $S = \mathbb{N}$. □

Uočimo da je 1 *najmanji element od* $\mathbb{N}$.
Naime, vidjeli smo da je skup $[1, +\infty\rangle$ *induktivan pa iz prethodne propozicije pod 2) slijedi* $\mathbb{N} \subseteq [1, +\infty\rangle$. *Stoga, za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x \in [1, +\infty\rangle$, *tj.* $1 \leq x$.

Propozicija 1.5.6. *Skup* $\mathbb{N}$ *nije odozgo omeđen.*

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $\mathbb{N}$ neprazan i odozgo omeđen, pa postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum od $\mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.4.13.(karakterizacija supremuma) postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a - 1 < x.$$

Iz ovoga slijedi $a < x + 1$. No, ovo je nemoguće jer je $x + 1 \in \mathbb{N}$, a a je supremum od $\mathbb{N}$.
Dakle, $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen. □

Korolar 1.5.7. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x < n$.*

Dokaz.

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Kada ne bi postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x < n$ onda bi vrijedilo $n \leq x$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, što bi značilo da je x gornja međa skupa $\mathbb{N}$.
No, to je nemoguće prema prethodnoj propoziciji. □

Napomena 1.5.8. *Općenito, ako su $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ onda s $\dfrac{x}{y}$ označavamo broj $x \cdot y^{-1}$. Stoga, za $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ imamo $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.*

Korolar 1.5.9. *Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.*

Dokaz. Iz $\varepsilon > 0$ slijedi $\varepsilon \neq 0$. Prema prethodnom korolaru postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon^{-1} < n$.
Budući da je $n \in \mathbb{N}$ imamo $n > 0$, pa je stoga $n^{-1} > 0$. Stoga je $n^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} < n^{-1} \cdot n$, odnosno

$$n^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} < 1.$$

Množenjem ove nejednakosti s ε dobivamo $n^{-1} < \varepsilon$, tj. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. □

Propozicija 1.5.10. *Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x = k + 1$.*

Dokaz. Neka je $S = \{1\} \cup \{k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Tada je $S \subseteq \mathbb{N}$. Nadalje, S je induktivan skup. Prema principu indukcije imamo $S = \mathbb{N}$.
Dakle, $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
Ovime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Kažemo da je broj y između x i z ako je $x < y < z$.

Propozicija 1.5.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada ne postoji prirodan broj između n i $n + 1$.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom, tj. definirajmo skup S kao skup svih $n \in \mathbb{N}$ za koje ne postoji prirodan broj između n i $n + 1$ i dokažimo da je S induktivan skup (iz čega će slijediti $\mathbb{N} = S$).
Zašto je $1 \in S$?
Vidjeli smo ranije da je $\{1\} \cup [2, +\infty\rangle$ induktivan skup pa je stoga $\mathbb{N} \subseteq \{1\} \cup [2, +\infty\rangle$. Iz ovoga slijedi da za svaki prirodan broj k vrijedi $k = 1$ ili $2 \leq k$.
Dakle, $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $x \in S$. Želimo dokazati da je $x + 1 \in S$, tj. da ne postoji prirodan broj između $x + 1$ i $(x + 1) + 1$.
Pretpostavimo suprotno. Dakle, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x + 1 < k < (x + 1) + 1$.
Iz $1 < x + 1 < k$ slijedi $1 \neq k$.
Iz prethodne propozicije slijedi da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $k = l + 1$.
Stoga je $x + 1 < l + 1 < (x + 1) + 1$ pa je $x < l < x + 1$.
Ovo znači da između x i $x + 1$ postoji prirodan broj. No, to je u kontradikciji s tim da je $x \in S$. Dakle, $x + 1 \in S$. Prema tome, S je induktivan, pa slijedi $S = \mathbb{N}$.
Time je propozicija dokazana. □

Teorem 1.5.12. *Svaki neprazni podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element.*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazat ćemo indukcijom.
Neka je T skup svih $n \in \mathbb{N}$ koji imaju sljedeće svojstvo: ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ i postoji $x \in S$ takav da je $x \leq n$, onda S ima najmanji element.
Dokažimo da je $T = \mathbb{N}$.
Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ i postoji $x \in S$ takav da je $x \leq 1$, onda je $x = 1$, pa je 1 najmanji element od S. Prema tome, $1 \in T$.
Pretpostavimo da je $n \in T$. Dokažimo da je $n + 1 \in T$.
Neka je S podskup od $\mathbb{N}$ tako da postoji $x \in S$ takav da je $x \leq n + 1$.
Imamo dva slučaja:
1. slučaj. Postoji $x \in S$ takav da je $x \leq n$.
Budući da je $n \in T$, skup S ima najmanji element.

2. slučaj. Ne postoji $x \in S$ takav da je $x \leq n$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x > n$.
Iz ovoga slijedi da je $x \geq n + 1$, $\forall x \in S$ (u suprotnome bi postojao $x \in S$ takav da je $n < x < n + 1$, što je nemoguće prema propoziciji 1.5.11.)
Znamo da postoji $x \in S$ takav da je $x \leq n + 1$. Ovo zajedno s $x \geq n + 1$ daje $x = n + 1$.
Dakle,

$$n + 1 \in S.$$

Prema tome, $n + 1$ je najmanji element od S.
U oba slučaja S ima najmanji element.
Zaključak, $n + 1 \in T$.
Dakle, $1 \in T$ i ako je $n \in T$ onda je $n + 1 \in T$.
Stoga je $T = \mathbb{N}$.
Neka je S neprazni podskup od $\mathbb{N}$. Budući da je $S \neq \emptyset$, postoji $n \in S$. No, tada je $n \in T$.
Iz ovoga zaključujemo da S ima najmanji element. □

Propozicija 1.5.13. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je $x + y \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je S skup svih $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x + n \in \mathbb{N}$.
Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$ (ako to dokažemo gotovi smo jer onda imamo da je $y \in S$ što znači $x + y \in \mathbb{N}$).
Očito je $1 \in S$ (iz x $\in \mathbb{N}$ slijedi $x + 1 \in \mathbb{N}$).
Pretpostavimo da je $n \in S$. Trebamo dokazati da je $n + 1 \in S$.
Želimo dokazati da je $x + (n + 1) \in \mathbb{N}$.
Vrijedi $x + (n + 1) = (x + n) + 1 \in \mathbb{N}$ jer je $x + n \in \mathbb{N}$ (zbog $n \in S$).
Dakle, $n + 1 \in S$.
Zaključak $\mathbb{N} = S$. □

Propozicija 1.5.14. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je $x \cdot y \in \mathbb{N}$.*

Dokaz.

Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} \mid x \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Dovoljno je dokazati da je $S = \mathbb{N}$.
Očito je $1 \in S$ ($1 \in \mathbb{N}$ i $x \cdot 1 \in \mathbb{N}$).
Pretpostavimo da je $n \in S$. Dokažimo da je $n + 1 \in S$.
Imamo:

$$x \cdot (n + 1) = x \cdot n + x \cdot 1.$$

Iz $n \in S$ slijedi $x \cdot n \in \mathbb{N}$ pa iz prethodne propozicije slijedi $x \cdot n + x \in \mathbb{N}$.
Dakle, $x \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$, što znači da je $n + 1 \in S$.
Zaključak: $S = \mathbb{N}$. □

Propozicija 1.5.15. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$. Tada je $y - x \in \mathbb{N}$.*

Dokaz.

Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ako je } x < n, \text{ onda je } n - x \in \mathbb{N}\}$. Dovoljno je dokazati da je $S = \mathbb{N}$.
Očito je $1 \in S$ (jer ne vrijedi $x < 1$).
Pretpostavimo da je $n \in S$. Želimo dokazati da je $n+1 \in S$. Pretpostavimo da je $x < n+1$.
Želimo dokazati da je $(n+1) - x \in \mathbb{N}$.
Iz $x < n+1$ slijedi $x \leq n$ (prema propoziciji 1.5.11.).
Imamo dva slučaja:
1. slučaj. $x = n$
Tada je

$$(n+1) - x = (n+1) - n = 1 \in \mathbb{N}.$$

2.slučaj. $x < n$
Tada je

$$n - x \in \mathbb{N}$$

(jer je $n \in S$).
Imamo

$$(n+1) - x = (n - x) + 1 \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u oba slučaja imamo $(n+1) - x \in \mathbb{N}$. Ovime smo dokazali: ako je $x < n+1$ onda je

$$(n+1) - x \in \mathbb{N}.$$

Prema principu indukcije imamo $S = \mathbb{N}$. □

1.6 Cijeli brojevi

Definicija 1.6.1. *Neka je $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Za elemente skupa $\mathbb{Z}$ kažemo da su **cijeli brojevi**.*

Propozicija 1.6.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$. Tada je $x + y \in \mathbb{Z}$, $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ te $-x \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Ako je $x = 0$ ili $y = 0$ onda je očito $x + y \in \mathbb{Z}$ i $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.
Pretpostavimo sada da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$.
Imamo 4 slučaja:
1.slučaj. $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ pa je $x + y \in \mathbb{Z}$ i $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

2.slučaj. $x \in \mathbb{N}$, $y = -n, n \in \mathbb{N}$. Tada je $x + y = x - n$.
Ako je $x > n$ onda je $x - n \in \mathbb{N}$ (prema propoziciji 1.5.15.) pa je $x - n \in \mathbb{Z}$.
Ako je $x = n$ onda je $x - n = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ako je $x < n$ onda je $n - x \in \mathbb{N}$ pa je $-(n - x) \in \mathbb{Z}$.
Dakle,

$$x - n \in \mathbb{Z}.$$

Nadalje, $x \cdot y = x \cdot (-n) = -(x \cdot n) \in \mathbb{Z}$ jer je $x \cdot n \in \mathbb{N}$.
Dakle,

$$x + y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}.$$

3.slučaj. $x = -n, n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$.
Analogno kao u slučaju 2. dobivamo $x + y \in \mathbb{Z}$ i $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

4.slučaj. $x = -n$, $n \in \mathbb{N}$, $y = -m$, $m \in \mathbb{N}$.
Tada je

$$x + y = -n + (-m) = -(n + m).$$

Dakle, $x + y = -k$ gdje je $k \in \mathbb{N}$, stoga je $x + y \in \mathbb{Z}$.
Nadalje, $x \cdot y = (-n) \cdot (-m) = n \cdot m \in \mathbb{Z}$ jer je $n \cdot m \in \mathbb{N}$.
Dokažimo još da je $-x \in \mathbb{Z}$.
Ako je $x \in \mathbb{N}$ onda je očito $-x \in \mathbb{Z}$.
Ako je $x = 0$ onda je $-x = 0$ pa je $-x \in \mathbb{Z}$.
Ako je $x = -n, n \in \mathbb{N}$ onda je $-x = -(-n) = n$, pa je $-x \in \mathbb{Z}$. □

Napomena 1.6.3. *Podsjetimo se da za $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $\frac{x}{y}$ označava broj $x \cdot y^{-1}$.*

Dokažimo sada da vrijede neka uobičajena pravila računanja:
1) Ako su $x, y, k \in \mathbb{R}$, $y \neq 0, k \neq 0$ onda je $\frac{x}{y} = \frac{xk}{yk}$.
Naime, koristeći propoziciju 1.1.7. dobivamo

$$\frac{kx}{ky} = (kx) \cdot (ky)^{-1} = (kx) \cdot (k^{-1} \cdot y^{-1}) = x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}.$$

2) Ako su $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0$ onda je $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
jer je $(a \cdot c)(b \cdot d)^{-1} = (a \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1}) = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})$ (propozicija 1.1.7.).

3) Ako su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ onda je $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ što slijedi direktno iz distributivnosti množenja prema zbrajanju.

4) Ako su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, onda je $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$
Naime, koristeći 1) i 3) dobivamo: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

5) Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ onda je $\frac{a}{b} \neq 0$ i $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.
Imamo:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (a \cdot b^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}.$$

6) Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ onda je $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ jer je $-\frac{a}{b} = -(a \cdot b^{-1}) = (-a) \cdot b^{-1} = \frac{-a}{b}$.

1.7 Racionalni brojevi

Definicija 1.7.1. *Neka je $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Za elemente skupa $\mathbb{Q}$ kažemo da su* ***racionalni brojevi****. Uočimo da je $\mathbb{Z}$ podskup od $\mathbb{Q}$ (jer je $m = \frac{m}{1}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$).*

Propozicija 1.7.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$. Tada su $x + y$ i $x \cdot y$ elementi od $\mathbb{Q}$. Nadalje, $-x \in \mathbb{Q}$ te ako je $x \neq 0$ onda je $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Da su $x + y$, $x \cdot y$, $-x \in \mathbb{Q}$ slijedi direktno iz svojstava 2), 4) i 6).
Neka je $x \neq 0$. Imamo $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Uočimo $m \neq 0$. Prema svojstvu 5) je
$$x^{-1} = \left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{m}.$$

Ako je $m > 0$ onda je $m \in \mathbb{N}$ pa je $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.
Ako je $m < 0$ onda je $-m \in \mathbb{N}$ pa imamo:
$$x^{-1} = \frac{n}{m} = \frac{(-1)n}{(-1)m} = \frac{-(1 \cdot n)}{-(1 \cdot m)} = \frac{-n}{-m}$$
što povlači da je $x^{-1} \in \mathbb{Q}$. □

Lema 1.7.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten. Neka su $a, b, c, d \in P$ takvi da je $a \leq b \leq c \leq d$. Tada je $c - b \leq d - a$.*

Dokaz. Iz $a \leq b$ slijedi $a + (-b) \leq 0$ pa je $-b \leq -a$. Stoga je

$$c + (-b) \leq c + (-a)$$

tj.

$$c - b \leq c - a$$

S druge strane, $c \leq d \Rightarrow c + (-a) \leq d + (-a)$, tj. $c - a \leq d - a$. Iz ovoga i $c - b \leq c - a$ slijedi $c - b \leq d - a$. □

Propozicija 1.7.4. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < r < y$.*

Dokaz. Dokažimo prvo tvrdnju propozicije u slučaju kada je $0 < x$. Iz $x < y$ slijedi da je $y - x > 0$ pa prema korolaru 1.5.9. postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \min\{y - x, x\}$. Tada je

$$\frac{1}{n} < y - x$$

i

$$\frac{1}{n} < x.$$

Neka je $S = \{m \in \mathbb{N} \mid \frac{m}{n} > x\}$.
Skup S je neprazan. Naime, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m > n \cdot x$ iz čega slijedi da je $\frac{m}{n} > x$ (tu koristimo $a < b$ i $c > 0 \Rightarrow ac < bc$). Dakle, $m \in S$.
Nadalje, očito je S podskup od $\mathbb{N}$. Prema teoremu 1.5.12. skup S ima najmanji element, označimo ga s m_0. Pretpostavimo da je $m_0 = 1$.
Budući da je $\frac{m_0}{n} > x$ (jer je $m_0 \in S$) imamo $\frac{1}{n} > x$, što je nemoguće.
Dakle, $m_0 \neq 1$ pa budući da je m_0 prirodan broj imamo da je $m_0 - 1 \in \mathbb{N}$.
Budući da je $m_0 - 1 < m_0$ imamo $m_0 - 1 \notin S$. Stoga,

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq x.$$

Tvrdimo da je $\frac{m_0}{n} < y$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $y \leq \frac{m_0}{n}$.
Imamo

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq x < y \leq \frac{m_0}{n}.$$

Iz prethodne leme slijedi
$$y - x \leq \frac{m_0}{n} - \frac{m_0 - 1}{n},$$
tj.
$$y - x \leq \frac{1}{n}.$$
Ovo je nemoguće jer je $\frac{1}{n} < y - x$. Dakle, $\frac{m_0}{n} < y$. Budući da je $m_0 \in S$, imamo
$$\frac{m_0}{n} > x.$$

Neka je $r = \frac{m_0}{n}$. Tada je $r \in \mathbb{Q}$ i $x < r < y$.
Ovim smo dokazali tvrdnju propozicije u slučaju $x > 0$. U općem slučaju postoji prirodan broj k takav da je $-x < k$. Tada je $0 < x + k$.
Iz $x < y$ slijedi da je $x + k < y + k$. Prema dokazanom postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $x + k < r < y + k$. Iz ovoga slijedi $x < r - k < y$.
Očito je
$$r - k \in \mathbb{Q}.$$
□

Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $|x|$ broj definiran s:
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Za $|x|$ kažemo da je apsolutna vrijednost broja x. Uočimo da je $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Nadalje, $|x| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.
Također vrijedi $x \leq |x|$ te $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Uočimo i ovo: ako su $x, y \in \mathbb{R}$ onda je $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Naime, imamo $x + y \leq |x| + |y|$
i $-(x + y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$.
Broj $|x + y|$ je jedan od brojeva $x + y$, $-(x + y)$. Stoga, je
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Propozicija 1.7.5. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ te $r \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada je $|x - y| < r$ ako i samo ako je*
$$y \in \langle x - r, x + r \rangle.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $|x - y| < r$.
Budući da je $x - y \leq |x - y|$ te $y - x \leq |y - x| = |x - y|$ imamo $x - y < r$ i $y - x < r$ iz čega slijedi

$$x - r < y < x + r,$$

tj.

$$y \in \langle x - r, x + r \rangle.$$

S druge strane ako je $y \in \langle x - r, x + r \rangle$ onda je $x - r < y$ i $y < x + r$ pa je $x - y < r$ i $y - x < r$, tj. $-(x - y) < r$.
Prema tome,

$$|x - y| < r.$$

□

Lema 1.7.6. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq c \leq b$ i $a \leq d \leq b$. Tada je*

$$|c - d| \leq b - a.$$

Dokaz. 1.slučaj. $c \leq d$. Tada je $d - c \geq 0$ pa je $|d - c| = d - c$.
Imamo: $a \leq c \leq d \leq b$ pa prema lemi 1.7.3. vrijedi $d - c \leq b - a$.
Dakle,

$$|d - c| \leq b - a.$$

2.slučaj. $d \leq c$. Tada je $d - c \leq 0$ pa je $|d - c| = -(d - c)$, tj. $|d - c| = c - d$.
Imamo: $a \leq d \leq c \leq b$ pa prema lemi 1.7.3. vrijedi

$$c - d \leq b - a,$$

tj.

$$|d - c| \leq b - a.$$

□

Propozicija 1.7.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup ako i samo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| \leq M, \forall x \in S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen. Tada je S omeđen odozdo i odozgo pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x \leq b, \forall x \in S$.
Iz ovoga slijedi da je $-x \leq -a$ i $x \leq b, \forall \in S$.
Neka je $M = max\{-a, b\}$. Tada je $-x \leq M$ i $x \leq M, \forall x \in S$.
Stoga je

$$|x| \leq M, \forall x \in S.$$

Obratno, pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| \leq M, \forall x \in S$.
Neka je $x \in S$. Tada je $x \leq |x|$ te $-x \leq |-x| = |x|$. Stoga je $x \leq M$ i $-x \leq M$.
Slijedi da je $-M \leq x$.
Dakle,

$$-M \leq x \leq M, \forall x \in S.$$

Ovo znači da je skup S omeđen odozdo i odozgo. Dakle, S je omeđen. $\square$

Poglavlje 2

Konvergencija nizova i neprekidnost funkcija

2.1 Konvergencija nizova

Neka je S skup. Za funkciju sa $\mathbb{N}$ u S kažemo da je NIZ u skupu S.
Ako je x niz u S (tj. $x : \mathbb{N} \to S$) onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo i x_n.
Nadalje, samu funkciju x označavamo s $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dakle, kada kažemo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S onda podrazumijevamo da je $x : \mathbb{N} \to S$.
Umjesto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pišemo i (x_n).

