# Tri metode izračunavanja radijativnih procesa s narušenjem leptonskog okusa

**Popara, Goran**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2014**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:429828

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Goran Popara

# TRI METODE IZRAČUNAVANJA RADIJATIVNIH PROCESA S NARUŠENJEM LEPTONSKOG OKUSA

Diplomski rad

Zagreb, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

**Goran Popara**

Diplomski rad

# Tri metode izračunavanja radijativnih procesa s narušenjem leptonskog okusa

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Amon Ilakovac

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2014.

Zahvalio bih se svojim roditeljima i prijateljima na svoj podršci koju su mi pružili tijekom studija, kao i prof. Amonu Ilakovcu, uz čije se mentorstvo pisanje ovog rada pokazalo kao vrlo korisno i poučno iskustvo. Također bih se zahvalio Luki Popovu i Jiangyang Youu na korisnim komentarima i prijedlozima.

## Sažetak

Metode redukcije tenzorskih integrala vrlo su važne za račune amplituda koje sadrže integrale po petljama. U ovom radu izložene su tri takve metode: dvije egzaktne i jedna aproksimativna. Budući da se tenzorski integrali u konačnici reduciraju na skalarne, izvedeni su i svi potrebni analitički izrazi za skalarne integrale. Konačno, sve tri metode primjenjene su na račun amplituda radijativnih procesa s narušenjem leptonskog okusa u okviru općenitog modela koji dozvoljava takav scenarij.

# Three methods of evaluating radiative lepton flavor violating processes


## Abstract

Reduction methods for tensor integrals are very important in calculations of amplitudes containing loop integrals. In this work, three such methods are presented: two exact and one approximate. Since tensor integrals reduce to scalar ones, all relevant scalar one-loop integrals are evaluated. Finally, amplitudes of radiative lepton flavor violating processes are calculated using all three methods in a generic model.

# Sadržaj


**1 Uvod** **1**

**2 Skalarni integrali** **2**
2.1 1-točkasta funkcija . . . 2
2.2 2-točkasta funkcija . . . 2
2.3 3-točkasta funkcija . . . 3
2.3.1 3-točkasta funkcija u terminima dilogaritama . . . 7

**3 Tenzorski integrali** **9**
3.1 Metoda Passarina i Veltmana . . . 10
3.1.1 Tenzorski integral ranga 1 . . . 11
3.1.2 Tenzorski integral ranga 2 . . . 11
3.1.3 2-točkaste funkcije . . . 13
3.1.4 3-točkaste funkcije . . . 14
3.2 Metoda Davidičeva . . . 16
3.2.1 Tenzorski integral ranga 1 . . . 16
3.2.2 Tenzorski integral ranga 2 . . . 17
3.2.3 Tenzorski integral ranga M . . . 17
3.2.4 2-točkaste funkcije . . . 19
3.2.5 3-točkaste funkcije . . . 19
3.3 Metoda razvoja po vanjskim impulsima . . . 19
3.3.1 2-točkaste funkcije . . . 20
3.3.2 3-točkaste funkcije . . . 21
3.4 Usporedba triju metoda . . . 22

**4 Radijativni procesi s narušenjem leptonskog okusa** **22**
4.1 Baždarna invarijantnost amplitude . . . 24
4.2 Lagranžijani interakcije . . . 25
4.3 Form faktori . . . 26
4.3.1 Form faktori u Passarino-Veltmanovom pristupu . . . 26
4.3.2 Form faktori u Davidičevljevom pristupu . . . 28
4.3.3 Form faktori u terminima J-integrala . . . 29

**5 Zaključak** **31**

**A Korisne formule** **32**
A.1 Feynmanova parametrizacija . . . 32
A.2 Gama funkcija . . . 33
A.3 Korisni integrali . . . 33
A.4 Logaritmi . . . 34
A.5 Dilogaritmi . . . 35

A.6 Gordonova dekompozicija . . . . . 35

**B Alfa-reprezentacija skalarnih integrala 36**

**C Pregled bitnih formula 38**

C.1 Skalarni integrali . . . . . 38

C.1.1 1-točkasta funkcija . . . . . 38

C.1.2 2-točkasta funkcija . . . . . 38

C.1.3 3-točkasta funkcija . . . . . 39

C.2 Tenzorski integrali . . . . . 40

C.2.1 2-točkaste funkcije . . . . . 40

C.2.2 3-točkaste funkcije . . . . . 40

# 1 Uvod

Za razliku od, primjerice, očuvanja električnog naboja, koje se temelji na lokalnoj $U(1)$ baždarnoj simetriji, ideja očuvanja leptonskog broja pojavila se iz fenomenoloških razloga. U standardnom modelu (SM) jakih i elektroslabih interakcija, globalne simetrije povezane s očuvanjem leptonskog (i barionskog) broja su samo posljedice izbora fundamentalnih polja i baždarne invarijantnosti s obzirom na grupu $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ i nema potrebe za neovisnim uvođenjem principa očuvanja barionskog i leptonskog broja. Strogo gledano, leptonski i barionski brojevi nisu egzaktno očuvane veličine u SM zbog (zanemarivih) neperturbativnih efekata [1].

No, interakcije koje narušavaju leptonski broj sastavni su dio većine proširenja standardnog modela (npr. $SU(5)$ i $SO(10)$ modeli ujedinjenja, modeli generiranja neutrinskih masa [2,3], minimalni supersimetrični standardni model proširen mehanizmom njihalice na niskoj skali [4] itd.).

Eksperimenti s neutrinskim oscilacijama [5–8] nude nepobitne dokaze narušenja leptonskog okusa u neutrinskom sektoru, što je dobra indikacija postojanja fizike izvan standardnog modela. Unatoč intenzivnom traganju [9–13], u sektoru nabijenih leptona još uvijek nisu pronađeni dokazi narušenja leptonskog okusa i eksperimenti su u stanju dati samo gornje granice opservabli (tablica 1).

Tablica 1: Gornje granice omjera grananja nekih raspada s narušenjem leptonskog okusa.

| opservabla | gornja granica |
|---|---|
| $B(\mu \to e\gamma)$ | $2.4 \times 10^{-12}$ [9] |
| $B(\mu \to eee)$ | $10^{-12}$ [10] |
| $B(\tau \to e\gamma)$ | $3.3 \times 10^{-8}$ [13] |
| $B(\tau \to \mu\gamma)$ | $4.4 \times 10^{-8}$ [13] |
| $B(\tau \to eee)$ | $2.7 \times 10^{-8}$ [13] |
| $B(\tau \to e\mu\mu)$ | $2.7 \times 10^{-8}$ [13] |
| $B(\tau \to \mu\mu\mu)$ | $2.1 \times 10^{-8}$ [13] |
| $B(\tau \to \mu ee)$ | $1.8 \times 10^{-8}$ [13] |

Jedan tip procesa s narušenjem leptonskog okusa su radijativni raspadi, $\mu \to e\gamma$, $\tau \to e\gamma$ i $\tau \to \mu\gamma$ i amplitude takvih procesa bit će detaljno analizirane u ovom radu. Budući da dijagrami tih amplituda sadrže petlje, bitno je dobro poznavati razne metode koje se primjenjuju u računima s petljama, a radi se o metodama redukcije tenzorskih integrala. Ovdje će biti upotrijebljene tri takve metode: dvije egzaktne i jedna aproksimativna.

U 2. poglavlju nalaze se detaljni izvodi analitičkih izraza za skalarne integrale koji su potrebni za račun radijativnih procesa, dok su u 3. poglavlju izvedeni svi potrebni izrazi za redukciju tenzorskih integrala. Zatim su, pomoću tih izraza, u 4. poglavlju izračunate amplitude radijativnih procesa s narušenjem leptonskog okusa

u općenitom modelu. Zaključak se nalazi u 5. poglavlju.

# 2 Skalarni integrali

Budući da se tenzorski integrali u konačnici reduciraju na skalarne integrale

$$J^{(N)}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{D_1^{\nu_1}\cdots D_N^{\nu_N}}, \tag{2.1}$$

gdje je $n$ dimenzija prostor-vremena i

$$D_i = (l+p_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon, \tag{2.2}$$

korisno je naći analitičke izraze za integrale koji se pojavljuju u radijativnim procesima, gdje je $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_N = 1$ i takvi integrali se često nazivaju $N$-točkaste funkcije.

U sljedećim poglavljima nalaze se detaljni izvodi 1-, 2- i 3-točkastih skalarnih integrala, koji prate notaciju iz [14]. Analitički izraz za 4-točkaste funkcije je također poznat, ali ovjde neće biti potreban. Također se može pokazati da se u 4-dimenzionalnom prostoru $N \geq 5$-točkaste funkcije uvijek mogu reducirati na 4-točkaste [15].

## *2.1 1-točkasta funkcija*

Izraz za 1-točkastu funkciju ($N = 1$) može se iščitati izravno iz (A.9):

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{\mu^{4-n}}{l^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^{4-n}}{(m^2)^{1-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} m^2 \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \frac{i}{(4\pi)^2} m^2 \left(1 - \ln\frac{m^2 - i\varepsilon}{\mu^2}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje je drugi korak dimenzionalna regularizacija [16] – svi faktori razvijeni su oko $n = 4$, pri čemu se gama funkcija razvija oko $-1$ [jednadžba (A.5)]:

$$\Gamma(\epsilon - 1) = -\frac{1}{\epsilon} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\epsilon),$$

gdje je $\epsilon = (4-n)/2$ infinitezimalna veličina.

## *2.2 2-točkasta funkcija*

Nakon Feynmanove parametrizacije (poglavlje A.1), 2-točkasta funkcija ($N = 2$)

$$\begin{aligned} B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{\mu^{4-n}}{(l^2 - m_1^2 + i\varepsilon)\left[(l+p)^2 - m_2^2 + i\varepsilon\right]} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^n} \frac{\mu^{4-n}}{(q^2 - \Delta)^2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje je $q = l + px$ i $\Delta = p^2x^2 + (m_2^2 - m_1^2 - p^2)x + m_1^2 - i\varepsilon$. Nakon integracije po $q$ [jednadžba (A.9)] i dimenzionalne regularizacije,

$$B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 \mathrm{d}y \, \frac{i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \, \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{n}{2}}$$
$$= \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) - \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \ln \frac{\Delta}{\mu^2}.$$

Potrebno je još izračunati

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \ln \frac{\Delta}{\mu^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\ln \frac{p^2 - i\varepsilon}{\mu^2} + \ln(x - x_1) + \ln(x - x_2)\right]$$
$$= \left[x \ln \frac{p^2 - i\varepsilon}{\mu^2} - (x - x_1)\ln(x - x_1) - (x - x_2)\ln(x - x_2) - 2x\right]_0^1,$$

gdje je uzeto u obzir da imaginarni dijelovi od nultočaka $x_1$ i $x_2$ polinoma $\Delta$ imaju suprotne predznake pa je logaritam $\ln(x - x_1)(x - x_2)$ rastavljen po formuli (A.17). Konačni rezultat može se pisati kao

$$B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right)$$
$$+ \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{\ln \frac{p^2 - i\varepsilon}{\mu^2} + \sum_i \left[\ln(1 - x_i) - x_i \ln \frac{x_i - 1}{x_i} - 1\right]\right\}, \qquad (2.5)$$

gdje su nultočke polinoma $\Delta$, eksplicitno,

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2p^2} \pm \frac{|m_2^2 - m_1^2|}{2p^2} \sqrt{1 - \frac{2p^2(m_2^2 + m_1^2)}{(m_2^2 - m_1^2)^2} + \frac{p^4}{(m_2^2 - m_1^2)^2}}. \qquad (2.6)$$

Ako je $p^2 = 0$, tada postoji samo jedna nultočka, $x_0 = m_1^2/(m_1^2 - m_2^2)$ i $\ln \frac{p^2 - i\varepsilon}{\mu^2}$ treba zamijeniti s $\ln \frac{m_2^2 - m_1^2 - i\varepsilon}{\mu^2}$. Ako je i $m_1^2 = 0$, tada je integral infracrveno-divergentan i potrebno ga je posebno regularizirati.

## 2.3 3-točkasta funkcija

Skalarna 3-točkasta funkcija je

$$C_0\left(p_1^2, (p_2 - p_1)^2, p_2^2; m_1^2, m_2^2, m_3^2\right) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - m_1^2)\left[(l + p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(l + p_2)^2 - m_3^2\right]}, \qquad (2.7)$$

gdje su izostavljeni $i\varepsilon$. Uvođenjem Feynmanovih parametara, gdje je prvom propagatoru u (2.7) pridružen parametar $y$, drugom $z$, a trećem $x$,

$$C_0 = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^n} \frac{1}{(q^2 - \Delta)^3},$$

gdje je $q = l + p_1(1-x-y) + p_2 x$ i

$$\begin{aligned}\Delta = {} & [p_1(1-x-y) + p_2\,x]^2 - p_1^2(1-x-y) - p_2^2\,x \\ & + m_1^2\,y + m_2^2(1-x-y) + m_3^2\,x - i\varepsilon.\end{aligned}$$

Nakon integracije po $q$ [jednadžba (A.9)], uz zamjenu [1] $x = 1 - x'$,

$$C_0 = \frac{i}{(4\pi)^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^x \mathrm{d}y\,(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f)^{-1}, \tag{2.8}$$

gdje su koeficijenti:

$$\begin{aligned}& a = -(p_2 - p_1)^2, \quad b = -p_1^2, \quad c = p_1^2 + (p_2 - p_1)^2 - p_2^2, \\ & d = m_3^2 - m_2^2 + (p_2 - p_1)^2, \quad e = m_2^2 - m_1^2 + p_2^2 - (p_2 - p_1)^2, \quad f = -m_3^2 + i\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Zamjenom $y = y' + \alpha x$ moguće je eliminirati $x^2$ doprinos u (2.8) uz $\alpha$ takav da je

$$b\alpha^2 + c\alpha + a = 0, \tag{2.10}$$

budući da je to koeficijent koji se dobije uz $x^2$. Zatim je potrebno zamijeniti redoslijed integracije:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} \mathrm{d}y &= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{(1-\alpha)x} \mathrm{d}y - \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{-\alpha x} \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{1-\alpha} \mathrm{d}y \int\limits_{y/(1-\alpha)}^1 \mathrm{d}x - \int\limits_0^{-\alpha} \mathrm{d}y \int\limits_{-y/\alpha}^1 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Integracija po $x$ je sada jednostavna,

$$\begin{aligned}-i(4\pi)^2\,C_0 = {} & \int\limits_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{1-\alpha}{(c+2\alpha b)(1-\alpha)y + d + e\alpha} \\ & \times \ln\frac{b(1-\alpha)^2y^2 + (1-\alpha)(c+2\alpha b+e)y + d + e\alpha + f}{[b(1-\alpha)^2 + (c+2\alpha b)(1-\alpha)]\,y^2 + [e(1-\alpha) + d + e\alpha]\,y + f} \\ & + \int\limits_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{\alpha}{-(c+2\alpha b)\alpha y + d + e\alpha} \\ & \times \ln\frac{b\alpha^2y^2 - \alpha(c+2\alpha b+e)y + d + e\alpha + f}{[\alpha^2 b - (c+2\alpha b)\alpha]\,y^2 + dy + f}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

[1] Crtice nad novim (nijemim) varijablama bit će izostavljene nakon svake supstitucije.