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Za broj $|y - x|$ kažemo da je udaljenost od x do y (udaljenost brojeva x i y, udaljenost točaka x i y).

Definicija 2.1.1. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva (tj. niz u $\mathbb{R}$) te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) konvergira ili teži broju a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$, tj. $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$.*
Ako niz (x_n) konvergira prema a onda pišemo $x_n \to a$ te kažemo da je a limes niza (x_n).

Primjer 2.1.2. *1) Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran s $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
Tada (x_n) očito teži prema a.
2) Neka je niz (x_n) definiran sa $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada niz (x_n) teži broju 0. Dokažimo to.
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon^{-1} < n_0$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq n_0$*. Tada je* $\varepsilon^{-1} < n$ *pa je* $\frac{1}{n} < \varepsilon$*. Stoga je* $|x_n - 0| < \varepsilon$*. Dakle,* $\forall n \geq n_0$ *vrijedi*

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

Prema tome, (x_n) *teži broju* 0.

Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$*. Za* (x_n) *kažemo da je konvergentan niz ako postoji* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$*.*

Propozicija 2.1.3. ***(jedinstvenost limesa niza)*** *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$*, te neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *tako da* $x_n \to a$ *i* $x_n \to b$*. Tada je* $a = b$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a < b$. Neka je $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ te je $b - a = 2\varepsilon$ pa je $a + \varepsilon = b - \varepsilon$. Iz ovoga slijedi da je

$$\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \cap \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle = \emptyset. \tag{2.1}$$

U suprotnome bi postojao x takav da je $x < a + \varepsilon$ i $b - \varepsilon < x$, tj. $x < a + \varepsilon = b + \varepsilon < x$, što je nemoguće.
Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle, \forall n \geq n_0$.
Budući da $x_n \to b$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle, \forall n \geq m_0$.
Neka je $n = max\{n_0, m_0\}$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa je $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ i $x_n \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ što je u kontradikciji s (2.1).
Posve analogno dobivamo da $b < a$ vodi na kontradikciju.
Stoga, $a = b$. □

Propozicija 2.1.4. *Neka su* S *i* T *podskupovi od* $\mathbb{R}$*. Ako su* S *i* T *odozgo omeđen onda je* $S \cup T$ *odozgo omeđen. Ako su* S *i* T *odozdo omeđen onda je* $S \cup T$ *odozdo omeđen.*

Dokaz. Pretpostavimo da su S i T odozgo omeđen. Budući da je S odozgo omeđen postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq a, \forall x \in S$. Budući da je T odozgo omeđen postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq b, \forall x \in T$.
Neka je $c = max\{a, b\}$. Tada je $a \leq c$ i $b \leq c$, pa je $x \leq c, \forall x \in S$ i $x \leq c, \forall x \in T$.
Prema tome $x \leq c, \forall x \in S \cup T$.
Dakle, c je gornja međa skupa $S \cup T$.
Analogno dobivamo da je $S \cup T$ odozdo omeđen ako su S i T odozdo omeđen. □

Korolar 2.1.5. *Neka su S i T omeđen podskupovi od $\mathbb{R}$. Tada je $S \cup T$ omeđen podskup od $\mathbb{R}$.* $\square$

Definicija 2.1.6. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Za (x_n) kažemo da je omeđen niz ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen podskup od $\mathbb{R}$.*

Primjer 2.1.7. *1) Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je (x_n) omeđen niz.*
Naime, $\{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \}$ je omeđen skup.

2) Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran sa $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$. Niz (x_n) nije omeđen jer je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

Lema 2.1.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $\{x_n \mid n \leq k\}$ je omeđen.*
(Napomena: Skup $\{x_n \mid n \leq k\}$ označavamo i s $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.)

Dokaz. Neka je S skup svih $k \in \mathbb{N}$ za koje ova tvrdnja vrijedi.
Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$.
Skup $\{x_1\}$ je očito omeđen, prema tome $1 \in S$. Pretpostavimo da je $k \in S$. Tada je skup $\{x_n \mid n \leq k\}$ omeđen.
Imamo:

$$\{x_n \mid n \leq k + 1\} = \{x_n \mid n \leq k\} \cup \{x_{k+1}\}$$

pa iz korolara 2.1.5. slijedi da je $\{x_n \mid n \leq k + 1\}$ omeđen skup. Dakle, $k + 1 \in S$.
Prema principu indukcije vrijedi S=$\mathbb{N}$. $\square$

Propozicija 2.1.9. *Neka je (x_n) konvergentan niz realnih brojeva. Tada je (x_n) omeđen niz.*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan niz postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.
Odaberimo neki $\varepsilon > 0$ (npr. $\varepsilon = 1$).
Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle, \forall n \geq n_0$.
Ovo povlači da je

$$\{x_n \mid n \geq n_0\} \subseteq \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$$

iz čega slijedi da je $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen skup.
Imamo:

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \mid n \leq n_0\} \cup \{x_n \mid n \geq n_0\}.$$

Iz leme 2.1.8. i korolara 2.1.5. slijedi da je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup.
Dakle, (x_n) je omeđen niz. $\square$

Za niz realnih brojeva (x_n) *kažemo da je rastući ako je* $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Za niz realnih brojeva* (x_n) *kažemo da je padajući ako je* $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1) Niz (x_n), $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$ *je rastući.*
Primjer 2) Niz (x_n), $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ *je padajući.*
Primjer 3) Niz (x_n), $x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ *je rastući i padajući.*
Primjer 4) Neka je (x_n) *niz definiran s*

$$x_n = \begin{cases} 3, & n=1 \\ n, & n>1 \end{cases}$$

Tada $x_1 \nleq x_2$ *i* $x_2 \ngeq x_3$. *Prema tome* (x_n) *nije ni rastući ni padajući niz.*

Propozicija 2.1.10. *Ako je* (x_n) *rastući niz onda za sve* $i, j \in \mathbb{N}$ *takve da je* $i \leq j$ *vrijedi*

$$x_i \leq x_j.$$

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po j da za svaki $j \geq i$ vrijedi $x_i \leq x_j$.
Preciznije, neka je

$$S = \{j \in \mathbb{N} \mid j < i \text{ ili } x_i \leq x_j\}.$$

Ako dokažemo da je $S = \mathbb{N}$ to će značiti da $\forall j \in \mathbb{N}$ takav da je $j \geq i$ vrijedi $x_i \leq x_j$.
Iz definicije od S slijedi $1 \in S$ (ako je $1 < i$ tvrdnja je jasna, inače imamo $i = 1$, a $x_1 \leq x_1$).
Pretpostavimo $j \in S$. Želimo dokazati da je $j + 1 \in S$.
Ako je $j + i < i$ onda je tvrdnja jasna.
Ako je $j + i = i$ onda je $x_i \leq x_{j+1}$ pa je $j + 1 \in S$.
Pretpostavimo sada da je $i < j + 1$. Tada je $i \leq j$ (u suprotnome bismo imali $j < i < j + 1$ što je nemoguće prema propoziciji 1.5.11.).
Ovo zajedno s $j \in S$ povlači $x_i \leq x_j$.
Budući da je $x_j \leq x_{j+1}$ imamo $x_i \leq x_{j+1}$.
Prema tome, $j + 1 \in S$.
Prema principu indukcije imamo $S = \mathbb{N}$. □

Analogno bismo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.1.11. *Ako je* (x_n) *padajući niz onda za sve* $i, j \in \mathbb{N}$ *takve da je* $i \leq j$ *vrijedi*

$$x_i \geq x_j.$$

□

Propozicija 2.1.12. *Neka je (x_n) rastući niz realnih brojeva te neka je a supremum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 1.4.13.(karakterizacija supremuma) postoji $y \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ takav da je $a - \varepsilon < y$.
Očito $y = x_{n_0}$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $x_{n_0} \leq x_n$ (prema propoziciji 2.1.10.), a također imamo

$$x_n \leq a.$$

Prema tome, $\forall\ n \geq n_0$ vrijedi

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Prema tome, $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle, \forall n \geq n_0$.
Dakle, $x_n \to a$. □

Korolar 2.1.13. *Ako je (x_n) rastući i omeđen niz onda je i konvergentan.*

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen, skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa prema teoremu (postojanje supremuma) postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum od skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Iz prethodne propozicije slijedi da $x_n \to a$.
Dakle, (x_n) je konvergentan niz. □

Propozicija 2.1.14. *Neka je (x_n) padajući niz realnih brojeva te neka je a infimum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Ovo dokazujemo analogno kao i prethodnu propoziciju. □

Korolar 2.1.15. *Ako je (x_n) padajući i omeđen niz, onda je i konvergentan.*

Dokaz ovog korolara je analogan dokazu korolara 2.1.13.

Podsjetimo se:
Ako su S i T skupovi onda za podskup od $S \times T$ kažemo da je relacija između skupova S i T.
Ako je φ relacija između S i T takva da za svaki $x \in S$ postoji jedinstveni $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \varphi$ onda za φ kažemo da je funkcijska relacija između S i T.
Ako je φ funkcijska relacija između S i T onda za uređenu trojku (S, T, φ) kažemo da je ***FUNKCIJA*** *sa S u T.*

Ako je $f = (S, T, \varphi)$ *funkcija sa* S *u* T *onda pišemo* $f : S \to T$, *za* S *kažemo da je domena funkcije* f *a za* T *kažemo da je kodomena funkcije* f.
Nadalje, za $x \in S$ *sa* $f(x)$ *označavamo jedinstveni* y *iz* T *takav da je* $(x, y) \in \varphi$.

Uočimo da iz ove precizne definicije funkcije slijedi da za $f : S \to T$ *i* $g : S' \to T'$ *vrijedi* $f = g$ *ako i samo ako je* $S = S'$, $T = T'$ *i* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S$.

Kada na primjer kažemo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *time zapravo tvrdimo da postoji jedinstvena funkcija s tim svojstvom. To je u ovom slučaju jasno, naime* $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$ *gdje je* $\varphi = \{(x, x + 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Napomena 2.1.16. *U prethodnoj smo definiciji intuitivno jasan pojam funkcije precizno definirali tako da smo ga sveli na jednostavnije pojmove. U osnovi svih tih pojmova nalazi se pojam* ***skupa***. *Tako imamo da je* $S \mathrm{x} T$ *skup svih uređenih parova* (x, y) *gdje je* $x \in S, y \in T$. *No i pojam uređenog para se može precizno definirati pomoću pojma skupa. Naime, uređeni par* (x, y) *definiramo kao skup* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. *Uz ovu definiciju vrijedi osnovno svojstvo koje "zahtjevamo" od uređenih parova, naime svojstvo da je*

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ i } y = v \tag{2.2}$$

Dokažimo (2.2). Ako je $x = u$ *i* $y = v$ *onda je očito* $(x, y) = (u, v)$.
Pretpostavimo sada da je $(x, y) = (u, v)$. *Tada je*

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}. \tag{2.3}$$

Prvi slučaj: $u \neq v$.
Iz (2.3) slijedi $\{x\} = \{u\}$ *ili* $\{x\} = \{u, v\}$. *No, posljednja jednakost ne može vrijediti jer je* $\{u, v\}$ *dvočlan skup. Stoga je* $\{x\} = \{u\}$ *pa je* $x = u$. *Opet iz (2.3) slijedi da je* $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ *pa slijedi* $\{u, v\} = \{x, y\}$. *Stoga je* $v \in \{x, y\}$ *pa je* $v = x$ *ili* $v = y$. *No, prva jednakost ne može vrijediti jer* $x = u$ *a* $v \neq u$. *Stoga je* $v = y$. *Dakle,* $x = u$ *i* $y = v$.
Drugi slučaj: $u = v$. *Tada je desna strana od (2.3) jednočlan skup pa je onda i lijeva strana jednočlan skup što povlači da je* $\{x\} = \{x, y\}$. *Stoga je* $y = x$. *Iz (2.3) slijedi* $\{\{x\}\} = \{\{u\}\}$ *pa je* $x = u$. *Stoga je* $y = x = u = v$.
Time je (2.2) dokazana.

Uređenu trojku (x, y, z) *možemo definirati kao* $((x, y), z)$.
Tada odmah slijedi da vrijedi:

$$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x', y = y', z = z'.$$

2.2 Princip definicije indukcijom

Teorem 2.2.1. *(Princip definicije indukcijom) Neka je S skup, $a \in S$ te $H : \mathbb{N} \times S \to S$ funckija. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{N} \to S$ takva da je $f(1) = a$ i $f(n+1) = H(n, f(n)), \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost.
Neka su $f, g : \mathbb{N} \to S$ funkcije takve da je $f(1) = a$ i $f(n+1) = H(n, f(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ te $g(1) = a$ i $g(n+1) = H(n, g(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Neka je $T = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = g(n)\}$. Ako dokažemo da je $T = \mathbb{N}$ to će značiti da je $f = g$.
Očito $1 \in T$.
Pretpostavimo da je $n \in T$. Tada je $f(n) = g(n)$.
Imamo: $f(n+1) = H(n, f(n)) = H(n, g(n)) = g(n+1)$. Dakle, $n + 1 \in T$.
Prema principu matematičke indukcije T=$\mathbb{N}$.

Dokažimo sada egzistenciju.
Očito je dovoljno dokazati da postoji funkcijska relacija φ između $\mathbb{N}$ i S takva da vrijedi sljedeće:
1)$(1, a) \in \varphi$
2) ako su $n \in \mathbb{N}$ i $y \in S$ takvi da je $(n, y) \in \varphi$, onda je $(n+1, H(n, y)) \in \varphi$.
Neka je χ skup svih relacija φ između $\mathbb{N}$ i S koje zadovoljavaju uvjete 1) i 2). Uočimo $\mathbb{N} \times S \in \chi$.
Neka je ψ=$\bigcap_{\varphi \in \chi} \varphi$.
Budući da je $\varphi \subseteq \mathbb{N} \times$ S za svaki $\varphi \in \chi$ imamo $\psi \subseteq \mathbb{N} \times S$.
Dakle, ψ je relacija između $\mathbb{N}$ i S.
Tvrdimo da je $\psi \in \chi$. Za svaki $\varphi \in \chi$ vrijedi $(1, a) \in \varphi$ (po definiciji od χ), stoga je $(1, a) \in \bigcap_{\varphi \in \chi} \varphi$, tj. $(1, a) \in \psi$.
Pretpostavimo da su $n \in \mathbb{N}$ i $y \in S$ takvi da je $(n, y) \in \psi$. Tada za svaki $\varphi \in \chi$ vrijedi $(n, y) \in \varphi$. Stoga je, $(n+1, H(n, y)) \in \varphi$, $\forall\ \varphi \in \chi$.
Stoga je $(n+1, H(n, y)) \in \psi$.
Ovime je pokazano da je $\psi \in \chi$.
Dokažimo sada da je ψ funkcijska relacija između $\mathbb{N}$ i S (ako to dokažemo gotovi smo).
Treba dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $y \in S$ takav da je $(n, y) \in \psi$.
Neka je $T = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists! y \in S$ takav da je $(n, y) \in \psi\}$.
Dokažimo da je $1 \in T$.
Znamo $(1, a) \in \psi$.
Neka je $\varphi = \{(1, a)\} \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times S)$.
Tada je $\varphi \in \chi$. Stoga je $\psi \subseteq \varphi$. Iz ovoga je jasno da ne postoji $b \in \mathbb{N}$, $b \neq a$ takav da je $(1, b) \in \psi$.
Zaključak, $1 \in T$.