Uz supstituciju $y = y'/(1-\alpha)$ u prvom članu (2.11) i $y = -y'/\alpha$ u drugom,

$$\begin{aligned}
-i(4\pi)^2\, C_0 = &\int\limits_{-\alpha}^{1-\alpha} \mathrm{d}y\, \frac{1}{N}\left[\ln(by^2+ey+f+N) - \ln(by_0^2+ey_0+f)\right] \\
&- \int\limits_{0}^{1-\alpha} \mathrm{d}y\, \frac{1}{N}\left[\ln\left(by^2+ey+f+\frac{y}{1-\alpha}N\right) - \ln(by_0^2+ey_0+f)\right] \\
&+ \int\limits_{0}^{-\alpha} \mathrm{d}y\, \frac{1}{N}\left[\ln\left(by^2+ey+f-\frac{y}{\alpha}N\right) - \ln(by_0^2+ey_0+f)\right], \qquad (2.12)\\
&N = (c+2\alpha b)y + d + e\alpha, \quad y_0 = -(d+e\alpha)/(c+2\alpha b).
\end{aligned}$$

Dodatni logaritmi u (2.12) ne doprinose, ali služe za uklanjanje pola $y_0$, čiji je reziduum u tom slučaju nula pa se može razmatrati kompleksan $\alpha$. Uzimajući za sada da je $\alpha$ realan, uz supstituciju $y = y' - \alpha$ u prvom integralu u (2.12), $y = (1-\alpha)y'$ u drugom i $y = -\alpha y'$ u trećem,

$$\begin{aligned}
-i(4\pi)^2\, C_0 = &\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y\, \frac{1}{(c+2\alpha b)y + d + e\alpha + 2a + c\alpha} \\
&\times \left\{\ln\left[by^2+(c+e)y+a+d+f\right] - \ln\left[by_1^2+(c+e)y_1+a+d+f\right]\right\} \\
&- \int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y\, \frac{1-\alpha}{(c+2\alpha b)(1-\alpha)y + d + e\alpha} \\
&\times \left\{\ln\left[(a+b+c)y^2+(e+d)y+f\right] - \ln\left[(a+b+c)y_2^2+(e+d)y_2+f\right]\right\} \\
&- \int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y\, \frac{\alpha}{-(c+2\alpha b)\alpha y + d + e\alpha}\left[\ln(ay^2+dy+f) - \ln(ay_3^2+dy_3+f)\right], \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

gdje su $y_1$, $y_2$ i $y_3$ vrijednosti $y$ za koje su nazivnici ispred logaritama u (2.13) nula, tj. $y_1 = y_0 + \alpha$, $y_2 = y_0/(1+\alpha)$ i $y_3 = -y_0/\alpha$. Argumenti logaritama u terminima impulsa i masa su:

$$\begin{aligned}
&by^2+(c+e)y+a+d+f = -p_1^2y^2 + (m_2^2 - m_1^2 + p_1^2)y - m_2^2 + i\varepsilon, \\
&(a+b+c)y^2+(e+d)y+f = -p_2^2y^2 + (m_3^2 - m_1^2 + p_2^2)y - m_3^2 + i\varepsilon, \\
&ay^2+dy+f = -(p_2-p_1)^2y^2 + \left[m_3^2 - m_2^2 + (p_2-p_1)^2\right]y - m_3^2 + i\varepsilon. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

$C_0$ u obliku (2.13) pogodan je za svođenje integrala na dilogaritme (poglavlje A.5), pri čemu će biti potrebne nultočke gornjih polinoma.

No, prije toga treba razmotriti granice valjanosti gornjih izraza, koji vrijede za realan $\alpha$. Iz (2.10) slijedi da je

$$\alpha = \frac{p_1^2 - (p_1p_2) \pm \sqrt{(p_1p_2)^2 - p_1^2\,p_2^2}}{p_1^2}. \qquad (2.15)$$

Ukoliko je $p_1^2$ vremenolik (pozitivan)[2], a $p_2^2$ prostornolik, $\alpha$ je realan [skalarni produkt $(p_1 p_2)$ je realan pa je njegov kvadrat pozitivan] i gornji izvod vrijedi. Zatim se može napraviti analitičko produljenje na vremenolik $p_2^2$ jer se pri tome ne nailazi na singularitete i nema prijelaza preko reza u logaritmima (poglavlje A.4).

Ako je $\alpha$ kompleksan, integracijska krivulja u jednadžbi (2.12) može prijeći preko pola $y_0$, no njegov reziduum je nula pa on nema utjecaja. No tada je i $y_0$ kompleksan i argumenti logaritama u (2.12) koji sadrže $y_0$ mogu prijeći negativnu realnu os. Najprije $\alpha$ treba razdvojiti na realni i imaginarni dio:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = -\frac{c}{2b}, \quad \alpha_2 = \frac{iw}{2b}, \quad w = \pm\sqrt{4ab - c^2},$$

$$y_0 = -\frac{d + e\alpha_1 + ie(w/2b)}{iw} = -\frac{d + e\alpha_1}{iw} - \frac{e}{2b}.$$

Prema tome,

$$by_0^2 + ey_0 + f = by_0\left(y_0 + \frac{e}{b}\right) + f = b\left(\frac{d + e\alpha_1}{iw}\right)^2 - \frac{e^2}{4b} + f,$$

što je realno, do na $i\varepsilon$ u $f$, bez obzira na to koliki je $\alpha$ pa $by_0^2 + ey_0 + f$ nikad ne prelazi rez i, budući da je $b$ negativan, realni dio je pozitivan. Za ostale logaritme je dovoljno razmotriti jednadžbu (2.13), gdje su argumenti logaritama koji ne sadrže $y_1$, $y_2$ i $y_3$ neovisni o $\alpha$ i također nema prelaska preko negativne realne osi jer imaginarni dio nikad nije nula.

Postanu li mase kompleksne, argumenti logaritama koji sadržavaju $y_0$ mogu prijeći preko reza, i to ima utjecaja samo ako se pol $y_0$ nalazi unutar trokuta u kompleksnoj y-ravnini omeđenog točkama $0$, $-\alpha$ i $1 - \alpha$. Prelaskom preko reza, svaki od tri logaritma u (2.12) doživi jednak skok u fazi i dodatni integrali koji se pri tome pojavljuju čine integral po zatvorenoj krivulji koja je upravo spomenuti trokut. Po teoremu o reziduumima, taj dodatni doprinos iščezava ako je pol $y_0$ izvan trokuta, tj. može se reći da se u tom slučaju skokovi preko reza u tri logaritma međusobno kompenziraju. Dakle, ako je $y_0$ unutar spomenutog trokuta, treba provjeriti prelazi li $by_0^2 + ey_0 + f$ preko negativne realne osi. U tu svrhu se parametrizira $y = \lambda(\mu - \alpha)$, gdje su $\lambda$ i $\mu$ realni brojevi između 0 i 1. Na taj način se variranjem parametara $\lambda$ i $\mu$ pokriva cijeli trokut. Razmatra se izraz

$$by^2 + ey + f + \lambda N,$$

koji se podudara s $by_0^2 + cy_0 + f$ za $y = y_0$ i u terminima $\lambda$ i $\mu$ glasi

$$b\lambda^2\mu^2 + a\lambda^2 + c\lambda^2\mu + d\lambda + e\lambda\mu + f,$$

gdje je iskorištena i jednadžba (2.10). Nakon uvrštavanja koeficijenata (2.9), gornji izraz je

$$\begin{aligned} p_1^2\lambda^2\mu(1-\mu) + p_2^2\lambda\mu(1-\mu) + (p_2 - p_1)^2\lambda(1-\mu)(1-\lambda) \\ - m_1^2\lambda\mu - m_2^2\lambda(1-\mu) - m_3^2(1-\mu), \end{aligned}$$

[2]U metrici $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

čiji je realni dio pozitivan ako su $p_1^2$, $p_2^2$ i $(p_2-p_1)^2$ vremenoliki, a realni dijelovi masa negativni i u tom slučaju $by_0^2+ey_0+f$ ne prelazi preko negativne realne osi.

Ako se jednadžba (2.8) shvati kao definicija skalarne 3-točkaste funkcije, postoji domena u kojoj jednadžba (2.13) nije točna. Radi se o području gdje su $a$ i $b$ pozitivni i gdje je diskriminanta jednadžbe (2.10), $c^2-4ab<0$, tj. impulsi $p_1^2$ i $p_2^2$ su negativni i $(p_1p_2)^2-p_1^2p_2^2<0$. No, to se ne može dogoditi za fizikalne impulse (koji su realni u prostoru Minkowskog). Dakle, može se zaključiti da jednadžba (2.13) vrijedi za sve relevantne mase i impulse.

### 2.3.1 3-točkasta funkcija u terminima dilogaritama

Svaki od tri integrala u (2.13) moguće je svesti na dilogaritme (poglavlje A.5). Jedan takav integral ima oblik

$$S_3=\int_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{1}{y-y_0}\left[\ln(ay^2+by+c)-\ln(ay_0^2+by_0+c)\right], \tag{2.16}$$

gdje je $a$ realan, dok $b$, $c$ i $y_0$ mogu biti kompleksni, uz uvjet da je imaginarni dio argumenta prvog logaritma uvijek istog predznaka za $0\leq y\leq 1$ jer se promjenom predznaka imaginarnog dijela može prijeći preko negativne realne osi.

Neka su $\varepsilon$ i $\delta$ infinitezimalne veličine suprotnog predznaka od imaginarnih dijelova logaritama u (2.16), tj. može ih se pisati kao $-i\varepsilon$ i $-i\delta$. Tada se argumenti logaritama mogu faktorizirati pomoću njihovih nultočaka $y_1$ i $y_2$,

$$\begin{aligned}S_3=&\int_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{1}{y-y_0}\left[\ln(y-y_1)(y-y_2)-\ln(y_0-y_1)(y_0-y_2)\right]\\&-\eta\left(a-i\varepsilon,\frac{1}{a-i\delta}\right)\ln\frac{y_0-1}{y_0},\end{aligned} \tag{2.17}$$

gdje je funkcija $\eta$ definirana u poglavlju A.5. Nakon razdvajanja logaritama,

$$\begin{aligned}S_3=&\int_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{1}{y-y_0}\left[\ln(y-y_1)-\ln(y_0-y_1)+\ln(y-y_2)-\ln(y_0-y_2)\right]\\&+\left[\eta(-y_1,-y_2)-\eta(y_0-y_1,y_0-y_1)-\eta\left(a-i\varepsilon,\frac{1}{a-i\delta}\right)\right]\ln\frac{y_0-1}{y_0}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Sada je dovoljno promotriti

$$\begin{aligned}R&=\int_0^1 \mathrm{d}y\,\frac{1}{y-y_0}\left[\ln(y-y_1)-\ln(y_0-y_1)\right]\\&=\int_{-y_1}^{1-y_1}\mathrm{d}y\,\frac{1}{y-y_0+y_1}\left[\ln y-\ln(y_0-y_1)\right].\end{aligned} \tag{2.19}$$

Reziduum pola je nula. Rez logaritama je izvan trokuta omeđenog točkama 0, $-y_1$, $1-y_1$ pa se integral može razdvojiti tako da je

$$\int_{-y_1}^{1-y_1} \mathrm{d}y = \int_{0}^{1-y_1} \mathrm{d}y - \int_{0}^{-y_1} \mathrm{d}y$$

jer pravci omeđeni točkama 0, $-y_1$ i 0, $1-y_1$ ne sijeku negativnu realnu os. Uz supstitucije $y=(1-y_1)y'$ i $y=-y_1y'$,

$$\begin{aligned} R = &\int_0^1 \mathrm{d}y \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln\left(1+\frac{1-y_1}{y_1-y_0}\,y\right)\right]\left[\ln y(1-y_1)-\ln(y_0-y_1)\right] \\ &-\int_0^1 \mathrm{d}y \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln\left(1-\frac{y_1}{y_1-y_0}\,y\right)\right]\left[\ln(-yy_1)-\ln(y_0-y_1)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

$y$ je realan i pozitivan pa argumenti logaritama ne prelaze rez. Nakon parcijalne integracije

$$\begin{aligned} R = &\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_1-1}{y_1-y_0}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_1}{y_1-y_0}\right)+\ln\left(\frac{1-y_0}{y_1-y_0}\right)\left[\ln(1-y_1)-\ln(y_0-y_1)\right] \\ &-\ln\left(\frac{-y_0}{y_1-y_0}\right)\left[\ln(-y_1)-\ln(y_0-y_1)\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Prethodni izraz može se pojednostaviti pomoću formule (A.21):

$$\begin{aligned} R = &\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_0}{y_0-y_1}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_0-1}{y_0-y_1}\right)+\eta\left(-y_1,\frac{1}{y_0-y_1}\right)\ln\frac{y_0}{y_0-y_1} \\ &-\eta\left(1-y_1,\frac{1}{y_0-y_1}\right)\ln\frac{y_0-1}{y_0-y_1}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

3-točkasta skalarna funkcija (2.13) se sada može zapisati pomoću ukupno 12 dilogaritama:

$$\begin{aligned} C_0 = &\,\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\sigma=\pm}(-1)^{i+1} \\ &\times\left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_i}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)+\eta\left(-y_\sigma^{(i)},\frac{1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)\ln\frac{y_i}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right] \\ &-\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\sigma=\pm}(-1)^{i+1} \\ &\times\left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_i-1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)+\eta\left(1-y_\sigma^{(i)},\frac{1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)\ln\frac{y_i-1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right] \\ &+\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1} \\ &\times\left[\eta(-y_+^{(i)},-y_-^{(i)})-\eta(y_i-y_+^{(i)},y_i-y_-^{(i)})\right]\ln\frac{y_i-1}{y_i} \end{aligned} \tag{2.23}$$

gdje su:

$$y_1 = y_0 + \alpha, \quad y_2 = \frac{y_0}{1-\alpha}, \quad y_3 = -\frac{y_0}{\alpha}; \quad y_0 = -\frac{d + e\alpha}{c + 2\alpha b}. \tag{2.24}$$

$y_\pm^{(1)}$, $y_\pm^{(2)}$ i $y_\pm^{(3)}$ su nultočke polinoma, redom:

$$\begin{aligned} &- p_1^2 y^2 + (m_2^2 - m_1^2 + p_1^2) y - m_2^2, \\ &- p_2^2 y^2 + (m_3^2 - m_1^2 + p_2^2) y - m_3^2, \\ &- (p_2 - p_1)^2 y^2 + \left[m_3^2 - m_2^2 + (p_2 - p_1)^2\right] y - m_3^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Za realne mase i impulse i realan $\alpha$, $\eta$-funkcije u izrazu (2.23) su nula jer su tada svi $y_i$ realni i jedine veličine koje mogu biti kompleksne su $y_\pm^{(i)}$, no one su rješenja kvadratnih jednadžbi pa su im imaginarni dijelovi uvijek različitog predznaka (ako su koeficijenti u jednadžbi realni). Zbog toga je

$$\eta(-y_+^{(i)}, -y_-^{(i)}) = \eta(y_i - y_+^{(i)}, y_i - y_-^{(i)}) = 0$$

za realne mase i impulse i realan $\alpha$. Uz tu pretpostavku je i

$$\eta\left(-y_\sigma^{(i)}, \frac{1}{y_i - y_\sigma^{(i)}}\right) = \eta\left(1 - y_\sigma^{(i)}, \frac{1}{y_i - y_\sigma^{(i)}}\right) = 0$$

jer kompleksan broj i njegov inverz imaju različite preznake imaginarnog dijela, bez obzira na realan dio.

3-točkasta funkcija naizgled divergira za $c + 2\alpha b = 0$, ali je ona ipak dobro definirana u tom slučaju, što se vidi iz jednadžbe (2.13). U slučaju kada je $c + 2\alpha b = 0$, integrali u jednadžbi (2.13) zapravo postaju 2-točkaste funkcije.

# 3 Tenzorski integrali

Iz Lorentzove kovarijantnosti (u $n$ dimenzija) slijedi da je općenit oblik tenzorskog integrala

$$\begin{aligned} J^{(N)}_{\mu_1 \cdots \mu_M}(n; \nu_1, \ldots, \nu_N) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_{\mu_1} \ldots l_{\mu_M}}{D_1^{\nu_1} \cdots D_N^{\nu_N}} \\ &= \sum_{\substack{\lambda, \kappa_1, \ldots, \kappa_N \\ 2\lambda + \sum \kappa_i = M}} \left\{ [g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1} \cdots [p_N]^{\kappa_N} \right\}_{\mu_1 \ldots \mu_M} \tilde{C}^{(N)}_{\lambda, \kappa_1 \ldots \kappa_N}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje je $D_i$ definiran u (2.2), a

$$\left\{ [g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1} \cdots [p_N]^{\kappa_N} \right\}_{\mu_1 \ldots \mu_M}$$

je simetrična (s obzirom na zamjenu indeksa $\mu_1, \ldots, \mu_N$) tenzorska kombinacija građena od $\lambda$ metričkih tenzora $g$, $\kappa_1$ impulsa $p_1$, …, $\kappa_N$ impulsa $p_N$, primjerice

$$\{gp\}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = g_{\mu_1 \mu_2} p_{\mu_3} + g_{\mu_1 \mu_3} p_{\mu_2} + g_{\mu_2 \mu_3} p_{\mu_1}.$$

Maksimalne vrijednosti $\lambda$ i $\kappa_i$ slijede iz zahtjeva da je rang tenzora s desne strane jednadžbe (3.1) jednak rangu $M$ tenzorskog integrala, tj. da je $2\lambda + \sum \kappa_i = M$ (faktor 2 uz $\lambda$ je rang metričkog tenzora). Prema tome, maksimalna vrijednost $\lambda$ je najveći cijeli broj manji od $M/2$ ($\max \lambda = \lfloor M/2 \rfloor$), a maksimalna vrijednost $\kappa_i$ je $M$ ($\max \kappa_i = M$). U slučaju da je $N$ veći od dimenzije $n$ u dekompoziciji (3.1) je moguće izrabrati najviše $n$ nezavisnih impulsa.

Koeficijenti $\tilde{C}^{(N)}_{\lambda,\kappa_1\cdots\kappa_N}$ u jednadžbi (3.1) sadrže skalarne integrale (2.1) i određivanje tih koeficijenata glavni je problem redukcije tenzorskih integrala. U sljedećim poglavljima bit će opisane tri metode redukcije, od kojih su dvije egzaktne: metoda Davidičeva i metoda Passarina i Veltmana, i jedna aproksimativna: metoda razvoja po vanjskim impulsima.

## *3.1 Metoda Passarina i Veltmana*

Osnovna ideja metode Passarina i Veltmana [17] je da se množenjem tenzorskih integrala (3.1) impulsima $p_i$ ($i = 1, \ldots, N$) može smanjiti njihov rang. Na taj način se tenzorski integral ranga $M$ reducira na tenzorske integrale ranga $M - 1$ pa je u općenitom slučaju za redukciju potrebno poznavati integrale nižeg ranga od onih koji se reduciraju.

Uz pretpostavku da je impuls sačuvan, tj. da je $\sum_{i=1}^{N} p_i = 0$, jedan od impulsa $p_i$ nije nezavisan pa se radi jednostavnosti može uzeti da je, primjerice, $p_N = 0$ i integral (3.1) se može redefinirati tako da je

$$J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_M}(n;\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_{\mu_1}\ldots l_{\mu_M}}{D_0^{\nu_0} D_1^{\nu_1}\cdots D_{N-1}^{\nu_{N-1}}}, \tag{3.2}$$

gdje je $\nu_0 = \nu_N$, $D_0 = l^2 - m_0^2$ i $m_0^2 = m_N^2$. Množenjem integrala (3.2), na primjer, impulsom $p_1^{\mu_1}$ i proširivanjem skalarnog produkta

$$l \cdot p_1 = \frac{1}{2}\left[(l+p_1)^2 - m_1^2\right] - \frac{1}{2}(l^2 - m_0^2) + \frac{1}{2}(m_1^2 - m_0^2 - p_1^2), \tag{3.3}$$

dobije se da je

$$\begin{aligned} p_1^{\mu_1} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_M}(n;\{\nu_j\}) = &\frac{1}{2} J^{(N)}_{\mu_2\ldots\mu_M}(n;\{\nu_j - \delta_{1j}\}) + \frac{1}{2} J^{(N)}_{\mu_2\ldots\mu_M}(n;\{\nu_j - \delta_{j0}\}) \\ &+ \frac{1}{2}(m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) J^{(N)}_{\mu_2\ldots\mu_M}(n;\{\nu_j\}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tenzorski integrali s desne strane jednadžbe (3.4) su ranga $M - 1$ i njih se dalje može reducirati istom procedurom. U posebnom slučaju kada je $\nu_0 = 1$, drugi član na desnoj strani jednadžbe (3.4) je

$$J^{(N)}_{\mu_2\ldots\mu_M}(n;0,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_{\mu_2}\ldots l_{\mu_M}}{D_1^{\nu_1}\cdots D_{N-1}^{\nu_{N-1}}} \tag{3.5}$$

i u svrhu daljnje redukcije potrebno ga je svesti na oblik (3.2) uz supstituciju $l = l' - p_1$:

$$J^{(N)}_{\mu_2\ldots\mu_M}(n;0,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l-p_1)_{\mu_2}\ldots(l-p_1)_{\mu_M}}{D_{11}^{\nu_1} D_{21}^{\nu_2}\cdots D_{N-1,1}^{\nu_{N-1}}}, \tag{3.6}$$

gdje je $D_{ij} = (l + p_i - p_j)^2 - m_i^2$. Integral (3.6) tada u sebi sadrži i jedan skalarni integral. U svakom slučaju, skalarni produkt impulsa i tenzorskog integrala može se prikazati kao linearna kombinacija tenzorskih integrala nižeg ranga.

Tenzorski integrali relevantni za radijativne procese u ovom radu su ranga $M = 1$ i $M = 2$ i obrađeni su u sljedećim poglavljima, najprije općenito (kako bi se uočile neke glavne karakteristike metode), a zatim su detaljno izvedeni izrazi od posebnog interesa.

### 3.1.1 Tenzorski integral ranga 1

U slučaju kada je $M = 1$, $\lambda$ je nula (jer je $\max \lambda = 0$) i $\max \kappa_i = 1$, tj. u svakom članu sume u (3.1) je jedan $\kappa_i = 1$, dok su ostali nula pa je

$$J_\mu^{(N)}(n; \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{N-1}) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{D_0^{\nu_0} D_1^{\nu_1} \cdots D_{N-1}^{\nu_{N-1}}} = \sum_{i=1}^{N-1} p_{i\mu} C_i^{(N)}, \tag{3.7}$$

gdje je $C_i^{(N)} \equiv \tilde{C}^{(N)}_{0,\{\kappa_i=1,\kappa_{j\neq i}=0\}}$. Množenjem integrala (3.7) s $p_j^\mu$, uz pomoć (3.3) dobije se sustav jednadžbi za koeficijente $C_j^{(N)}$ ($j = 1, \ldots, N-1$)

$$\begin{aligned} p_j^2\, C_j^{(N)} + \sum_{i\neq j} (p_i \cdot p_j)\, C_i^{(N)} = {} & \frac{1}{2} J^{(N)}(n; \{\nu_k - \delta_{kj}\}) - \frac{1}{2} J^{(N)}(n; \{\nu_k - \delta_{k0}\}) \\ & + \frac{1}{2}(m_j^2 - m_0^2 - p_j^2) J^{(N)}(n; \{\nu_k\}) \equiv R_j^{(N)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Koeficijenti $C_j^{(N)}$ mogu se naći pomoću Cramerovog pravila,

$$C_j^{(N)} = \frac{1}{\det \Delta^{(N)}} \begin{vmatrix} p_1^2 & p_2 \cdot p_1 & \cdots & p_{j-1} \cdot p_1 & R_1^{(N)} & p_{j+1} \cdot p_1 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_2 & p_2^2 & \cdots & p_{j-1} \cdot p_2 & R_2^{(N)} & p_{j+1} \cdot p_2 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 \cdot p_{N-1} & p_2 \cdot p_{N-1} & \cdots & p_{j-1} \cdot p_{N-1} & R_{N-1}^{(N)} & p_{j+1} \cdot p_{N-1} & \cdots & p_{N-1}^2 \end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

gdje je $\det \Delta^{(N)}$ determinanta Gramove matrice

$$\Delta^{(N)} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_2 \cdot p_1 & \cdots & p_i \cdot p_1 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_2 & p_2^2 & \cdots & p_i \cdot p_2 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 \cdot p_{N-1} & p_2 \cdot p_{N-1} & \cdots & p_i \cdot p_{N-1} & \cdots & p_{N-1}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

### 3.1.2 Tenzorski integral ranga 2

U slučaju kada je $M = 2$, $\max \lambda = 1$ i $\max \kappa_i = 2$ pa je

$$J_{\mu\nu}^{(N)}(n; \nu_1, \ldots, \nu_N) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu l_\nu}{D_0^{\nu_0} D_1^{\nu_1} \cdots D_{N-1}^{\nu_{N-1}}} = g_{\mu\nu} C_{00}^{(N)} + \sum_{i,j=1}^{N-1} p_{i\mu} p_{j\nu} C_{ij}^{(N)}, \tag{3.11}$$

gdje je $C_{00}^{(N)} \equiv \tilde{C}_{1,0\ldots0}^{(N)}$ i $C_{ij}^{(N)} \equiv \tilde{C}_{0,\kappa_i\kappa_j}^{(N)}$. Ako se integral (3.11) pomnoži s $p_k^\mu$,

$$p_{k\nu} C_{00}^{(N)} + \sum_{i,j=1}^{N-1} (p_i \cdot p_k)\, p_{j\nu} C_{ij}^{(N)} = \frac{1}{2} J_\nu^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{kl}\}) - \frac{1}{2} J_{\mu_2}^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{l0}\}) + \frac{1}{2}(m_k^2 - m_0^2 - p_k^2) J_\nu^{(N)}(n; \{\nu_l\}). \tag{3.12}$$

Zatim se (3.7) uvrsti u (3.12) pa je

$$\left[ C_{00}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-1} (p_i \cdot p_k)\, C_{ik}^{(N)} \right] p_{k\nu} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq k}}^{N-1} (p_i \cdot p_k)\, p_{j\nu} C_{ij}^{(N)}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} p_{j\nu} \left[ C_j^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{kl}\}) - C_j^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{l0}\}) + (m_k^2 - m_0^2 - p_k^2)\, C_j^{(N)}(n; \{\nu_l\}) \right]. \tag{3.13}$$

Budući da su impulsi općenito linearno nezavisni, izjednačavanjem koeficijenata uz $p_{k\nu}$ slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{N-1} (p_i \cdot p_k)\, C_{ik}^{(N)} = \frac{1}{2} \left[ C_k^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{kl}\}) - C_k^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{l0}\}) + (m_k^2 - m_0^2 - p_k^2)\, C_k^{(N)}(n; \{\nu_l\}) \right] - C_{00}^{(N)} \equiv R_{kk}^{(N)}, \tag{3.14}$$

dok se izjednačavanjem koeficijenata uz $p_{j\nu}$, gdje je $j \neq k$, dobija da je

$$\sum_{i=1}^{N-1} (p_i \cdot p_k)\, C_{i,j\neq k}^{(N)} = \frac{1}{2} \left[ C_j^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{kl}\}) - C_j^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{l0}\}) + (m_k^2 - m_0^2 - p_k^2)\, C_j^{(N)}(n; \{\nu_l\}) \right] \equiv R_{jk}^{(N)}. \tag{3.15}$$

Integral (3.11) još preostaje pomnožiti s $g^{\mu\nu}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2 - m_0^2) + m_0^2}{D_0^{\nu_0} D_1^{\nu_1} \cdots D_{N-1}^{\nu_{N-1}}} = J^{(N)}(n; \{\nu_l - \delta_{l0}\}) + m_N^2\, J^{(N)}(n; \{\nu_l\}) = n\, C_{00}^{(N)} + \sum_{i,j=1}^{N-1} (p_i \cdot p_j)\, C_{ij}^{(N)}. \tag{3.16}$$

Konačno, redukcija je gotova nakon rješavanja jednadžbi (3.14)–(3.16) po $C_{ij}^{(N)}$. Sustave jednadžbi za $C_{ij}^{(N)}$ moguće je dobiti tako da se za fiksni $j$ varira $k$. Na primjer, za $j = 1$ u jednadžbi (3.14) je $k = 1$, dok se u jednadžbu (3.15) redom uvrštavaju $k = 2, 3, \ldots, N-1$:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_2 \cdot p_1 & p_3 \cdot p_1 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_2 & p_2^2 & p_3 \cdot p_2 & \cdots & p_{N-1} \cdot p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 \cdot p_{N-1} & p_2 \cdot p_{N-1} & p_3 \cdot p_{N-1} & \cdots & p_{N-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^{(N)} \\ C_{12}^{(N)} \\ C_{13}^{(N)} \\ \vdots \\ C_{1,N-1}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^{(N)} \\ R_{12}^{(N)} \\ R_{13}^{(N)} \\ \vdots \\ R_{1,N-1}^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Prvi redak u matrici sustava (3.17) odgovara jednadžbi (3.14), dok ostali retci odgovaraju jednadžbi (3.15) za, redom, $k = 2, 3, \ldots, N-1$. Matrica sustava (3.17) je ponovno Gramova matrica (3.10).

Analognom procedurom moguće je reducirati integrale bilo kojeg ranga $M$. Bitno je primjetiti da metoda Passarina i Veltmana ima prividnu divergenciju ako Gramova determinanta iščezava (što se može dogoditi ako, primjerice, vanjski impulsi nisu linearno nezavisni) i numeričku nestabilnost ako je približno jednaka nuli. Rješenje problema iščezavanja Gramove determinante zbog linearno zavisnih impulsa je izbor linearno nezavisnih vektora za bazu dekompozicije (3.1).

### 3.1.3 2-točkaste funkcije

Poseban slučaj integrala (3.1) je 2-točkasta funkcija, za koju je $N = 2$ i $\nu_0 = \nu_1 = 1$. 2-točkasta funkcija ranga $M = 1$ je

$$J^{(2)}_\mu(n;1,1) \equiv B_\mu(p^2; m_1^2, m_2^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p)^2 - m_2^2\right]} = p_\mu \, B_1(p^2; m_1^2, m_2^2), \tag{3.18}$$

gdje je $B_1 \equiv C_1^{(2)}$. Iz formule (3.9) slijedi da je

$$B_1(p^2; m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{2p^2}\left[A_0(m_1^2) - A_0(m_2^2) + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_0(p^2; m_1^2, m_2^2)\right]. \tag{3.19}$$

Ako je $p^2 = 0$ (što odgovara iščezavanju Gramove determinante), tada je integral (3.18) potrebno posebno izračunati. Uvođenjem Feynmanovih parametara,

$$B_\mu(p^2; m_1^2, m_2^2) = -p_\mu \int_0^1 y \, \mathrm{d}y \int \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^n} \frac{1}{(q^2 - \Delta)^2},$$

gdje je $q = l + py$ i $\Delta = p^2 y^2 - (p^2 - m_2^2 + m_1^2) y + m_1^2 - i\varepsilon$. Nakon integracije po $q$, usporedbom s (3.18),

$$B_1(p^2; m_1^2, m_2^2) = -\frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}y \, y \ln\left[\frac{p^2 y^2 - (p^2 - m_2^2 + m_1^2) y + m_1^2}{\mu^2}\right]. \tag{3.20}$$

Konačno, nakon integracije po $y$, uz $p^2 = 0$,

$$B_1(p^2 = 0; m_1^2, m_2^2) = -\frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\left[-\frac{1}{2} + \frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2} + \ln\left(\frac{m_2^2}{\mu^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2}\right)^2 \ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right)\right]. \tag{3.21}$$

U slučaju jednakih masa ($m_1^2 = m_2^2 = m^2$),

$$B_1(p^2 = 0; m^2, m^2) = -\frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right). \tag{3.22}$$

### 3.1.4 3-točkaste funkcije

3-točkasta funkcija ranga $M = 1$ je

$$\begin{aligned} J^{(3)}_{\mu}(n;1,1,1) &\equiv C_{\mu}\left(p_1^2,(p_2-p_1)^2,p_2^2;m_1^2,m_2^2,m_3^2\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_{\mu}}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]} \\ &= p_{1_{\mu}} C_1 + p_{2_{\mu}} C_2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

gdje je $C_i = C_i\left(p_1^2,(p_2-p_1)^2,p_2^2;m_1^2,m_2^2,m_3^2\right) \equiv C_i^{(3)}$. Pomoću jednadžbe (3.8) može se napisati sustav jednadžbi za $C_i$:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_2 p_1 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

gdje je

$$R_1 = \frac{1}{2}\left[B_0(1,3) - B_0(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2)C_0\right], \tag{3.25}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left[B_0(1,2) - B_0(2,3) + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2)C_0\right]. \tag{3.26}$$

Uvedene su sljedeće pokrate:

$$B_0(1,2) = B_0(p_1^2;m_1^2,m_2^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]}, \tag{3.27}$$

$$B_0(1,3) = B_0(p_2^2;m_1^2,m_3^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}, \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} B_0(2,3) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-m_2^2)\left[(l+p_2-p_1)^2-m_3^2\right]} \\ &= B_0\left((p_2-p_1)^2;m_2^2,m_3^2\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

$C_0$ je, s obzirom na redoslijed varijabli, isti kao u definiciji (2.7). Rješenja za $C_1$ i $C_2$ su:

$$C_1 = \frac{p_2^2 R_1 - (p_1 p_2) R_2}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}, \tag{3.30}$$

$$C_2 = \frac{p_1^2 R_2 - (p_1 p_2) R_1}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}. \tag{3.31}$$

3-točkasta funkcija ranga $M = 2$ je

$$\begin{aligned} J^{(3)}_{\mu\nu}(n;1,1,1) &\equiv C_{\mu\nu}\left(p_1^2,(p_2-p_1)^2,p_2^2;m_1^2,m_2^2,m_3^2\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_{\mu} l_{\nu}}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]} \\ &= p_{1_{\mu}} p_{1_{\nu}} C_{11} + p_{2_{\mu}} p_{2_{\nu}} C_{22} + \left(p_{1_{\mu}} p_{2_{\nu}} + p_{2_{\mu}} p_{1_{\nu}}\right) C_{12} + g_{\mu\nu} C_{00}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Sustave jednadžbi za $C_{ij}$ nije moguće dobiti izravno iz jednadžbi (3.14)-(3.16) jer se primjenom relacije (3.3) u potpunosti krati $(l^2 - m_1^2)$ iz nazivnika pa je nakon množenja integrala (3.32) impulsima potrebno uvesti zamjenu varijabli kao u (3.6).