Pretpostavimo da je $n \in T$. Tada postoji jedinstveni $y \in S$ takav da je $(n, y) \in \psi$.
Želimo dokazati da je $n + 1 \in T$.
Budući da ψ zadovoljava uvjet 2) (jer je iz χ) vrijedi $(n + 1, H(n, y)) \in \psi$.
Označimo $y' = H(n, y)$. Dakle, $(n + 1, y') \in \psi$.
Pretpostavimo da je $b \in S$, $b \neq y'$.
Definiramo $\psi' = \psi \setminus \{(n + 1, b)\}$. Tvrdimo da je $\psi' \in \chi$.
Očito je $(1, a) \in \psi'$ (jer je $n + 1 \neq 1$).
Pretpostavimo da su $k \in \mathbb{N}$ i $z \in S$ takvi da je $(k, z) \in \psi'$. Slijedi $(k, z) \in \psi$ pa je $(k + 1, H(k, z)) \in \psi$.
Tvrdimo da je $(k + 1, H(k, z)) \neq (n + 1, b)$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $k + 1 = n + 1$ i $H(k, z) = b$. Slijedi, $k = n$ pa je $(n, z) \in \psi$, stoga je $z = y$, pa je $b = H(n, y)$, tj. $b = y'$. Ovo je kontradikcija.

Dakle, $(k+1, H(k, z)) \neq (n+1, b)$ što povlači da je $(k+1, H(k, z)) \in \psi'$. Ovime je pokazano da je $\psi' \in \chi$. Stoga je $\psi \subseteq \psi'$, pa slijedi $(n + 1, b) \notin \psi$.
Zaključak, y' je jedinstveni element od S takav da je $(n + 1, y') \in \psi$. Stoga je $n + 1 \in T$.
Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je $T = \mathbb{N}$. To znači da je ψ funkcijska relacija između $\mathbb{N}$ i S. □

Primjer 2.2.2. *Neka je a realan broj. Prema prethodnom teoremu postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(1) = a$ i $f(n + 1) = a \cdot f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ (za $H : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(n, y) = a \cdot y$). Za $n \in \mathbb{N}$ broj $f(n)$ označavamo s a^n. Dakle, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 2.2.3. *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je 0 infimum skupa $S = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Dokaz. Očito je 0 donja međa ovog skupa (indukcijom se lako pokaže da je $0 < q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Dakle, S je neprazan odozdo omeđen skup. Stoga postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a infimum skupa S (prema teoremu 1.4.16.). Očito je $0 \leq a$.
Pretpostavimo da je $0 < a$.
Iz $0 < q < 1$ slijedi $1 < q^{-1}$. Stoga je $a < \frac{a}{q}$, pa broj $\frac{a}{q}$ nije donja međa skupa S što znači da postoji $s \in S$ takav da je $s < \frac{a}{q}$. Imamo $s = q^n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $q^n < \frac{a}{q}$ pa je $q^{n+1} < a$. Ovo je kontradikcija s činjenicom da je a infimum skupa S. Dakle, $a = 0$, tj. 0 je infimum skupa S. □

Korolar 2.2.4. *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran s $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada (x_n) teži 0.*

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $0 < q^n$ pa iz $q < 1$ slijedi $q \cdot q^n < 1 \cdot q^n$, tj. $q^{n+1} < q^n$.
Dakle, (x_n) je padajući niz pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.1.14. □

Uočimo:
Ako su $a, b \in \mathbb{R}$ *te* $n \in \mathbb{N}$ *onda je* $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ *što se lako dokazuje indukcijom.*
Nadalje, ako je $a \neq 0$ *onda je* $a^n \neq 0$ *te je* $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$.
Naime, imamo $a^n \cdot (a^{-1})^n = (a \cdot a^{-1})^n = 1^n = 1$ *pa je* $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.
Uočimo i ovo: Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *onda je*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot (b^n)^{-1} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Propozicija 2.2.5. *Neka je* $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. *Tada skup* $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nije odozgo omeđen.*

Dokaz. Označimo ovaj skup sa S. Pretpostavimo da je S odozgo omeđen. Stoga S ima supremum (prema teoremu 1.4.11.), označimo ga s a. Uočimo, $a > 0$ (jasno je da je $q^n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
Iz $1 < q$ slijedi $q^{-1} < 1$ pa je $\frac{a}{q} < a$.
Stoga, $\frac{a}{q}$ nije gornja međa skupa S pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{a}{q} < q^n$.
Iz ovoga slijedi $a < q^{n+1}$. To je u kontradikciji s tim da je a supremum od S. Prema tome, S nije odozgo omeđen skup. □

Napomena 2.2.6. *Ako su* $x, y \in \mathbb{R}$ *onda je* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *što se lako pokaže (imamo 4 slučaja u ovisnosti o tome je li* $x \geq 0$, *odnosno* $y \geq 0$*).*
Nadalje, za $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Dokažimo to.
Imamo:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

pa je

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Na isti način dobivamo: $|y| - |x| \leq |x - y|$, *tj.* $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$.
Dakle,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Teorem 2.2.7. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada vrijedi:*
1) Niz $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $-a$
2) Niz $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $|a|$.
3) Niz $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a + b$.
4) Niz $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a \cdot b$.
5) Ako je $a \neq 0$ i $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ onda niz $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $\frac{1}{a}$.

Dokaz.

1) Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$.
No, $\forall n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $|-x_n - (-a)| = |x_n - a|$.
Stoga, $\forall n \geq n_0$ vrijedi $|-x_n - (-a)| < \varepsilon$.
Zaključak,

$$-x_n \to -a.$$

2) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon.$$

Zaključak,

$$|x_n| \to |a|.$$

3) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:
$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$.
Dakle,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \tag{2.4}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da (x_n) teži u a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Nadalje, budući da (y_n) teži u b postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Neka je $k_0 = max\{n_0, m_0\}$.

Tada za svaki $n \geq k_0$ vrijedi n $\geq n_0$ i $n \geq m_0$ što povlači $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Iz (2.4) slijedi da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zaključak,

$$x_n + y_n \to a + b.$$

4) Niz (x_n) je konvergentan pa je i omeđen. Stoga postoji $M \in \mathbb{R}, M > 0$ takav da je $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| = |x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |(x_n - a)|.$$

Dakle,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq M \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da (x_n) teži u a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b| + 1}$.
Nadalje, iz $y_n \to b$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Neka je $k_0 = max\{n_0, m_0\}$. Tada za svaki $n \geq k_0$ vrijedi $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa je $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b| + 1}$ i $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
Iz ovoga slijedi da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi $|b|| \cdot x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ i $M \cdot |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Iz ovoga i (2.5) slijedi da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Zaključak,

$$x_n \cdot y_n \to a \cdot b.$$

5) Prema 2) znamo da vrijedi $|x_n| \to |a|$. Zbog $a \neq 0$ je $|a| > 0$. Neka je $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki n $\geq$ n$_0$ vrijedi $|x_n| \in \langle\, |a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon \rangle$.
Ovo povlači da za svaki n $\geq$ n$_0$ vrijedi $|a| - \varepsilon < |x_n|$, tj. $\dfrac{|a|}{2} < |x_n|$.

Prema tome, za svaki n $\geq n_0$ vrijedi $\dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{2}{|a|}$.
Neka je $n \geq n_0$. Imamo $|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}| = \dfrac{|a - x_n|}{|x_n| \cdot |a|}$ pa je

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| \leq |a - x_n| \cdot \frac{2}{|a|^2}. \tag{2.6}$$

Neka je $\varepsilon > 0$.
Budući da (x_n) teži u a postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2} \tag{2.7}$$

Neka je $k_0 = max\{n_0, m_0\}$. Tada za svaki $n \geq k_0$ vrijede nejednakosti 2.6. i 2.7. pa je
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| \leq |a - x_n| \cdot \frac{2}{|a|^2} < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2} \cdot \frac{2}{|a|^2} = \varepsilon$, tj.,

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| < \varepsilon.$$

Zaključak,

$$\frac{1}{x_n} \to a.$$

□

Korolar 2.2.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada niz $(c \cdot x_n)$ teži prema $c \cdot a$.*

Dokaz. Neka je (y_n) niz definiran s $y_n = c$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $y_n \to c$ pa iz teorema 2.2.7. 4) slijedi $y_n \cdot x_n \to c \cdot a$, tj. $c \cdot x_n \to c \cdot a$. □

Napomena 2.2.9. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada je a infimum, a b supremum skupa $\langle a, b\rangle$. Očito je b gornja međa ovog skupa.*
Pretpostavimo da postoji gornja međa c skupa $\langle a, b\rangle$ takva da je $c < b$.
Odaberimo neki broj $x \in \langle a, b\rangle$. Nadalje odaberimo $z \in \langle c, b\rangle$.
Imamo: $a < x \leq c < z < b$.
Iz ovoga slijedi da je $z \in \langle a, b\rangle$ pa je $z \leq c$ jer je c gornja međa skupa $\langle a, b\rangle$.
No, ovo je u kontradikciji s $z \in \langle c, b\rangle$.
Zaključak, b je supremum skupa $\langle a, b\rangle$.
Analogno dobivamo da je a infimum skupa $\langle a, b\rangle$. Isto tako dobivamo da je b supremum skupa $\langle -\infty, b\rangle$ te da je a infimum skupa $\langle a, +\infty\rangle$

Lema 2.2.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbb{R}$ takav da je $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada (x_n) teži u a.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$ pa je $\frac{1}{n} < \varepsilon$ te je $|x_n - a| < \varepsilon$.
Dakle, $x_n \to a$. □

Propozicija 2.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$.*
1) ako je a supremum skupa S onda postoji niz (x_n) u S koji teži prema a.
2) ako je a infimum skupa S onda postoji niz (x_n) u S koji teži prema a.

Dokaz. 1) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.4.13. (karakterizacija supremuma) postoji $x_n \in S$ takav da je $a - \frac{1}{n} < x_n$. Na ovaj način smo dobili niz (x_n) u S te za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a - \frac{1}{n} < x_n \leq a < a + \frac{1}{n}$ pa je $x_n \in \langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \rangle$, tj. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.
Iz prethodne leme slijedi $x_n \to a$.
Analogno dokazujemo tvrdnju 2). □

> *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$. Za U kažemo da je* ***otvoren skup*** *ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $\langle x - r, x + r\rangle \subseteq U$.*

Primjer 2.2.12. *Skup $\mathbb{R}$ je otvoren. Skup $[0, +\infty\rangle$ nije otvoren jer ne postoji $r > 0$ takav da je $\langle 0 - r, 0 + r\rangle \subseteq [0, +\infty\rangle$.*

Propozicija 2.2.13. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada su skupovi $\langle a, b\rangle, \langle a, +\infty\rangle, \langle -\infty, b\rangle$ otvoreni.*

Dokaz. Neka je $x \in \langle a, b\rangle$. Tada je $a < x < b$ pa su stoga brojevi $b - x$ i $x - a$ pozitivni.
Neka je $r = \min\{b - x, x - a\}$.
Tada je $r > 0$ i $r \leq b - x$, $r \leq x - a$ pa je $x + r \leq b$ i $a \leq x - r$ iz čega slijedi da je $\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$.
Zaključak, $\langle a, b\rangle$ je otvoren skup.
Analogno dobivamo da su skupovi $\langle a, +\infty\ \rangle$ i $\langle -\infty, b\rangle$ otvoreni. □

Propozicija 2.2.14. *Neka su U i V otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$. Tada su $U \cup V$ i $U \cap V$ otvoreni skupovi.*

Dokaz. Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$.
Budući da je U otvoren skup postoji $r > 0$ takav da je $\langle x - r, x + r\rangle \in U$.
Budući da je V otvoren postoji $s > 0$ takav da je $\langle x - s, x + s\rangle \in V$.
Neka je $t = min\{r, s\}$.
Tada je $t > 0$ i $t \leq r$, $t \leq s$ što povlači

$$\langle x - t, x + t\rangle \subseteq \langle x - r, x + r\rangle$$

i

$$\langle x - t, x + t\rangle \subseteq \langle x - s, x + s\rangle.$$

Stoga je $\langle x - t, x + t\rangle \subseteq U \cap V$.
Zaključak, $U \cap V$ je otvoren skup.
Analogno se vidi da je $U \cup V$ otvoren skup. □

Propozicija 2.2.15. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je U otvoren podskup od $\mathbb{R}$ takav da je $a \in U$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Budući da je U otvoren postoji $r > 0$ takav da je $\langle a - r, a + r\rangle \subseteq U$.
S druge strane, činjenica da $x_n \to a$ povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - r, a + r\rangle$.
Iz ovoga slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. □

Neka je $F \subseteq \mathbb{R}$. Za F kažemo da je ***zatvoren skup*** *ako je F^c otvoren skup.*

Primjer 2.2.16. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je skup $[a, b\,]$ zatvoren.*
Naime, imamo $[a, b\,]^c = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle$ iz čega je jasno da je $[a, b\,]^c$ otvoren skup.
Stoga je $[a, b\,]$ zatvoren skup.
Nadalje, skupovi $[a, +\infty\rangle, \langle -\infty, b\,]$ su također zatvoreni skupovi.

Propozicija 2.2.17. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \to a$. Pretpostavimo da je F zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in F$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: $a \notin F$. Tada je $a \in F^c$. Budući da je F^c otvoren skup i $x_n \to a$ prema propoziciji 2.2.15. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in F^c$.
Ovo je u kontradikciji s tim da je $x_n \in F$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Dakle, $a \in F$. □

Korolar 2.2.18. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$.
1) ako je $b \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x_n \leq b$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *onda je* $a \leq b$.
2) ako je $b \in \mathbb{R}$ *takav da je* $b \leq x_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *onda je* $b \leq a$.

Dokaz. 1) ako je $x_n \leq b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ onda je $x_n \in \langle -\infty, b\,]$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Budući da je $\langle -\infty, b\,]$ zatvoren skup prema propoziciji 2.2.17. je $a \in \langle -\infty, b\,]$, tj. $a \leq b$.
Tvrdnju 2) dokazujemo posve analogno. □

2.3 Neprekidnost funkcija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ *te* $x_0 \in S$. *Za funkciju* f *kažemo da je* ***neprekidna*** *u točki* x_0 *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in S$ *vrijedi implikacija*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle \tag{2.8}$$

Primjer 2.3.1. *Neka je* $c \in \mathbb{R}$ *te neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = c$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tada je* f *neprekidna u* x_0. *Zašto?*
Neka je $\varepsilon > 0$. *Tada za svaki* $\delta > 0$ *vrijedi implikacija (2.8) jer je* $f(x) = f(x_0)$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Dakle,* f *je neprekidna u* x_0.

Primjer 2.3.2. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tada je* f *neprekidna u točki* x_0. *Zašto?*
Neka je $\varepsilon > 0$. *Želimo naći* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi implikacija:*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \tag{2.9}$$

Jasno je da za svaki $\delta > 0$ *takav da je* $\delta \leq \varepsilon$ *vrijedi (2.9).*
Dakle, f *je neprekidna u točki* x_0.

Uočimo sljedeće: Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ *te* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija neprekidna u* x_0 *onda za svaki* T *podskup od* S *takav da je* $x_0 \in T$ *vrijedi da je* $f|_T : T \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija u* x_0.

Definicija 2.3.3. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *i* $f : S \to \mathbb{R}$. *Za funkciju* f *kažemo da je neprekidna ako je* f *neprekidna u* x_0 *za svaki* $x_0 \in S$.

Primjer 2.3.4. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. U prethodnome primjeru smo vidjeli da je f neprekidna u svakoj točki svoje domene. Prema tome f je neprekidna.*
Nadalje, svaka konstantna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna.
Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija onda za svaki T podskup od S vrijedi da je $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Napomena 2.3.5. *Kada kažemo da je (x_n) niz u S gdje je $S \subseteq \mathbb{R}$ onda ćemo podrazumijevati da je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 2.3.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u x_0. Neka je (x_n) niz u S takav da $x_n \to x_0$.*
Tada niz $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $f(x_0)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle \tag{2.10}$$

Budući da x_n teži prema x_0 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.
Iz 2.10. slijedi da je $f(x_n) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle$, za svaki $n \geq n_0$.
Prema tome, $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Primjer 2.3.7. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s:*

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Funkcija f nije neprekidna u 0.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. f je neprekidna u 0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da:

$$x \in \langle -\delta, \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle 2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon\rangle.$$

Posebno za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da:

$$x \in \langle -\delta, \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle 1, 3\rangle \tag{2.11}$$

Odaberimo $x \in \langle 0, \delta\rangle$. Tada iz (2.11) slijedi $f(x) \in \langle 1, 3\rangle$.
No, $x \neq 0$ povlači $f(x) = 1$ što je kontradikcija.
Dakle, f nije neprekidna u 0.

Evo i drugog dokaza da f nije neprekidna u 0.
Pretpostavimo da jest.
Neka je (x_n) niz definiran s $x_n = \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Imamo $x_n \to 0$. Iz prethodne propozicije slijedi $f(x_n) \to f(0)$, tj. $f(x_n) \to 2$. No, $f(x_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa $f(x_n) \to 1$.
Ovo je nemoguće jer je limes niza jedinstven. □

Primjer 2.3.8. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$
Tada f nije neprekidna u točki $x = 0$.

Pretpostavimo suprotno.
Neka je (x_n) definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada (x_n) teži prema 0.
Iz prethodne propozicije slijedi da $(f(x_n))$ teži prema $f(0)$. To znači da je $(f(x_n))$ konvergentan niz. No, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n} = n$ što znači da niz $(f(x_n))$ nije omeđen (jer je $\{ f(x_n) \mid n \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N}$), što je u kontradikciji s činjenicom da je konvergentan.

Primjer 2.3.9. *Neka je* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$
Funkcija f nije neprekidna u točki 0.
Pretpostavimo suprotno, tj. da je f neprekidna u točki 0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi $x \in \langle 0 - \delta, 0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon \rangle$.
Posebno za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ tako da je $x \in \langle -\delta, \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle 0, 2 \rangle$.
Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $-\delta < x < 0$ (to sigurno možemo napraviti jer je $-\delta < 0$).
Tada je $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$ pa je $f(x) \in \langle 0, 2 \rangle$.
No, $x < 0$ povlači da je $f(x) = -1$, što je u kontradikciji s tim da je $f(x) \in \langle 0, 2 \rangle$.
Dakle, f nije neprekidna u 0.