Integral (3.32) se prvo pomnoži impulsom $p_1^\nu$ i upotrijebi se relacija (3.23):

$$\begin{aligned} p_1^\nu C_{\mu\nu} &= p_1^2 p_{1\mu}\, C_{11} + (p_1p_2)p_{2\mu}\, C_{22} + \left[(p_1p_2)p_{1\mu} + p_1^2 p_{2\mu}\right] C_{12} + p_{1\mu}\, C_{00} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{l_\mu}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p_2)^2 - m_3^2\right]} - \frac{l_\mu}{\left[(l+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2 - m_3^2\right]} \right\} \\ &+ \frac{1}{2}(m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2 - m_3^2\right]}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

U drugom integralu na desnoj strani gornjeg izraza je potrebno napraviti supstituciju $l = l' - p_1$ i uvrstiti (3.18):

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu - p_{1\mu}}{(l^2 - m_2^2)\left[(l + p_2 - p_1)^2 - m_3^2\right]} = (p_{2\mu} - p_{1\mu}) B_1(2,3).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $p_{1\mu}$ i $p_{2\mu}$ dobiju se jednadžbe:

$$p_1^2 C_{11} + (p_1p_2) C_{12} = R_{11}, \tag{3.34}$$

$$p_1^2 C_{12} + (p_1p_2) C_{22} = R_{21}; \tag{3.35}$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left[B_1(2,3) + B_0(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_1\right] - C_{00}, \tag{3.36}$$

$$R_{21} = \frac{1}{2}\left[B_1(1,3) - B_1(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_2\right]. \tag{3.37}$$

Analogno, množenjem s $p_2^\nu$,

$$(p_1p_2) C_{11} + p_2^2 C_{12} = R_{12}, \tag{3.38}$$

$$(p_1p_2) C_{12} + p_2^2 C_{22} = R_{22}; \tag{3.39}$$

$$R_{12} = \frac{1}{2}\left[B_1(1,2) + B_1(2,3) + B_0(2,3) + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_1\right], \tag{3.40}$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}\left[-B_1(2,3) + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_2\right] - C_{00}. \tag{3.41}$$

Množenjem integrala (3.32) tenzorom $g^{\mu\nu}$ i proširivanjem brojnika dobija se da je

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} C_{\mu\nu} &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2 - m_1^2) + m_1^2}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2 - m_3^2\right]} = B_0(2,3) + m_1^2 C_0 \\ &= \left[p_1^2 C_{11} + (p_1p_2) C_{12}\right] + \left[(p_1p_2) C_{12} + p_2^2 C_{22}\right] + n C_{00} = R_{11} + R_{22} + n C_{00} \\ &= \frac{1}{2}\left[B_0(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_1 + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_2\right] + (n-2) C_{00}. \end{aligned}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je

$$C_{00} = \frac{1}{2(n-2)}\left[B_0(2,3) + 2m_1^2 C_0 - (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_1 - (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_2\right]. \tag{3.42}$$

Jednadžbe (3.34) i (3.38) čine sustav:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

a jednadžbe (3.35) i (3.39) čine sustav:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Konačno, njihovim invertiranjem dobiju se $C_{11}$, $C_{12}$ i $C_{22}$:

$$C_{11} = \frac{p_2^2 R_{11} - (p_1p_2)R_{12}}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2}, \tag{3.45}$$

$$C_{12} = \frac{p_1^2 R_{12} - (p_1p_2)R_{11}}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2} = \frac{p_2^2 R_{21} - (p_1p_2)R_{22}}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2}, \tag{3.46}$$

$$C_{22} = \frac{p_1^2 R_{22} - (p_1p_2)R_{21}}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2}. \tag{3.47}$$

Dobro je primjetiti da za četiri nepoznanice ($C_{11}$, $C_{12}$, $C_{22}$ i $C_{00}$) postoji pet jednadžbi, što može poslužiti za provjeru samokonzistentnosti metode.

## *3.2 Metoda Davidičeva*

Drugi pristup problemu redukcije tenzorskih integrala je Davidičevljeva metoda [18], koja se bazira na relacijama koje povezuju integrale različitih dimenzija prostor-vremena. U narednim poglavljima je proveden izvod Davidičevljeve metode, najprije za tenzorske integrale ranga 1 i 2, a zatim je dokazana i opća formula za integrale proizvoljnog ranga. Na kraju su izvedene formule za redukciju tenzorskih integrala potrebne u računima amplituda radijativnih procesa.

### 3.2.1 Tenzorski integral ranga 1

Tenzorski integral ranga $M = 1$ moguće je dobiti deriviranjem skalarnog integrala (2.1) po, primjerice, $p_1^\mu$:

$$J_\mu^{(N)} = -p_{1\mu} J^{(N)}(n; \{\nu_j\}) - \frac{1}{2(\nu_1 - 1)} \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} J^{(N)}(n; \{\nu_j - \delta_{j1}\}), \tag{3.48}$$

gdje se koristi notacija $\{\nu_j\} \equiv (\nu_1, \ldots, \nu_N)$. Sada preostaje izračunati derivaciju po impulsu u drugom članu na desnoj strani jednadžbe (3.48). Uz pomoć $\alpha$-reprezentacije integrala (B.13),

$$\begin{aligned} J^{(N)}(n; \nu_1, \ldots, \nu_N) &= \pi^{\frac{n}{2}}\, i^{1-n}\, \Gamma\left(\sum \nu_i - \frac{n}{2}\right) \left[\prod \Gamma(\nu_i)\right]^{-1} \\ &\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod \beta_i^{\nu_i - 1} \mathrm{d}\beta_i\, \delta\left(\sum \beta_i - 1\right) \left[\sum_{j<l} \sum \beta_j \beta_l (p_j - p_l)^2 - \sum \beta_i m_i^2\right]^{\frac{n}{2} - \sum \nu_i} \end{aligned} \tag{3.49}$$

mogu se izvesti dvije korisne formule:

$$\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) = 2\nu_1 \sum_{k=2}^{N} (p_1 - p_k)_\mu \, \nu_k \, \pi^{-1} J^{(N)}(n+2;\{\nu_j + \delta_{j1} + \delta_{jk}\}), \tag{3.50}$$

$$J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) = -\pi^{-1} \sum_{k=1}^{N} \nu_k \, J^{(N)}(n+2;\{\nu_j + \delta_{jk}\}). \tag{3.51}$$

Ako granice nisu eksplicitno naznačene, $\sum$ i $\prod$ označavaju sume i produkte od 1 do $N$. Skalarni integrali na desnim stranama jednadžbi (3.50) i (3.51) sada imaju veću dimenziju prostor-vremena $(n+2)$. Relacije (3.50) i (3.51) zajedno daju:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} J^{(N)}(n;\{\nu_j - \delta_{j1}\}) &= -2(\nu_1 - 1)\, p_{1\mu} J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) \\ &= -2(\nu_1 - 1) \sum_{k=1}^{N} p_{k\mu} \nu_k \, \pi^{-1} J^{(N)}(n+2;\{\nu_j + \delta_{jk}\}).\end{aligned} \tag{3.52}$$

Uvrštavanjem formule (3.52) u (3.48) dobije se

$$J_\mu^{(N)}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = \sum_{k=1}^{N} p_{k\mu} \nu_k \, \pi^{-1} J^{(N)}(n+2;\{\nu_j + \delta_{jk}\}). \tag{3.53}$$

### 3.2.2 Tenzorski integral ranga 2

Po analogiji s (3.48), tenzorski integral ranga $M = 2$ je

$$J_{\mu\nu}^{(N)} = -p_{1\nu} J_\mu^{(N)}(n;\{\nu_j\}) - \frac{1}{2(\nu_1 - 1)} \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} J_\mu^{(N)}(n;\{\nu_j - \delta_{j1}\}). \tag{3.54}$$

Uvrštavanjem izraza (3.53), uz pomoć (3.52) dobije se da je

$$\begin{aligned}J_{\mu\nu}^{(N)}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = &-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \, \pi^{-1} J^{(N)}(n+2;\{\nu_j\}) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} p_{k\mu} p_{k\nu} \nu_k(\nu_k + 1) \, \pi^{-2} J^{(N)}(n+4;\{\nu_j + 2\delta_{jk}\}) \\ &+ \sum_{k<k'} \sum (p_{k\mu} p_{k'_\nu} + p_{k'_\mu} p_{k\nu}) \, \nu_k \nu_{k'} \, \pi^{-2} J^{(N)}(n+4;\{\nu_j + \delta_{jk} + \delta_{jk'}\}).\end{aligned} \tag{3.55}$$

### 3.2.3 Tenzorski integral ranga M

Po analogiji s formulama (3.53) i (3.55) može se konstruirati općenita formula za integrale (3.1) (za bilo koji $M$):

$$\begin{aligned}J_{\mu_1\ldots\mu_M}^{(N)}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = &\sum_{\substack{\lambda,\kappa_1,\ldots,\kappa_N \\ 2\lambda + \sum \kappa_i = M}} \left(-\frac{1}{2}\right)^\lambda \{[g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1} \cdots [p_N]^{\kappa_N}\}_{\mu_1\ldots\mu_M} \\ &\times (\nu_1)_{\kappa_1} \cdots (\nu_N)_{\kappa_N} \, \pi^{\lambda - M} J^{(N)}(n + 2(M-\lambda); \nu_1 + \kappa_1, \ldots, \nu_N + \kappa_N),\end{aligned} \tag{3.56}$$

gdje je $(\nu)_\kappa \equiv \Gamma(\nu+\kappa)/\Gamma(\nu)$ Pochhammerov simbol. Formula (3.56) se može dokazati indukcijom tako da se najprije pretpostavi da vrijedi za neki $M$. Po analogiji s (3.54):

$$\begin{aligned} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_M\mu_{M+1}}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) &= -p_{1\mu_{M+1}} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_M}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) \\ &= -\frac{1}{2(\nu_1-1)}\frac{\partial}{\partial p_1^{\mu_{M+1}}} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_M}(n;\nu_1-1,\ldots,\nu_N). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Uvrštavajući sada formulu (3.56) u (3.57), uz pomoć formule (3.52), dobije se

$$\begin{aligned} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_{M+1}}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = &\sum_{\substack{\lambda,\kappa_1,\ldots,\kappa_N \\ 2\lambda+\sum\kappa_i=M}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial p_1^{\mu_{M+1}}} \{[g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1}\cdots[p_N]^{\kappa_N}\}_{\mu_1\ldots\mu_M} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^N (\nu_i)_{\kappa_i-\delta_{i1}}\right) \pi^{\lambda-M} J^{(N)}(n+2(M-\lambda);\{\nu_j+\kappa_j-\delta_{j1}\}) \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{\lambda,\kappa_1,\ldots,\kappa_N \\ 2\lambda+\sum\kappa_i=M}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \{[g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1}\cdots[p_N]^{\kappa_N}\}_{\mu_1\ldots\mu_M} p_{k\mu_{M+1}} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^N (\nu_i)_{\kappa_i+\delta_{ik}}\right) \pi^{\lambda-M-1} J^{(N)}(n+2(M-\lambda+1);\{\nu_j+\kappa_j+\delta_{jk}\}), \end{aligned} \tag{3.58}$$

gdje je uzeto u obzir da je[3] $(\nu_1-1)_{\kappa_1} = (\nu_1-1)(\nu_1)_{\kappa_1-1}$. Uz supstitucije $\kappa_1 = \kappa_1'+1$ i $\lambda = \lambda'-1$ u prvom članu na desnoj strani jednadžbe (3.58) te $\kappa_k = \kappa_k'-1$ u sumama u drugom članu,

$$\begin{aligned} J^{(N)}_{\mu_1\ldots\mu_{M+1}}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = &\sum_{\substack{\lambda,\kappa_1,\ldots,\kappa_N \\ 2\lambda+\sum\kappa_i=M+1}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \\ \times &\left(\frac{\partial}{\partial p_1^{\mu_{M+1}}} \{[g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1+1}[p_2]^{\kappa_2}\cdots[p_N]^{\kappa_N}\}_{\mu_1\ldots\mu_M} + \sum_{k=1}^N \left\{[g]^\lambda \prod_{i=1}^N [p_i]^{\kappa_i-\delta_{ik}}\right\}_{\mu_1\ldots\mu_M} p_{k\mu_{M+1}}\right) \\ \times &(\nu_1)_{\kappa_1}\cdots(\nu_N)_{\kappa_N}\, \pi^{\lambda-M-1} J^{(N)}\left(n+2(M-\lambda+1);\nu_1+\kappa_1,\ldots,\nu_N+\kappa_N\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

U formuli (3.59) se podrazumijeva da je $[g]^{\lambda-1} = 0$ za $\lambda = 0$ i $[p_k]^{\kappa_k-1} = 0$ za $\kappa_k = 0$. Prvi član u velikoj zagradi na desnoj strani jednadžbe (3.59) daje sve tenzorske strukture s metričkim tenzorom $g_{\mu_i\mu_{M+1}}$ $(i = 1,\ldots,M)$, dok drugi član daje sve strukture s impulsima $p_{k\mu_{M+1}}$ $(k = 1,\ldots,N)$. Prema tome, velika zagrada odgovara strukturi $\left\{[g]^\lambda [p_1]^{\kappa_1}\cdots[p_N]^{\kappa_N}\right\}_{\mu_1\ldots\mu_{M+1}}$ pa formula (3.59) odgovara formuli (3.56) uz $M$ zamijenjen s $M+1$. Time je dokaz završen.

Davidičevljeva metoda posjeduje neke prednosti pred metodom Passarina i Veltmana. Uz svaku nezavisnu tenzorsku strukturu u formuli (3.56) nalazi se samo jedan skalarni integral i ne pojavljuje se problematična Gramova determinanta. Također, koeficijenti u formuli (3.56) ne ovise o masama $m_i$. Problem Davidičevljeve metode je to što formula (3.56) zahtjeva izračun skalarnih integrala (2.1) za razne vrijedosti

[3] Uz pomoć svojstva da je $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

dimenzija $n$ i potencija $\nu_i$ u nazivniku. Općeniti izrazi za takve skalarne integrale mogu se prikazati pomoću generaliziranih hipergeometrijskih funkcija [19] i znatno su kompliciraniji od uobičajenih skalarnih integrala, u kojima je $\nu_1 = \cdots = \nu_N = 1$.

Skalarni integrali većih dimenzija $n$ mogu se povezati s integralima nižih dimenzija pomoću rekurzivnih formula [20], no takve rekurzivne relacije sadrže problematičan inverz Gramove determinante.

U sljedećim poglavljima nalaze se eksplicitne formule za redukciju tenzorskih integrala koji se pojavljuju u računima amplituda u ovom radu.

### 3.2.4 2-točkaste funkcije

Formula za redukciju 2-točkastih funkcija ($N = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$) ranga $M = 1$ dobije se izravno iz (3.53):

$$J^{(2)}_{\mu}(n; 1, 1) = p_{\mu}\, \pi^{-1}\, J^{(2)}(n + 2; 1, 2), \tag{3.60}$$

gdje je uzeto da je $p_1 = 0$ i $p_2 = p$, kako bi se dobilo slaganje s izrazima (2.4) i (3.18).

### 3.2.5 3-točkaste funkcije

Formula za redukciju 3-točkastih funkcija ($N = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$) ranga je $M = 1$ je, prema formuli (3.55):

$$J^{(3)}_{\mu}(n; 1, 1, 1) = p_{1\mu}\, \pi^{-1}\, J^{(3)}(n + 2; 1, 2, 1) + p_{2\mu}\, \pi^{-1}\, J^{(2)}(n + 2; 1, 1, 2), \tag{3.61}$$

dok se formula za redukciju 3-točkastih funkcija ranga $M = 2$ dobije pomoću formule (3.55):

$$\begin{aligned} J^{(3)}_{\mu\nu}(n; 1, 1, 1) = &-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, \pi^{-1}\, J^{(3)}(n + 2, 1, 1, 1) \\ &+ p_{1\mu} p_{1\nu}\, 2\pi^{-2}\, J^{(3)}(n + 4; 1, 3, 1) + p_{2\mu} p_{2\nu}\, 2\pi^{-2}\, J^{(3)}(n + 4; 1, 1, 3) \\ &+ (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu})\, \pi^{-2}\, J^{(3)}(n + 4; 1, 2, 2). \end{aligned} \tag{3.62}$$

U oba izraza je propagator $D_1$ iz definicije (3.1) jednak $(l^2 - m_1^2)$ kao u (2.7), (3.23) i (3.32).

## *3.3 Metoda razvoja po vanjskim impulsima*

Treća metoda redukcije tenzorskih integrala, ovaj put aproksimativna, je metoda razvoja propagatora po vanjskim impulsima i primjenjiva je u slučajevima kada su unutarnje mase znatno veće od vanjskih impulsa. Takva pretpostavka može biti ispunjena u radijativnim procesima koji će se ovdje razmatrati.

Uz pretpostavku da su vanjski impulsi puno manji od unutarnjih masa, skalarni propagator može se razviti po vanjskim impulsima do željenog reda:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(l+p)^2-M^2} &= \frac{1}{l^2-M^2}\left[1+\frac{2(l\cdot p)+p^2}{l^2-M^2}\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{l^2-M^2}-\frac{p^2}{(l-M^2)^2}-\frac{2(l\cdot p)}{(l^2-M^2)^2}+\frac{4(l\cdot p)^2}{(l^2-M^2)^3} \\ &+\frac{4(l\cdot p)p^2}{(l^2-M^2)^3}-\frac{8(l\cdot p)^3}{(l^2-M^2)^4}+\cdots \end{aligned} \tag{3.63}$$

Propagatori u skalarnim integralima (2.1), ali i tenzorskim integraima (3.1) mogu se napisati pomoću razvoja (3.63) i, nakon primjene formula kao što su (A.7) i (A.8), integrirati član po član budući da geometrijski red (3.63) uniformno konvergira.

Velika prednost metode razvoja po vanjskim impulsima je to što se ne pojavljuje inverz Gramove determinante, a nema ni znatnih numeričkih nestabilnosti vezanih za iznose vanjskih impulsa.

U sljedećim poglavljima bit će izvedene redukcijske formule za 2-točkaste i 3-točkaste tenzorske integrale potrebne za račun amplituda radijativnih procesa.

### 3.3.1 2-točkaste funkcije

Izraz za 2-točkasti skalarni integral reda $p^2$ lako se može dobiti pomoću razvoja (3.63), zadržavajući samo članove s parnim potencijama od $l$ [članovi s neparnim potencijama ne doprinose, vidi jednadžbu (A.6)]:

$$B_0(p^2;m_1^2,m_2^2)=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p)^2-m_2^2\right]}\simeq J_{011}^{\mathrm{div}}+p^2m_2^2\,J_{013}, \tag{3.64}$$

gdje je $J$-integral

$$J_{kab}(m_1^2,m_2^2)=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{(l^2)^k}{(l^2-m_1^2)^a(l^2-m_2^2)^b}, \tag{3.65}$$

a $J_{011}^{\mathrm{div}}$ je divergentan integral, što se vidi iz dimenzionalne analize. U svim konvergentnim $J$-integralima je $n=4$.

2-točkasti tenzorski integral ranga 1,

$$B_\mu(p^2,m_1^2,m_2^2)=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{l_\mu}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p)^2-m_2^2\right]}\simeq-\left(\frac{2}{n}J_{112}^{\mathrm{div}}+p^2m_2^2\,J_{114}\right)p_\mu, \tag{3.66}$$

dobije se na isti način, ali zadržavanjem članova razvoja (3.63) s neparnim potencijama od $l$ i uporabom formule (A.7). $J_{112}^{\mathrm{div}}$ je divergentan integral, koji se može dimenzionalno regularizirati pa ispred njega stoji faktor s neodređenom dimenzijom $n$.

### 3.3.2 3-točkaste funkcije

Za 3-točkaste funkcije potreban je razvoj produkta dva propagatora (do reda $p^2$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(l+p_1)^2-m_2^2}\frac{1}{(l+p_2)^2-m_3^2} &= \frac{1}{(l^2-m_2^2)(l^2-m_3^2)}\\ &+\frac{1}{l^2-m_2^2}\left[-\frac{p_2^2}{(l^2-m_3^2)^2}-\frac{2(l\cdot p_2)}{(l^2-m_3^2)^2}+\frac{4(l\cdot p_2)^2}{(l^2-m_3^2)^3}\right]\\ &+\frac{1}{l^2-m_3^2}\left[-\frac{p_1^2}{(l^2-m_2^2)^2}-\frac{2(l\cdot p_1)}{(l^2-m_2^2)^2}+\frac{4(l\cdot p_1)^2}{(l^2-m_2^2)^3}\right]\\ &+\frac{4(l\cdot p_1)(l\cdot p_2)}{(l^2-m_2^2)^2(l^2-m_3^2)^2}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

3-točkasti skalarni integral je

$$\begin{aligned}C_0 &= \int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}\\ &\simeq J_{0111}+p_1^2m_2^2\,J_{0131}+p_2^2m_3^2\,J_{0113}+\frac{1}{2}\left[p_1^2+p_2^2-(p_2-p_1)^2\right]J_{1122},\end{aligned} \tag{3.68}$$

gdje je

$$J_{kabc}(m_1^2,m_2^2,m_3^2)=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{(l^2)^k}{(l^2-m_1^2)^a(l^2-m_2^2)^b(l^2-m_3^2)^c}. \tag{3.69}$$

3-točkasti tenzorski integral ranga 1 se dobije pomoću razvoja (3.67) i formule (A.7),

$$C_\mu=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{l_\mu}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}\simeq-\frac{1}{2}p_{1\mu}J_{1121}-\frac{1}{2}p_{2\mu}J_{1112}. \tag{3.70}$$

3-točkasti tenzorski integral ranga 2 se također dobije pomoću razvoja (3.67) te formula (A.7) i (A.8),

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu} &= \int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}\\ &\simeq\frac{1}{3}p_{1\mu}p_{1\nu}\,J_{2131}+\frac{1}{3}p_{2\mu}p_{2\nu}\,J_{2113}+\frac{1}{6}\left(p_{1\mu}p_{2\nu}+p_{2\mu}p_{1\nu}\right)J_{2122}\\ &+g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{n}J_{1111}^{\mathrm{div}}+\left(\frac{1}{6}J_{2131}-\frac{1}{4}J_{1121}\right)p_1^2+\left(\frac{1}{6}J_{2113}-\frac{1}{4}J_{1112}\right)p_2^2\right]\\ &+\frac{1}{12}g_{\mu\nu}\left[p_1^2+p_2^2-(p_2-p_1)^2\right]J_{2122},\end{aligned} \tag{3.71}$$

gdje su iskorištene sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}J_{2131}-m_2^2J_{1131} &= \int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{l^2(l^2-m_2^2)}{(l^2-m_1^2)(l^2-m_2^2)^3(l^2-m_3^2)}=J_{1121},\\ J_{2113}-m_3^2J_{1113} &= \int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{l^2(l^2-m_3^2)}{(l^2-m_1^2)(l^2-m_2^2)(l^2-m_3^2)^3}=J_{1112}.\end{aligned}$$

### 3.4 Usporedba triju metoda

Uspoređujući skalarne integrale koji se pojavljuju uz iste Lorentzove strukture u sve tri metode, mogu se napraviti sljedeće identifikacije:

$$B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) = J^{(2)}(n; 1, 1) \simeq J_{011}^{\text{div}} + p^2 m_2^2 \, J_{013}, \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} C_0(p_1^2, (p_2 - p_1)^2, p_2^2; m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= J^{(3)}(n; 1, 1, 1), \\ &\simeq J_{0111} + p_1^2 m_2^2 \, J_{0131} + p_2^2 m_3^2 \, J_{0113} + \frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 - (p_2 - p_1)^2\right] J_{1122}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$B_1(p^2; m_1^2, m_2^2) = \pi^{-1} \, J^{(2)}(n + 2; 1, 2) \simeq -\frac{2}{n} J_{112}^{\text{div}} - p^2 m_2^2 \, J_{114}, \tag{3.74}$$

$$C_1 = \pi^{-1} \, J^{(3)}(n + 2; 1, 2, 1) \simeq -\frac{1}{2} J_{1121}, \tag{3.75}$$

$$C_2 = \pi^{-1} \, J^{(3)}(n + 2; 1, 1, 2) \simeq -\frac{1}{2} J_{1112}, \tag{3.76}$$

$$C_{11} = 2\pi^{-2} \, J^{(3)}(n + 4; 1, 3, 1) \simeq \frac{1}{3} J_{2131}, \tag{3.77}$$

$$C_{12} = \pi^{-2} \, J^{(3)}(n + 4; 1, 2, 2) \simeq \frac{1}{6} J_{2122}, \tag{3.78}$$

$$C_{22} = 2\pi^{-2} \, J^{(3)}(n + 4; 1, 1, 3) \simeq \frac{1}{3} J_{2113}, \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} C_{00} &= \pi^{-1} \, J^{(3)}(n + 2, 1, 1, 1) \\ &\simeq \frac{1}{n} J_{1111}^{\text{div}} + \left(\frac{1}{6} J_{2131} - \frac{1}{4} J_{1121}\right) p_1^2 + \left(\frac{1}{6} J_{2113} - \frac{1}{4} J_{1112}\right) p_2^2 \\ &+ \frac{1}{12}\left[p_1^2 + p_2^2 - (p_2 - p_1)^2\right] J_{2122}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

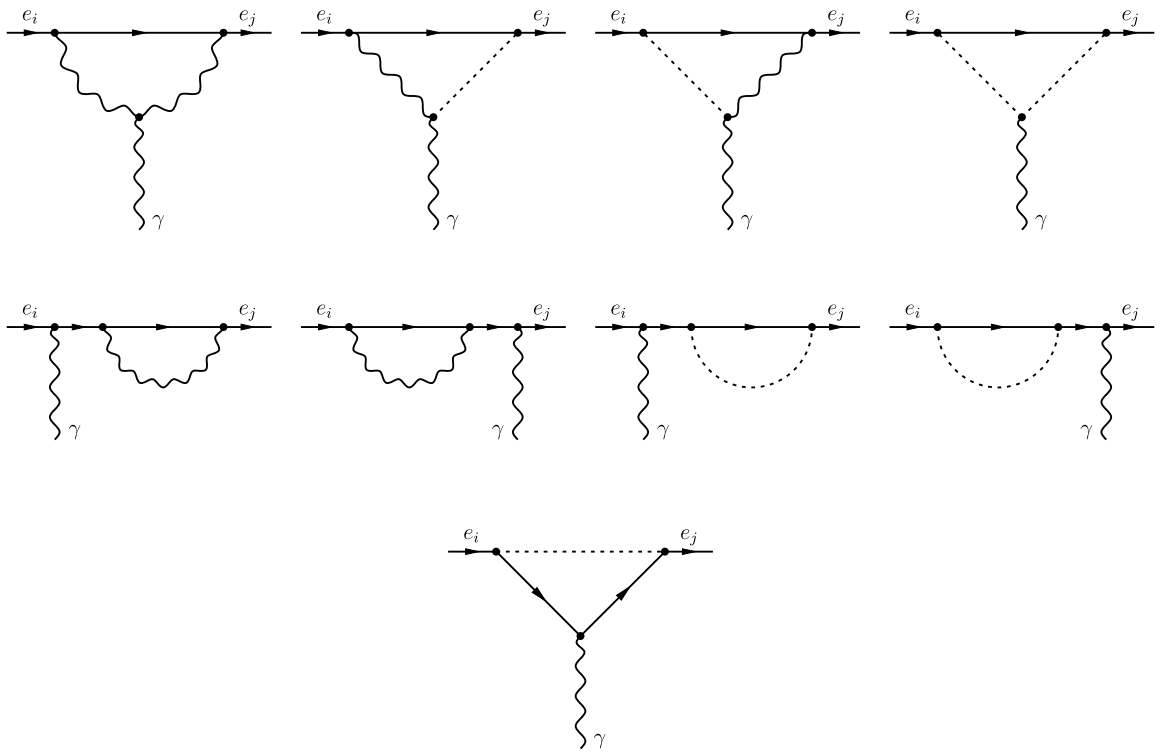
# 4 Radijativni procesi s narušenjem leptonskog okusa

Prije eksplicitnog računa, korisno je detaljno razmotriti strukturu amplituda radijativnih procesa, kao i kinematiku:

$$e_i(p_1) \to e_j(p_2)\gamma(q), \tag{4.1}$$

gdje su $e_i$ i $e_j$ leptoni, redom, mase $m_1$ i $m_2$, a $\gamma$ je foton impulsa $q$.

Na slici 1 su prikazani dijagrami relevantnih amplituda u Feynmanovom baždarenju. Očito je da oni sadrže 2-točkaste i 3-točkaste funkcije, odnosno skalarne i tenzorske integrale po petljama. Budući da postoje točke faznog prostora u kojima Passarino-Veltmanova metoda redukcije tenzorskih integrala nije dobro definirana, potrebno je provjeriti pojavljuju li se ti problemi u radijativnim raspadima.




Slika 1: Dijagrami amplituda za radijativne procese s narušenjem leptonskog okusa. Pune linije predstavljaju fermione, valovite linije baždarne bozone, a isprekidane linije skalarna polja.

Passarino-Veltmanova metoda u sebi krije problematičan inverz Gramove determinante vanjskih impulsa, koja je ovdje, za 3-točkaste funkcije,

$$\det \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{vmatrix} = p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2. \tag{4.2}$$

Za radijativne raspade s leptonima na ljusci mase, u sustavu mirovanja leptona $e_i$,

$$p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 = m_1^2(m_2^2 - E_2^2) = -m_1^2 |\mathbf{p_2}|^2 = -m_1^2 \omega_q^2,$$

gdje je $E_2$ energija leptona $e_j$, a $\mathbf{p_2}$ njegov impuls. Zadnja jednakost u gornjem izrazu vrijedi zbog očuvanja impulsa ($\mathbf{p_2} = -\mathbf{q}$), a $\omega_q$ je energija izlaznog fotona. Prema tome, Gramova determinanta iščezava ako je impuls fotona, a time i impuls leptona $e_j$ nula, što nije fizikalna situacija. Prikaže li se Gramova determinanta preko 4-impulsa fotona,

$$p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 = m_1^2 m_2^2 - \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2 - q^2)^2.$$

Za fotone na ljusci mase je $q^2 = 0$ pa je u tom slučaju

$$p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 = -\frac{1}{4}(m_1^2 - m_2^2)^2,$$

što nikad nije nula jer je za procese s narušenjem leptonskog broja $m_1^2 \neq m_2^2$. Budući da je Gramova determinanta invarijantna na Lorentzove transformacije, gornji za-

ključci vrijede u bilo kojem referentnom sustavu. Inverz negativne Gramove determinante (točnije, korijen inverza) pojavljuje se i u 3-točkastoj skalarnoj funkciji (2.23) kao predfaktor dilogaritama,

$$\frac{1}{c+2\alpha b} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta^{(3)}}} = \frac{2}{|m_1^2 - m_2^2|},$$

što je uvijek konačno. Gramove determinante 2-točkastih funkcija su jednostavno $p_1^2 = m_1^2$ i $p_2^2 = m_2^2$, što je također različito od nule. Problematičan može biti jedino $B_1(q^2 = 0; m_1^2, m_2^2)$, no taj problem je riješen u poglavlju 3.1.3.