Teorem 2.3.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo: kad god je (x_n) niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$, onda $f(x_n) \to f(x_0)$. Tada je f neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da f nije neprekidna u točki x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ za kojeg ne možemo naći $\delta > 0$ sa svojstvom da:

$$(x \in S \ i \ x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle) \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle \tag{2.12}$$

Dakle, za svaki $\delta > 0$ (2.12) ne vrijedi, tj. za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$$

ali $f(x) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$.
Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\frac{1}{n} > 0$ pa postoji $x_n \in \langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \rangle$ tako da $f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$.
Na ovaj način smo dobili niz realnih brojeva (x_n). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $x_n \in S$, no $x_n \neq x_0$ zbog $f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$.
Dakle, (x_n) je niz u $S \setminus \{x_0\}$.
Nadalje, iz $x_n \in \langle x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n} \rangle$ slijedi da je $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$.
Stoga, lema 2.2.10. povlači da $x_n \to x_0$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$.
Iz ovoga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

No, ovo je u kontradikciji s činjenicom da $f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Zaključak, f je neprekidna u x_0. □

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiramo funkciju $f + g : S \to \mathbb{R}$ sa

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in S.$$

Za $f + g$ kažemo da je zbroj funkcija f i g.

Nadalje, definiramo funkciju $f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ sa

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in S.$$

Za $f \cdot g$ kažemo da je produkt funkcija f i g.

Definiramo i funkcije $-f$, $|f| : S \to \mathbb{R}$ sa $(-f)(x) = -f(x)$ i $|f|(x) = |f(x)|$, za svaki $x \in S$.
Ako je $f(x) \neq 0$, za svaki $x \in S$, onda definiramo funkciju $\dfrac{1}{f} : S \to \mathbb{R}$ sa

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in S.$$

Primjer 2.3.11. *Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2x^2 + x, x \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka su $f, g, l, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcije definirane s $f(x) = x, g(x) = 2, l(x) = x^2$ i $k(x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo $l(x) = f(x) \cdot f(x) = (f \cdot f)(x)$ pa zaključujemo da je $l = f \cdot f$. Isto tako dobivamo $k = g \cdot l$ pa je $k = g \cdot (f \cdot f)$. Nadalje, $h = k + f$ pa je $h = g \cdot (f \cdot f) + f$.*

Teorem 2.3.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki x_0. Tada su funkcije $f+g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f|$ neprekidne funkcije u x_0. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$ onda je $\frac{1}{f}$ neprekidna funkcija u točki x_0.*

Dokaz. Dokažimo da je funkcija $f \cdot g$ neprekidna u točki x_0.
Prema prethodnom teoremu dovoljno je dokazati sljedeće:
ako je (x_n) niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$, onda $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$.
Neka je (x_n) niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$.
Budući da je f neprekidna u x_0, prema propoziciji 2.3.6. vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$.
Isto tako zaključujemo da $g(x_n) \to g(x_0)$.
Iz teorema 2.2.7. slijedi $f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x_0) \cdot g(x_0)$.
Dakle, $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$.
Zaključak, funkcija $f \cdot g$ je neprekidna u točki x_0.
Ostale tvrdnje dokazuju se analogno. □

Korolar 2.3.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada su $f+g$, $f \cdot g$, $-f$ i $|f|$ neprekidne funkcije.*
Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$ onda je $\frac{1}{f}$ neprekidna funkcija. □

Primjer 2.3.14. *Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2x^2 + x$. Tada je h neprekidna funkcija. Naime, prema prethodnom primjeru vrijedi $h = g \cdot (f \cdot f) + f$, pri čemu su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(x) = x$, $g(x) = 2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Znamo od prije da su f i g neprekidne funkcije pa iz prethodnog korolara slijedi da je funkcija h neprekidna.*

Neka su S, $T \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : T \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je slika od f (tj. $\mathrm{Im} f$) podskup od T. Tada definiramo $g \circ f : S \to \mathbb{R}$ sa $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in S$.
Za $g \circ f$ kažemo da je kompozicija funkcija f i g.
Uočimo da ovaj pojam kompozicija funkcija proširuje uobičajeni pojam kompozicije (kada je $T = \mathbb{R}$).

Propozicija 2.3.15. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : T \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(S) \subseteq T$. Pretpostavimo da je $a \in S$ broj takav da je f neprekidna u a te g neprekidna u $f(a)$. Tada je $g \circ f$ neprekidna u a.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je g neprekidna u $f(a)$ postoji $\delta > 0$ takav da je $| g(y) - g(f(a)) | < \varepsilon, \forall y \in T$ takav da $| y - f(a) | < \delta$. Nadalje, budući da je f neprekidna u a postoji $\delta_1 > 0$ takav da je $| f(x) - f(a) | < \delta, \forall x \in S$ takav da $| x - a | < \delta_1$. Iz ovoga

je jasno da za svaki $x \in S$ takav da je $| x - a |< \delta_1$ vrijedi $| g(f(x)) - g(f(a)) |< \varepsilon$. Dakle, $g \circ f$ je neprekidna u a.
Na drugi način ovu propoziciju možemo ovako dokazati:
Neka je (x_n) niz u S takav da $x_n \to a$. Iz propozicije 2.3.6. slijedi $f(x_n) \to f(a)$ pa iz iste propozicije slijedi $g(f(x_n) \to g(f(a))$, tj. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$.
Sada iz teorema 2.3.10. slijedi da je $g \circ f$ neprekidna u a. □

Korolar 2.3.16. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : T \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(S) \subseteq T$. Pretpostavimo da su f i g neprekidne funkcije. Tada je $g \circ f$ neprekidna funkcija.* □

Primjer 2.3.17. *1) Neka su f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa $f(x) = x^7 + x^4 - \dfrac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $g(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + 1}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Koristeći korolar 2.3.13. nije teško zaključiti da su f i g neprekidne funkcije.*

2) Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definira s $f_n(x) = x^n$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je f_n neprekidna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi f_{n+1}=$f_1 \cdot f_n$ pa tvrdnju dobivamo indukcijom.
Nadalje, ako je $a \in \mathbb{R}$ te $n \in \mathbb{N}$ onda je funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = a \cdot x^n$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ neprekidna.

3) Funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je neprekidna. Naime, neka je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ neprekidna funkcija. Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ vrijedi

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Prema tome, $g = \dfrac{1}{f}$. Dakle, g je neprekidna funkcija.

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je ***polinom*** *ako postoje $n \in \mathbb{R}$ i $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + x_0, \forall x \in \mathbb{R}$.*
Nije teško zaključiti koristeći korolar 2.3.13.i prethodni primjer pod 3) da je svaki polinom neprekidna funkcija.

Teorem 2.3.18. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te $f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada postoji $c \in [a, b\,]$ tako da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in [a,b\,] |\, f(x) \leq 0\}$.
Uočimo da je S neprazan odozgo omeđen skup (naime, $a \in S$, b je gornja međa od S).
Stoga postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa S. Vrijedi $a \leq c \leq b$.
Prema propoziciji 2.2.11. postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S takav da $x_n \to c$. Uočimo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $[a,b\,]$ (jer je $S \subseteq [a,b\,]$).
Prema propoziciji 2.2.11. vrijedi $f(x_n) \to f(c)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $f(x_n) \leq 0$ pa korolar 2.2.18. povlači da je $f(c) \leq 0$.
Iz ovoga slijedi da je $c \neq b$ pa je $c < b$.
Znamo da je c infimum skupa $\langle c, b\rangle$ pa postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\langle c, b\rangle$ tako da (y_n) teži prema c (prema propoziciji 2.2.11.).
Jasno je da je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $[a,b\,]$. No, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $c < y_n$, što povlači da $y_n \notin S$ (jer je c gornja međa od S) pa slijedi $f(y_n) > 0$. Iz $y_n \to c$ slijedi da $f(y_n) \to f(c)$.
Iz korolara 2.2.18. slijedi da je $0 \leq f(c)$.
Ovo zajedno s $f(c) \leq 0$ povlači $f(c) = 0$. □

Korolar 2.3.19. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te $f : [a,b\,] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$. Tada postoji $c \in [a,b\,]$ tako da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Promotrimo funkciju $-f : [a,b\,] \to \mathbb{R}$. Znamo da je $-f$ neprekidna funkcija (prema korolaru 2.3.13.), a vrijedi $(-f)(a) = -f(a) < 0$ i $(-f)(b) = -f(b) > 0$.
Iz prethodnog teorema slijedi da postoji $c \in [a,b\,]$ tako da je $(-f)(c) = 0$. Stoga je $-f(c) = 0$ pa je $f(c) = 0$. □

Korolar 2.3.20. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a,b\,] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $y \in \mathbb{R}$ tako da je $f(a) < y < f(b)$ ili $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $c \in [a,b\,]$ tako da je $f(c) = y$.*

Dokaz. Neka je $g : [a,b\,] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $g(x) = f(x) - y$, za svaki $x \in [a,b\,]$.
Funkcija g je neprekidna kao zbroj dviju neprekidnih funkcija, naime $g = f + h$, gdje je $h : [a,b\,] \to \mathbb{R}$, $h(x) = -y$, za svaki $x \in [a,b\,]$.
Ako je $f(a) < y < f(b)$ onda je $g(a) = f(a) - y < 0$ te $g(b) = f(b) - y > 0$, a ako je $f(a) > y > f(b)$ onda je $g(a) > 0$ i $g(b) < 0$.
Iz teorema 2.3.18. i korolara 2.3.19. slijedi da postoji $c \in [a,b\,]$ tako da je $g(c) = 0$. Prema tome $0 = f(c) - y$ pa je $f(c) = y$. □

Poglavlje 3

Eksponencijalna funkcija

3.1 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Za broj $n \in \mathbb{N}$ kažemo da je paran ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2k$.
Za broj $n \in \mathbb{N}$ kažemo da je neparan ako postoji $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $n = 2k + 1$.

Uočimo:
1) Ako je n paran broj onda je $n + 1$ neparan.
Ako je n neparan broj onda je $n + 1$ paran broj.
2) Svaki prirodan broj je paran ili neparan.
Ovo lako dobijemo indukcijom
3) Niti jedan prirodan broj nije istovremeno paran ili neparan.
Pretpostavimo suprotno.
Tada postoje $k \in \mathbb{N}$ i $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da je $2k = 2l + 1$.
Iz ovoga slijedi $1 = 2(k - l)$ pa je $k - l > 0$. Jasno je da je $k - l \in \mathbb{Z}$ pa zaključujemo da je $k - l$ prirodan broj. Stoga je $1 \leq k - l$ iz čega slijedi $2 \leq 2(k - l)$, tj. $2 \leq 1$ što je kontradikcija.
4) Produkt dva parna broja je paran broj, a produkt dva neparna broja je neparan broj.
5) Ako je $p \in \mathbb{N}$ takav da je p^2 paran broj onda je p paran broj.
Pretpostavimo suprotno. Tada je p neparan broj. Imamo:

$$p^2 = p \cdot p$$

pa je prema 4) p^2 neparan broj. To je kontradikcija (prema 3)). Dakle, p je paran broj.

Teorem 3.1.1. *Ne postoji racionalan broj x takav da je $x^2 = 2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, dakle da postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x^2 = 2$.
Uočimo da je $(-x)^2 = x^2 = 2$. Stoga možemo pretpostaviti da je $x > 0$ (inače umjesto x

uzmemo $-x$).
Budući da je $x \in \mathbb{Q}$ postoje $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = \frac{p}{q}$.
Iz $x > 0$ slijedi $p > 0$ pa je $p \in \mathbb{N}$.
Neka je $S = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}$ td. je $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\}$.
Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$. Nadalje, $S \neq \emptyset$ jer je $p \in S$. Stoga prema teoremu 1.5.12. skup S ima najmanji element, označimo ga s m_0.
Tada je $m_0 \in S$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left(\frac{m_0}{n_0}\right)^2 = 2$.
Iz ovoga slijedi $m_0^2 = 2 \cdot {n_0}^2$. Stoga je m_0^2 paran broj, što povlači da je m_0 paran broj. Prema tome postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m_0 = 2m$.
Iz ovoga slijedi da je $(2m)^2 = 2 \cdot {n_0}^2$ pa je $2 \cdot (2m^2) = 2 \cdot n_0^2$, tj. $2m^2 = n_0^2$. Ovo povlači da je ${n_0}^2$ paran broj, stoga je n_0 paran broj pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 = 2n$.
Imamo, $\frac{m_0}{n_0} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ pa je $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Ovo znači da je $m \in S$.
Budući da je m_0 minimum od S vrijedi $m_0 \leq m$, tj. $2m \leq m$. Ovo daje (zbog $m \in \mathbb{N}$) $2 \leq 1$, što je kontradikcija. □

Za realan broj x kažemo da je ***pozitivan*** *ako je $x > 0$.*
Uočimo sljedeće: ako je x pozitivan realan broj onda je x^n pozitivan broj za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovo lagano slijedi indukcijom iz činjenice da je produkt dva pozitivna broja pozitivan broj. Nadalje, ako su x i y pozitivni brojevi takvi da je $x < y$ onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^n < y^n$. Ovo slijedi lagano indukcijom iz korolara 1.2.16.

Teorem 3.1.2. *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ te $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x > 0$ i $x^n = a$.*

Dokaz. Jedinstvenost.
Pretpostavimo da postoje pozitivni brojevi x i y takvi da je $x \neq y$ i $x^n = a$ i $y^n = a$.
Iz $x \neq y$ slijedi $x < y$ ili $y < x$.
Ako je $x < y$ onda je $x^n = a < y^n = a$, tj. $a < a$ što je kontradikcija.
Analogno vidimo da $y < x$ vodi na kontradikciju.
Dakle, $x = y$.
Egzistencija.
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Tada je f očito neprekidna funkcija.
Očito je $f(0) = 0 < a$. S druge strane odaberimo broj $c \geq 1$ takav da je $a < c$. Ako je $a < 1$ onda je $a < 1 = 1^n \leq c^n$. Dakle $a < c^n$. Uzmimo da je $a \geq 1$. Tvrdimo da je $a \leq a^n$. Naime, to je jasno za $n = 1$, a ako je $n > 1$ onda je $1 \leq a^{n-1}$ pa je $a \leq a^n$.
Dakle, $a \leq a^n < c^n$, tj. $a < c^n$.

Dakle, $a < c^n = f(c)$ pa imamo $f(0) < a < f(c)$.
Iz korolara 2.3.20. slijedi da postoji $x \in [0, c\,]$ takav da je $f(x) = a$, tj. $x^n = a$. □

Neka su $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Sa $\sqrt[n]{a}$ označavamo (jedinstveni) pozitivan broj x takav da je $x^n = a$.
Za $\sqrt[n]{a}$ kažemo da je n-ti korijen iz a.
Dakle, $(\sqrt[n]{a})^n = a$ te ako je $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ i $x^n = a$ onda je $x = \sqrt[n]{a}$.
Broj $\sqrt[2]{a}$ označavamo naprosto s $\sqrt{a}$ i zovemo korijen iz a.

Korolar 3.1.3. *Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz teorema 3.1.2. □

Lema 3.1.4. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*
1) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$
2) $(x^m)^n = x^{mn}$

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi 1).
Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz definicije potenciranja. Pretpostavimo da 1) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n} \cdot x = (x^m \cdot x^n) \cdot x = x^m \cdot (x^n \cdot x) = x^m \cdot x^{n+1}.$$

Dakle,

$$x^{m+(n+1)} = x^m \cdot x^{n+1}.$$

Time je tvrdnja 1) dokazana.

Neka je $m \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi 2).
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da 2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo (koristeći i tvrdnju 1):
$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot x^m = x^{mn} \cdot x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}$.
Dakle,

$$(x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}.$$

Time je tvrdnja 2) dokazana. □

Propozicija 3.1.5. *Neka je a pozitivan realan broj te $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:*

1) $\sqrt[n]{a} > 0$
2) *ako je* $a > 1$ *onda je* $\sqrt[n]{a} > 1$, *a ako je* $a < 1$ *onda je* $\sqrt[n]{a} < 1$.
3) *ako je* $p \in \mathbb{N}$, *onda je* $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[np]{a})^p$
4) *ako je* $p \in \mathbb{N}$, *onda je* $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Dokaz. 1) Slijedi direktno iz definicije broja $\sqrt[n]{a}$.
2) Neka je $a > 1$. Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{a} \leq 1$. Iz ovoga slijedi $(\sqrt[n]{a})^n \leq 1^n$, tj. $a \leq 1$, što je kontradikcija.
Dakle, $\sqrt[n]{a} > 1$.
Analogno dobivamo da $a < 1$ povlači $\sqrt[n]{a} < 1$.
4) Neka je $p \in \mathbb{N}$. Imamo:
$\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}\right)^{pn} = \left(\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}\right)^p\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$
Dakle, $\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}\right)^{pn} = a$ pa je $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$.

3) Koristeći 4) imamo:
$(\sqrt[np]{a})^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^p = \sqrt[n]{a}$. □

Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Za $m \in \mathbb{Z}$ definiramo:

$$x^m = \begin{cases} x^m & \text{, ako je } m > 0 \\ 1 & \text{, ako je } m=0 \\ (x^{-1})^{-m} & \text{, ako je } m < 0 \end{cases}$$

Uočimo: Ako je $x > 0$ onda je $x^m > 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Uočimo i ovo:
Broj x^{-1}, shvaćen u smislu gornje definicije ($-1 \in \mathbb{Z}$) je jednak broju x^{-1} (inverz od x).

Uočimo sljedeće:
Ako je $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$ onda je $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.
Naime, prvo primjetimo da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
To se lagano dobiva indukcijom po n.
Sada, ako je $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, onda je $(x^{-1})^n \cdot x^n = (x^{-1} \cdot x)^n = 1^n = 1$.
Dakle,

$$(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}.$$

Propozicija 3.1.6. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *te neka su* $n, m \in \mathbb{Z}$. *Tada je* $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$.