Prema tome, potencijalni problemi uzrokovani iščezavanjem Gramove determinante se ne pojavljuju u radijativnim raspadima s narušenjem leptonskog okusa.

## *4.1 Baždarna invarijantnost amplitude*

Sljedeća bitna karateristika radijativnih procesa je baždarna invarijantnost. Ukupna amplituda sadrži 3-točkaste i 2-točkaste funkcije i njenu baždarnu invarijatnost moguće je provjeriti tek nakon potpune redukcije tenzorskih integrala na osnovne skalarne integrale $A_0$, $B_0$ i $C_0$. U slučaju Passarino-Veltmanovih funkcija, potpuno reducirani izrazi su komplicirani, ali je taj problem moguće pojednostaviti uz zahtjev baždarne invarijantnosti. Također, amplituda se može prikazati pomoću tzv. form faktora. U tom obliku ona eksplicitno ovisi samo o impulsu fotona i baždarna invarijantost postaje očita.

Ukupna amplituda procesa $e_i \to e_j\gamma$ može se pisati kao

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu \, \mathcal{M}^\mu, \tag{4.3}$$

gdje je $\epsilon_\mu$ polaziracijski vektor fotona, a $\mathcal{M}^\mu$ amplituda s uklonjenom fotonskom linijom. $\mathcal{M}^\mu$ zadovoljava Wardov identitet [21]

$$q_\mu \, \mathcal{M}^\mu = 0, \tag{4.4}$$

gdje je $q$ impuls fotona. Općenito, $\mathcal{M}^\mu$ za radijativne procese ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\mu = {} & \bar{e}_j \, \mathrm{P_L} \, e_i \, (a_1 P^\mu + a_2 q^\mu) + \bar{e}_j \, \mathrm{P_R} \, e_i \, (b_1 P^\mu + b_2 q^\mu) \\ & + C_L \, \bar{e}_j \, \gamma^\mu \mathrm{P_L} \, e_i + C_R \, \bar{e}_j \, \gamma^\mu \mathrm{P_R} \, e_i,\end{aligned} \tag{4.5}$$

gdje je $P = p_1 + p_2$, a $e_i = e_i(p_1, m_1)$ i $e_j = e_j(p_2, m_2)$ su leptonski spinori. Uporabom Wardovog identiteta (4.4) konstante $C_L$ i $C_R$ se mogu povezati s ostalim konstantama:

$$C_L = -\left(m_2 a_1 + m_1 b_1\right) - \frac{q^2}{m_2^2 - m_1^2}\left(m_2 a_2 + m_1 b_2\right), \tag{4.6}$$

$$C_R = -\left(m_1 a_1 + m_2 b_1\right) - \frac{q^2}{m_2^2 - m_1^2}\left(m_1 a_2 + m_2 b_2\right), \tag{4.7}$$

gdje nazivnici $(m_2^2 - m_1^2)$ dolaze od skalarnog produkta $P \cdot q = p_2^2 - p_1^2$. Uvrštavanjem jednadžbi (4.6) i (4.7) u (4.5), uporabom formula (A.24) i (A.25):

$$\bar{e}_j \, \mathrm{P_L} \, e_i \, P^\mu = \bar{e}_j \gamma^\mu \left(m_2 \mathrm{P_L} + m_1 \mathrm{P_R}\right) e_i - \bar{e}_j \, i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \, \mathrm{P_L} \, e_i,$$
$$\bar{e}_j \, \mathrm{P_R} \, e_i \, P^\mu = \bar{e}_j \gamma^\mu \left(m_1 \mathrm{P_L} + m_2 \mathrm{P_R}\right) e_i - \bar{e}_j \, i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \, \mathrm{P_R} \, e_i,$$

i sljedećih relacija:

$$\bar{e}_j \, \mathrm{P_L} \, e_i \left(m_2^2 - m_1^2\right) = \bar{e}_j \not{q} \left(m_2 \mathrm{P_L} + m_1 \mathrm{P_R}\right) e_i,$$
$$\bar{e}_j \, \mathrm{P_R} \, e_i \left(m_2^2 - m_1^2\right) = \bar{e}_j \not{q} \left(m_1 \mathrm{P_L} + m_2 \mathrm{P_R}\right) e_i,$$

amplituda (4.5) postaje

$$\mathcal{M}^\mu = \bar{e}_j \left(q^\mu \not{q} - q^2 \gamma^\mu\right) \left(F_L \mathrm{P_L} + F_R \mathrm{P_R}\right) e_i - \bar{e}_j \, i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \left(G_L \mathrm{P_L} + G_R \mathrm{P_R}\right) e_i, \tag{4.8}$$

gdje su form faktori:

$$F_L = \frac{m_2 a_2 + m_1 b_2}{m_2^2 - m_1^2}, \quad G_L = a_1,$$
$$F_R = \frac{m_1 a_2 + m_2 b_2}{m_2^2 - m_1^2}, \quad G_R = b_1. \tag{4.9}$$

Amplituda napisana u obliku (4.8) očito zadovoljava Wardov identitet, a form faktori se mogu lako naći iz forme (4.5), bez eksplicitnog svođenja na oblik (4.8), uz uvjet da je Wardov identitet ispunjen na samom početku. Upravo se na taj način form faktori mogu napisati u kompaktnom obliku, bez reduciranja Passarino-Veltmanovih funkcija na osnovne skalarne integrale $A_0$, $B_0$ i $C_0$.

Bitno je primjetiti da se gore opisanom procedurom nalaženja form faktora preskaču amplitude sa samointerakcijama jer je u njima $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$. No, one igraju bitnu ulogu u kraćenju divergentnih doprinosa, a bez njih amplituda ne bi bila baždarno invarijantna. Dakle, to što amplitude sa samointerakcijama naizgled ne doprinose ovdje izvedenim form faktorima nije neočekivano budući da je u izvodu izraza (4.9) *a priori* ugrađena baždarna invarijantnost [preko Wardovog identiteta (4.4)].

## *4.2 Lagranžijani interakcije*

Za izračun amplituda radijativnih procesa na slici 1 korišteni su sljedeći lagranžijani interakcije. Interakcija fotona i dva $W$ bozona:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{AW^+W^-} =& C_{AW^+W^-} \, A^\mu (\partial_\mu W_\nu^+ W^{-\nu} - W_\nu^+ \partial_\nu W^{-\nu}) \\ &+ C_{AW^+W^-} \, W^{-\mu} (\partial_\mu A_\nu W^{+\nu} - A_\nu \partial_\mu W^{+\nu}) \\ &+ C_{AW^+W^-} \, W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^- A^\nu - W^{-\nu} \partial_\mu A_\nu),\end{aligned} \tag{4.10}$$

interakcija fotona, $W$ bozona i skalarnog bozona $G$:

$$\mathscr{L}_{AW^\pm G^\mp} = C_{AW^\pm G^\mp} \, A^\mu W_\mu^\pm G^\mp, \tag{4.11}$$

interakcija fotona i dva skalarna bozona $G$:

$$\mathscr{L}_{AG^+G^-} = C_{AG^+G^-}\, A^\mu \left(G^+\partial_\mu G^- - G^-\partial_\mu G^+\right) \tag{4.12}$$

interakcija leptona, $W$ bozona i neutralnog fermiona $n_a$:

$$\mathscr{L}_{\bar{e}_j n_a W^-} = C^L_{\bar{e}_j n_a W^-}\, \bar{e}_j\, \gamma^\mu \mathrm{P_L}\, n_a\, W^-_\mu + \text{H. c.}, \tag{4.13}$$

interakcija leptona, skalarnog bozona $G$ i neutralnog fermiona $n_a$:

$$\mathscr{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} = \bar{e}_j \left(C^L_{\bar{e}_j n_a G^-}\mathrm{P_L} + C^R_{\bar{e}_j n_a G^-}\mathrm{P_R}\right) n_a\, G^- + \text{H. c.}, \tag{4.14}$$

interakcija fotona i dva nabijena fermiona $\chi_m$:

$$\mathscr{L}_{A\bar{\chi}^-_m\chi^-_m} = C_{A\bar{\chi}^-_m\chi^-_m}\, \bar{\chi}^-_m\gamma^\mu\chi^-_m\, A_\mu, \tag{4.15}$$

interakcija leptona, nabijenog fermiona $\chi_m$ i neutralnog skalara $N_A$:

$$\mathscr{L} = \bar{e}_j \left(C^L_{\bar{e}_j\chi^-_m N_A}\mathrm{P_L} + C^R_{\bar{e}_j\chi^-_m N_A}\mathrm{P_R}\right) \chi^-_m\, N_A + \text{H. c.} \tag{4.16}$$

"H. c." u gornjim izrazima označava hermitsku konjugaciju. Navedeni lagranžijani mogu se shvatiti kao definicije konstanti vezanja koje se u konačnici pojavljuju u form faktorima.

## *4.3 Form faktori*

Ukupna amplituda za $e_i(p_1) \to e_j(p_2)\gamma(q)$ proces je

$$\mathcal{M} = \bar{e}_j \left(q^\mu \not{q} - q^2\gamma^\mu\right)\left(F_L\mathrm{P_L} + F_R\mathrm{P_R}\right) e_i\, \epsilon_\mu(q) - \bar{e}_j\, i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \left(G_L\mathrm{P_L} + G_R\mathrm{P_R}\right) e_i\, \epsilon_\mu(q). \tag{4.17}$$

Definicije form faktora $F_L$ i $F_R$ su:

$$F_L = \frac{m_2 a_2 + m_1 b_2}{m_2^2 - m_1^2}, \quad F_R = \frac{m_1 a_2 + m_2 b_2}{m_2^2 - m_1^2}. \tag{4.18}$$

Dobro je primjetiti da za fizikalno polarizirane fotone ($\epsilon(q)\cdot q = 0$) na ljusci mase ($q^2 = 0$) form faktori $F_L$ i $F_R$ ne doprinose jer je tada prvi član u amplitudi (4.17) nula.

### 4.3.1 Form faktori u Passarino-Veltmanovom pristupu

$$\begin{aligned}
a_2 =& C_{AW^+W^-}C^L_{\bar{e}_j n_a W^-}C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2(C_1 + 2C_2 - 2C_{12} + 2C_{22}) \\
&+C_{AW^\pm G^\mp}C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}C^L_{\bar{e}_j n_a W^-}\, C_1 \\
&+C_{AG^+G^-}C^L_{\bar{e}_j n_a G^-}C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1(-C_{11} + C_{12}) \\
&+C_{AG^+G^-}C^R_{\bar{e}_j n_a G^-}C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2(-C_{12} + C_{22}) \\
&+C_{AG^+G^-}C^L_{\bar{e}_j n_a G^-}C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a(C_1 - C_2) \\
&-C_{A\bar{\chi}^-_m\chi^-_m}C^L_{\bar{e}_j\chi^-_m N_A}C^{L*}_{\bar{e}_i\chi^-_m N_A}\, m_1(-C_1 - C_{11} + C_{12}) \\
&-C_{A\bar{\chi}^-_m\chi^-_m}C^R_{\bar{e}_j\chi^-_m N_A}C^{R*}_{\bar{e}_i\chi^-_m N_A}\, m_2(C_2 - C_{12} + C_{22}) \\
&-C_{A\bar{\chi}^-_m\chi^-_m}C^L_{\bar{e}_j\chi^-_m N_A}C^{R*}_{\bar{e}_i\chi^-_m N_A}\, m_m(-C_1 + C_2)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$
\begin{aligned}
b_2 =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1(-2C_1 - C_2 - 2C_{11} + 2C_{12}) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, (-C_2) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1(-C_{11} + C_{12}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2(-C_{12} + C_{22}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a(C_1 - C_2) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1(-C_1 - C_{11} + C_{12}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2(C_2 - C_{12} + C_{22}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m(-C_1 + C_2)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
G_L =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2(-C_1 + 2C_{12} + 2C_{22}) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, (-C_1) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1(C_1 + C_{11} + C_{12}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2(C_2 + C_{12} + C_{22}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a(-C_1 - C_2 - C_0) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1(C_1 + C_{11} + C_{12}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2(C_2 + C_{12} + C_{22}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m(C_1 + C_2)
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

$$
\begin{aligned}
G_R =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1(-C_2 + 2C_{11} + 2C_{12}) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, (-C_2) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1(C_1 + C_{11} + C_{12}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2(C_2 + C_{12} + C_{22}) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a(-C_1 - C_2 - C_0) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1(C_1 + C_{11} + C_{12}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2(C_2 + C_{12} + C_{22}) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m(C_1 + C_2)
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

U gornjim izrazima skalarni integrali ovise o masama unutarnjih čestica koje su naznačene u konstantama vezanja ispred njih, npr.

$$
\begin{aligned}
& C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, C_{ij} \\
=& C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, C_{ij}(p_1^2, q^2, p_2^2; m^2_{N_A}, m^2_{\chi_m}, m^2_{\chi_m}).
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

### 4.3.2 Form faktori u Davidičevljevom pristupu

$$
\begin{aligned}
a_2 =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2 \left(I^2_{121} + 2I^2_{112} - 2I^4_{122} + 4I^4_{113}\right) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a W^-}\, I^2_{121} \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{R}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(-I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(I^2_{121} - I^2_{112}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{L}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(-I^2_{121} - 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{R}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(I^2_{112} - I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{L}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m (-I^2_{121} + I^2_{112})
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1 \left(-2I^2_{121} - I^2_{112} - 4I^4_{131} + 2I^4_{122}\right) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^{L}_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-} \left(-I^2_{112}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{R}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(I^2_{121} + I^4_{113}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{R}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(I^2_{121} - I^2_{112}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{R}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(I^2_{121} - 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{L}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(I^2_{112} - I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{R}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m \left(-I^2_{121} + I^2_{112}\right)
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
G_L =& C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2 \left(I^2_{121} + 2I^4_{122} + 4I^4_{113}\right) \\
&+ C_{AW^\pm G^\mp} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} \left(-I^2_{121}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(I^2_{121} + 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{R}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(I^2_{112} + I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
&+ C_{AG^+G^-} C^{L}_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(-I^2_{121} - I^2_{112} - C_0\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{L}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(I^2_{121} + 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{R}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(I^2_{112} + I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
&- C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^{L}_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m \left(I^2_{121} + I^2_{112}\right)
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
G_R = & C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1 \left(-I^2_{112} + 4I^4_{131} + 2I^4_{122}\right) \\
& + C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, \left(-I^2_{112}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(I^2_{121} + 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(I^2_{112} + I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(-I^2_{121} - I^2_{112} - C_0\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(I^2_{121} + 2I^4_{131} + I^4_{122}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(I^2_{112} + I^4_{122} + 2I^4_{113}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m \left(I^2_{121} + I^2_{112}\right)
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

U gornjim izrazima su uvedene pokrate

$$I^2_{abc} \equiv \pi^{-1} J^{(3)}(n+2; a, b, c), \tag{4.28}$$

$$I^4_{abc} \equiv \pi^{-2} J^{(3)}(n+4; a, b, c), \tag{4.29}$$

a ovisnost o unutarnjim masama i vanjskim impulsima je ista kao i u (4.23).

### 4.3.3 Form faktori u terminima J-integrala

Mase čestica na koje se veže foton su iste pa se $J$-integrali mogu pojednostaviti tako da se zbroje zadnja dva indeksa:

$$J_{kabc}(m_1^2, m_2^2, m_2^2) = J_{ka(b+c)}(m_1^2, m_2^2). \tag{4.30}$$

Iako su to u principu i dalje 3-točkaste funkcije, struktura im je identična 2-točkastim.

$$
\begin{aligned}
a_2 \simeq & C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2 \left(-\frac{3}{2} J_{113} + \frac{1}{3} J_{214}\right) \\
& + C_{AW^\pm G^\mp} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} \left(-\frac{1}{2} J_{113}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-\frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(\frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(\frac{1}{2} J_{113} - \frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{6} J_{214}\right)
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 \simeq & C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1 \left(\frac{3}{2} J_{113} - \frac{1}{3} J_{214}\right) \\
& + C_{AW^\pm G^\mp} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} \left(\frac{1}{2} J_{113}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-\frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(\frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(\frac{1}{2} J_{113} - \frac{1}{6} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{6} J_{214}\right)
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

$$
\begin{aligned}
G_L \simeq & C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_2 \left(\frac{1}{2} J_{113} + J_{214}\right) \\
& + C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} \left(\frac{1}{2} J_{113}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(J_{113} - J_{012}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m (-J_{113})
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
G_R \simeq & C_{AW^+W^-} C^L_{\bar{e}_j n_a W^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-}\, m_1 \left(\frac{1}{2} J_{113} + J_{214}\right) \\
& + C_{AW^\pm G^\mp} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a W^-} \left(\frac{1}{2} J_{113}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{R*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_1 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^L_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& + C_{AG^+G^-} C^R_{\bar{e}_j n_a G^-} C^{L*}_{\bar{e}_i n_a G^-}\, m_a \left(J_{113} - J_{012}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{R*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_1 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^L_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_2 \left(-\frac{1}{2} J_{113} + \frac{1}{2} J_{214}\right) \\
& - C_{A\bar{\chi}^-_m \chi^-_m} C^R_{\bar{e}_j \chi^-_m N_A} C^{L*}_{\bar{e}_i \chi^-_m N_A}\, m_m (-J_{113})
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

# 5 Zaključak

U ovom radu izračunate su amplitude, odnosno form faktori za radijativne procese s narušenjem leptonskog okusa pomoću tri različite metode redukcije tenzorskih integrala: Passarino-Veltmanove, Davidičevljeve i metode razvoja po vanjskim impulsima. Rezultati su izraženi pomoću općenitih konstanti vezanja, tako da nisu strogo vezani za specifičan model.

Osim za dobru provjeru računa, pristup problemu uz pomoć više metoda dobar je i za razumijevanje samih metoda, kao i njihovih međusobnih poveznica. Ovdje je poveznica između tri izložene metode uspostavljena najkraćim putem – usporedbom Lorentzovih struktura, iako bi bolji (i možda uvjerljiviji) način bila direktna usporedba. Unatoč tome, izračunati form faktori se slažu za sve tri metode, uz identifikacije navedene u poglavlju 3.4, što je i očekivano, budući da se metode razlikuju samo u načinu određivanja skalarnih integrala koji se pojavljuju uz Lorentzove strukture. Ipak, može se dogoditi da se amplitude izračunate Davidičevljevom metodom i metodom razvoja po vanjskim impulsima razlikuju u divergentnom članu, što nije problem jer se divergencije u konačnici krate.

# A Korisne formule

## *A.1 Feynmanova parametrizacija*

Jedan od vrlo korisnih alata u računima s petljama je Feynmanova parametrizacija, pomoću koje se produkt u nazivnku razlomka može prikazati na sljedeći način:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_m} = (m-1)! \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^1 \mathrm{d}u_2 \ldots \int_0^1 \mathrm{d}u_m \, \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^m u_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^m A_i u_i\right)^m}, \tag{A.1}$$

gdje su $u_i$ Feynmanovi parametri. Formula (A.1) može se dokazati indukcijom. Posebnu pažnju treba obratiti na granice integracije nakon što se integrira po jednom od parametara. Općenit oblik koji se dobije Feynmanovom parametrizacijom je višestruki integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^1 \mathrm{d}u_2 \ldots \int_0^1 \mathrm{d}u_m \, \delta(1 - u_1 - \cdots - u_m) f(u_1, \ldots, u_m).$$

Integracijom po $u_m$ varijabla $u_m$ u funkciji $f$ postaje $1 - u_1 - \cdots - u_{m-1}$, ali ako je vrh delta funkcije izvan intervala $[0, 1]$, integral po $u_m$ je nula (u suprotnom je jedinica), što se može pisati kao

$$\int_0^1 \mathrm{d}u_m \, \delta(1 - u_1 - \cdots - u_m) = \theta(1 - u_1 - \cdots - u_{m-1}) \theta(u_1 + \cdots + u_{m-1}). \tag{A.2}$$

Druga "step" funkcija u (A.2) je ekvivalentna uvjetu

$$0 \leq u_1 + \cdots + u_{m-1},$$

koji je automatski ispunjen u narednim integracijama. Prva "step" funkcija predstavlja zahtjev

$$u_1 + \cdots + u_{m-1} \leq 1,$$

što efektivno gornju granicu integracije sljedećeg integrala (npr. po $u_{m-1}$) pretvara u $1 - u_1 - \cdots - u_{m-2}$. Primjer takve integracije je

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^1 \mathrm{d}u_2 \int_0^1 \mathrm{d}u_3 \, \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3) f(u_1, u_2, u_3) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^{1-u_1} \mathrm{d}u_2 \, f(u_1, u_2, 1 - u_1 - u_2). \end{aligned} \tag{A.3}$$

## A.2 Gama funkcija

U računima integrala po petlji, od kojih su neki navedeni u sljedećem poglavlju, javlja se gama funkcija [22],

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z}\, \mathrm{d}t. \tag{A.4}$$

U dimenzionalnoj regularizaciji od posebnog je interesa razvoj gama funkcije oko polova $z = -m$,

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!}\left[\frac{1}{z+m} + \psi(m+1) + \mathcal{O}(z+m)\right]. \tag{A.5}$$

Za $m \in \mathbb{N}$,

$$\psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \gamma,$$

gdje je

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right) = 0.5772156649\ldots$$

Euler-Mascheronijeva konstanta.

## A.3 Korisni integrali

Pod znakom integrala (zbog simetrične integracije) vrijede sljedeće relacije:

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\,[l_\mu, l_\mu l_\nu l_\rho]\, f(l^2) = 0, \tag{A.6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\, l_\mu l_\nu\, f(l^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{n}\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\, l^2\, f(l^2), \tag{A.7}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\, l_\mu l_\nu l_\rho l_\sigma\, f(l^2) = \frac{g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}}{n(n+2)}\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\,(l^2)^2\, f(l^2), \tag{A.8}$$

gdje je $f(l^2)$ neka funkcija od $l^2$.

Pomoću Wickove rotacije [23], kojom se iz prostora Minkowskog prelazi u Euklidski zamjenom $l^0 = i l^0_E$, mogu se izračunati neki korisni integrali:

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{(l^2-\Delta)^\nu} = \frac{(-1)^\nu i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\nu - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\nu-\frac{n}{2}}, \tag{A.9}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\,\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-\Delta)^\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1} i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{g_{\mu\nu}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\nu - \frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\nu-\frac{n}{2}-1}, \tag{A.10}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{l_\mu l_\nu l_\rho l_\sigma}{(l^2-\Delta)^\nu} = \frac{(-1)^\nu i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\nu - \frac{n}{2} - 2\right)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\nu-\frac{n}{2}-2} \times \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}\, g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\rho}). \tag{A.11}$$

Na primjer, izraz (A.9) dobije se na sljedeći način. Wickovom rotacijom $l^2$ prelazi u $-l_E^2$,

$$\int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-\Delta)^\nu} = \frac{(-1)^\nu}{(2\pi)^n}\, i\,\Omega_n \int_0^\infty \mathrm{d}l_E\, l_E^{n-1} \frac{1}{(l_E^2+\Delta)^\nu}, \tag{A.12}$$

gdje je $\Omega_n$ površina $n$-dimenzionalne sfere jediničnog radijusa (integral po kutu), koja se može izračunati pomoću sljedećeg trika:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\pi}\right)^n &= \left(\int \mathrm{d}x\, e^{-x^2}\right)^n = \int \mathrm{d}^n x\, \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\
&= \int \mathrm{d}\Omega_n \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{n-1} e^{-x^2} = \left(\int \Omega_n\right) \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}(x^2)(x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} \\
&= \left(\int \mathrm{d}\Omega_n\right) \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{A.13}$$

pa je integral (A.12) sada, uz supstituciju $y = l_E^2/(l_E^2+\Delta)$,

$$\frac{(-1)^\nu\, 2\pi^{\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{i}{2}\, \Delta^{\frac{n}{2}-\nu} \int_0^1 (1-y)^{\nu-\frac{n}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}y = \frac{(-1)^\nu\, \Delta^{\frac{n}{2}-\nu} i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\nu-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \tag{A.14}$$

gdje je

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{A.15}$$

Uvrštavanjem izraza (A.15) u jednadžbu (A.14) dobije se traženi integral (A.9). Analogno se mogu izračunati i ostali integrali.

## *A.4 Logaritmi*

Logaritam kompleksne varijable posjeduje rez, za koji se može odabrati da ide duž negativne realne osi [4]. U tom slučaju je logaritam produkta kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned}
&\ln(ab) = \ln a + \ln b + \eta(a,b), \\
&\eta(a,b) = 2\pi i \left[\theta(-\operatorname{Im} a)\theta(-\operatorname{Im} b)\theta(\operatorname{Im} ab) - \theta(\operatorname{Im} a)\theta(\operatorname{Im} b)\theta(-\operatorname{Im} ab)\right],
\end{aligned} \tag{A.16}$$

gdje je $\theta(x)$ Heavisideova "step" funkcija, a pomoću funkcije $\eta$ se izražava skok u fazi pri prelasku preko reza. Bitne posljedice gornje relacije su:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \text{ako su } \operatorname{Im} a \text{ i } \operatorname{Im} b \text{ različitih predznaka,} \tag{A.17}$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \text{ako su } \operatorname{Im} a \text{ i } \operatorname{Im} b \text{ istih predznaka.} \tag{A.18}$$

[4] Rez nije jednoznačno određen i može ga se proizvoljno odabrati, ovisno o definiciji argumenta kompleksnih brojeva. Logaritam ima rez na negativnoj realnoj osi ako je $-\pi < \arg z < \pi$.

## A.5 Dilogaritmi

Definicija dilogaritma je

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\ln(1-xt)}{t}, \tag{A.19}$$

gdje je rez logaritma duž negativne realne osi, što znači da dilogaritam ima rez duž pozitivne realne osi, počevši od točke $x = 1$. Dvije korisne formule, pomoću kojih se argument dilogaritma uvijek može staviti unutar jedinične kružnice u kompleksnoj ravnini, s realnim dijelom manjim od $\frac{1}{2}$, su [24]:

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\mathrm{Li}_2(1-z) + \frac{\pi^2}{6} - \ln(z)\ln(1-z), \tag{A.20}$$

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2(-x). \tag{A.21}$$

## A.6 Gordonova dekompozicija

Sljedeće dvije formule korisne su za povezivanje raznih formi s Diracovim matricama u amplitudama radijativnih procesa:

$$\bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2)\left[\frac{(p_2+p_1)^\mu}{m_2+m_1} + i\sigma^{\mu\nu}\frac{(p_2-p_1)_\nu}{m_2+m_1}\right]u(p_1), \tag{A.22}$$

$$\bar{u}(p_2)\gamma^\mu\gamma_5 u(p_1) = \bar{u}(p_2)\left[\frac{(p_2+p_1)^\mu}{m_2-m_1} + i\sigma^{\mu\nu}\frac{(p_2-p_1)_\nu}{m_2-m_1}\right]\gamma_5 u(p_1), \tag{A.23}$$

i lako ih je dokazati uz korištenje jednadžbi gibanja, gdje je $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Množenjem jednadžbe (A.22) s $(m_2 + m_1)$ i jednadžbe (A.23) s $(m_2 - m_1)$ te njihovim oduzimanjem, dobije se da je

$$\bar{u}(p_2)\mathrm{P_L}u(p_1)\, P^\mu = \bar{u}(p_2)\gamma^\mu(m_2\mathrm{P_L} + m_1\mathrm{P_R})u(p_1) - \bar{u}(p_2)\, i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\, \mathrm{P_L}u(p_1). \tag{A.24}$$

gdje je $P = p_1 + p_2$ i $q = p_2 - p_1$. Analogno, zbrajanjem jednadžbi se dobije da je

$$\bar{u}(p_2)\mathrm{P_R}u(p_1)\, P^\mu = \bar{u}(p_2)\gamma^\mu(m_1\mathrm{P_L} + m_2\mathrm{P_R})u(p_1) - \bar{u}(p_2)\, i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\, \mathrm{P_R}u(p_1), \tag{A.25}$$

$\mathrm{P_L}$ i $\mathrm{P_R}$ su lijevi, odnosno desni projektori:

$$\mathrm{P_L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5), \quad \mathrm{P_R} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5). \tag{A.26}$$

# B Alfa-reprezentacija skalarnih integrala

Općeniti skalarni integrali (2.1) mogu se prikazati pomoću tzv. alfa parametara [25]:

$$\begin{aligned} J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{D_1^{\nu_1}\cdots D_N^{\nu_N}} \\ &= \int \mathrm{d}^n l \left[ i^{\sum \nu_i} \prod \Gamma(\nu_i) \right]^{-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod \alpha_i^{\nu_i - 1}\, \mathrm{d}\alpha_i \, \exp\left( i \sum \alpha_i D_i \right), \end{aligned} \tag{B.1}$$

gdje se u produktima i sumama podrazumijevaju granice od $i = 1$ do $N$. Argument eksponencijalne funkcije može se svesti na potpun kvadrat

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i D_i &= \sum \alpha_i \left[ (l + p_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon \right] \\ &= \left( \sum \alpha_i \right) (l^2 + i\varepsilon) + \sum \alpha_i (p_i^2 - m_i^2) + \sum \alpha_i \, 2(l p_i) \\ &= \left( \sum \alpha_i \right) \left[ \left( l + \frac{\sum \alpha_i p_i}{\sum \alpha_i} \right)^2 + \frac{\sum \alpha_i (p_i^2 - m_i^2)}{\sum \alpha_i} - \frac{\left( \sum \alpha_i p_i \right)^2}{\left( \sum \alpha_i \right)^2} + i\varepsilon \right]. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Integral po $l$ je invarijantan na translaciju, tj. može se uvesti supstitucija $l = l' - \sum \alpha_i p_i / \sum \alpha_i$ pa je

$$\int \mathrm{d}^n l \, e^{i \sum \alpha_i D_i} = \kappa \int \mathrm{d}^n l \, e^{i l^2 a}, \tag{B.3}$$

gdje je

$$\kappa = \exp\left[ \frac{1}{a} \sum \alpha_i (p_i^2 - m_i^2) - \frac{1}{a^2} \left( \sum \alpha_i p_i \right)^2 + i\varepsilon \right], \quad a = \sum_i \alpha_i. \tag{B.4}$$

Wickovom rotacijom se prelazi u Euklidski prostor pa integral po $l$ postaje

$$i\kappa \int \mathrm{d}^n l_{\mathrm{E}} \, e^{-i a l_{\mathrm{E}}^2} = i\kappa \, \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^{n-1} \, e^{-iar^2} = i\kappa \, \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \, x^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-iax} \tag{B.5}$$

Integral po $x$ konvergira za bilo koji $n > 0$ ako mu se doda $-i\eta$, gdje je $\eta$ pozitivna infinitezimala.