Dokaz. Ovo je jasno ako je $m = 0$, odnosno $n = 0$.
Pretpostavimo stoga da je $m \neq 0$ i $n \neq 0$. Imamo 4 slučaja:
1.slučaj. $m > 0$, $n > 0$.
Tvrdnja slijedi direktno iz leme 3.1.4.
2.slučaj. $m < 0$, $n < 0$.

Tada je $n + m < 0$. Imamo (koristeći lemu 3.1.4.):
$x^{n+m} = (x^{-1})^{-(n+m)} = (x^{-1})^{-n+(-m)} = (x^{-1})^{-n} \cdot (x^{-1})^{-m} = x^n \cdot x^m$.
3.slučaj. $m > 0$, $n < 0$.

1) $n + m \geq 0$.
Neka je $k = m + n$. Tada je $k \geq 0$ te vrijedi $m = k + (-n)$.
Imamo $m, -n \in \mathbb{N}$ te $k \in \mathbb{N}$ ili $k = 0$. Iz leme 3.1.4. slijedi:
$x^m = x^{k+(-n)} = x^k \cdot x^{-n}$ tj. $x^m = x^k \cdot x^{-n}$ pa je $x^m \cdot (x^{-n})^{-1} = x^k$, tj. $x^m \cdot (x^{-1})^{-n} = x^k$. Dakle,

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

2) $n + m < 0$
Neka je $k = m + n$. Tada je $k < 0$ i vrijedi $-n = m + (-k)$.
Imamo $-n, m, -k \in \mathbb{N}$. Iz leme 3.1.4. slijedi:
$x^{-n} = x^{m+(-k)} = x^m \cdot x^{-k}$ tj. $x^{-n} = x^m \cdot x^{-k}$. Iz ovoga dobivamo $(x^{-k})^{-1} = x^m \cdot (x^{-n})^{-1}$.
Dakle,

$$x^k = x^m \cdot x^n,$$

tj.

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n.$$

4.slučaj. $m < 0, n > 0$.
Imamo koristeći treći slučaj $x^{m+n} = x^{n+m} = x^n \cdot x^m = x^m \cdot x^n$. □

Propozicija 3.1.7. *Neka je* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ *te neka su* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Tada je* $(x^m)^n = x^{mn}$.

Dokaz. Ako je $m = 0$ ili $n = 0$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $m \neq 0, n \neq 0$.
1. slučaj. $m > 0, n > 0$.
Tvrdnja direktno slijedi iz leme 3.1.4.
2.slučaj. $m > 0, n < 0$.

Imamo:

$$(x^m)^n = ((x^m)^{-1})^{-n} = ((x^{-1})^m)^{-n}.$$

Koristeći lemu 3.1.4. slijedi:

$$(x^m)^n = (x^{-1})^{m\cdot(-n)} = (x^{-1})^{-m\cdot n} = x^{mn}.$$

3.slučaj. $m < 0, n > 0$.

Imamo:

$$(x^m)^n = ((x^{-1})^{-m})^n = (x^{-1})^{-m\cdot n} = x^{mn}.$$

4.slučaj. $m < 0, n < 0$.

Imamo:

$$(x^m)^n = ((x^{-1})^{-m})^n = (((x^{-1})^{-m})^{-1})^{-n} = (((x^{-1})^{-1})^{-m})^{-n} = ((x)^{-m})^{-n} = x^{(-m)\cdot(-n)} = x^{mn}.$$

□

Lema 3.1.8. *Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m \in \mathbb{Z}$. Tada je $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.*

Dokaz. Neka je $x = (\sqrt[n]{a})^m$. Očito je $x > 0$ te koristeći prethodnu propoziciju dobivamo $x^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$.
Dakle, $x^n = a^m$, stoga je $x = \sqrt[n]{a^m}$.
Dakle,

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

□

Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$ te neka je $r \in \mathbb{Q}$. Želimo definirati a^r.
Imamo, $r = \frac{m}{n}$ gdje je $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Definiramo $a^r = (\sqrt[n]{a})^m$.
Moramo provjeriti da je ovo dobra definicija, tj. da ne ovisi o izboru brojeva m i n.
Pretpostavimo da su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ takvi da je $r = \frac{p}{q}$. Želimo dokazati da je $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$.
Iz $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ slijedi $mq = np$. Imamo $(\sqrt[n]{a})^m = ((\sqrt[nq]{a})^q)^m = (\sqrt[nq]{a})^{qm}$.
S druge strane, $(\sqrt[q]{a})^p = ((\sqrt[qn]{a})^n)^p = (\sqrt[qn]{a})^{np}$.
Zaključak, $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$.
Uočimo da definicija od a^r za $r \in \mathbb{Q}$ proširuje definiciju od a^m za $m \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 3.1.9. *Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Tada je:*

$$a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Dokaz. Imamo $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ i $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Vrijedi:

$$a^{r_1+r_2} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}} = (\sqrt[n_1n_2]{a})^{m_1n_2+m_2n_1} = (\sqrt[n_1\cdot n_2]{a})^{m_1n_2} \cdot (\sqrt[n_1\cdot n_2]{a})^{m_2n_1} = a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}} \cdot a^{\frac{m_2n_1}{n_1n_2}}$$

$$= a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

□

Uočimo sljedeće:
Ako je $a > 0$ i $r \in \mathbb{Q}$ onda je $a^r > 0$.

Lema 3.1.10. *Neka je $a > 0$ te $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.*

1) ako je $a > 1$ onda je $a^r > 1$.

2) ako je $a < 1$ onda je $a^r < 1$.

Dokaz. Imamo: $r = \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.
1) Iz $a > 1$ slijedi $\sqrt[n]{a} > 1$.
Stoga je $(\sqrt[n]{a})^m > 1^m$, tj.

$$a^r > 1.$$

2) Analogno prema 3.1.5. 2), $a < 1$ povlači $\sqrt[n]{a} < 1$. Stoga je $(\sqrt[n]{a})^m < 1^m$, tj.

$$a^r < 1.$$

□

Propozicija 3.1.11. *Neka je $a > 0$ te neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 < r_2$.*

1) ako je $a > 1$ onda je $a^{r_1} < a^{r_2}$.

2) ako je $a < 1$ onda je $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Dokaz. Iz $r_1 < r_2$ slijedi $0 < r_2 - r_1$. Ako je $a > 1$ onda iz prethodne leme slijedi $1 < a^{r_2 - r_1}$ pa je $a^{r_1} < a^{r_2 - r_1} \cdot a^{r_1}$, pa iz propozicije 3.1.9. slijedi

$$a^{r_1} < a^{r_2}.$$

Ako je $a < 1$ onda je $a^{r_2 - r_1} < 1$ pa analogno slijedi

$$a^{r_2} < a^{r_1}.$$

□

Općenito, za funkciju $f : S \to T, S, T \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je ***rastuća*** *ako je $f(x) \leq f(y)$ za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$.*
Za f kažemo da je ***strogo rastuća*** *ako je $f(x) < f(y)$ za sve $x, y \in S$ takve da je $x < y$.*
Neka je $a > 1$.
Prema propoziciji 3.1.11. funkcija $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$$

je strogo rastuća.
Neka je $a > 1$, te $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Želimo definirati a^x.
Skup

$$\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\} \tag{3.1}$$

je očito neprazan a vrijedi da je odozgo omeđen. Naime, sigurno postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q$. Ako je $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$, onda je $r < q$ pa je stoga $a^r < a^q$. Ovo znači da je a^q gornja međa skupa 3.1. Budući da je skup 3.1. neprazan i odozgo omeđen prema propoziciji 1.4.11. ima supremum.
Definiramo:

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\} \tag{3.2}$$

Lema 3.1.12. *Neka je $a > 1$.*

1) *ako su $r \in \mathbb{Q}$ i $x \in \mathbb{R}$ takvi da je $r < x$ onda je $a^r \leq a^x$.*

2) *ako su $x \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x < q$ onda je $a^x \leq a^q$.*

Dokaz. 1) ako je $x \in \mathbb{Q}$ onda tvrdnja slijedi prema propoziciji 3.1.11., a ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ onda tvrdnja slijedi direktno iz definicije (3.2).
2) ako je $x \in \mathbb{Q}$ onda je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da $x \notin \mathbb{Q}$.
Ako je $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$ onda je $r < q$ pa je $a^r < a^q$. Ovo znači da je a^q gornja međa skupa iz (3.2). pa je supremum tog skupa manji ili jednak od a^q.
Dakle,

$$a^x \leq a^q.$$

□

Propozicija 3.1.13. *Neka je $a > 1$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Tada je $a^x < a^y$.*

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < r < y$.
Iz $x < r$ slijedi da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q < r$.
Dakle, imamo $x < q < r < y$.
Iz prethodne leme i propozicije 3.1.11. slijedi da je $a^x \leq a^q < a^r \leq a^y$.
Stoga je

$$a^x < a^y.$$

□

Uočimo sljedeće:
ako je $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$ onda je $a^x > 0$.
Naime, sigurno postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$, iz čega slijedi $a^r < a^x$, a znamo da je $a^r > 0$.

Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Definiramo funkciju: $exp : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ s

$$exp_a(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za exp_a kažemo da je ***eksponencijalna funkcija*** *s bazom a.*
Dokazali smo:

Funkcija exp_a je strogo rastuća za svaki $a > 1$.
Napomena:
Ako je $f : S \to T$ funkcija, gdje su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ onda možemo promatrati funkciju $\overline{f} : S \to \mathbb{R}$ definiranu s $\overline{f}(x) = f(x), \forall x \in S$.
Kada kažemo da je f neprekidna u s_0, gdje je $s_0 \in S$, mislimo na to da je $\overline{f}$ neprekidna u s_0. Dakle, $f : S \to T$ je neprekidna u točki $s_0 \in S$ ako i samo ako za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za svaki x element skupa S takav da je $|x - x_0| < \delta$.

Lema 3.1.14. *Neka je $a > 0$. Tada niz $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema 1.*

Dokaz. Ako je $a = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo sada da je $a > 1$. Tvrdimo da je niz $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ padajući. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ pa je $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$, tj. $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$.
Nadalje, $1 < \sqrt[n]{a}, \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga je skup $\{\sqrt[n]{a} \mid n \in \mathbb{N}\}$ odozdo omeđen pa postoji $l \in \mathbb{R}$ takav da je l infimum ovog skupa. Jasno je da je $1 \leq l$. Pretpostavimo da je $1 \neq l$. Tada je $1 < l$. Imamo: $l \leq \sqrt[n]{a}, \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga je $l^n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$. Ovo znači da je skup $\{l^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen.
No, to je prema propoziciji 2.2.5. nemoguće.
Prema tome $1 = l$. Iz propozicije 2.1.14. slijedi da $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Uzmimo sada da je $0 < a < 1$. Tada je $1 < a^{-1}$. Prema dokazanome vrijedi $\sqrt[n]{a^{-1}} \to 1$.
Prema lemi 3.1.8. $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[n]{a^{-1}} = (\sqrt[n]{a})^{-1}$. Dakle,

$$(\sqrt[n]{a})^{-1} \to 1.$$

Iz teorema 2.2.7. slijedi

$$\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{-1}} \to \frac{1}{1},$$

tj.

$$\sqrt[n]{a} \to 1.$$

□

Lema 3.1.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija takva da za svaki $x_0 \in S$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 < x_0 < x_2$ i $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$. Tada je f neprekidna.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in S$. Dokažimo da je f neprekidna u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Znamo da postoje $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 < x_0 < x_2$ te $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$. Imamo $x_0 \in \langle x_1, x_2\rangle$. Stoga postoji $\delta > 0$ takav da je $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \subseteq \langle x_1, x_2\rangle$. Tvrdimo da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in S$ tako da je $|x - x_0| < \delta$. Neka je $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$. Tada je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ iz čega slijedi $x \in \langle x_1, x_2\rangle$.
Imamo, $x_1 \leq x \leq x_2$ što povlači $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Analogno, iz $x_0 \in \langle x_1, x_2\rangle$ slijedi $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$. Sada prema lemi 1.7.6. vrijedi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zaključak, f je neprekidna u x_0. □

Teorem 3.1.16. *Neka je $a > 1$.*

1) Funkcija exp_a je neprekidna

2) Funkcija exp_a je bijekcija

Dokaz. 1) Dovoljno je dokazati da su ispunjene pretpostavke prethodne leme, tj da za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_1 < x_0 < x_2$ i $exp_a(x_2) - exp_a(x_1) < \varepsilon$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $\varepsilon > 0$.
Odaberimo $M \in \mathbb{N}$ takav da je $x_0 < M$. Prema lemi 3.1.14. vrijedi $\sqrt[n]{a} \to 1$ iz čega slijedi $\sqrt[n]{a} - 1 \to 0$ pa imamo $(\sqrt[n]{a} - 1)a^M \to 0$ (prema teoremu 2.2.7). Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\sqrt[n]{a} - 1)a^M < \varepsilon.$$

Odaberimo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ takve da je

$$r_1 < x_0 < r_2 < M \text{ te } r_2 - r_1 < \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Naime, imamo $x_0 - \frac{1}{3n} < x_0 < \min\{x_0 + \frac{1}{3n}\}$ pa postoje racionalni brojevi r_1 i r_2 takvi da je

$$x_0 - \frac{1}{3n} < r_1 < x_0 < r_2 < \min\{x_0 + \frac{1}{3n}\}$$

iz čega slijedi (prema lemi 1.7.3) da je

$$r_2 - r_1 \leq x_0 + \frac{1}{3n} - (x_0 - \frac{1}{3n}) = \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}.$$

Iz 3.1.9. slijedi

$$exp_a(r_2) - exp_a(r_1) = a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1 + r_2 - r_1} - a^{r_1} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

Budući da je exp_a strogo rastuća funkcija vrijedi $a^0 < a^{r_2 - r_1} < a^{\frac{1}{n}}$ i $a^{r_1} < a^M$. Slijedi $0 < a^{r_2 - r_1} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$. Iz korolara 1.2.16. i načina na koji smo odabrali broj n slijedi

$$a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon.$$

Zaključak,

$$exp_a(r_2) - exp_a(r_1) < \varepsilon.$$

Prema tome, exp_a je neprekidna funkcija.

2) Iz činjenice da je exp_a strogo rastuća funkcija odmah slijedi da je exp_a injekcija. Dokažimo sada da je exp_a surjekcija. Neka je $y \in \langle 0, \infty \rangle$. Budući da skup $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen (prema propoziciji 2.2.5.) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $y < a^n$. S druge strane imamo $a^{-1} \in \langle 0, 1 \rangle$. Prema propoziciji 2.2.3. vrijedi da je 0 infimum skupa $\{(a^{-1})^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Imamo $0 < y$ pa y nije donja međa skupa $\{(a^{-1})^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. To znači da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(a^{-1})^m < y$, tj. $a^{-m} < y$. Imamo dakle,

$$a^{-m} < y < a^n,$$

tj.

$$exp_a(-m) < y < exp_a(n).$$

Prema tvrdnji 1) i korolaru 2.3.20. postoji $x \in [-m, n\,]$ takav da je

$$exp_a(x) = y.$$

Zaključak, exp_a je surjekcija.
Prema tome, exp_a je bijekcija. □

Lema 3.1.17. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz $(r_n) \in \mathbb{R}$ koji teži prema x te takav da je $r_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je očito $x < x + \frac{1}{n}$ pa postoji $r_n \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < r_n < x + \frac{1}{n}$. Na ovaj način imamo niz (r_n) takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $r_n \in \langle x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \rangle$, tj. $| r_n - x | < \frac{1}{n}$. Iz leme 2.2.10. slijedi $r_n \to x$. □

Propozicija 3.1.18. *Neka je $a > 1$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi postoje nizovi (r_n) i (s_n) u $\mathbb{R}$ takvi da $r_n \to x$ i $s_n \to y$ te $r_n, s_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Prema teoremu 2.2.7. vrijedi $r_n + s_n \to x + y$.
Budući da je exp_a neprekidna funkcija, iz propozicije 2.3.6. i činjenice da $r_n \to x$ slijedi da $exp_a(r_n) \to exp_a(x)$, tj. $a^{r_n} \to a^x$. Isto tako zaključujemo da $a^{s_n} \to a^y$ i $a^{r_n+s_n} \to a^{x+y}$.
Iz teorema 2.2.7. slijedi $a^{r_n} \cdot a^{s_n} \to a^x \cdot a^y$.
Prema propoziciji 3.1.9. vrijedi

$$a^{r_n+s_n} = a^{r_n} \cdot a^{s_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $(a^{r_n+s_n})$ i $(a^{r_n} \cdot a^{s_n})$ su isti nizovi pa zbog jedinstvenosti limesa niza slijedi

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

$\square$

Definicija 3.1.19. *Neka je $a \in \langle 0, 1\rangle$. Uočimo da je tada $a^{-1} > 1$. Definiramo funkciju $exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle$ sa $exp_a(x) = exp_{a^{-1}}(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Dakle, $exp_a(x) = (a^{-1})^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Za exp_a kažemo da je eksponencijalna funkcija s bazom a.*

Uočimo sljedeće:
ako je $r \in \mathbb{Q}$ onda je $exp_a(r) = a^r$. Naime, ako je $r = \dfrac{m}{n}$ gdje je $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ onda koristeći lemu 3.1.8. dobivamo:

$$exp_a(r) = (a^{-1})^{-r} = (a^{-1})^{\frac{-m}{n}} = (\sqrt[n]{a^{-1}})^{-m} = \sqrt[n]{(a^{-1})^{-m}} = \sqrt[n]{a^{(-1)\cdot(-m)}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r.$$

Ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ onda broj $exp_a(x)$ označavamo i sa a^x.

Teorem 3.1.20. *Neka je $a \in \langle 0, 1\rangle$*

1) Funkcija exp_a je strogo padajuća.

2) Funkcija exp_a je neprekidna.

3) Funkcija exp_a je bijekcija.

4) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Tada je $-y < -x$ pa je $exp_{a^{-1}}(-y) < exp_{a^{-1}}(-x)$ jer je $exp_{a^{-1}}$ strogo rastuća funkcija. Dakle, $exp_a(y) < exp_a(x)$, tj. $exp_a(x) > exp_a(y)$.
Prema tome, exp_a je strogo padajuća funkcija.
2) Znamo da je $exp_a(x) = exp_{a^{-1}}(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Imamo:

$$exp_a(x) = exp_{a^{-1}}(f(x)), \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$exp_a(x) = (exp_{a^{-1}} \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $exp_a = exp_{a^{-1}} \circ f$.
Iz korolara 2.3.16. slijedi da je exp_a neprekidna funkcija.

3) Iz činjenice da je exp_a strogo padajuća funkcija slijedi da je exp_a injekcija.
Dokažimo da je exp_a surjekcija.
Neka je $y \in \langle 0, \infty \rangle$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $exp_{a^{-1}}(x) = y$ (jer je $exp_{a^{-1}}$ surjekcija).
Imamo: $exp_a(-x) = exp_{a^{-1}}(-(-x)) = exp_{a^{-1}}(x) = y$.
Dakle,

$$\exp_a(-x) = y.$$

Zaključak, $\exp_a$ je surjekcija.
Prema tome, $\exp_a$ je bijekcija.

4) Neka su $x, y \in \mathbb{R}$.
Koristeći propoziciju 3.1.18. dobivamo:

$$a^{x+y} = (a^{-1})^{-(x+y)} = (a^{-1})^{-x+(-y)} = (a^{-1})^{-x} \cdot (a^{-1})^{-y} = a^x \cdot a^y.$$

□

Napomena 3.1.21. *Uzimamo* $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Definicija 3.1.22. *Neka je* $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. *Znamo da je funkcija* $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ *bijekcija.*
Inverznu funkciju $(\exp_a)^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ *označavamo s* $\log_a$ *i nazivamo* ***logaritamska funkcija*** *s bazom a.*
Uočimo da za svaki $a > 0, a \neq 1$ *vrijedi:*

$$\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

i

$$a^{\log_a x} = x, \forall x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Nadalje, $\log_a$ *je kao inverzna funkcija od* $\exp_a$ *također bijekcija.*

Teorem 3.1.23. *Neka je* $a > 0, a \neq 1$.

1) *ako je* $a > 1$, *onda je* $\log_a$ *strogo rastuća funkcija, a ako je* $a < 1$, *onda je* $\log_a$ *strogo padajuća funkcija*

2) $\log_a$ *je neprekidna funkcija*

3) *neka su* $x, y \in \langle 0, \infty \rangle$. *Tada je* $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Dokaz. 1) Neka je $a > 1$.
Neka su $x, y \in \langle 0, \infty\rangle$ takvi da je $x < y$. Tvrdimo da je $\log_a(x) < \log_a(y)$.
Pretpostavimo suprotno.
Tada je $\log_a y \leq \log_a x$ pa je $a^{\log_a y} \leq a^{\log_a x}$, tj. $y \leq x$, što je kontradikcija.
Dakle,

$$\log_a x < \log_a y.$$

Prema tome, $\log_a$ je strogo rastuća funkcija za $a > 1$.
Analogno dobivamo da je $\log_a$ strogo padajuća funkcija za $a < 1$.

2) Uzmimo prvo da je $a > 1$. Prema 1) funkcija $\log_a : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća funkcija pa je prema lemi 3.1.15. dovoljno dokazati da za svaki $x_0 \in \langle 0, \infty\rangle$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1, x_2 \in \langle 0, \infty\rangle$ takvi da je $x_1 < x_0 < x_2$ i $\log_a x_2 - \log_a x_1 < \varepsilon$. Neka je $x_0 \in \langle 0, \infty\rangle$ i $\varepsilon > 0$. Označimo $y_0 = \log_a x_0$. Odaberimo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $y_0 - \frac{\varepsilon}{3} < y_1 < y_0 < y_2 < y_0 + \frac{\varepsilon}{3}$. Uočimo da je tada $y_2 - y_1 \leq y_0 + \frac{\varepsilon}{3} - (y_0 - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2\varepsilon}{3}$ pa je $y_2 - y_1 < \varepsilon$. Iz $y_1 < y_0 < y_2$ slijedi

$$a^{y_1} < a^{y_0} < a^{y_2}.$$

Označimo $x_1 = a^{y_1}$ i $x_2 = a^{y_2}$.
Imamo, dakle $x_1 < x_0 < x_2$ i $\log_a x_2 - \log_a x_1 = y_2 - y_1 < \varepsilon$.
Dakle, $\log_a$ je neprekidna funkcija za $a > 1$.
Pretpostavimo sada da je $a < 1$. Naravno, tada je $a^{-1} > 1$. Neka je $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Neka je $y = \log_a x$. Tada je $\exp_a(y) = x$, tj. $\exp_{a^{-1}}(-y) = x$ iz čega slijedi $-y = \log_{a^{-1}} x$ pa je $y = -\log_{a^{-1}} x$.
Dakle,

$$\log_a x = -\log_{a^{-1}} x, \forall x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$. Imamo $\log_a x = (f \circ \log_{a^{-1}})(x), \forall x \in \langle 0, \infty\rangle$, tj. $\log_a = f \circ \log_{a^{-1}}$. Prema dokazanome, funkcija $\log_{a^{-1}}$ je neprekidna pa iz korolara 2.3.16. slijedi da je $\log_a$ neprekidna funkcija.

3) Imamo:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a xy}$$

pa budući da je $\exp_a$ injektivna funkcija dobivamo da je

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy.$$

□

Lema 3.1.24. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. Tada je $f = g$.*

Dokaz. Treba dokazati da je $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Prema lemi 3.1.17. postoji niz (r_i) takav da $r_i \to x$ i $r_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 2.3.6. slijedi $f(r_i) \to f(x)$ i $g(r_i) \to g(x)$. Prema pretpostavci leme vrijedi $f(r_i) = g(r_i), \forall i \in \mathbb{N}$. Dakle, nizovi $(f(r_i))$ i $(g(r_i))$ su jednaki. Budući da limes niza mora biti jedinstven imamo $f(x) = g(x)$. Zaključak,

$$f = g.$$

□

Teorem 3.1.25. *Neka je $a > 0, a \neq 1$ te neka je $b > 0$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\log_a b^x = x \cdot \log_a b \tag{3.4}$$

Dokaz. Očito da tvrdnja vrijedi za $b = 1$. Pretpostavimo zato da je $b \neq 1$. Dokažimo prvo da (3.4) vrijedi za svaki prirodan broj. Dakle, dokažimo da je

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

indukcijom po n. Jasno da (3.5) vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da 3.5. vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\log_a b^{n+1} = \log_a(b^n \cdot b) = \log_a b^n + \log_a b = n \cdot \log_a b + \log_a b = (n+1) \cdot \log_a b.$$

Dakle, (3.5) vrijedi i za $n + 1$.
Prema tome, (3.5) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Dokažimo sada da (3.4) vrijedi za svaki cijeli broj x. To je jasno ako je $x = 0$.
Uzmimo sada $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $m < 0$. Tada je $-m \in \mathbb{N}$ te imamo:

$$0 = \log_a 1 = \log_a b^0 = \log_a b^{m+(-m)} = \log_a(b^m \cdot b^{-m}) = \log_a b^m + \log_a b^{-m} = \log_a b^m - m \cdot \log_a b.$$

Dakle, $0 = \log_a b^m - m \cdot \log_a b$ pa je

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b.$$

Prema tome (3.4) vrijedi za svaki cijeli broj x.
Neka su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Želimo dokazati da je $\log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$.
Prije svega, $\log_a b = \log_a(b^{\frac{1}{n}})^n = n \cdot \log_a b^{\frac{1}{n}}$. Dakle,

$$\log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b.$$

Imamo,

$$\log_a b^{\frac{m}{n}} = \log_a (b^{\frac{1}{n}})^m = m \cdot \log_a b^{\frac{1}{n}} = m \cdot \frac{1}{n} \log_a b = \frac{m}{n} \cdot \log_a b.$$

Zaključak, (3.4) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Q}$.
Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f(x) = \log_a b^x$ i $g(x) = x \cdot \log_a b$. Očito je g neprekidna funkcija. S druge strane vrijedi $f(x) = \log_a(\exp_b x) = (\log_a \circ \exp_b)(x), \forall x \in \mathbb{R}$ pa je $f = \log_a \circ \exp_b$. Iz korolara 2.3.16. slijedi da je f neprekidna funkcija. Dokazali smo da (3.4) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Iz leme 3.1.24. slijedi da je $f = g$, tj. $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Time smo dokazali da (3.4) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Korolar 3.1.26. *Neka je $a > 0$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.*

Dokaz. Tvrdnja je jasna za $a = 1$. Pretpostavimo da je $a \neq 1$. Koristeći prethodni teorem dobivamo

$$\log_a (a^x)^y = y \cdot \log_a(a^x) = y \cdot x.$$

Stoga je

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y.$$

□

Primjer 3.1.27. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s $f(x) = x^{10}, g(x) = 1,01^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Uočimo da je f polinom a g eksponencijalna funkcija (s bazom $1,01$). Promotrimo brojeve $f(1), f(2), f(3), ..g(1), g(2), g(3)...$ tj. nizove $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g(n))_{n \in \mathbb{N}}$.*

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
f(n)	*1*	*1024*	*59049*	*104 8576*	*9765625*
g(n)	*1.01*	*1.0201*	*1.030301*	*1.04060401*	*1.0510100501*

Postavlja se pitanje vrijedi li za svaki $n \geq 2, f(n) > g(n)$?
Pokazat ćemo da to ne vrijedi, tj. da postoji n takav da je $n \geq 2$ i $f(n) < g(n)$ (propozicija 3.1.31. 1)).

Lema 3.1.28. *Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(1 + \varepsilon)^k \geq 1 + k \cdot \varepsilon. \tag{3.6}$$

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po k. Za $k = 1$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da (3.6) vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.
Imamo:

$$(1+\varepsilon)^{k+1} = (1+\varepsilon)^k \cdot (1+\varepsilon) \geq (1+k\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon) = 1+k\varepsilon+\varepsilon+k\varepsilon^2 = 1+(k+1) \cdot \varepsilon + k \cdot \varepsilon^2 > 1+(k+1) \cdot \varepsilon.$$

Dakle,

$$(1+\varepsilon)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot \varepsilon,$$

tj. (3.6) vrijedi za $k+1$.
Ovime je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 3.1.29. *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\alpha + \varepsilon < \beta$.*

Dokaz. Iz $\alpha < \beta$ slijedi $0 < \beta - \alpha$. Stoga postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. Iz ovoga slijedi da je $\varepsilon > 0$ i $\alpha + \varepsilon < \beta$. □

Lema 3.1.30. *Neka je $a > 1$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n \geq n, \forall n \geq n_0$.*

Dokaz. Vrijedi $1 < \sqrt{a}$ pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $1 + \varepsilon < \sqrt{a}$ (prema lemi 3.1.29.). Iz ovoga slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(1+\varepsilon)^n < (\sqrt{a})^n.$$

Stoga je prema prethodnoj lemi $1 + n \cdot \varepsilon < (\sqrt{a})^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$(1 + n \cdot \varepsilon)^2 < ((\sqrt{a})^n)^2,$$

tj.

$$1 + 2 \cdot n \cdot \varepsilon + n^2 \cdot \varepsilon^2 < a^n.$$

Stoga je,

$$n^2 \varepsilon^2 < a^n,$$

tj.

$$n \cdot (n \cdot \varepsilon^2) < a^n.$$

Odaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Tada je $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ pa je $1 < n \cdot \varepsilon^2$ te imamo $n < n \cdot (n \cdot \varepsilon^2) < a^n$. Dakle,

$$n < a^n, \forall n \geq n_0.$$

□

Propozicija 3.1.31. *Neka je $a > 1$ te $k \in \mathbb{N}$.*

1) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n > n^k, \forall n \geq n_0$.

2) niz $(\dfrac{n^k}{a^n})_{n \in \mathbb{N}}$ teži u 0.

Dokaz. 1) Vrijedi $\sqrt[k]{a} > 1$, tj. $a^{\frac{1}{k}} > 1$. Iz prethodne leme slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(a^{\frac{1}{k}})^n > n, \forall n \geq n_0$. Stoga je

$$((a^{\frac{1}{k}})^n)^k > n^k,$$

tj.

$$((a^{\frac{1}{k}})^k)^n > n^k$$

pa je $a^n > n^k, \forall n \geq n_0$.

2) Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|\frac{n^k}{a^n} - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, tj. $\frac{n^k}{a^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Prema tvrdnji 1) (primjenjenoj na a i $k+1$) postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n > n^{k+1}, \forall n \geq m_0$. Stoga je

$$\frac{n^k}{a^n} < \frac{1}{n}, \forall n \geq m_0.$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{\varepsilon} < k_0$. Tada za svaki $n \geq k_0$ vrijedi $\frac{1}{\varepsilon} < n$ pa je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Neka je $n_0 = \max\{k_0, m_0\}$. Ako je $n \geq n_0$ onda je $n \geq k_0$ i $n \geq m_0$ pa je

$$\frac{n^k}{a^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\frac{n^k}{a^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Time je tvrdnja 2) dokazana. □

Primjer 3.1.32.

1) $\frac{n}{2^n} \to 0$ *(prethodna propozicija pod 2)) za* $a = 2$ *i* $k = 1$*).*

2) $\frac{n^{10}}{1,01^n} \to 0$ *(prethodna propozicija pod 2)) za* $a = 1,01$ *i* $k = 10$*)*

3) neka je p bilo koji polinom te $a > 1$*. Tada* $\frac{p(n)}{a^n} \to 0$.
Naime, imamo $p(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0, \forall x \in \mathbb{R}$ *gdje je* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *te* $b_0, ...b_k \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\frac{p(n)}{a^n} = b_k \cdot \frac{n^k}{a^n} + b_{k-1}\frac{n^{k-1}}{a^n} + ... + b_1 \cdot \frac{n}{a^n} + \frac{b_0}{a^n}.$$

Dakle, $(\frac{p(n)}{a^n})$ *je zbroj konačno mnogo nizova od kojih svaki teži nuli. Stoga i* $\frac{p(n)}{a^n} \to 0$.

4) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot n^4 - 5\cdot n^6 + 7\cdot n}{(\frac{3}{2})^n} \to 0.$

Primjer 3.1.33. $\sqrt[n]{a} \to 1.$
Očito je $1 \leq \sqrt[n]{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Uzmimo* $\varepsilon > 0$. *Želimo naći* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\sqrt[n]{n} \in \langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon\rangle, \forall n \geq n_0$. *Imamo:* $1+\varepsilon > 1$ *pa iz leme 3.1.30. slijedi da postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n < (1+\varepsilon)^n, \forall n \geq n_0$. *Iz ovoga slijedi da je* $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon, \forall n \geq n_0$. *Stoga je* $\sqrt[n]{n} \in \langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon\rangle, \forall n \geq n_0$. *Zaključak,*

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Lema 3.1.34. *Neka su* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcije takve da je* f *rastuća,* g *neprekidna i* $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. *Tada je* $f = g$.