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, x^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-(\eta + ia)x} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(\eta + ia)^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow{\eta \to 0} i^{-\frac{n}{2}} \, a^{-\frac{n}{2}} \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{B.6}$$

Time je gotova integracija po $l$,

$$\int \mathrm{d}^n l \, e^{i \sum \alpha_i D_i} = i^{1 - \frac{n}{2}} \, \pi^{\frac{n}{2}} \left( \sum \alpha_i \right)^{-\frac{n}{2}} \kappa, \tag{B.7}$$

i integral (B.1) je

$$J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod \alpha_i^{\nu_i - 1} \, \mathrm{d}\alpha_i \, i^{-\sum \nu_i - \frac{n}{2} + 1} \, \pi^{\frac{n}{2}} \left( \sum \alpha_i \right)^{-\frac{n}{2}} \left[ \prod \Gamma(\nu_i) \right]^{-1} \kappa. \tag{B.8}$$

Uvođenjem supstitucija $\sum \alpha_i = \lambda$ i $\alpha_i = \lambda\beta_i$, takvih da je $\sum \beta_i = 1$ i ubacivanjem jedinice

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \delta\left(\lambda - \sum \alpha_i\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\, \delta\left(1 - \sum \beta_i\right) = 1, \tag{B.9}$$

$$J^{(N)}(n;\{\nu_j\}) = i^{-\sum \nu_i - \frac{n}{2}+1}\, \pi^{\frac{n}{2}} \left[\prod \Gamma(\nu_i)\right]^{-1} \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod \beta_i^{\nu_i - 1}\, \mathrm{d}\beta_i\, \lambda^{\sum \nu_i - \frac{n}{2} - 1}$$
$$\times\, \delta\left(1 + \sum \beta_i\right) \exp i\lambda \left[\sum \beta_i (p_i^2 - m_i^2) - \left(\sum \beta_i p_i\right)^2 + i\varepsilon\right]. \tag{B.10}$$

Integral po $\lambda$ je

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \lambda^{\sum \nu_i - \frac{n}{2} - 1}\, \exp i\lambda \left[\sum \beta_i (p_i^2 - m_i^2) - \left(\sum \beta_i p_i\right)^2 + i\varepsilon\right]$$
$$= i^{\sum \nu_i - \frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\sum \nu_i - \frac{n}{2}\right) \left[\sum \beta_i (p_i^2 - m_i^2) - \left(\sum \beta_i p_i\right)^2 + i\varepsilon\right]^{-\sum \nu_i + \frac{n}{2}}. \tag{B.11}$$

Konačno, ostaje preurediti

$$\sum \beta_i (p_i^2 - m_i^2) - \sum_{ij} \beta_i \beta_j\, p_i p_j + i\varepsilon = \sum \beta_i \beta_j\, p_i^2 - \sum_{ij} \beta_i \beta_j\, p_i p_j - \sum \beta_i\, m_i^2 + i\varepsilon$$
$$= \sum_{i<j} \sum \beta_i \beta_j\, (p_i - p_j)^2 - \sum \beta_i^2\, m_i^2 + i\varepsilon, \tag{B.12}$$

gdje je u prvoj jednakosti ubačena jedinica, $\sum \beta_j = 1$. Prema tome, skalarni integral (B.1) u $\alpha$-reprezentaciji je

$$J^{(N)}(n;\nu_1,\ldots,\nu_N) = \pi^{\frac{n}{2}}\, i^{1-n}\, \Gamma\left(\sum \nu_i - \frac{n}{2}\right) \left[\prod \Gamma(\nu_i)\right]^{-1}$$
$$\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod \beta_i^{\nu_i - 1} \mathrm{d}\beta_i\, \delta\left(\sum \beta_i - 1\right) \left[\sum_{j<l} \sum \beta_j \beta_l (p_j - p_l)^2 - \sum \beta_i m_i^2\right]^{\frac{n}{2} - \sum \nu_i}. \tag{B.13}$$

# C Pregled bitnih formula

## *C.1 Skalarni integrali*

### C.1.1 1-točkasta funkcija

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{\mu^{4-n}}{l^2 - m^2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} m^2 \left( \frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi \right) + \frac{i}{(4\pi)^2} m^2 \left( 1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \tag{C.1}$$

### C.1.2 2-točkasta funkcija

$$\begin{aligned} B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{\mu^{4-n}}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p)^2 - m_2^2\right]} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi \right) \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \sum_{i=1}^{2} \left[ \ln(1-x_i) - x_i \ln \frac{x_i - 1}{x_i} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2p^2} \pm \frac{|m_2^2 - m_1^2|}{2p^2} \sqrt{1 - \frac{2p^2(m_2^2 + m_1^2)}{(m_2^2 - m_1^2)^2} + \frac{p^4}{(m_2^2 - m_1^2)^2}} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned} B_0(0; m_1^2, m_2^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi \right) \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \ln \frac{m_2^2 - m_1^2 - i\varepsilon}{\mu^2} + \ln(1-x_0) - x_0 \ln \frac{x_0 - 1}{x_0} - 1 \right] \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$x_0 = \frac{m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \tag{C.5}$$

$$B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) \simeq J_{011}^{\mathrm{div}} + p^2 m_2^2 \, J_{013} \tag{C.6}$$

$$J_{kab}(m_1^2, m_2^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2)^k}{(l^2 - m_1^2)^a (l^2 - m_2^2)^b} \tag{C.7}$$

### C.1.3 3-točkasta funkcija

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\sigma=\pm}(-1)^{i+1} \\
&\times \left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_i}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)+\eta\left(-y_\sigma^{(i)},\frac{1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)\ln\frac{y_i}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right] \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\sigma=\pm}(-1)^{i+1} \\
&\times \left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_i-1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)+\eta\left(1-y_\sigma^{(i)},\frac{1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right)\ln\frac{y_i-1}{y_i-y_\sigma^{(i)}}\right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{c+2\alpha b}\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1} \\
&\times \left[\eta(-y_+^{(i)},-y_-^{(i)})-\eta(y_i-y_+^{(i)},y_i-y_-^{(i)})\right]\ln\frac{y_i-1}{y_i}
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&a=-(p_2-p_1)^2 \quad b=-p_1^2 \quad c=p_1^2+(p_2-p_1)^2-p_2^2 \\
&d=m_3^2-m_2^2+(p_2-p_1)^2 \quad e=m_2^2-m_1^2+p_2^2-(p_2-p_1)^2 \quad f=-m_3^2
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

$$
y_1=y_0+\alpha \quad y_2=\frac{y_0}{1-\alpha} \quad y_3=-\frac{y_0}{\alpha} \quad y_0=-\frac{d+e\alpha}{c+2\alpha b}
\tag{C.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&-p_1^2{y_\pm^{(1)}}^2+(m_2^2-m_1^2+p_1^2)y_\pm^{(1)}-m_2^2=0 \\
&-p_2^2{y_\pm^{(2)}}^2+(m_3^2-m_1^2+p_2^2)y_\pm^{(2)}-m_3^2=0 \\
&-(p_2-p_1)^2{y_\pm^{(3)}}^2+\left[m_3^2-m_2^2+(p_2-p_1)^2\right]y_\pm^{(3)}-m_3^2=0
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

$$
C_0 \simeq J_{0111}+p_1^2m_2^2\,J_{0131}+p_2^2m_3^2\,J_{0113}+\frac{1}{2}\left[p_1^2+p_2^2-(p_2-p_1)^2\right]J_{1122}
\tag{C.12}
$$

$$
J_{kabc}(m_1^2,m_2^2,m_3^2)=\int\frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{(l^2)^k}{(l^2-m_1^2)^a(l^2-m_2^2)^b(l^2-m_3^2)^c}
\tag{C.13}
$$

## C.2 Tenzorski integrali

### C.2.1 2-točkaste funkcije

$$B_\mu(p^2;m_1^2,m_2^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p)^2-m_2^2\right]}$$
$$= p_\mu\, B_1(p^2;m_1^2,m_2^2) = p_\mu\, \pi^{-1}\, J^{(2)}(n+2;1,2) \tag{C.14}$$

$$B_1(p^2;m_1^2,m_2^2) = \frac{1}{2p^2}\left[A_0(m_1^2) - A_0(m_2^2) + (m_2^2-m_1^2-p^2)B_0(p^2;m_1^2,m_2^2)\right] \tag{C.15}$$

$$B_1(0;m_1^2,m_2^2) = -\frac{1}{2}\,\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right)$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{i}{(4\pi)^2}\left[-\frac{1}{2} + \frac{m_1^2}{m_2^2-m_1^2} + \ln\left(\frac{m_2^2}{\mu^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{m_2^2-m_1^2}\right)^2 \ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right)\right] \tag{C.16}$$

$$B_1(0;m^2,m^2) = -\frac{1}{2}\,\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \frac{1}{2}\,\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \tag{C.17}$$

$$B_\mu \simeq -\left(\frac{2}{n}J_{112}^{\mathrm{div}} + p^2 m_2^2\, J_{114}\right) p_\mu \tag{C.18}$$

### C.2.2 3-točkaste funkcije

$$C_\mu = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}$$
$$= p_{1\mu} C_1 + p_{2\mu} C_2 = p_{1\mu}\,\pi^{-1}\,J^{(3)}(n+2;1,2,1) + p_{2\mu}\,\pi^{-1}\,J^{(2)}(n+2;1,1,2) \tag{C.19}$$

$$C_1 = \frac{p_2^2 R_1 - (p_1p_2)R_2}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2} \tag{C.20}$$

$$C_2 = \frac{p_1^2 R_2 - (p_1p_2)R_1}{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2} \tag{C.21}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\left[B_0(1,3) - B_0(2,3) + (m_2^2-m_1^2-p_1^2)C_0\right] \tag{C.22}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left[B_0(1,2) - B_0(2,3) + (m_3^2-m_1^2-p_2^2)C_0\right] \tag{C.23}$$

$$B_0(1,2) = B_0(p_1^2;m_1^2,m_2^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]}, \tag{C.24}$$

$$B_0(1,3) = B_0(p_2^2;m_1^2,m_3^2) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-m_1^2)\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}, \tag{C.25}$$

$$B_0(2,3) = \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{\left[(l+p_1)^2-m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2-m_3^2\right]}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-m_2^2)\left[(l+p_2-p_1)^2-m_3^2\right]}$$
$$= B_0\left((p_2-p_1)^2;m_2^2,m_3^2\right). \tag{C.26}$$

$$C_\mu \simeq -\frac{1}{2} p_{1\mu} J_{1121} - \frac{1}{2} p_{2\mu} J_{1112} \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= \int \frac{\mathrm{d}^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - m_1^2)\left[(l+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(l+p_2)^2 - m_3^2\right]} \\ &= p_{1\mu}\, p_{1\nu}\, C_{11} + p_{2\mu}\, p_{2\nu}\, C_{22} + \left(p_{1\mu}\, p_{2\nu} + p_{2\mu}\, p_{1\nu}\right) C_{12} + g_{\mu\nu}\, C_{00} \qquad \text{(C.28)} \\ &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, \pi^{-1}\, J^{(3)}(n+2,1,1,1) \\ &+ p_{1\mu} p_{1\nu}\, 2\pi^{-2}\, J^{(3)}(n+4;1,3,1) + p_{2\mu} p_{2\nu}\, 2\pi^{-2}\, J^{(3)}(n+4;1,1,3) \\ &+ \left(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}\right) \pi^{-2}\, J^{(3)}(n+4;1,2,2) \qquad \text{(C.29)} \end{aligned}$$

$$C_{11} = \frac{p_2^2 R_{11} - (p_1 p_2) R_{12}}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \tag{C.30}$$

$$C_{12} = \frac{p_1^2 R_{12} - (p_1 p_2) R_{11}}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} = \frac{p_2^2 R_{21} - (p_1 p_2) R_{22}}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \tag{C.31}$$

$$C_{22} = \frac{p_1^2 R_{22} - (p_1 p_2) R_{21}}{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \tag{C.32}$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left[B_1(2,3) + B_0(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_1\right] - C_{00} \tag{C.33}$$

$$R_{12} = \frac{1}{2}\left[B_1(1,2) + B_1(2,3) + B_0(2,3) + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_1\right] \tag{C.34}$$

$$R_{21} = \frac{1}{2}\left[B_1(1,3) - B_1(2,3) + (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_2\right] \tag{C.35}$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}\left[-B_1(2,3) + (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_2\right] - C_{00} \tag{C.36}$$

$$C_{00} = \frac{1}{2(n-2)}\left[B_0(2,3) + 2m_1^2 C_0 - (m_2^2 - m_1^2 - p_1^2) C_1 - (m_3^2 - m_1^2 - p_2^2) C_2\right] \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &\simeq \frac{1}{3} p_{1\mu} p_{1\nu}\, J_{2131} + \frac{1}{3} p_{2\mu} p_{2\nu}\, J_{2113} + \frac{1}{6}\left(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}\right) J_{2122} \\ &+ g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{n} J_{1111}^{\mathrm{div}} + \left(\frac{1}{6} J_{2131} - \frac{1}{4} J_{1121}\right) p_1^2 + \left(\frac{1}{6} J_{2113} - \frac{1}{4} J_{1112}\right) p_2^2\right] \\ &+ \frac{1}{12} g_{\mu\nu}\left[p_1^2 + p_2^2 - (p_2 - p_1)^2\right] J_{2122} \qquad \text{(C.38)} \end{aligned}$$

# Literatura


[1] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8; Phys. Rev. D 14 (1976) 3432.

[2] A. Pilaftsis, Z. Phys. C55 (1992) 275.

[3] P. S. Bhupal Dev, A. Pilaftsis, Phys. Rev. D 86 (2012) 113001.

[4] A. Ilakovac, A. Pilaftsis, L. Popov, Phys. Rev. D87 (2013) 053014.

[5] B. T. Cleveland et al. [Homeostake], Astrophys. J. 498 (1998) 505;
J. N. Abdurashitov et al. [SAGE Collaboration], Phys. Rev. C 80 (2009) 015807;
J. Hosaka et al. [Super-Kamiokande Collaboration] Phys. Rev. D 73 (2006) 112001;
J. P. Cravens et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D 78 (2008) 032002;
B. Aharmim et al. [SNO Collaboration], Phys. Rev. C 72 (2005) 055502;
B. Aharmim et al. [SNO Collaboration], Phys. Rev. C 81 (2010) 055504.

[6] Y. Fukuda et al. [Super-Kamiokande collaboration], Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1562;
J. Hosaka et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D 74 (2006) 032002;
J. Ashie et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D 71 (2005) 112005.

[7] M.H. Ahn et al. [K2K Collaboration], Phys. Rev. D 74 (2006) 072003;
P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. 101 (2008) 131802;
P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. 101 (2008) 221804;
A. Habig et al. [MINOS Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. 218 (2011) 320;
M. Hartz [T2K Collaboration], arXiv:1201.1846;
P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 191801.

[8] S. Abe et al. [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 221803.

[9] J. Adam et al. [MEG Collaboration], Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 171801 [arXiv:1107.5547 [hep-ex]].

[10] U. Bellgart et al. [SINDRUM Collaboration], Nucl. Phys. B 299 1988 1.

[11] C. Dohmen et al. [SINDRUM II collaboration], Phys. Lett. B 317 (1993) 631.

[12] W. Bertl et al., Eur. Phys. J. C 47 (2006) 337.

[13] Y. Miyazaki et al. [Belle Collaboration], arXiv:1206.5595;
Y. Miyazaki et al. [Belle Collaboration], Phys. Lett. B 699 (2011) 251;
B. Aubert et al. [BaBar Collaboration], Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 021801;
K. Hayasaka et al. [Belle Collaboration], Phys. Lett. B 687 (2010) 139;
J. P. Lees et al. [BaBar Collaboration], Phys. Rev. D 81 (2010) 111101;
Y. Miyazaki et al. [Belle Collaboration], Phys. Lett. B 692 (2010) 4;
B. Aubert et al. [BaBar Collaboration], Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 151802;
J. Beringer et al. [Particle Data Group], Phys. Rev. D 86 (2012) 010001.

[14] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B153 (1979) 365.

[15] D. B. Melrose, Nuovo Cimento 40 (1965) 181.

[16] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys B44 (1972) 189.

[17] G. Passarino, M. Veltman, Nucl. Phys B160 (1979) 151.

[18] A. I. Davydychev, Phys. Lett. B236 (1991) 107.

[19] A. I. Davydychev, J. Math. Phys. 32 (1991) 1052.

[20] O. V. Tarasov, Phys. Rev. D 54 (1996) 6479

[21] Y. Takahashi, Nuovo Cimento, Ser 10, 6 (1957) 370;
J.C. Ward, Phys. Rev. 78 (1950) 182.

[22] A. Erdelyi, Higher transcendental functions 1, New York, McGraw-Hill, 1985.

[23] G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (4) (1954) 1124.

[24] L. Lewin, Polylogarithms and associated functions, New York, Elsevier North Holland, 1981.

[25] V. A. Smirnov, Evaluating by Alpha and Feynman Parameters, Springer Tracts in Modern Physics Vol. 211 (2005) 31-53.