Dokaz. Dovoljno je prema lemi 3.1.24. pokazati da je f neprekidna. U tu svrhu, prema lemi 3.1.15., dovoljno je dokazati da za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_1 < x_0 < x_2$ i $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$. Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je g neprekidna, postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $x \in \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$ vrijedi $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Odaberimo racionalne brojeve r_1, r_2 takve da je $x_0 - \delta < r_1 < x_0 < r_2 < x_0 + \delta$.
Tada su

$$r_1, r_2 \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$$

pa je

$$|g(r_1) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i

$$|g(r_2) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Slijedi

$$|g(r_1) - g(r_2)| = |g(r_1) - g(x_0) + g(x_0) - g(r_2)| \leq |g(r_1) - g(x_0)| + |g(x_0) - g(r_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle,

$$|g(r_1) - g(r_2)| < \varepsilon.$$

No, $g(r_1) = f(r_1)$ i $g(r_2) = f(r_2)$ pa je $|f(r_1) - f(r_2)| < \varepsilon$. Budući da je f rastuća funkcija, iz $r_1 < r_2$ slijedi $f(r_1) \leq f(r_2)$ pa je $0 \leq f(r_2) - f(r_1)$, dakle $|f(r_1) - f(r_2)| = f(r_2) - f(r_1)$.
Zaključak:

$$r_1 < x_0 < r_2$$

i

$$f(r_2) - f(r_1) < \varepsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna. □

Lema 3.1.35. *Neka je $a > 0$ te neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle$ funkcija takva da je $f(1) = a$ i $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je

$$f(nx) = (f(x))^n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

indukcijom po n. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da je $f(nx) = (f(x))^n$. Imamo

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}.$$

Dakle, (3.7) vrijedi za svaki prirodan broj n. Dokažimo sada da je

$$f(mx) = (f(x))^m, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Imamo:

$$f(1+0) = f(1) \cdot f(0),$$

tj.

$$a = a \cdot f(0)$$

pa slijedi $f(0) = 1$. Stoga (3.8) vrijedi za $m = 0$.
Uzmimo sada da je $m \in \mathbb{Z}, m < 0$. Tada je $-m \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$f((-m)x + mx) = f((-m)x) \cdot f(mx)$$

pa je $1 = (f(x))^{-m} \cdot f(mx)$. Slijedi $f(mx) = (f(x))^m$. Dakle, (3.8) vrijedi za svaki cijeli broj m.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo, koristeći (3.7):

$$a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Dakle, $a = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ pa je $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Neka su $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Imamo, koristeći (3.8):

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m \cdot \frac{1}{n}) = (f(\frac{1}{n}))^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Dakle,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. ◻

Teorem 3.1.36. *Neka je $a > 0$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je $a = 1$ onda funkcija $C : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle, C(x) = 1$ ima tražena svojstva. Ako je $a \neq 1$ onda funkcija $\exp_a$ ima tražena svojstvs. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ funkcija s danim svojstvom. Tada iz prethodne leme slijedi da je $f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$. Ako je $a = 1$ to znači da je $f(r) = 1 = C(r), \forall r \in \mathbb{Q}$ pa iz leme 3.1.24. slijedi da je $f = c$. Ako je $a \neq 1$ onda je $f(r) = \exp_a(r), \forall r \in \mathbb{Q}$ pa iz iste leme slijedi da je $f = \exp_a$.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 3.1.37. *Neka je $a > 0$.*

1) *ako je $a > 1$ onda postoji jedinstvena rastuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.*

2) *ako je $a < 1$ onda postoji jedinstvena padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.*

Dokaz. 1) Funkcija $\exp_a$ ima tražena svojstva. S druge strane, pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ rastuća funkcija s danim svojstvima. Iz prethodne leme slijedi da je $f(r) = \exp_a(r), \forall r \in \mathbb{Q}$. Iz leme 3.1.34. slijedi da je $f = \exp_a$.
Time je 1) dokazano.
2) Funkcija $\exp_a$ ima tražena svojstva.
Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ padajuća funkcija s danim svojstvima. Iz prethodne leme slijedi da je

$$f(r) = \exp_a(r), \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Uočimo sljedeće, ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ onda je $f(x) \geq f(y)$ pa je $-f(x) \leq -f(y)$. Ovo znači da je $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija. Vrijedi

$$-f(r) = -\exp_a(r), \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Iz činjenice da je $-\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i leme 3.1.34. slijedi $-f = -\exp_a$. Stoga je,

$$f = \exp_a .$$

□

Napomena 3.1.38. *Iz dokaza teorema 3.1.36. i 3.1.37. vidimo da vrijedi sljedeće:*

1) *ako je $a > 0$, onda postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ takva da je*

$$f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q} \tag{3.9}$$

2) *ako je* $a \in \langle 0, 1\rangle$ *onda postoji jedinstvena padajuća funkcija* $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle$ *takva da vrijedi (3.9), a ako je* $a > 1$ *onda postoji jedinstvena rastuća funkcija* $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle$ *takva da vrijedi (3.9).*

Poglavlje 4

Derivabilnost funkcija

4.1 Gomilište

Pod intervalom u $\mathbb{R}$ podrazumijevamo skup koji je oblika $\langle a, b\rangle, \langle a, +\infty\rangle, \langle -\infty, b\rangle, \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Definicija 4.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je gomilište skupa S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x \neq a$ i $|x - a| < \varepsilon$.*

Primjer 4.1.2. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ bilo koji broj. Tada je a gomilište od $\mathbb{R}$. Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $x = a + \frac{\varepsilon}{2}$ vrijedi $x \neq a$ i $|x - a| < \varepsilon$.*

Uočimo sljedeće: ako je a gomilište od S te $T \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $S \subseteq T$ onda je a gomilište od T.

Propozicija 4.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je a supremum od S pri čemu a nije element od S. Tada je a gomilište od S. Analogna tvrdnja vrijedi i za infimum.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz propozicije 1.4.13. (karakterizacija supremuma) slijedi da postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. No, budući da je a supremum od S vrijedi $x \leq a < a + \varepsilon$. Stoga je $x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$. Slijedi, $|x - a| < \varepsilon$. Uočimo da je $x \neq a$ jer je $x \in S$ a a nije iz S. Tvrdnju za infimum dokazujemo analogno. □

Korolar 4.1.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $c \in \langle a, b\rangle$. Tada je c gomilište od $\langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Prema primjeru 2.2.9. vrijedi da je c supremum od $\langle a, c\rangle$, stoga je c gomilište od $\langle a, c\rangle$. No, $\langle a, c\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ pa slijedi da je c gomilište od $\langle a, b\rangle$. □

Korolar 4.1.5. *Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in U$. Tada je a gomilište od U.*

Dokaz. Budući da je U otvoren postoji $r > 0$ takav da je $\langle a - r, a + r\rangle \subseteq U$. Iz prethodnog korolara slijedi da je a gomilište od $\langle a - r, a + r\rangle$. Stoga je a gomilište od U. □

Definicija 4.1.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ te a gomilište od S. Neka je $L \in \mathbb{R}$. Kažemo je L limes funkcije f u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi sljedeće: ako je $x \in S$ takav da je $|x - a| < \delta$ i $x \neq a$ onda je $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Propozicija 4.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$, a gomilište od S te $L \in \mathbb{R}$. Definiramo funkciju $\tilde{f} : S \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), \text{ ako je } x \in S \setminus \{a\} \\ L \ , \text{ ako je } x = a \end{cases}$*

Tada je L limes funkcije f u a ako i samo ako je $\tilde{f}$ neprekidna u a.

Dokaz. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u a. Želimo dokazati da je $\tilde{f}$ neprekidna u a. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi,

$$\forall x \in S\,(|x - a| < \delta \text{ i } x \neq a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon). \tag{4.1}$$

Pretpostavimo da je $x \in S \cup \{a\}$ te da je $|x - a| < \delta$. Tvrdimo da je

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Prvi slučaj. $x = a$. Tada (4.2) očito vrijedi.
Drugi slučaj. $x \neq a$. Tada je $x \in S \setminus \{a\}$. Imamo:

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |f(x) - L|.$$

Budući da je $x \in S, x \neq a$ i $|x - a| < \delta$ prema (4.1) vrijedi

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Slijedi (4.2).
Dakle, dokazali smo da vrijedi sljedeće:

$$\forall x \in S \cup \{a\}\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| < \varepsilon). \tag{4.3}$$

Prema tome, $\tilde{f}$ je neprekidna u a.

Pretpostavimo da je $\tilde{f}$ neprekidna funkcija u a. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi (4.3). Pretpostavimo da je $x \in S$ takav da je $|x - a| < \delta$ i $x \neq a$. Iz (4.3) slijedi $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| < \varepsilon$. Zbog $x \neq a$ imamo $x \in S \setminus \{a\}$ pa je $\tilde{f}(x) = f(x)$. Stoga je $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Time smo dokazali da vrijedi (4.1).
Prema tome L je limes funkcije f u a. □

Propozicija 4.1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$, a gomilište od S te $L \in \mathbb{R}$. Tada je L limes funkcije f u točki a ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $S \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$ vrijedi $f(x_n) \to L$.*

Dokaz. Neka je $\tilde{f}$ funkcija definirana kao u prethodnoj propoziciji. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u a. Tada je prema prethodnoj propoziciji $\tilde{f}$ neprekidna u a. Pretpostavimo da je (x_n) niz u $S \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$. Tada iz propozicije 2.3.6. slijedi da $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(a)$. Budući da je $x \in S \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\tilde{f}(x_n) = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Prema tome, $f(x_n) \to L$. Pretpostavimo sada da za svaki niz (x_n) u $S \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$ vrijedi $f(x_n) \to L$. Dokažimo da je L limes od f u a. U tu svrhu dovoljno je dokazati prema prethodnoj propoziciji da je $\tilde{f}$ neprekidna u a. No, za to je dovoljno prema teoremu 2.3.10. dokazati sljedeće:
ako je (x_n) niz u $(S \cup \{a\}) \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$ onda $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(a)$. Pretpostavimo da je (x_n) niz u $(S \cup \{a\}) \setminus \{a\}$ takav da je $x_n \to a$. Uočimo da je $(S \cup \{a\}) \setminus \{a\} = S \setminus \{a\}$. Prema pretpostavci vrijedi $f(x_n) \to L$. Stoga, $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(a)$. Time je dokazano da je $\tilde{f}$ neprekidna u a pa slijedi da je L limes od f u a. □

Primjer 4.1.9. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Tada je 9 limes od f u 3. Naime, funkcija* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 3 \\ 9\,, \ x = 3 \end{cases}$
je neprekidna jer je $\tilde{f} = f$ pa iz propozicije 4.1.7. slijedi tvrdnja.

Napomena 4.1.10. *Kao u prethodnom primjeru vidimo da općenito vrijedi sljedeće: ako je a gomilište od $S, a \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u a onda je $f(a)$ limes od f u a.*
Zapravo vrijedi i obrat:
ako je a gomilište od $S, a \in S, f : S \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(a)$ limes od f u a onda je f neprekidna u a. Naime, funkcija $\tilde{f}$ definirana kao u propoziciji 4.1.7. za $L = f(a)$ je tada neprekidna u a, a očito vrijedi $\tilde{f} = f$.

Primjer 4.1.11. *Neka je $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Postoji li $L \in \mathbb{R}$ takav da je L limes funkcije f u 0? Pretpostavimo da takav L postoji. Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to 0$. Prema propoziciji 4.1.8. $f(x_n) \to L$. Dakle, $(f(x_n))$ je konvergentan niz pa je prema propoziciji 2.1.9. omeđen što znači da je*

$$\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

omeđen skup u $\mathbb{R}$. No, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n$. Dakle, $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen skup u $\mathbb{R}$. No, to je upravo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, za kojeg znamo da nije omeđen. Došli smo do kontradikcije. Prema tome, funkcija f nema limes u točki 0.

Primjer 4.1.12. *Neka je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada je 1 limes od f u 0. Naime, ovo slijedi direktno iz definicije limesa, a možemo također do istog zaključka doći koristeći propoziciju 4.1.7.*

Primjer 4.1.13. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa: $f(x)=\begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$*

Tvrdimo da f nema limes u 0, tj. da ne postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je L limes od f u 0. Pretpostavimo suprotno, tj. da takav L postoji. Imamo $\frac{1}{n} \to 0$ pa iz propozicije 4.1.8. slijedi $f(\frac{1}{n}) \to L$. No, $f(\frac{1}{n}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ pa $f(\frac{1}{n}) \to 1$. Zbog jedinstvenosti limesa niza imamo $L = 1$. S druge strane, $\frac{-1}{n} \to 0$ pa slijedi $f(-(\frac{1}{n})) \to L$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(-(\frac{1}{n})) = -1$ pa $f(-(\frac{1}{n})) \to -1$ iz čega zaključujemo $L = -1$. Ovo je kontradikcija.

Lema 4.1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je a gomilište od S. Tada postoji niz (x_n) u $S \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x_n \in S \setminus \{a\}$ takav da je $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Na ovaj način dobivamo niz (x_n) u $S \setminus \{a\}$. Iz leme 2.2.10. slijedi $x_n \to a$. □

Propozicija 4.1.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, a gomilište od S te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da su $L, M \in \mathbb{R}$ brojevi takvi da je L limes od f u a i M limes od f u a. Tada je $L = M$.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi postoji niz (x_n) u $S \setminus \{a\}$ takav da $x_n \to a$. Tada iz propozicije 4.1.8. slijedi $f(x_n) \to L$ i $f(x_n) \to M$. Zbog jedinstvenosti limesa niza vrijedi $L = M$. □

4.2 Derivacija funkcije

Definicija 4.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$ takav da je x_0 gomilište od S. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te $D \in \mathbb{R}$. Za D kažemo da je **derivacija** funkcije f u x_0 ako je D limes funkcije F u x_0, pri čemu je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s:*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Uočimo sljedeće: Broj D s navedenim svojstvom, ako postoji je jedinstven (to slijedi iz propozicije 4.1.15.) i označava se s $f'(x_0)$.
Ako takav broj D postoji, tj. ako f ima derivaciju u x_0, onda kažemo da je funkcija f derivabilna u x_0.

Primjer 4.2.2. *Neka je $c \in \mathbb{R}$ te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je f derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = 0$. Naime, definirajmo $F : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Tada je $F(x) = \dfrac{c - c}{x - x_0} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, iz čega slijedi da je 0 limes od F u x_0 (to možemo zaključiti direktno iz definicije limesa ili propozicije 4.1.7.)

Primjer 4.2.3. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je f derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = 1$. Naime, za funkciju $F : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definiranu sa*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

vrijedi

$$F(x) = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

pa je jasno da je 1 limes funkcije F u x_0.

Definicija 4.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je derivabilna ako je derivabilna u x_0 za svaki $x_0 \in S$.*

Uočimo sljedeće: funkcije iz prethodnih primjera su derivabilne.

4.3 Broj e

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktivno na sljedeći način:

$$f(1) = 1$$

$$f(n + 1) = (n + 1) \cdot f(n)$$

(Prema teoremu princip definicije indukcijom postoji jedinstvena takva funkcija, naime uzmemo $S = \mathbb{N}, H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, H(x, y) = (x + 1) \cdot y$ i $a = 1$).

Za $n \in \mathbb{N}$, broj $f(n)$ označavamo sa $n!$ i zovemo n faktorijela.

Napomena 4.3.1. *Neka je (x_k) niz realnih brojeva. Definirajmo niz (s_n) u $\mathbb{R}$ (tj. funkciju $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) induktivno na sljedeći način:*

$$s_1 = x_1$$

$$s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$$

Da takav niz (s_n) *postoji i da je jedinstven slijedi iz teorema 2.2.1.(princip definicije indukcijom) za* $S = \mathbb{R}$, $a = x_1$ *i* $H : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(n, y) = y + x_{n+1}.$$

Uočimo: $s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, s_1 = (x_1 + x_2) + x_3$.
Za $n \in \mathbb{N}$ *broj* s_n *označavamo s* $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Propozicija 4.3.2. *Neka je* $q \in \mathbb{R}, x \neq 1$ *te* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$1 + \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{4.4}$$

Dokaz. Ovo dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ desna strana od (4.4) je jednaka $\frac{1 - q^2}{1 - q} = 1 + q$, a to je upravo lijeva strana.
Pretpostavimo da (4.4) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$1+\sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1+\sum_{k=1}^{n} q^k+q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}+q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} \cdot (1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}.$$

Dakle, (4.4) vrijedi za $n + 1$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 4.3.3. *Neka su* $(x_k), (y_k)$ *nizovi realnih brojeva takvi da je* $x_k \leq y_k, \forall k \in \mathbb{N}$. *Tada za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \leq \sum_{k=1}^{n} y^k. \tag{4.5}$$

Dokaz. Ovo dokazujemo indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna ($x_1 \leq y_1$ prema pretpostavci propozicije). Pretpostavimo da (4.5) vrijedi za neki prirodan broj n.
Prema pretpostavci propozicije vrijedi $x_{n+1} \leq y_{n+1}$. Iz ovoga i (4.5) slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} x^k + x_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} y^k + y_{n+1},$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k \leq \sum_{k=1}^{n+1} y^k.$$

Dakle, (4.5) vrijedi za $n + 1$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 4.3.4. *Neka je (x_k) niz realnih brojeva te $c \in \mathbb{R}$. Tada za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot x^k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k. \tag{4.6}$$

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ 4.6. očito vrijedi.
Pretpostavimo da (4.6) vrijedi za neki prirodan broj n. Imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} c \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot x^k + c \cdot x_{n+1} = c \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k + c \cdot x_{n+1} = c \cdot (\sum_{k=1}^{n} x^k + x_{n+1}) = c \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x^k.$$

Dakle, (4.6) vrijedi za $n + 1$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 4.3.5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$2^{n-1} \leq n! \tag{4.7}$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom. Za $n = 1$ imamo $2^0 = 1 = 1!$, dakle tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da (4.7) vrijedi za neki prirodan broj n.
Budući da je $1 \leq n$ imamo $2 \leq n + 1$. Ovo zajedno s 4.7. daje $2 \cdot 2^{n-1} \leq (n + 1) \cdot n!$ pa je $2^n \leq (n + 1)!$, tj. $2^{(n+1)-1} \leq (n + 1)!$.
Dakle, (4.7) vrijedi za $n + 1$.
Time smo dokazali da (4.7) vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo broj s_n sa $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$, tj.

$$s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Propozicija 4.3.6. *Niz (s_n) je omeđen i rastući.*

Dokaz. Za svaki prirodan broj n očito vrijedi $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!}$, stoga je $s_n < s_{n+1}$ (ovdje koristimo da je $k!$ pozitivan broj za svaki prirodan broj k što očito slijedi indukcijom po k).
Dakle, (s_n) je rastući niz. Iz toga slijedi da je $s_1 \leq s_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (prema propoziciji 2.1.10.)
Ovo znači da je skup

$$\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

odozdo omeđen.
Uočimo da je prema prethodnoj lemi $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći propozicije 4.3.3., 4.3.4., 4.3.2. dobivamo:

$$s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = -1 + 2 \cdot (1 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k)$$

$$= -1 + 2 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + 4 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) < -1 + 4 \cdot 1 = 3.$$

Ovdje smo koristili da je $1 - (\frac{1}{2})^{n+1} < 1$ što je očito jer je $(\frac{1}{2})^{n+1} > 0$.
Dakle,

$$s_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, skup $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je odozgo omeđen pa je niz (s_n) omeđen. □

Budući da je prema prethodnoj propoziciji (s_n) *rastući i omeđen niz, on je i konvergentan i teži prema supremumu skupa*

$$\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.8}$$

Označimo taj limes s ***e****.*
Dakle, e je supremum skupa (4.8). U dokazu prethodne propozicije smo vidjeli da je 3 *gornja međa skupa (4.8). Stoga je*

$$e \leq 3.$$

S druge strane, očito je $s_n \leq e, \forall n \in \mathbb{N}$.
Posebno, $s_1 \leq e$*, tj.* $2 \leq e$*. Dakle,*

$$2 \leq e \leq 3.$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza. Dokaz se može naći u:
V. Kirin, Uvod u matematičku analizu*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 1976.*

Teorem 4.3.7. *Neka je* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$*, funkcija definirana sa*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Tada je 1 *limes od* f *u točki* 0. □

Korolar 4.3.8. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *takav da* $x_n \to 0$*. Tada*

$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1.$$

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prethodnog teorema i propozicije 4.1.8. □

Propozicija 4.3.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je x_0 gomilište od S te da je $D \in \mathbb{R}$. Tada je D derivacija od f u x_0 ako i samo ako za svaki niz (x_n) u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$ vrijedi*

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to D. \tag{4.9}$$

Dokaz. Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$F(x) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Pretpostavimo da je D derivacija od f u x_0. Tada je D limes od F u x_0. Pretpostavimo da je (x_n) niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$. Iz propozicije 4.1.8. slijedi $F(x_n) \to D$, dakle vrijedi (4.9).
Obratno, pretpostavimo da za svaki niz (x_n) u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$ vrijedi (4.9). To znači da za svaki niz (x_n) u $(S \setminus \{x_0\}) \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $F(x_n) \to D$.
Prema propoziciji 4.1.8. D je limes funkcije F u x_0, to znači da je D derivacija od f u x_0. □

Eksponencijalnu funkciju s bazom e, tj. funkciju $\exp_e$ *označavamo naprosto s* exp. *Dakle,*

$$\exp(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju $\log_e$ *označavamo s* ln *i nazivamo* ***prirodni logaritam****.*
Broj e se naziva ***baza prirodnog logaritma****.*

Teorem 4.3.10. *Funkcija* exp *je derivabilna i*

$$\exp'(x) = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dovoljno je prema propoziciji 4.3.9. dokazati da za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\exp(x_n) - \exp(x_0)}{x_n - x_0} \to \exp(x_0)$$

za svaki niz (x_n) u $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$.
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$. Imamo:

$$\frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{x_n - x_0} = \frac{e^{x_0} \cdot (e^{x_n - x_0} - 1)}{x_n - x_0}.$$

Uočimo da je $(x_n - x_0)$ niz u $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ te da $x_n - x_0 \to 0$.
Sada iz korolara 4.3.8. slijedi $\dfrac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to 1$. Stoga

$$e^{x_0} \cdot \frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to e^{x_0}.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

4.4 Derivabilnost eksponencijalne i logaritamske funkcije

Propozicija 4.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, x_0 gomilište od S te $f : S \to \mathbb{R}$.*

1) pretpostavimo da je f derivabilna u x_0. Tada postoji funkcija $\omega : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 takva da je $\omega(x_0) = f'(x_0)$ i takva da je

$$f(x) = f(x_0) + \omega(x) \cdot (x - x_0), \forall x \in S. \tag{4.10}$$

2) pretpostavimo da postoji funkcija $\omega : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 te takva da vrijedi (4.10). Tada je f derivabilna u x_0 te je $f'(x_0) = \omega(x_0)$.

Dokaz. Definiramo funkciju $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}.$$

1) Budući da je f derivabilna u x_0, $f'(x_0)$ je limes funkcije F u x_0. Prema propoziciji 4.1.7. funkcija $\tilde{F} : S \to \mathbb{R}$ definirana s: $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) \text{ , ako je x} \in S \setminus \{x_0\} \\ f'(x_0), \text{ ako je x} = x_0 \end{cases}$
je neprekidna u x_0. Očito je da za svaki $x \in S \setminus \{x_0\}$ vrijedi

$$\tilde{F}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pa je $f(x) = f(x_0) + \tilde{F}(x) \cdot (x - x_0)$.
No, ova jednakost vrijedi i za $x = x_0$. Time je tvrdnja 1) dokazana (stavimo $\omega = \tilde{F}$).

2) Iz (4.10) slijedi da je

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Dakle,

$$\omega(x) = F(x), \forall x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Stoga je, $\omega(x) = \begin{cases} \text{F(x) , ako je x} \in S \setminus \{x_0\} \\ \omega(x_0), \text{ ako je x} = x_0 \end{cases}$

Iz činjenice da je ω neprekidna u x_0 i propozicije 4.1.7. slijedi da je $\omega(x_0)$ derivacija od f u x_0. □

Korolar 4.4.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u x_0. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji postoji funkcija $\omega : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 takva da je $f(x) = f(x_0) + \omega(x)(x - x_0), \forall x \in S$.
Iz ovoga slijedi da je f neprekidna u x_0. Naime, definiramo funkcije:

$$h, g : S \to \mathbb{R}, h(x) = f(x_0), g(x) = x - x_0.$$

Funkcije h i g su restrikcije polinoma pa su stoga neprekidne a vrijedi

$$f = h + \omega \cdot g$$

pa slijedi da je f neprekidna u x_0 (2.3.13.). □

Korolar 4.4.3. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Tada je f neprekidna.* □

Primjer 4.4.4. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna funkcija. No, f nije derivabilna u 0. Pretpostavimo suprotno, tj. da je f derivabilna u 0. Imamo: $\frac{1}{n} \to 0$ pa iz propozicije 4.3.9. slijedi:*

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} \to f'(0),$$

tj. konstantan niz 1 teži prema $f'(0)$ pa slijedi $f'(0) = 1$.
S druge strane, $-\frac{1}{n} \to 0$ povlači

$$\frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} \to f'(0),$$

tj. konstantan niz -1 teži prema $f'(0)$ pa slijedi

$$f'(0) = -1$$

što je kontradikcija.
Dakle, f nije derivabilna u 0.

Teorem 4.4.5. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : T \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $Imf \subseteq T$. Neka je $x_0 \in S$. Pretpostavimo da je f derivabilna u x_0 te da je g derivabilna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f : S \to \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 i vrijedi:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dokaz. Prema propoziciji 4.4.1. postoje funkcije $\omega : S \to \mathbb{R}$ i $\tilde{\omega} : T \to \mathbb{R}$ takve da je ω neprekidna funkcija u x_0 i $\omega(x_0) = f'(x_0)$, $\tilde{\omega}$ neprekidna u x_0, $\tilde{\omega}(f(x_0)) = g'(f(x_0))$ te takve da je $f(x) = f(x_0) + \omega(x)(x - x_0), \forall x \in S$ te $g(y) = g(f(x_0)) + \tilde{\omega}(y)(y - f(x_0)), \forall y \in T$.
Stoga za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \tilde{\omega}(f(x))(f(x) - f(x_0)) = g(f(x_0)) + (\tilde{\omega} \circ f)(x)(\omega(x)(x - x_0)).$$

Dakle,

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + [(\tilde{\omega} \circ f) \cdot \omega](x) \cdot (x - x_0), \forall x \in S \quad (4.11)$$

Budući da je f derivabilna u x_0, f je i neprekidna u x_0 (prema 4.4.2.) pa je $\tilde{\omega} \circ f$ neprekidna u x_0 (prema 2.3.13.).
Stoga je $(\tilde{\omega} \circ f) \cdot \omega$ neprekidna u x_0.
Iz propozicije 4.4.1. 2) i (4.11) zaključujemo da je $g \circ f$ derivabilna u x_0 te da je

$$(g \circ f)'(x_0) = [(\tilde{\omega} \circ f) \cdot \omega](x_0).$$

Stoga je

$$(g \circ f)'(x_0) = \tilde{\omega}(f(x_0)) \cdot \omega(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 4.4.6. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to T$ bijekcija. Neka je $g : T \to S$ inverzna funkcija od f (tj. $g = f^{-1}$). Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ te da je f derivabilna u x_0. Nadalje, pretpostavimo da je $f'(x_0) \neq 0$ te da je g neprekidna u y_0, gdje je $y_0 = f(x_0)$ te pretpostavimo da je i y_0 gomilište od T. Tada je g derivabilna u x_0 i*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dokaz. Prema propoziciji 4.4.1. postoji funkcija $\omega : S \to \mathbb{R}$, neprekidna u x_0 takva da je $\omega(x_0) = f'(x_0)$ i takva da je

$$f(x) = f(x_0) + \omega(x)(x - x_0), \forall x \in S. \quad (4.12)$$

Neka je $y \in T$. Uvrštavanjem $x = g(y)$ u (4.12) slijedi

$$y = y_0 + \omega(g(y)) \cdot (g(y) - g(y_0)). \quad (4.13)$$

Iz (4.12) slijedi da je $\omega(x) \neq 0, \forall x \in S$. Naime, za $x = x_0$ imamo $\omega(x_0) = f'(x_0) \neq 0$, a za $x \neq x_0$ je $f(x) \neq f(x_0)$ jer je f bijekcija pa je $\omega(x) \neq 0$. Stoga je

$$\omega(g(y)) \neq 0$$

pa iz (4.13) slijedi
$$\frac{1}{\omega(g(y))} \cdot (y - y_0) = g(y) - g(y_0).$$
Prema tome,
$$g(y) = g(y_0) + \left(\frac{1}{\omega \circ g}\right)(y) \cdot (y - y_0).$$
Prema pretpostavci teorema g je neprekidna u y_0 pa je $\omega \circ g$ neprekidna u y_0. Stoga je $\frac{1}{\omega \circ g}$ funkcija neprekidna u y_0 pa iz propozicije 4.4.1. 2) slijedi da je g derivabilna u y_0 i
$$g'(y_0) = (\frac{1}{\omega \circ f})(y_0) = \frac{1}{\omega(g(y_0)} = \frac{1}{\omega(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
Dakle,
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
□

Teorem 4.4.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u $x_0 \in S$. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ derivabilne u x_0 te vrijedi*
$$(f + g)'(x) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
i
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \forall x \in S.$$
Ako je $f(x) \neq 0, \forall x \in S$ onda je i funkcija $\frac{1}{f}$ derivabilna u x_0 te vrijedi
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0)^2}.$$

Dokaz. Neka je x_n niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$. Tada je
$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_n - x_0}$$
$$= \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_n) + f(x_0) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_n - x_0}$$
$$= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot g(x_n) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}.$$
Prema propoziciji 4.3.9. $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0)$, $\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to g'(x_0)$.

Nadalje, $g(x_n) \to g(x_0)$ jer je g neprekidna u x_0 (što slijedi iz činjenice da je derivabilna u x_0). Prema teoremu 2.2.7. vrijedi:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot g(x_n) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Dakle,

$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Iz propozicije 4.3.9. slijedi da je $f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ derivacija od $f \cdot g$ u x_0.
Posve analogno dobivamo da je $f'(x_0) + g'(x_0)$ derivacija od $f + g$ u x_0.
Neka je (x_n) niz u $S \setminus \{x_0\}$ takav da $x_n \to x_0$. Imamo:

$$\frac{(\frac{1}{f})(x_n) - (\frac{1}{f})(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x_n - x_0} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_n)}{f(x_n) \cdot f(x_0)}}{x_n - x_0}$$

$$= -\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{f(x_n)}. \quad (4.14)$$

Iz teorema 2.2.7. slijedi

$$-\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{f(x_n)} \to -f'(x_0) \cdot \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{f(x_0)}.$$

Dakle,

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_n) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x_n - x_0} \to \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 4.4.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u $a \in S$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada je $c \cdot f : S \to \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 i*

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

($c \cdot f$ je funkcija definirana s $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x), \forall x \in S$).

Dokaz. Neka je $g : S \to \mathbb{R}, g(x) = c, \forall x \in S$. Tada je g derivabilna u x_0 i $g'(x_0) = 0$ (što vidimo na isti način kao i u primjeru 4.2.2.) Prema prethodnom teoremu funkcija $g \cdot f$ je derivabilna u x_0 i

$$(g \cdot f)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0) = 0 + c \cdot f'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

No, $g \cdot f = c \cdot f$.
Time je tvrdnja korolara dokazana. $\square$

Teorem 4.4.9. *Neka je $a > 0, a \neq 1$. Tada je $\exp_a$ derivabilna funkcija te je*

$$\exp_a'(x) = \ln a \cdot a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\log_e a^x = x \cdot \log_e a = x \cdot \ln a$$

pa slijedi

$$e^{\log_e a^x} = e^{x \cdot \ln a},$$

tj.

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

Dakle,

$$\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln a), \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija definirana s

$$f(x) = (\ln a) \cdot x.$$

Prema prethodnom korolaru funkcija f je derivabilna i

$$f'(x) = \ln a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iz (4.15) slijedi da je

$$\exp_a(x) = (\exp \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$\exp_a = \exp \circ f.$$

Iz teorema 4.4.5. zaključujemo da je $\exp_a$ derivabilna funkcija te da je

$$(\exp_a)'(x) = \exp'(f(x)) \cdot f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, za svaki realan broj x vrijedi:

$$(\exp_a)'(x) = \exp(f(x)) \cdot \ln a = \exp_a(x) \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

$\square$

Propozicija 4.4.10. *Funkcija* $\ln : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *je derivabilna i* $\ln'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \langle 0, \infty\rangle$.

Dokaz. Neka je $y_0 \in \langle 0, \infty\rangle$. Budući da je $\langle 0, \infty\rangle$ otvoren skup, y_0 je gomilište od $\langle 0, \infty\rangle$.
Označimo $x_0 = \ln y_0$. Tada je $\exp(x_0) = y_0$.
Znamo da je exp derivabilna u x_0 te da je $\exp'(x_0) = \exp(x_0) \neq 0$.
Nadalje, znamo da je ln neprekidna pa je neprekidna i u y_0.
Iz teorema 4.4.6. ($f = \exp$, $g = \ln$) slijedi da je ln derivabilna u y_0 te da je

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{\exp'(x_0)}.$$

Dakle,

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = \frac{1}{y_0}.$$

Zaključak: ln je derivabilna funkcija i

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

□

Napomena 4.4.11. *Neka su* a, b, c *pozitivni realni brojevi takvi da je* $a \neq 1, c \neq 1$. *Tada je:*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Zašto?
Neka je $x = \log_a b$ *i* $y = \log_c a$.
Imamo:

$$c^{x \cdot y} = (c^y)^x = a^x = b.$$

Dakle,

$$c^{x \cdot y} = b$$

pa je $x \cdot y = \log_c b$.
Uočimo: $y \neq 0$ *(u suprotnome imamo* $\log_c a = 0$ *pa je* $a = c^0 = 1$ *što je kontradikcija s pretpostavkom).*
Stoga je

$$x = \frac{\log_c b}{y}$$

a to je upravo i trebalo dokazati.

Uočimo sljedeće: Ako su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a \neq 1, b \neq 1$ *onda je*

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Naime, prema prethodnoj napomeni vrijedi:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Propozicija 4.4.12. *Neka je* $a > 0, a \neq 1$. *Tada je* $\log_a$ *derivabilna funkcija i*

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \forall x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\log_a x = \log_a e^{\ln x} = \ln x \cdot \log_a e = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

Iz korolara 4.4.8. i prethodne propozicije slijedi da je $\log_a$ derivabilna funkcija te da vrijedi:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \forall x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

□

Bibliografija

[1] S. Kurepa, Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.*

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.*

[3] V. Kirin, Uvod u matematičku analizu, skripta*, Sveučilište u Zagrebu, 1976.*

[4] S. Mardešić, Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.*

[5] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.*

Sažetak

U ovom diplomskom radu postupno izgrađujemo eksponencijalnu funkciju. Krećemo od izgradnje realnih brojeva. Na početku definiramo pojam binarne operacije, pojam grupe, prstena, polja, pojam uređenog polja te polje realnih brojeva. Pomoću pojma induktivnog skupa definirali smo prirodne brojeve, te potom cijele i racionalne brojeve. Potom smo definirali pojam niza kao funkciju. Dokazali smo bitan teorem "Princip definicije indukcijom" te pomoću njega definirali $a^n, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ *te* $a^m, \forall m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *a potom i* $a^{\frac{m}{n}}$ *gdje su* $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a > 0$ *te smo provjerili da je to dobra definicija, tj. da ne ovisi o izboru brojeva m i n. Naposljetku smo definirali* a^x *gdje je* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a > 0$. *Izgradili smo eksponencijalnu funkciju s bazom* $a > 0, a \neq 1$ *kao* $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ *s*

$$\exp_a(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}, a > 1.$$

Dokazli smo jedinstvenost i egzistenciju takve funkcije. Nadalje, dokazali smo i razna svojstva te funkcije kao što su neprekidnost, bijektivnost te naposljetku i derivabilnost. Definirali smo i inverznu funkciju s bazom a kao $(\exp_a)^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ *koju nazivamo logaritamska funkcija te dokazali da je i ta funkcija derivabilna.*

Summary

In this diploma thesis we are gradually building an exponential function. We start from the construction of real numbers. At the beginning we define the notion of binary operation, the concept of groups, rings, fields, concept of a ordered field and the concept of field of real numbers. Using the concept of inductive set, we have defined the natural numbers, then the integer and rational numbers. Then we have defined the concept of the sequence as a function. We have proved an important theorem "The principle of definition by induction" and have used it to define $a^n, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ *and* $a^m, \forall m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *and then* $a^{\frac{m}{n}}$ *where is* $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a > 0$ *and we have proved that this is a good definition, ie. that does not depend on the choice of numbers m i n. Finally, we have defined* a^x *where is* $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, a > 0$. *We have built an exponential function with base* $a > 0, a \neq 1$ *as* $\exp : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ *by*

$$\exp_a(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

We have proved uniqueness and existence of the function. Furthermore, we have shown the different features of such a functions such as continuity, bijectivity and finally derivability. We have defined the inverse function with base a as $(\exp_a)^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ *which is called the logarithmic function and we have proved that this function is differentiable.*

Životopis

Rođena sam 13.12.1990. godine u Šibeniku. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1997. godine u Osnovnoj školi Jurja Šižgorića. Paralelno završavam osnovnu glazbenu školu Ivana Lukačića u Šibeniku. Godine 2005. upisujem se u Gimnaziju Antuna Vrančića u Šibeniku gdje sam 2009. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012., nakon završenog preddiplomskog studija matematike; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički.