

# Određivanje spektra antineutrina iz nuklearnih reaktora

---

Petković, Jelena

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:996785>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Jelena Petković

ODREĐIVANJE SPEKTRA ANTINEUTRINA  
IZ NUKLEARNIH REAKTORA

Diplomski rad

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: dipl. ing. fiz.

**Jelena Petković**

Diplomski rad

**Određivanje spektra antineutrina  
iz nuklearnih reaktora**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Tomislav Marketin

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2015.

*Srdačno zahvaljujem svom mentoru dr. sc. Tomislavu Marketinu na iskazanoj pomoći prilikom odabira i izrade ovog diplomskog rada, a napose za vođenje kroz čudnovate puteve klastera i skriptnih jezika, ukazivanje na trikove koji su neusporedivo ubrzali ionako zahtjevno korištenje Grace-a, filtriranje pregršta dobivenih rezultata te finalna savjetovanja oko uklapanja svega u jednu cjelinu.*

*Zahvaljujem svim profesorima i asistentima koji su svojim utjecajem ostavili neizbrisiv trag i tako doprinijeli formiranju mene kao osobe.*

*Posebnu zahvalu dugujem dragim kolegicama Andrei Horvat, Ivani Vuković, Lamjani Jurčec i Antoniji Utrobičić koje su tijekom studija postale puno više od toga – doživotne prijateljice.*

*Svojim roditeljima zahvaljujem na financijskoj potpori i moralnoj podršci, pogotovo blagoslovu za odabir fakulteta. Hvala mojoj sestri i baki što su oduvijek bezuvjetno vjerovale u mene.*

*Svom zaručniku Bernardu Pletikosi sam vječno zahvalna što me je berzrezvno dijelio s nuklearnom fizikom i svim njenim srođnicama, a njegovoj obitelji hvala na beskonačnom strpljenju.*

*Svim prijateljima i ostatku obitelji zahvaljujem na razumijevanju za izbjivanja s mnogobrojnih proslava i druženja.*

## Sažetak

Motivaciju za izradu ovog diplomskog rada predstavljaju oscilacije neutrina u nuklearnim reaktorima. U tu svrhu potrebno je dobro poznavanje spektra antineutrina. Princip rada nuklearnih reaktora se temelji na fisiji, a “gorivo” čine četiri atoma:  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  i  $^{241}\text{Pu}$ . Naime, prilikom fisije se stvaraju produkti čiji raspon seže od jezgara u dolini  $\beta$ -stabilnosti do vrlo nestabilnih jezgara bogatih neutronima. Upravo te nestabilne jezgre svojim  $\beta$ -raspadom proizvode elektrone i antineutrone. Budući da je većina dobivenih jezgara veoma egzotična – nije ih moguće istraživati postojećim eksperimentalnim pogonima. Stoga je nužno okrenuti se teorijskom opisu nuklearne strukture. Konkretno, cilj ovog rada je koristiti mikroskopski model nuklearne strukture koji se bazira na relativističkom nuklearnom funkcionalu gustoće te pomoću njega reproducirati eksperimentalni spektar elektrona i tako odrediti spektar antineutrina. Zahvaljujući tom pristupu, iz dobivenih rezultata se još može procijeniti i udio doprinosa zabranjenih prijelaza u ukupnim spektrima, što nije bio slučaj kod dosadašnjih postupaka koji su se oslanjali na pretvorbu mjerenog spektra elektrona u spektar antineutrina.

# Sadržaj

|          |                                                                                                                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>                                                                                                                                       | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Relativistička teorija srednjeg polja</b>                                                                                                      | <b>3</b>  |
| 2.1      | Relativistička gustoća lagranžijana . . . . .                                                                                                     | 4         |
| 2.2      | Kovarijantna teorija funkcionala gustoće . . . . .                                                                                                | 7         |
| 2.3      | Relativistički Hartree-Bogoljubov model . . . . .                                                                                                 | 9         |
| 2.3.1    | Kvazičestični operatori . . . . .                                                                                                                 | 9         |
| 2.3.2    | Bogoljubova transformacija . . . . .                                                                                                              | 10        |
| 2.3.3    | RHB model . . . . .                                                                                                                               | 11        |
| <b>3</b> | <b>Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajne faza</b>                                                                                   | <b>15</b> |
| 3.1      | Matrične jednačbe RQRPA . . . . .                                                                                                                 | 16        |
| 3.2      | Proton-neutron RQRPA . . . . .                                                                                                                    | 19        |
| 3.3      | Vremena poluživota $\beta$ raspada . . . . .                                                                                                      | 22        |
| <b>4</b> | <b>Rezultati</b>                                                                                                                                  | <b>26</b> |
| 4.1      | Eksperimentalna pozadina reaktorskih antineutrina . . . . .                                                                                       | 26        |
| 4.2      | Osvrt na prijašnje metode određivanja spektra antineutrina . . . . .                                                                              | 28        |
| 4.3      | Anomalija reaktorskih antineutrina . . . . .                                                                                                      | 30        |
| 4.4      | $\beta$ spektar pojedinog prijelaza . . . . .                                                                                                     | 32        |
| 4.5      | Korekcije na $\beta$ spektar . . . . .                                                                                                            | 34        |
| 4.5.1    | Korekcija nuklearnog kulonskog polja . . . . .                                                                                                    | 35        |
| 4.5.2    | Korekcije konačne veličine . . . . .                                                                                                              | 36        |
| 4.5.3    | Usporedba korekcija . . . . .                                                                                                                     | 38        |
| 4.6      | $\beta$ spektar pojedine jezgre . . . . .                                                                                                         | 39        |
| 4.7      | Kumulativni spektri fisijskih izotopa . . . . .                                                                                                   | 42        |
| 4.7.1    | Vodeći doprinosi kumulativnim spektrima . . . . .                                                                                                 | 48        |
| <b>5</b> | <b>Zaključak</b>                                                                                                                                  | <b>53</b> |
|          | <b>Dodaci</b>                                                                                                                                     | <b>53</b> |
| <b>A</b> | <b>Stacionarne jednačbe gibanja</b>                                                                                                               | <b>54</b> |
| <b>B</b> | <b>Kumulativni spektri za <math>^{241}\text{Pu}</math>, <math>^{235}\text{U}</math> i <math>^{238}\text{U}</math> te njihovi vodeći doprinosi</b> | <b>58</b> |
|          | <b>Popis slika</b>                                                                                                                                | <b>65</b> |
|          | <b>Popis tablica</b>                                                                                                                              | <b>66</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                                                                                                                 | <b>67</b> |

# 1 Uvod

Atomska jezgra je kompleksni mezoskopski objekt koji se sastoji od nukleona (tj. protona i neutrona), a koji su i sami složeni QCD<sup>1</sup> objekti sastavljeni od kvarkova i gluona. Budući da su energijske skale tih stupnjeva slobode dovoljno razdvojene, nukleoni se smatraju točkastim česticama vezanim jakim nuklearnom silom. Odlika mezoskopnosti podrazumijeva da nukleona ima previše za direktnu nukleon-nukleon i tročestičnu interakciju (izuzetak su vrlo lake jezgre s  $A < 10$ ), dok ih nema dovoljno mnogo za primjenu metoda beskonačnih sustava [1]. Jedina potpuno konzistentna teorija kvantno-mehaničkog i relativističkog sustava konačnog broja vezanih čestica je relativistička kvantna teorija polja koja se temelji na lokalnoj, Lorentz-invarijantnoj gustoći lagranžijana. Generalizirane koordinate u nuklearnom problemu su hadroni (barioni i mezoni), zato je teorija poznata kao kvantna hadrodinamika (QHD<sup>2</sup>) [2].

Uzme li se sve u obzir, iznenađuje činjenica da se brojna svojstva jezgara mogu objasniti nukleonima koji neovisno popunjavaju orbitale jednočestičnog potencijala. Eksperimentalno se pokazalo da je slobodni put veći za vezane nukleone što znači da je interakcija jako renormalizirana utjecajima medija – okolni nukleoni zasjenjuju direktne sudare. Najočitija potvrda tih efekata je postojanje ljuski i *magičnih brojeva*. Modeli ljusaka (SM<sup>3</sup>) koriste realistične interakcije i uključuju različite korelacije [3]. Prednost im je primjenjivost neovisno o parnosti jezgre, a nedostatak nepraktičnost za teške jezgre. Taj uspjeh opravdava sliku jezgre kao skupa nukleona koji se gibaju u srednjem polju nastalom njihovim zajedničkim djelovanjem. Samosuglasni modeli srednjeg polja koriste efektivne interakcije i primjenjivi su na proizvoljno teške jezgre.

Upravo su teške jezgre bogate neutronima odgovorne za proizvodnju antineutrina u nuklearnim reaktorima putem  $\beta^-$  raspada u sklopu kojeg dolazi do prijelaza jednog neutrona u proton. Mjera za vjerojatnost prijelaza je dana matričnim elementom koji se izvodi iz Fermijevog zlatnog pravila, a na temelju čijeg razvoja u red se izdvajaju dozvoljeni i zabranjeni prijelazi. Detekcija antineutrina se odvija putem *inverznog  $\beta$  raspada* pri kojem dolazi do njegovog uhvata protonom, a za što je udarni presjek izvanredno mali [4]. Baš je u tome srž problema jer se spektri antineutrina, za razliku od elektronskih, ne mogu mjeriti direktno, pa su razvijene različite pomoćne metode.

Poboljšanje preciznosti spektra antineutrina iz nuklearnih reaktora je motivirano novom generacijom eksperimenata: Double CHOOZ [5] (Francuska), Daya Bay [6] (Kina) i RENO [7] (J. Koreja) koji su, još neviđenom osjetljivošću pokazali odstupanje od očekivanih vrijednosti. Zasad u planu nema fundamentalnih istraživanja koja bi se bavila novom oscilacijskom fizikom [8]. Kompaktni detektori antineutrina služe kao IAEA<sup>4</sup> sigurnosni alat u programu suzbijanja nuklearnog naoružanja koji se provodi na svjetskoj razini, a također bi imali dobrobiti od točnijeg opisa spektra antineutrina.

---

<sup>1</sup>eng. QCD = Quantum Chromodynamics

<sup>2</sup>eng. QHD = Quantum Hadrodynamics

<sup>3</sup>eng. SM = Shell Model

<sup>4</sup>eng. IAEA = International Atomic Energy Agency

Nuklearni reaktori su izvori najintenzivnijih tokova antineutrina pod kontrolom čovjeka. Nestabilne jezgre nastale fisijom goriva ( $^{235,238}\text{U}$  i  $^{239,241}\text{Pu}$ ) putem lanca  $\beta^-$  raspada postižu izotopsko stanje u dolini  $\beta$ -stabilnosti pri čemu prosječno generiraju 6 antineutrina. Ta svojstva se iskorištavaju u eksperimentima neutrinjskih oscilacija<sup>5</sup> usmjerenim na određivanje posljednjeg nepoznatog kuta neutrinjskog miješanja  $\theta_{13}$  [9]. Vrijednost tog parametra bi mogla odrediti budući trend fizike neutrina, posebno potragu za narušavanjima nabojne konjugacije i pariteta ( $\text{CP}$ )<sup>6</sup> u leptonskom sektoru.

Prvotno se spektar antineutrina određivao pretvorbom izmjerenog elektronskog spektra tako da se svaki spektar prilagođavao pomoću skupa virtualnih  $\beta$  grana [10]. Nedostatak je bila znatna nepouzdanost oblika dobivenog spektra. Kako su podaci o mnogobrojnim  $\beta$  granama postali sve dostupniji, razvile su se *ab initio* metode kojima se spektar računa kao suma spektara svih fisijskih produkata otežanih kumulativnim faktorima. Nažalost, nuklearne baze podataka, kolikogod ogromne, još nisu dostatne za precizne rezultate, ali su potakle hibridnu metodu kojom se izmjerene elektronski spektri i dalje prilagođavaju, ali pomoću skupa realističnih  $\beta$  grana. Tako poboljšani spektri imaju povećane srednje vrijednosti toka za  $\approx 3\%$ , tzv. *anomalija reaktorskih antineutrina* [8]. Ishod su nezavisno potvrdili spomenuti eksperimenti [5], [6] i [7].

Anomalija bi mogla biti od iznimne važnosti, ukoliko bi se manjak detektiranog toka antineutrina mogao pripisati oscilacijama standardnih neutrina (elektronski, muonski i taonski) u tzv. “sterilni” neutrino mase oko 1 eV koji ne bi nosio ni slabi nuklearni naboj što bi objasnilo zašto ne podliježe detekciji, ali van okvira postojeće fizike [8]. Ni ispitivanje efekata raznih korekcija na spektre nije polučilo uspjeh [11]. Pritom su se razmotrili samo dozvoljeni raspadi, ali već jednostavnim uključivanjem prvo-zabranjenih raspada se dobije veličina koja se da usporediti s anomalijom [12].

Na tragu tih indicija, u ovom radu se ispituju efekti realističnih prvo-zabranjenih raspada i glavnih korekcija u sklopu računa mikroskopske nuklearne strukture. U tu svrhu se uspoređuju spektri pojedinih prijelaza i snage pojedinih korekcija. Već se na spektru jezgre uočavaju efekti uključivanja korekcija, a pogotovo prvo-zabranjenih prijelaza, što se potvrđuje i na razini kumulativnih spektara svih fisijskih izotopa. Na različitim energijama se analiziraju vodeći doprinosi s ciljem usmjeravanja mjerenja na te izotope. Značaj ovog rada leži u činjenici da je u cijelosti teorijsko istraživanje.

U drugom poglavlju se razrađuje slika sferne jezgre u osnovnom stanju pomoću relativističke teorije srednjeg polja koja se u okvirima kovarijantne teorije funkcionala energije generalizira na relativistički Hartree-Bogoljubov model. U trećem poglavlju se razvija relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza koja u limesu malih oscilacija opisuje kolektivna pobuđenja te se računaju vremena poluživota  $\beta$  raspada. Rezultati su izloženi i raspravljani u četvrtom, a zaključak slijedi u petom poglavlju<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>Neutrinjske oscilacije su kvantno-mehanički fenomen miješanja leptonskih okusa što implicira da neutrino ima masu različitu od nule i time se kosi sa standardnim modelom elementarnih čestica. Iako se stvara s određenim okusom, isti se periodički mijenja. Eksperimentalno je potvrđeno 2013. godine.

<sup>6</sup>eng.  $\text{CP} = \text{Charge Parity}$

<sup>7</sup>Vektori u koordinatnom prostoru se označavaju podebljanim slovima, a u izospinskom strelicama.



## 2 Relativistička teorija srednjeg polja

Relativistička teorija srednjeg polja (RMFT<sup>8</sup>) definira atomsku jezgu kao kvantni sustav u kojem su nukleoni opisani kao Diracove čestice koje međudjeluju izmjenom virtualnih mezona i elektromagnetskog polja. Kako je u uvodu objašnjeno, pritom se zanemaruje njihova podstruktura. Konkretno, za prvi stupanj slobode modela se uzimaju slobodni nukleoni mase  $m$  kao Diracovi spinori  $\psi$ . Elektromagnetsko polje je uključeno jer su protoni nabijene čestice, pa se tim putem odvija njihovo kulonsko međudjelovanje [13]. Tako, kao drugi stupanj slobode, u model ulazi vektorsko polje  $\gamma$  fotona koje karakterizira  $m_\gamma = 0$  i  $J^\Pi = 1^-$ .

Kod mezona, od interesa su kvantna obilježja: spin ( $J$ ), izospin ( $T$ ) i paritet ( $\Pi$ ). U interakciji dominiraju mezoni s najnižim vrijednostima  $J$  i  $T$  te se s obzirom na to klasificiraju kao skalarni ( $J = 0$ ) ili vektorski ( $J = 1$ ), odnosno izoskalarni ( $T = 0$ ) ili izovektorski ( $T = 1$ ) mezoni. U prirodi nije opaženo narušavanje pariteta, stoga je potrebno zadržati samo ona polja koja čuvaju paritetnu simetriju, a to su mezoni koji imaju paritet  $\Pi = (-1)^J$ . Model je namijenjen proučavanju parno-parnih jezgara koje uvijek imaju pozitivno osnovno stanje što znači da polje negativnog pariteta ne može doprinosti te opravdava isključivanje piona, iako je to polje u mikroskopskoj slici zaslužno za dio dugodosežne nuklearne interakcije ( $r > 2 \text{ fm}$ ) [14].

|   | mezon    | $(J^\Pi, T)$ | polje                  | napomena                      |
|---|----------|--------------|------------------------|-------------------------------|
| ✓ | $\sigma$ | $(0^+, 0)$   | izoskalarno skalarno   | srednjedosežno privlačenje    |
| ✓ | $\omega$ | $(1^-, 0)$   | izoskalarno vektorsko  | kratkodosežno odbijanje       |
| ✓ | $\rho$   | $(1^-, 1)$   | izovektorsko vektorsko | izospinski dio nuklearne sile |
| ✗ | $\delta$ | $(0^+, 1)$   | izovektorsko skalarno  | ne poboljšava model           |
| ✗ | $\pi$    | $(0^-, 1)$   | izovektorsko skalarno  | neodgovarajući paritet        |

Tablica 2.1: Potencijalni kandidati za mezonske stupnjeve slobode

Minimalni skup čine mezonska polja naznačena u tablici (2.1). Dakle, radi se o tzv. jednostavnom  $(\sigma, \omega, \rho, \gamma)$  modelu.

Ekvivalentnu metodu za rješavanje nuklearnog problema više tijela omogućava kovarijantna teorija funkcionala gustoće (DFT<sup>9</sup>) na način da se zanemare potencijali korelacije lokalne izmjene. Kohn-Shamov pristup minimizacije funkcionala energije se koristi za određivanje egzaktnog osnovnog stanja nuklearnog sustava. Funkcional energije opisuje dinamiku nuklearnog sustava, a izvodi se iz efektivnog lagranžijana. Teorija je fenomenološka – u sklopu lagranžijana se pojavljuju efektivni parametri (mase mezona i konstante njihovih vezanja na nukleone) koji se prilagođavaju tako da reproduciraju globalna svojstva nuklearne materije te nekoliko konačnih jezgara u njihovom osnovnom stanju. Jednom kada se slobodni parametri pravilno prilagode, model se na kvantitativnoj razini može koristiti i za različite tipove pobuđenja [15].

<sup>8</sup>eng. RMFT = Relativistic Mean-Field Theory

<sup>9</sup>eng. DFT = Density Functional Theory

## 2.1 Relativistička gustoća lagranžijana

Modeli koji se temelje na RMFT postižu pouzdanost usporedivu s nerelativističkim Hartree-Fock-Bogoljubovim okvirom koji se pak temelji na efektivnim interakcijama Skyrme i Gogny. Jezgra se opisuje pomoću polja slobodnih nukleona, mezona i fotona te interakcije u vidu vezanja mezona na nukleone, a fotona na protone. Izvor mezona je gustoća nukleona koja vezuje valne jednačbe i čini sustav samosuglasnim [1]. Dinamiku sustava definira gustoća efektivnog lagranžijana [16]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_N && \text{član slobodnih nukleona} \\ &+ \mathcal{L}_\phi && \text{član slobodnih mezona i fotona} \\ &+ \mathcal{L}_{\text{int}} && \text{članovi interakcije nukleon-mezon i proton-foton}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Nadalje se raspisuje svaki član zasebno, počevši s lagranžijanom slobodnih nukleona:

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (2.2)$$

$\psi(x)$  su Diracovi spinori za nukleone mase  $m$ , a  $\gamma^\mu$  kovarijantne četveromatrice<sup>10</sup>. Drugi član efektivnog lagranžijana je lagranžijan slobodnih mezona i fotona:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) && \text{član } \sigma \text{ mezona} \\ &- \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) && \text{član } \omega \text{ mezona} \\ &- \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \vec{R}_{\mu\nu} \vec{R}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu) && \text{član } \rho \text{ mezona} \\ &- \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} && \text{član } \gamma \text{ fotona}\end{aligned}\quad (2.3)$$

gdje su  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$ ,  $m_\rho$  mase mezona, a  $\sigma(x)$ ,  $\omega^\mu(x)$ ,  $\vec{\rho}^\mu(x)$  polja mezona i  $A^\mu(x)$  polje fotona, dok tenzorska polja  $\Omega_{\mu\nu}$ ,  $\vec{R}_{\mu\nu}$  i  $F_{\mu\nu}$  potječu od vektorskih mezona i fotona:

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad \text{tenzor } \omega \text{ mezona}, \quad (2.4)$$

$$\vec{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu \quad \text{tenzor } \rho \text{ mezona}, \quad (2.5)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{tenzor } \gamma \text{ fotona}. \quad (2.6)$$

Treći član je lagranžijan interakcije mezona i nukleona te fotona i protona:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = - \sum_\phi \bar{\psi} \Gamma_\phi \phi \psi, \quad (2.7)$$

gdje  $\phi$  označava različite mezone i njihove vrhove  $\Gamma_\phi$ .

<sup>10</sup>Četveromatrice u kovarijantnom zapisu  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma)$  glase:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu su  $\tau = \tau_x \hat{x} + \tau_y \hat{y} + \tau_z \hat{z}$  Paulijeve matrice (hermitske i unitarne) spina  $\frac{1}{2}$ :

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Za minimalno vezanje vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} = & -\bar{\psi}\Gamma_{\sigma}\sigma\psi && \text{član } \sigma \text{ mezona} \\
& -\bar{\psi}\Gamma_{\omega}\omega\psi && \text{član } \omega \text{ mezona} \\
& -\bar{\psi}\vec{\Gamma}_{\rho}\vec{\rho}\psi && \text{član } \rho \text{ mezona} \\
& -\bar{\psi}\Gamma_e A\psi && \text{član } \gamma \text{ fotona}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

pri čemu su vrhovi interakcije:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\sigma} &= g_{\sigma} && \text{vrh } \sigma \text{ mezona,} \\
\Gamma_{\omega}^{\mu} &= g_{\omega}\gamma^{\mu} && \text{vrh } \omega \text{ mezona,} \\
\vec{\Gamma}_{\rho}^{\mu} &= g_{\rho}\vec{\tau}\gamma^{\mu} && \text{vrh } \rho \text{ mezona,} \\
\Gamma_e^m &= e\frac{1-\tau_3}{2}\gamma^{\mu} && \text{vrh } \gamma \text{ fotona,}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

gdje su konstante vezanja  $g_{\sigma}$ ,  $g_{\omega}$ ,  $g_{\rho}$  i  $e$ , dok je  $\vec{\tau}$  operator izospina, a  $\tau_3$  njegova treća komponenta. Zornu vizualizaciju lagranžijana interakcije omogućavaju Feynmanovi dijagrami koji se crtaju prema Feynmanovim pravilima. Različite linije predstavljaju trajektorije čestica kao na slici 2.1: barioni se označavaju ravnom, skalari iscrtkanom, a vektori valovitom linijom. Njihova sjecišta su vrhovi interakcije koji uključuju  $i\Gamma_{\phi}$ . Svaki propagator ima odgovarajuće faktore, a fermionska linija  $\delta_{ij}$  za izospin [2].



Slika 2.1: Elementi Feynmanovih dijagrama

Nuklearna sila je rezultat poništenja dva jaka potencijala, privlačnog skalarnog i odbojnog vektorskog. Privlačno skalarno polje  $\sigma$  mezona proizlazi od kompleksnih mikroskopskih procesa poput nekorelirane i korelirane rezonance dva piona ili QCD kombinacije parova kvark-antikvark i gluona, dok odbojni potencijal potječe od  $\omega$  vektorskog mezona. Polje  $\rho$  mezona opisuje izospinsku ovisnost nuklearne interakcije što je važno kod egzotičnih jezgara bogatih neutronima. Jako spin-orbit vezanje se opisuje spin-orbit potencijalom koji je jednak sumi skalarnog i vektorskog potencijala što objašnjava zašto su relativistički efekti važni već na niskim energijama [14].

Model s konstantnim neukleon-mezon vezanjem nije dovoljno fleksibilan, pa su uvedeni modeli koji sadrže eksplicitnu ovisnost o nuklearnoj gustoći u konstantama vezanja. U ovom radu se koristi D3C<sup>\*11</sup> interakcija dobivena proširenjem DD-ME1<sup>12</sup> interakcije. Uspješno se opisuju očekivana svojstva nuklearne materije te statička i dinamička svojstva konačnih jezgara (energije vezanja, polumjeri naboja, razlike polumjera raspodjele neutrona i protona te razlike energija spin-orbit partnera) [17].

<sup>11</sup>eng. DC = Derivative Couplings

<sup>12</sup>eng. DD-ME = Density Dependent - Meson Exchange

Oblik funkcionalne ovisnosti vezanja mezona na nukleone se pretpostavlja, pa se na temelju njega prilagođavaju parametri ovisni o gustoći  $g_\phi(\rho)$ :

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad \text{barionska gustoća,} \quad (2.10)$$

$$\rho_v = \sqrt{j_\mu j^\mu} \quad \text{vektorska gustoća.} \quad (2.11)$$

gdje  $\phi$  označava mezone  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ . Vektorska gustoća je Lorentz-invarijantni oblik gustoće bariona. Uvodi se pokrata:

$$x = \frac{\rho_v}{\rho_{\text{sat}}}, \quad (2.12)$$

gdje je  $\rho_{\text{sat}}$  barionska gustoća pri saturaciji simetrične nuklearne materije. Funkcional kojim se parametriziraju  $g_i(x)$  za mezone  $\sigma$  i  $\omega$  se izražava pomoću funkcije  $f_i(x)$ :

$$g_i(x) = g_i(\rho_{\text{sat}}) \cdot f_i(x), \quad (2.13)$$

$$f_i(x) = a_i \cdot \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}. \quad (2.14)$$

Oblik funkcionala parametra  $g_\rho$  dolazi iz Dirac-Bruecknerovih računa za asimetričnu nuklearnu materiju koja se kvantificira omjerom  $(\rho_p - \rho_n)/(\rho_p + \rho_n)$ :

$$g_\rho(x) = g_\rho(\rho_{\text{sat}}) \cdot e^{-a_\rho(x-1)}. \quad (2.15)$$

Ukupno ima osam novouvedenih parametara, po četiri za  $\sigma$  i  $\omega$  mezon. Olakotno je što su međusobno ovisni, pa se pomoću uvjeta broj neovisnih smanjuje na tri [18]:

$$f_i(1) = 1 \quad i = \sigma, \omega, \quad (2.16)$$

$$f''_\sigma(1) = f''_\omega(1), \quad (2.17)$$

$$f''_i(0) = 0 \quad i = \sigma, \omega. \quad (2.18)$$

Mase  $m_\omega$  i  $m_\rho$  su fiksirane iznosima za slobodne mezone:

$$m_\omega = 783 \text{ MeV}, \quad (2.19)$$

$$m_\rho = 763 \text{ MeV}.$$

Diracova masa  $m_D$  je preuzeta iz DD-ME1 interakcije, dok je efektivna nukleonska masa  $m^*$  nova parametrizacija [17]:

$$m_D = 0.57m, \quad (2.20)$$

$$m^* = 0.79m.$$

D3C\* interakcija uključuje ovisnost izoskalarne skalarne i vektorske vlastite energije o impulsu pomoću dodatnih funkcija vezanja  $\Gamma_S$  ( $s$  = skalarne) i  $\Gamma_V$  ( $v$  = vektorsko) koje se parametriziraju funkcionalom oblika:

$$\Gamma_i(x) = \Gamma_i(\rho_{\text{ref}})x^{-a_i} \quad (2.21)$$

gdje se za  $x$  koristi (2.12) s vektorskom saturacijskom gustoćom umjesto barionske:

$$\Gamma_S = -146.089, \quad (2.22)$$

$$\Gamma_V = 180.889.$$

Dakle, ukupno ima 10 slobodnih parametara. U slučaju otvorenih ljsaka dolazi do sparivanja nukleona što se tretira unutar RHB teorijskog okvira.

## 2.2 Kovarijantna teorija funkcionala gustoće

Kako je već istaknuto, kovarijantna teorija funkcionala gustoće pruža alternativni pristup nuklearnom problemu više tijela. Proizlazi iz vrlo sličnog koncepta teorije funkcionala gustoće (DFT) koja se koristi u atomskoj, molekularnoj te fizici čvrstog stanja, a koja se može shvatiti kao *ab-initio* pristup. Koncept je prvotno razvijen kako bi se opisali elektroni koji međudjeluju putem odbojne *kulonske interakcije* i *vezanja ionima koji ih okružuju*. Pokazalo se da se problem međudjelujućih elektrona u vanjskom polju (koje potječe od iona kojih okružuju) može zamijeniti ansamblom nemeđudjelujućih elektrona u lokalnom vanjskom polju. U minimumu funkcionala, energija nemeđudjelujućeg sustava se podudara s energijom međudjelujućeg sustava te se lokalna gustoća podudara s lokalnom gustoćom točnog osnovnog stanja [2].

Općenito govoreći, DFT za glavni cilj ima opis međudjelujućeg sustava fermiona preko gustoće, a ne preko višečestične valne funkcije. Konkretno, za  $A$  elektrona u čvrstom stanju, ili protona i neutrona u atomskoj jezgri, koji zadovoljavaju Paulijev princip i međudjeluju putem kulonske ili nuklearnih sila, glavna varijabla sustava bi tad ovisila o samo tri prostorne koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$  umjesto o  $3A$  stupnjeva slobode. Kad bi se znao način kako se izvode potrebne relacije između gustoće i energije, DFT izračuni bi bili prilično jednostavni i vrlo točni. Nažalost, nepoznati su funkcionali energije koji povezuju gustoću s energijom i ne postoji sistematska metoda da ih se popravi osim isprobavanjem novih te prosuđivanjem valjanosti na temelju rezultata.

Osnove za nerelativistički DFT su formulirali Hohenberg i Kohn. U razmatranje se uzima višečestični fermionski sustav. Prema prvom teoremu, očekivana vrijednost bilo koje opservable osnovnog stanja  $\hat{O}$  je jedinstveni funkcional gustoće egzaktnog osnovnog stanja  $\rho_0$ . Ukoliko su poznate vrijednosti gustoće fermiona i funkcionala, znači da se mogu izračunati sva svojstva sustava. Drugi Hohenberg-Kohnov teorem omogućava sredstva kojima se to ostvaruje – varijacijom funkcionala energije  $E[\rho]$  s obzirom na gustoću  $\rho$  se traži minimum. Kohn i Sham su uveli pomoćno stanje čijom se nenegativnom gustoćom isprobava broj fermiona koji se dobije u sustavu. Svaka koja rezultira točnim brojem, zadovoljava jednadžbu za osnovno stanje energije  $E_0$  egzaktne gustoće  $\rho_0$  [1]:

$$E_0[\rho_0] \leq E[\rho]. \quad (2.23)$$

Jezgra se opisuje Slaterovom determinantom, a osnovno stanje  $|\Phi_0\rangle$  je jedinstveno određeno skalarnom gustoćom  $\rho_s$  te protonskom  $j_p^\mu$  i neutronskom  $j_n^\mu$  strujom (pritom se također podrazumijevaju njihove vrijednosti u osnovnom stanju) [15]:

$$E_0[\rho_s, j_p^\mu, j_n^\mu] = \langle \Phi_0 | \hat{H} | \Phi_0 \rangle. \quad (2.24)$$

Struje i gustoća su definirani sumom po svim popunjenim stanjima pozitivne energije:

$$\rho_s = \sum_{N=p,n} \sum_i \bar{\psi}_{i,N}(\mathbf{r}) \psi_{i,N}(\mathbf{r}), \quad (2.25)$$

$$j_N^\mu = \sum_i \bar{\psi}_{i,N}(\mathbf{r}) \gamma^\mu \psi_{i,N}(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

Funkcional energije u osnovnom stanju glasi:

$$\begin{aligned}
E_0 &= T_s && \text{član jednočestične kinetičke energije} \\
&+ E_{\text{int}} && \text{član fermion-fermion interakcije} \\
&+ E_{\text{xc}} && \text{član korelacije izmjene}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Kinetička energija se odnosi na neovisne fermione:

$$T_s = \int \sum_{N=p,n} \sum_i \psi_{i,N}^\dagger(\mathbf{r}) \underbrace{(-i\boldsymbol{\alpha}\nabla)}_{\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k} + \underbrace{\beta m}_{\beta = \gamma^0} \psi_{i,N}(\mathbf{r}) d^3r. \tag{2.28}$$

Minimizacijom energije osnovnog stanja se dobije skup Kohn-Shamovih jednadžbi:

$$\left\{ -i\boldsymbol{\alpha}\nabla + \beta \left[ m + \Sigma_{s,\text{int}} + \Sigma_{s,\text{xc}} + \gamma_\mu (\Sigma_{N,\text{int}}^\mu + \Sigma_{N,R}^\mu + \Sigma_{N,\text{xc}}^\mu) \right] \right\} \psi_{i,N} = \epsilon_{i,N} \psi_{i,N}, \tag{2.29}$$

gdje su  $\Sigma_{s,\text{int}}$  i  $\Sigma_{N,\text{int}}^\mu$  skalarni i vektorski doprinos interakcije, dok  $\Sigma_{N,R}^\mu$  proizlazi iz proširenja lagražijana (*rearrangement* članovi). Potencijali korelacije lokalne izmjene također imaju skalarni i vektorski doprinos [14]:

$$E_{s,\text{xc}}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \rho_s(\mathbf{r})} E_{\text{xc}}, \tag{2.30}$$

$$E_{N,\text{xc}}^\mu(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial j_N^\mu(\mathbf{r})} E_{\text{xc}}. \tag{2.31}$$

Ova metoda omogućava praktični teorijski alat za određivanje energije osnovnog stanja međudjelujućeg sustava, uz pretpostavku da je poznat oblik  $E_{\text{xc}}$ . Kako obično to nije slučaj,  $E_{\text{xc}}$  je potrebno dodatno aproksimirati. Zapravo, Hohenberger-Kohnov pristup za atomske jezgre je prošireno Thomas-Fermijevo rješenje bez efekata ljusaka. One se uključuju na kompliciraniji način koji pak zahtijeva dodatne aproksimacije, a realizira se preko Kohn-Shamovog funkcionala energije nelokalne gustoće  $E[\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$ .

Može se reći da je metoda srednjeg polja aproksimativna implementacija teorije funkcionala gustoće jer se stječe dojam da je zanemareno previše efekata. Uključeni su putem slobodnih parametara direktno prilagođenih na eksperimentalne podatke koji to već sadržavaju [1]. Za eneriju relativističkog srednjeg polja se dobije:

$$\begin{aligned}
E_{\text{RMF}}[\hat{\rho}, \phi] &= \text{Tr} \left[ \left( \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + \boldsymbol{\Sigma}_R) + \beta m_{\text{eff}} \right) \hat{\rho} \right] \\
&+ \sum_{\phi} \left\{ \pm \frac{1}{2} \int \left[ (\nabla \phi)^2 + m_\phi^2 \phi^2 \right] d^3r + \text{Tr} \left[ \left( \Gamma_\phi \phi \right) \hat{\rho} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

gdje je  $\hat{\rho}$  relativistička jednočestična matrica gustoće:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{i=1}^A |\psi_i(\mathbf{r}, t)\rangle \langle \psi_i(\mathbf{r}', t)|, \tag{2.33}$$

a u rotacijski invarijantnom sustavu se izražava preko komponenti Diracovog spinora:

$$|\psi_i(\mathbf{r}, t)\rangle = \begin{pmatrix} f_i(\mathbf{r}, t) \\ ig_i(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

## 2.3 Relativistički Hartree-Bogoljubov model

### 2.3.1 Kvazičestični operatori

Kako je istaknuto u uvodu, nemogućnost direktnog opisivanja pojedinačnih čestica u višestručnim sustavima, glavna je motivacija za pojednostavljivanje problema svim raspoloživim alatima. Jedan vrlo efikasan pristup jest i koncept kvazičestice. Naime, kvantni sustav kao cjelina ima osnovno stanje koje karakterizira minimum energije te različita pobuđena stanja, čije su energije po definiciji veće od one osnovnog stanja. Zahvaljujući Boltzmannovoj raspodjeli, za većinu relevantnih pobuđenja vrijedi da su niskoležeća stanja – u što spadaju i kvazičestice te kolektivna pobuđenja [1].

Kvazičestica je fenomen koji se pojavljuje u sustavu i koji, za razliku od prave čestice, ne postoji van sustava. Može se zamišljati kao “obučena” čestica, tj. nešto čime je prava čestica okružena i što mijenja ponašanje čestice.

Kvazičestična pobuđenja se formuliraju u drugoj (kanonskoj) kvantizaciji, znači da se umjesto valnih funkcija koriste matematički operatori stvaranja i poništenja koji svojstvenu vrijednost operatora broja povećavaju / smanjuju za iznos 1. Sistematski su prikazani u tablici 2.2. Može se uočiti da je stvaranje kvazičestice u stanju iznad Fermijevog ekvivalentno stvaranju čestice u tom stanju, dok je stvaranje šupljine u stanju ispod Fermijevog ekvivalentno poništenju čestice u tom stanju [2].

|                      |                                                      |                                                          |
|----------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\forall \epsilon_k$ | $\hat{a}_k$ operator poništenja čestice              | $\hat{a}_k^\dagger$ operator stvaranja čestice           |
|                      | =                                                    | =                                                        |
| $> \epsilon_f$       | $\hat{\alpha}_k$ operator poništenja kvazičestice    | $\hat{\alpha}_k^\dagger$ operator stvaranja kvazičestice |
|                      | =                                                    | =                                                        |
| $\leq \epsilon_f$    | $\hat{\alpha}_k^\dagger$ operator stvaranja šupljine | $\hat{\alpha}_k$ operator poništenja šupljine            |

Tablica 2.2: Sistematski prikaz operatora stvaranja i poništenja

Budući da su kvazičestice i šupljine fermionske prirode, operatori njihova stvaranja  $\hat{\alpha}_k^\dagger$  i poništenja  $\hat{\alpha}_k$  moraju zadovoljiti uobičajene antikomutacijske izraze za fermione:

$$\{\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger\} \equiv \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_{k'}^\dagger + \hat{\alpha}_{k'}^\dagger \hat{\alpha}_k \delta_{kk'}, \quad (2.35)$$

$$\{\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}\} = \{\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger\} = 0. \quad (2.36)$$

Osnovno stanje dano Slaterovom determinantom  $|\Phi_0\rangle$  s  $\hat{\alpha}_k$  čini kvazičestični vakuum:

$$\hat{\alpha}_k |\Phi_0\rangle = 0. \quad (2.37)$$

Pobuđenje  $ph^{13}$  je dvokvazičestično stanje koje se sastoji od stanja iznad Fermijevog nivoa u kojem je jedan nukleon te stanja ispod Fermijevog u kojem je jedna čestica.

Skup višekvazičestičnih stanja u Hilbertovom prostoru mnoštva čestica razapinje kompletnu ortonormiranu bazu. U relativističkom slučaju bi se trebala uključiti stanja Diracovog mora negativne energije, odnosno prazna stanja u *no-sea* aproksimaciji:

$$|\Phi_{k_1 \dots k_N}\rangle = \hat{\alpha}_{k_1}^\dagger \dots \hat{\alpha}_{k_N}^\dagger |\Phi_0\rangle. \quad (2.38)$$

<sup>13</sup>eng. *ph* = particle - hole

### 2.3.2 Bogoljubova transformacija

Bogoljubova transformacija je unutarna transformacija koja omogućava da se iz jedne reprezentacije prijeđe u drugu, također unitarnu kanonsku reprezentaciju. Često se koristi za dijagonalizaciju hamiltonijana, čime se dobiju stacionarna rješenja pripadne Schrödingerove jednadžbe. Npr. kod homoghenih sustava se primjenjuje u BCS teoriji supravodljivosti [1].

Budući da su kvazičestice fermionske prirode, vrijede antikomutacijske relacije, pa je potreban fermionski mod “rada” Bogoljubove transformacije – kvazičestični operatori se izražavaju preko jednočestičnih operatora stvaranja i poništenja:

$$\alpha_k^\dagger = \sum_l U_{lk} c_l^\dagger + V_{lk} c_l, \quad (2.39)$$

pritom se indeks  $l$  odnosi na proizvoljnu bazu, dok su  $U_{lk}$  i  $V_{lk}$  pripadni koeficijenti. Između kvazičestične i čestične baze, transformacija u matričnom obliku glasi:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^\dagger \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U^\dagger & V^\dagger \\ V^T & U^T \end{pmatrix}}_{\mathcal{W}^\dagger} \begin{pmatrix} c \\ c^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Matrica transformacije  $\mathcal{W}^\dagger$  se prema Bloch-Messiah teoremu može pisati [19]:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{V} \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

čime se transformacija rastavlja na tri komponente. Prva: među sobom transformira čestične operatore, dok zadnja: to isto radi sa kvazičestičnim operatorima, a druga: povezuje čestične i kvazičestične operatore u bazama određenim objema matricama.

Valna funkcija osnovnog stanja čini vakuum s obzirom na kvazičestične operatore (jednadžba 2.37), a jedinstveno je određena Bogoljubovom transformacijom, tj. s  $U_{lk}$  i  $V_{lk}$ . Međutim, zbog invarijantnosti osnovnog stanja na transformaciju  $C$  ne vrijedi obrat. Na račun unitarnosti se može invertirati definicija Bogoljubove transformacije tako da izražava čestične operatore preko kvazičestičnih. Definiraju se veličine:

$$\rho_{ll'} = \langle \Phi | c_l^\dagger c_{l'} | \Phi \rangle = (V^* V^T)_{ll'} = (D \bar{V}^2 D^\dagger)_{ll'}, \quad (2.42)$$

$$\kappa_{ll'} = \langle \Phi | c_{l'} c_l | \Phi \rangle = (V^* U^T)_{ll'} = (D \bar{U} \bar{V} D^T)_{ll'}, \quad (2.43)$$

pomoću kojih je Valatin definirao generaliziranu matricu na način [13]:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & \kappa \\ -\kappa^* & 1 - \rho^* \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

čiji su vlastiti vektori  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  za vlastitu vrijednost 0 te  $\begin{pmatrix} V^* \\ U^* \end{pmatrix}$  za 1, a zadovoljava svojstva:

$$\mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R} \implies \text{hermitska}, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \implies \text{idempotentna}. \quad (2.46)$$



### 2.3.3 RHB model

Sad, kad je uveden koncept kvazičestice i Bogoljubova transformacija kanonskih baza, može se na elegantniji način pristupiti problemu jezgara s otvorenim ljuskama i deformiranim jezgrama jer u tim slučajevima relativistički model neovisnih nukleona koji se gibaju u srednjem polju ne predstavlja dovoljno dobar opis. Naime, ispostavilo se da je energetski najbolja konfiguracija ona u kojoj su svi nukleoni zadnje, otvorene ljuske spareni. Te korelacije sparivanja igraju važnu ulogu u različitim jednočestičnim i kolektivnim aspektima nuklearne strukture. Preduvjet da se nukleoni vežu u stanje angularnog momenta  $J = 0$  je da imaju potpuno isti  $l$  te jednaki apsolutni iznos, a suprotni predznak projekcije  $m$ , čime se postiže veliki prostorni preklap valnih funkcija.

Interakcija koja pogoduje sparivanju je privlačna i kratkog dosega, ali se ne može uračunati kao doprinos srednjem potencijalu u lagranžijanu. Analogni efekt bi bila supravodljivost, pa se jezgre blizu doline  $\beta$ -stabilnosti tretiraju BCS<sup>14</sup> aproksimacijom koja je prvotno i bila razvijena u svrhu opisa makroskopskog efekta supravodljivosti, a koji je posljedica mikroskopskog efekta kondenzacije Cooperovih parova. Preduvjet za to jest da postoji nekakav privlačni potencijal među česticama, koji u određenim uvjetima može nadvladati puno jaču odbojnu interakciju. Usprkos Paulijevom načelu isključenja, u slučaju kritično niske temperature, fermioni blizu Fermijeve plohe se više ponašaju kao bozoni i formiraju Cooperove parove. Dokaz koji ide tome u prilog je postojanje energijskog procijepa na Fermijevom nivou. Međutim, takav pristup nije odgovarajuć za jezgre daleko od stabilnosti jer su njihove Fermijeve plohe preblizu čestičnog kontinuuma, tako da se  $ph$  i  $pp$ <sup>15</sup> prijelazi moraju uzeti eksplicitno.

Rješenje u nerelativističkom slučaju pruža HFB<sup>16</sup> teorija ujedinjavanjem modela srednjeg polja i korelacija sparivanja. Usrednjeni potencijali sparivanja [13] su:

- i)  $\hat{\Gamma} \rightarrow$  samosuglasno Hartree-Fockovo polje koje obuhvaća  $ph$  korelacije,
- ii)  $\hat{\Delta} \rightarrow$  polje sparivanja koje obuhvaća  $pp$  korelacije.

Kako lagranžijan na klasičnom nivou ne dozvoljava Cooperove parove  $\psi^\dagger\psi^\dagger$ , u svrhu uključivanja korelacija sparivanja na mikroskopski način, neophodno je kvantizirati mezonska polja. Tako se HFB teorija relativistički poopćava i konačno slijedi RHB<sup>17</sup> model.

Osnovno stanje jezgre opisuje generalizirana Slaterova determinanta  $|\Phi\rangle$  koja prema jednadžbi (2.37) predstavlja vakuum s obzirom na neovisne kvazičestice. HFB valne funkcije su označene kao  $U_{lk}$  i  $V_{lk}$  jednadžbom (2.39), a njima se jedinstveno određuje hermitska jednočestična matrica gustoće  $\hat{\rho}$  (2.42) i antisimetrični tenzor sparivanja  $\hat{\Delta}$  (2.43). Pomoću novodefiniranih gustoća se definira tzv. generalizirana matrica gustoće  $\mathcal{R}$  (2.44).

<sup>14</sup>eng. BCS = Bardeen-Cooper-Schrieffer

<sup>15</sup>eng. pp = particle-particle

<sup>16</sup>eng. HFB = Hartree-Fock-Bogoljubov

<sup>17</sup>eng. RHB = Relativistic Hartree-Bogoljubov

Dakle, ukupna energija sustava u RHB modelu “nasljeđuje” ovisnost RMF modela o mezonskim poljima  $\phi$  i matrici gustoći  $\hat{\rho}$  te dodaje ovisnost o tenzoru sparivanju  $\hat{\kappa}$ , a cilj je izraziti ju preko ovisnosti o generaliziranoj matrici gustoće  $\mathcal{R}$  [15]:

$$E_{\text{RHB}}[\hat{\rho}, \hat{\kappa}, \phi] = E_{\text{RMF}}[\hat{\rho}, \phi] + E_{\text{par}}[\hat{\kappa}] \quad (2.47)$$

$\Downarrow$

$$E_{\text{RHB}}[\hat{\rho}, \hat{\kappa}, \phi] = E_{\text{RHB}}[\mathcal{R}, \phi]. \quad (2.48)$$

Funkcional RMF energije  $E_{\text{RMF}}$  je definiran jednađžbom (2.32), s tom razlikom što je gustoća (2.33) zamjenjena novom (2.42). Funkcional energije sparivanja  $E_{\text{par}}$  glasi:

$$E_{\text{par}}[\hat{\kappa}] = \frac{1}{4} \text{Tr} [\hat{\kappa}^* V^{pp} \hat{\kappa}], \quad (2.49)$$

gdje je općenita  $V^{pp}$  fenomenološka interakcija u  $pp$ -kanalu dvočestičnog sparivanja.

Ponovno se radi u okviru kovarijantne teorije funkcionala gustoće što znači da se preko varijacijskog principa rješavaju vremenski ovisne HB<sup>18</sup> jednađžbe gibanja:

$$i\partial_t \mathcal{R} = [\mathcal{H}(\mathcal{R}), \mathcal{R}]. \quad (2.50)$$

Generalizirani hamiltonijan  $\mathcal{H}$  se dobije kao derivacija funkcionala energije s obzirom na generaliziranu gustoću  $\mathcal{R}$  što se u bazi operatora  $c_l, c_l^\dagger$  može pisati:

$$\mathcal{H} = \frac{\delta E_{\text{RHB}}}{\delta \mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D + m + \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Kemijski potencijal  $\lambda$  osigurava da broj čestica bude konstantan, tj. da očekivana vrijednost operatora broja čestica u osnovnom stanju bude jednaka broju nukleona:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = N. \quad (2.52)$$

Zatim se postupak varijacije ponavlja, samo s obzirom na usrednjene potencijale:

i) s obzirom na  $\hat{\rho}$  se dobije Diracov hamiltonijan  $\hat{h}_D$  koje obuhvaća  $ph$  korelacije:

$$\hat{h}_D = \frac{\delta E_{\text{RHB}}}{\delta \hat{\rho}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + \boldsymbol{\Sigma}) + \Sigma + \beta(m + \Sigma_\sigma), \quad (2.53)$$

gdje su skalarno  $\Sigma_\sigma$  i vektorsko  $\boldsymbol{\Sigma}$  polje dani Diracovom jednađžbom (A.3).

ii) s obzirom na  $\hat{\kappa}$  se dobije polje sparivanja  $\hat{\Delta}$  koje obuhvaća  $pp$  korelacije [19]:

$$\hat{\Delta} = \frac{\delta E_{\text{RHB}}}{\delta \hat{\kappa}}, \quad (2.54)$$

$$\Delta_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{c,d} V_{abcd}^{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \kappa_{cd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (2.55)$$

gdje su  $a, b, c, d$  kvantni brojevi koji se odnose na Diracove indekse spinora, dok su  $V_{abcd}^{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  matrični elementi dvočestične interakcije sparivanja [16]. Kvazičestične valne funkcije imaju velike (+) i male (−) komponente pa vrijedi:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{++} & \hat{\Delta}_{+-} \\ \hat{\Delta}_{-+} & \hat{\Delta}_{--} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

pri čemu se polja  $\hat{\Delta}_{-+}$ ,  $\hat{\Delta}_{+-}$  i  $\hat{\Delta}_{--}$  zanemaruju, a za  $\hat{\Delta}_{++}$  se koristi sila Gogny.

---

<sup>18</sup>eng. HB = Hartree-Bogoljub

Osnovno stanje  $|\Phi\rangle$  se određuje HB jednadžbama koje su statički limes vremenski ovisne jednadžbe (2.50) čime se problem svodi na dijagonalizaciju hamiltonijana:

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D + m + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Svojstvene vrijednosti  $E_k$  su kvazičestične energije, dok su svojstveni vektori  $U_k$  i  $V_k$  kvazičestične valne funkcije. Dimenzija RHB matrice jednadžbe je dvostruko veća od odgovarajuće Diracove, pa za svako svojstveno stanje pozitivne energije postoji stanje negativne energije istog iznosa. Uslijed ferimionske prirode kvazičestičnih operatora – istovremeno se može popuniti samo jedno stanje, a bira se ono s  $E_k > 0$ .

RHB jednadžbe se rješavaju samosuglasno preko potencijala određenih statičkim Klein-Gordonovim jednadžbama (A.15)-(A.18), tako članovi izvora polja definirani relacijama (A.25)-(A.28) postaju sume bilinearnih umnožaka barionskih amplituda:

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{k>0} V_k^\dagger(\mathbf{r}) V_k(\mathbf{r}), \quad (2.58)$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{k>0} V_k^\dagger(\mathbf{r}) \gamma^0 V_k(\mathbf{r}), \quad (2.59)$$

$$\rho_I(\mathbf{r}) = \sum_{k>0} V_k^\dagger(\mathbf{r}) \gamma^0 \tau_3 V_k(\mathbf{r}), \quad (2.60)$$

$$\rho_p(\mathbf{r}) = \sum_{k>0} V_k^\dagger(\mathbf{r}) \gamma^0 \frac{1 - \tau_3}{2} V_k(\mathbf{r}). \quad (2.61)$$

Suma  $\sum_{k>0}$  je pritom skraćena oznaka za *no-sea* aproksimaciju što u ovom slučaju s uključenim sparivanjem znači da suma ide po svim svojstvenim vrijednostima  $E_k$  HB matrice (2.57) koja su ispod Diracove praznine.

HB koeficijenti  $U_k(\mathbf{r})$  i  $V_k(\mathbf{r})$  u koordinatnom prostoru formiraju Diracove spinore koji se pak kombiniraju u RHB spinor:

$$\Phi_k(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

U slučaju sferne simetrije Diracovi spinori  $U_k$  i  $V_k$  se reduciraju na [15]:

$$U_k(V_k)(\mathbf{r}, s, t_3) = \begin{pmatrix} g_{U(V)}(r) \Omega_{j,l,m}(\theta, \varphi, s) \\ i f_{U(V)}(r) \Omega_{j,\tilde{l},m}(\theta, \varphi, s) \end{pmatrix} \chi_\tau(t_3), \quad (2.63)$$

gdje su  $g_r$  i  $f_r$  radijalne amplitude, dok je  $\Omega_{j,l,m}$  tenzorski produkt orbitalne i spinske funkcije dan jednadžbom (A.31), a  $\chi_\tau$  je izospinska funkcija. Prema jednadžbi (A.32) se može vidjeti da orbitalne angularne momente  $l$  i  $\tilde{l}$  određuju iznos  $j$  i pariteta  $\pi$ .

Preostalo je osvrnuti se još na  $V^{pp}$ . Najjednostavnija opcija bi bila da je posrijedi monopolna sila sparivanja koja bi vodila na BCS teoriju što je korektna aproksimacija za jezgre u dolini  $\beta$ -stabilnosti. Međutim, kako se odmiče od stabilnih jezgara, tako Fermijev nivo postaje sve bliži čestičnom kontinuumu, zato se najniži  $ph$  i  $pp$  prijelazi često nalaze u kontinuumu. Prvotno korišteni identični mezon-nukleon parametri sparivanja za oba kanala su rezultirali nefizikalnim ponašanjem sile izmjene mezona.

Budući da se spinori razvijaju u bazi vlastitih stanja harmoničkih operatora, vrlo uspješnim nerelativističkim opisom se pokazao dio sparivanja Gogny sile jer je dan kao suma dva gausijana:

$$V^{pp}(1, 2) = \sum_{i=1,2} e^{-\left(\frac{r_1-r_2}{\mu_i}\right)^2} (W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau), \quad (2.64)$$

gdje su  $P^\sigma$  i  $P^\tau$  dvočestični operatori definirani:

$$P^\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \quad \text{za spin,} \quad (2.65)$$

$$P^\tau = \frac{1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2}{2} \quad \text{za izospin.} \quad (2.66)$$

Skup slobodnih parametara  $\mu_i$ ,  $W_i$ ,  $B_i$ ,  $H_i$  i  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) je pažljivo prilagođavan na svojstva sparivanja konačnih jezgara preko cijelog periodnog sustava. Vrijednosti za standardnu D1S parametrizaciju su dane u tablici 2.3. Problem prelaska na režim relativističkog računa, zasad eksperimentalno još nisu opaženi relativistički efekti, što se može obrazložiti dobrom razdvojenošću energijskih skala pritom efekti sparivanja iznose svega nekoliko MeV oko Fermijevog nivoa, dok su energije vezanja red veličine stotina ili čak tisuća MeV. Taj argument daje pokriće za korištenje nerelativističkog sparivanja i u sklopu RHB modela.

| i | $\mu_i$ [fm] | $W_i$   | $B_i$    | $H_i$    | $M_i$ [MeV] |
|---|--------------|---------|----------|----------|-------------|
| 1 | 0.7          | -1720.3 | 1300     | -1813.53 | 1397.60     |
| 2 | 1.2          | 103.69  | -163.483 | 162.812  | -223.934    |

Tablica 2.3: D1S parametrizacija Gogny interakcije

Nakon što je postignuta konvergencija, preostalo je još uvažiti gibanje centra mase:

$$E_{\text{cm}} = -\frac{\langle P_{\text{cm}}^2 \rangle}{2 A m}. \quad (2.67)$$

Izvedeni model je dobro prilagođen za opis svojstava osnovnog stanja i pobuđenih stanja parno-parnih jezgara, dok je za neparno-parne i neparno-neparne neophodno omogućiti bar aproksimativni opis. U tu svrhu se za osnovno stanje koristi isti model, samo s ograničavanjem očekivane vrijednosti operatora broja čestica na neparni broj protona i/ili neutrona. Na takav način se dobije *parno* RHB stanje čija se energija razlikuje od *pravog* osnovnog stanja neparne jezgre za iznos jednak energiji neparne kvazičestice. Valjanost ove aproksimacije se pokazuje u dobrom slaganju izračunatih vrijednosti oslobođene energije u raspadu ( $Q_\beta$ ) sa mjerenjima za izotope Ag i Cd:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta M_{nH} + \lambda_n - \lambda_p - E_{2qp} \\ &= M_{\text{ex}}(Z, N) - M_{\text{ex}}(Z + 1, N - 1), \end{aligned} \quad (2.68)$$

gdje je  $\Delta M_{nH}$  razlika mase između neutrona i atoma vodika koja iznosi 0.782 MeV,  $\lambda_n$  i  $\lambda_p$  su neutronska i protonska Fermijeva energija osnovnog stanja jezgre roditelja,  $E_{2qp}$  su najniže kvazičestične energije, a  $M_{\text{ex}}(Z, N)$  je višak mase. Reproduciranje energija vezanja neparnih jezgara daje indicaciju da je aproksimacija u redu [20].

### 3 Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza

U prethodnom poglavlju je razvijen relativistički Hartree-Bogoljubov model koji je izgrađen na temelju relativističke teorije srednjeg polja u okviru kovarijantne teorije funkcionala energije. Pritom je u efektivni lagranžijan interakcije uključena i ovisnost o mediju putem konstanti mezonskih vezanja ovisnih o gustoći. Također, uzimaju se u obzir i korelacije sparivanja, kako u  $ph$ , tako i u  $pp$  kanalu. Samosuglasno rješenje pripadnih Dirac-Hartree-Bogoljubovih integralno-diferencijalnih te Klein-Gordonovih jednažbi daje uspješan opis osnovnog stanja sfernih jezgara i onih otvorenih ljusaka.

Takav ishod za osnovna stanja je potaknuo razvoj teorijskog opisa i pobuđenih stanja. Polazišna točka je ponovno vremenski ovisna RHB jednažba (2.50) koja zapravo predstavlja skup vezanih jednažbi, čime je definiran potpuni vremensko ovisni model srednjeg polja (TDRMF<sup>19</sup>) na način da opisuje nelinearnu propagaciju Diracovih spinora u vremenu. Oscilacije oko gustoće osnovnog stanja u granici malih amplituda predstavljaju okosnicu aproksimacije slučajnih faza [1].

Ukupni spektar pobuđenja jezgre obuhvaća različite rezonancije te nekolektivna kvazičestična pobuđenja. Prethodno promatrana  $ph$  pobuđenja se mogu klasificirati na više načina [3]:

1) prema  $J^\Pi$ :

- (a) električna pobuđenja  $\rightarrow$  dipolni  $1^-$ , kvadrupolni  $2^+$ , oktopolni  $3^-$ ,  $\dots$ ,
- (b) magnetska pobuđenja  $\rightarrow$  dipolni  $1^+$ , kvadrupolni  $2^-$ , oktopolni  $3^+$ ,  $\dots$ .

2) prema  $\Delta T$ :

- (a) izoskalarni mod  $\rightarrow \Delta T = 0$  (nukleoni vibriraju u fazi),
- (b) izovektorski mod  $\rightarrow \Delta T = 0$  (nukleoni vibriraju u protufazi).

Važnost proučavanja i poznavanja kolektivnih stupnjeva slobode leži u činjenici da pružaju uvid u brojne aspekte nuklearne strukture poput globalnih svojstva, ali i puno finije detalje tipa modifikacije nukleon-nukleon interakcije u mediju. Energije pobuđenja i raspada su većinom izmjerene za jezgre u dolini  $\beta$ -stabilnosti. Međutim, od posebnog interesa su jezgre na samoj granici stabilnosti. Baš su egzotični modovi zaslužni za otvaranje novih frontova, zahvaljujući prvenstveno specifičnim svojstvima jako nestabilnih jezgra (slabo vezanje najudaljenijih nukleona, sparivanje čestičnog kontinuuma i vezanih stanja, efekti neutronske omotača i halo struktura) [18].

Konkretno, oscilacije malih amplituda za kolektivna pobuđenja proizvoljno teških jezgara se opisuju pomoću RRPA<sup>20</sup>, a za slučaj jezgara s otvorenim ljuskama formulira se teorija u kanonskoj bazi, tzv. RQRPA<sup>21</sup>.

<sup>19</sup>eng. TDRMF = Time Dependant Relativistic Mean Field

<sup>20</sup>eng. RRPA = Relativistic Random Phase Approximation

<sup>21</sup>eng. RQRPA = Relativistic Quasiparticle Random Phase Approximation

### 3.1 Matrične jednačbe RQRPA

Za potpunu kvantitativnu sliku osnovnih i pobuđenih stanja, trebaju se razmotriti efekti sparivanja vezanih stanja i čestičnog kontinuuma. Moguće kombinacije [14]:

- oba nukleona u diskretnim vezanim stanjima,
- jedan nukleonu vezanom stanju, a drugi u kontinuumu,
- oba nukleona u kontinuumu.

Kanonska baza je pogodna jer dijagonalizira matricu gustoće, a matrične jednačbe RQRPA se izvode iz vremenski ovisnog RHB modela. Uzima se osnovno stanje sferne parno-parne jezgre dano stacionarnim rješenjem RHB jednačbi oko kojeg se uvode male oscilacije. Vanjska perturbacija je vremenski ovisna i periodična [18]:

$$\hat{\mathcal{F}} = F e^{-i\omega t} + h.c., \quad (3.1)$$

gdje se  $h.c.$ <sup>22</sup> odnosi na dodatne neprikazane članove koji su hermitski konjugirani napisanom članu. U slučaju da su prisutne korelacija sparivanja, fluktuirajuće polje  $F$  je dano kao jednočestični generalizirani operator koji uključuje operatore prijelaza:

$$F = \sum_{ij} F_{ij}^{11} c_i^\dagger c_j + \sum_{ij} (F_{ij}^{12} c_i^\dagger c_j^\dagger + F_{ij}^{21} c_i c_j), \quad (3.2)$$

gdje su  $c_i^\dagger$  i  $c_i$  jednočestični operatori stvaranja i poništenja. Proširuje se izraz (2.50):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{R}}}{\partial t} = [\hat{\mathcal{H}}(t) + \hat{\mathcal{F}}(t), \hat{\mathcal{R}}(t)]. \quad (3.3)$$

U limesu malih amplituda se pretpostavlja da nuklearna gustoća oscilira frekvencijom vanjske pobude (ako je iznos blizu onom vlastite pobude – formiraju se rezonancije). Odziv je linearan, pa se pri razvoju u Taylorov red zadržavaju samo linearni članovi:

$$\hat{\mathcal{R}}(t) = \hat{\mathcal{R}}^0 + \delta \hat{\mathcal{R}}(t), \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}^0 + \delta \hat{\mathcal{H}}(t), \quad (3.5)$$

$$\phi_i(t) = \phi_i^0 + \delta \phi_i(t). \quad (3.6)$$

U tim uvjetima se mogu eliminirati mezonski stupnjevi slobode, pa mala varijacija  $\delta \phi_i$  slijedi iz Klein-Gordonovih jednačbi zanemarivanjem efekata retardacije, a  $\delta \hat{\mathcal{H}}(t)$  je:

$$\delta \hat{\mathcal{H}}(t) = \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta \hat{\mathcal{R}}} \delta \hat{\mathcal{R}}(t). \quad (3.7)$$

Uvažavanjem svojstava (2.45) i (2.46) slijedi da je  $\hat{\mathcal{R}}(t)$  projektor u svim vremenima (jer ima svojstvene vrijednosti 0 i 1) [13]:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}^2 &= \hat{\mathcal{R}} \\ \hat{\mathcal{R}}_0 + \hat{\mathcal{R}}_0 \delta \hat{\mathcal{R}} + \delta \hat{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}}_0 &= \hat{\mathcal{R}}_0 + \delta \hat{\mathcal{R}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta \hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{R}}_0 \delta \hat{\mathcal{R}} + \delta \hat{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \hat{\mathcal{R}} \\ -\delta \hat{\mathcal{R}}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Mala varijacija oko osnovnog stanja je suma različitih svojstvenih modova frekvencije  $\omega_\nu$ , pomiješanih s težinskim faktorima, tj. amplitudama  $\delta \hat{\mathcal{R}}^{(\nu)}$ :

$$\delta \hat{\mathcal{R}}(t) = \sum_{\nu} \delta \hat{\mathcal{R}}^{(\nu)} e^{i\omega_\nu t} + h.c.. \quad (3.9)$$

<sup>22</sup>eng. h.c. = hermitian conjugate

U istoj kvazičestičnoj bazi, matrice  $\mathcal{R}_0$  i  $\mathcal{H}_0$  su dijagonalne:

$$\hat{\mathcal{R}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Time su spremni svi članovi potrebni za lineariziranu jednadžbu gibanja:

$$i\delta_t \hat{\mathcal{R}} = [\mathcal{H}_0, \delta \hat{\mathcal{R}}] + [\delta \hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{R}}_0] = [\mathcal{H}_0, \delta \hat{\mathcal{R}}] + \left[ \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta \hat{\mathcal{R}}} \delta \hat{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{R}}_0 \right]. \quad (3.11)$$

Zahvaljujući eliminiranju mezonskih stupnjeva slobode, dovoljno je varirati samo s obzirom na promjene u gustoći  $\delta \hat{\mathcal{R}}$  što značajno pojednostavljuje račun. Operatori stvaranja  $Q_\nu^\dagger$  i poništenja  $Q_\nu$  pobuđenog stanja  $|\nu\rangle$  se mogu definirati kao linearna kombinacija  $\alpha_k^\dagger$  i  $\alpha_k$  gdje su težinski faktori  $X^\nu$  i  $Y^\nu$  zapravo amplitude [15]:

$$X_{kk'}^\nu = \langle 0 | \alpha_k \alpha_{k'} | \nu \rangle \quad \text{i} \quad Y_{kk'}^\nu = \langle 0 | \alpha_k^\dagger \alpha_{k'}^\dagger | \nu \rangle, \quad (3.12)$$

a pomoću njih se dobije jednadžba kvazičestičnih slučajnih faza u matričnom obliku:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

U slučaju da su zadovoljeni uvjeti  $k < k'$  te  $l < l'$ , RQRPA matrični elementi glase:

$$A_{kk' ll'} = (E_k + E_{k'}) \delta_{kl} \delta_{k' l'} + \frac{\delta^2 E}{\delta R_{kk'}^* \delta R_{ll'}^*} \quad \text{i} \quad B_{kk' ll'} = \frac{\delta^2 E}{\delta R_{kk'}^* \delta R_{ll'}^*}. \quad (3.14)$$

Kako se vidi iz priloženog, potpune RQRPA jednadžbe su poprilično komplicirane jer zahtijevaju izračun matričnih elemenata u bazi HB spinora  $U_k(\mathbf{r})$  i  $V_k(\mathbf{r})$ . Znatno ih je jednostavnije riješiti u kanonskoj bazi u kojoj su potrebni samo matrični elementi  $V_{kk', ll'}$  u kanalima  $ph$  i  $pp$  te određene kombinacije faktora popunjenja  $u_k$  i  $u_k$ . Valja naglasiti da taj slučaj ne predstavlja aproksimaciju već da se također dobije potpuno rješenje te da rezultati ne ovise o izboru baze [13].

Prema teoremu Blocha i Messiaha vrijedi transformacija dana jednadžbom (2.41), što znači da se svaka RHB valna funkcija se može izraziti na više načina:

- u kvazičestičnoj bazi  $\rightarrow$  kao umnožak neovisnih kvazičestičnih stanja,
- u kanonskoj bazi  $\rightarrow$  kao jako korelirano BCS-stanje.

Za sustav s parnim brojem čestica vrijedi:

$$|\Phi\rangle = \prod_{\mu>0} (u_\mu + v_\mu a_\mu^\dagger a_{\bar{\mu}}^\dagger) |-\rangle, \quad (3.15)$$

gdje  $|-\rangle$  označava nukleonski vakuum, dok se jednočestični operatori  $a_\mu^\dagger$  i  $a_{\bar{\mu}}^\dagger$  odnose na stvaranje i poništenje nukleona u kanonskoj bazi. Vjerojatnosti popunjenja su:

$$v_\mu^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_\mu - m - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\mu - m - \lambda)^2 + \Delta_\mu^2}} \right). \quad (3.16)$$

Pritom su uvedene pokrate za dijagonalne elemente u kanonskoj bazi [19]:

$$\varepsilon_\mu = \langle \mu | \hat{h}_D | \mu \rangle, \quad \text{za Diracov jednočestični hamiltonijan} \quad (3.17)$$

$$\Delta_\mu = \langle \mu | \hat{\Delta} | \bar{\mu} \rangle. \quad \text{za polje sparivanja} \quad (3.18)$$

Za razliku od BCS okvira, nijedno od ovih polja nije dijagonalno u kanonskoj bazi.

Baza je pak određena zahtjevom da dijagonalizira jednočestičnu matricu gustoće:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{k>0} V_k(\mathbf{r}) V_k^\dagger(\mathbf{r}'), \quad (3.19)$$

a njene svojstvene vrijednosti su brojevi popunjenja  $v_\mu^2$ . Mnogi iščezavaju, posebno na visokim energijama u kontinuumu, ali i oni koji odgovaraju stanjima u Diracovom moru koja nisu popunjena zbog *no-sea* aproksimacije. Uslijed ove degeneracije, nivoi u kanonskoj bazi nisu jedinstveno određeni numeričkom dijagonalizacijom  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  što se rješava uvođenjem zahtjeva: da kanonska baza u ortogonalnim potprostorima sa svojstvenim vrijednostima 0 i 1 dijagonalizira  $\hat{h}_D$ , pa matrice  $A$  i  $B$  imaju BCS oblik. Pritom se mora povesti računa da matrica  $H^{11}$  nije dijagonalna, već da vrijedi:

$$H_{\mu\nu}^{11} = (u_\mu u_\nu - v_\mu v_\nu) h_{\mu\nu} - (u_\mu u_\nu + v_\mu v_\nu) \Delta_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

U sfernom sustavu kvazičestični parovi imaju dobro definiran angularni moment, pa matrične RQRPA jednadžbe glase [13]:

$$\begin{pmatrix} A^J & B^J \\ B^{*J} & A^{*J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu, JM} \\ Y^{\nu, JM} \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu, JM} \\ Y^{\nu, JM} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

a vezane RQRPA matrice u kanonskoj bazi se reduciraju na:

$$\begin{aligned} A_{\mu\mu'\nu\nu'}^J &= H_{\mu\nu}^{11(J)} \delta_{\mu'\nu'} - H_{\mu'\nu}^{11(J)} \delta_{\mu\nu} - H_{\mu\nu'}^{11(J)} \delta_{\mu'\nu} + H_{\mu'\nu'}^{11(J)} \delta_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2} V_{\mu\mu'\nu\nu'}^{pp(J)} (\xi_{\mu\mu'}^+ \xi_{\nu\nu'}^+ + \xi_{\mu\mu'}^- \xi_{\nu\nu'}^-) + V_{\mu\nu'\mu'\nu}^{ph(J)} \zeta_{\mu\mu'\nu\nu'}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$B_{\mu\mu'\nu\nu'}^J = \frac{1}{2} V_{\mu\mu'\nu\nu'}^{pp(J)} (\xi_{\mu\mu'}^+ \xi_{\nu\nu'}^+ - \xi_{\mu\mu'}^- \xi_{\nu\nu'}^-) + V_{\mu\nu'\mu'\nu}^{ph(J)} \zeta_{\mu\mu'\nu\nu'} (-1)^{j_\nu - j_{\nu'} + J}, \quad (3.23)$$

pri čemu se koriste pokrate [14]:

$$\zeta_{\mu\mu'\nu\nu'} = \begin{cases} \eta_{\mu\mu'}^+ \eta_{\nu\nu'}^+ & \begin{cases} \text{za } \sigma, \omega^0, \rho^0, A^0 \text{ ako je } J \text{ paran,} \\ \text{za } \omega^i, \rho^i, A^i \text{ ako je } J \text{ neparan,} \end{cases} \\ \eta_{\mu\mu'}^- \eta_{\nu\nu'}^- & \begin{cases} \text{za } \sigma, \omega^0, \rho^0, A^0 \text{ ako je } J \text{ neparan,} \\ \text{za } \omega^i, \rho^i, A^i \text{ ako je } J \text{ paran,} \end{cases} \end{cases} \quad (3.24)$$

gdje vrijedi:

$$\eta_{\mu\mu'}^\pm = u_\mu v_{\mu'} \pm v_\mu u_{\mu'} \quad \text{i} \quad \xi_{\mu\mu'}^\pm = u_\mu u_{\mu'} \mp v_\mu v_{\mu'}. \quad (3.25)$$

Matrični elementi  $V_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ph}$  i  $V_{\mu\mu'\nu\nu'}^{pp}$  se izvode kao druge derivacije funkcionala energije:

$$V_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ph} = \frac{\delta^2 E}{\delta \hat{\rho}_{\mu\mu'} \delta \hat{\rho}_{\nu\nu'}} \quad \text{i} \quad V_{\mu\mu'\nu\nu'}^{pp} = \frac{\delta^2 E}{\delta \hat{\kappa}_{\mu\mu'} \delta \hat{\kappa}_{\nu\nu'}}. \quad (3.26)$$

Konfiguracijski prostor RQRPA uključuje Diracovo more stanja negativne energije, pa se moraju uključiti i parovi formirani od potpuno ili parcijalno popunjenih stanja pozitivne energije i praznih stanja negativne energije. Dimenziju određuju dva *cut-off* parametra: sume dijagonalnih matričnih elemenata  $\hat{h}_D$  za parove pozitivne energije te analogna suma za parove “miješane” energije [15].

RQRPA model je potpuno konzistentan – u oba kanala se koriste iste interakcije u RHB (2.57) i RQRPA (3.21) jednadžbi te iste snage parametara (bez dodatnih prilagodbi) čime se osigurava da RQRPA amplitude nemaju *spurious* komponente.



### 3.2 Proton-neutron RQRPA

U procesima izmjene naboja poput beta raspada dolazi do promjene protona u neutron, i obratno. Pritom izospinski operatori dizanja  $\tau_+$  i spuštanja  $\tau_-$  induciraju pobuđenja izmjene naboja tako da osnovno stanje nuklearnog sustava  $(N, Z)$  prijeđe u konačna stanja susjednih jezgri, redom  $(N \pm 1, Z \mp 1)$  [18]. Razmatraju se prijelazi iz  $0^+$  osnovnog stanja sferne parno-parne jezgre roditelja u pobuđeno stanje  $J^\pi$  neparno-neparne jezgre kćeri, za što je odgovoran operator izmjene naboja  $T^{JM}$ . Zahvaljujući sfernoj simetriji, kvazičestični parovi se mogu vezati u dobar angularni moment tako da matrične jednadžbe u PN-RQRPA<sup>23</sup> glase [19]:

$$\begin{pmatrix} A^J & B^J \\ B^{*J} & A^{*J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda J} \\ Y^{\lambda J} \end{pmatrix} = E_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda J} \\ Y^{\lambda J} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Vezane RQRPA matrice  $A$  i  $B$  u kanonskoj bazi se definiraju kao:

$$A_{pn,p'n'}^J = H_{pp'}^{11(J)} \delta_{\mu'\nu'} - H_{\mu'\nu}^{11(J)} \delta_{pp'} + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) V_{pn'n p'}^{ph(J)} + (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) V_{pn p' n'}^{pp(J)}, \quad (3.28)$$

$$B_{pn,p'n'}^J = (-1)^{j_{p'} - j_{n'} + J} (u_p v_n v_{p'} u_{n'} + v_p u_n u_{p'} v_{n'}) V_{pp' n n'}^{ph(J)} - (u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) V_{pn p' n'}^{pp(J)}, \quad (3.29)$$

gdje su  $p, p', n, n'$  protonska i neutronska kvazičestična kanonska stanja, dok su  $V^{ph}$  i  $V^{pp}$  proton-neutron rezidualne interakcije koje se odnose redom na čestica-šupljina i čestica-čestica. Kanonska baza dijagonalizira matricu gustoće tako da su vjerojatnosti popunjenja  $v_{p,n}$  svojstvene vrijednosti. Međutim, to nije slučaj za polje sparivanja  $\hat{\Delta}$  ni Diracov jednočestični hamiltonijan srednjeg polja  $\hat{h}_D$ , uslijed čega se u izrazima za matrične elemente  $H_{nn'}^{11}$  i  $H_{pp'}^{11}$  pojavljuju nedijagonalni članovi [14]:

$$H_{\kappa\kappa'}^{11} = (u_\kappa u_{\kappa'} - v_\kappa v_{\kappa'}) h_{\kappa\kappa'} - (u_\kappa v_{\kappa'} + v_\kappa u_{\kappa'}) \Delta_{\kappa\kappa'}. \quad (3.30)$$

Ukupna snaga tako induciranog prijelaza glasi:

$$B_{\lambda J}^\pm = \left| \sum_{pn} \langle p || T^J || n \rangle (X_{pn}^{\lambda J} u_p v_n + (-1)^J Y_{pn}^{\lambda J} v_p u_n) \right|^2. \quad (3.31)$$

Diskretna raspodjela snage je aproksimirana lorencijanom širine 1 MeV [19]:

$$R(E)^\pm = \sum_\lambda B_{\lambda J}^\pm \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(E - E_{\lambda\pm})^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}. \quad (3.32)$$

Nadalje, izoskalarni dio interakcije ne doprinosi  $ph$  interakciji, dok je izovektorski dio jedini koji doprinosi dvočestičnim matričnim elementom konačnog iznosa [14]:

$$\langle pn' | \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 | np' \rangle = 0, \quad (3.33)$$

$$\langle pn' | \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 | np' \rangle = 2. \quad (3.34)$$

<sup>23</sup>eng. PN-RQRPA = Proton-neutron relativistic quasiparticle random phase approximation

Članovi interakcije ovisni o spin-izospinu proizlaze iz izmjene  $\rho$  i  $\pi$  mezona. U RMF računu osnovnog stanja iščezava direktni doprinos jednopionske izmjene, no vrlo je važan za račune pobuđenja koji uključuju spinske i izospinske stupnjeve slobode.

Rezidualna interakcija čestica-šupljina se izvodi iz gustoće lagranžijana:

$$\mathcal{L}_{\pi+\rho}^{\text{int}} = -g_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\rho}_\mu \vec{\tau} \psi - \frac{f_\pi}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \vec{\pi}_\mu \vec{\tau} \psi. \quad (3.35)$$

Pretpostavlja se da je vezanje  $\rho$  mezona i nukleona funkcija vektorske gustoće (2.10) gdje je barionska gustoća dana izrazom (2.11). Eksplicitna ovisnost o gustoći vezanja uvodi dodatne *rearrangement* članove čiji su doprinosi ključni za kvantitativni opis pobuđenih stanja. Iako su uključeni u odgovarajuće izoskalarne gustoće osnovnog stanja, ipak izostaju u kanalu izmjene naboja. Rezidualna dvočestična interakcija je:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 (\beta \gamma^\mu)_1 (\beta \gamma_\mu)_2 g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_1)) g_\rho(\rho_v(\mathbf{r}_2)) D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 (\Sigma_1 \nabla_1) (\Sigma_2 \nabla_2) D_\pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (3.36)$$

gdje su  $D_\rho$  i  $D_\pi$  mezonski propagatori definirani relacijom (A.23), a  $\Sigma$  je [18]:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Za vezanje  $\rho$  mezona se primjenjuje se funkcionalni oblik koji se koristi u DD-ME1 parametrizaciji:

$$g_\rho(\rho_v) = g_\rho(\rho_{\text{sat}}) e^{-a_\rho(x-1)}, \quad (3.38)$$

pri čemu je  $x$  dan jednadžbom (2.12), a  $\rho_{\text{sat}}$  označava vektorsku nukleonsku gustoću zasićenja u simetričnoj nuklearnoj materiji [14]. Za pseudovektorsko pion-nukleon vezanje su na snazi standardne vrijednosti:

$$m_\pi = 138.0 \text{ MeV}, \quad \frac{f_\pi^2}{4\pi} = 0.08. \quad (3.39)$$

Kako bi se ostvario kontaktni dio nukleon-nukleon interakcije, potrebno je uključiti kontaktni Landau-Migdalov član:

$$V_{\delta\pi} = g' \left( \frac{f_\pi}{4\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (3.40)$$

gdje se parametar  $g' \approx 0.6$  obično prilagođava tako da reproducira podatke energija pobuđenja Gamow-Teller rezonanci [13]. U nerelativističkom limesu odgovarajuća dvočestična interakcija se reducira na poznati oblik  $G'_0 \sigma_1 \vec{\tau}_1 \cdot \sigma_2 \vec{\tau}_2$ . Kanal izmjene naboja uključuje dodatni doprinos jednopionske izmjene u usporedbi s RHB računom za osnovno stanje parno-parne jezgre.

PN-RQRPA model je potpuno konzistentan u smislu da se u oba kanala ( $ph$  i  $pp$ ) koriste iste interakcije kao i u RHB modelu. Također, pritom su korišteni i jednaki parametri snage. Dakle, aproksimacija je formulirana u kanonskoj jednonukleonskoj bazi RHB modela i proširena na opis pobuđenih stanja izmjene naboja.

Dvo-kvazičestični konfiguracijski prostor uključuje sljedeće kombinacije [19]:

- stanja s oba nukleona u diskretnim vezanim stanjima,
- stanja s jednim nukleonom u vezanom stanju i jednim u kontinuumu,
- stanja s oba nukleona u kontinuumu.

U svrhu konzistentnosti modela, neophodno je uz stanja pozitivne energije, uključiti i parove formirane od potpuno ili djelomično popunjenih stanja pozitivne energije te praznih stanja negativne energije iz Diracovog mora.

RHB+RQRPA račun daje nuklearna svojstva koja ovise o odabiru efektivnog RMF lagranžijana u kanalu čestica-šupljina i tretmanu sparivanja [19]. Kao u slučaju RHB modela za  $pp$  kanal, i u  $T = 1$   $pp$  kanalu PN-RQRPA se za fenomenološku interakciju sparivanja koristi dio Gogny sile (2.64) s D1S parametrizacijom danom u tablici 2.3. Ova sila je pažljivo prilagođena na svojstva sparivanja konačnih jezgara po cijelom periodnom sustavu, a njezin konačni doseg automatski osigurava pravilan *cut-off* u impulsnom prostoru. Za sparivanje u slučaju jezgara s otvorenim ljuskama u kanalu  $T = 0$  se upotrebljava slična interakcija koja je kombinacija dvije Gaussove funkcije – kratkodosežne odbojne i slabije dugodosežne privlačne [20]:

$$V_{12} = -V_0 \sum_{j=1}^2 g_j e^{-\frac{r_{12}^2}{\mu_j^2}} \hat{\Pi}_{S=1, T=0}, \quad (3.41)$$

gdje je  $r_{12}$ :

$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad (3.42)$$

dok  $\hat{\Pi}_{S=1, T=0}$  projicira na stanja sa  $S = 1$  i  $T = 0$ . Rasponi za gausijane su preuzeti iz Gogny interakcije:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1.2 \text{ fm}, \\ \mu_2 &= 0.7 \text{ fm}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

a relativne snage su odabrane tako da sila na malim udaljenostima bude odbojna:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1, \\ g_2 &= -2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Jedini preostali slobodni parametar jest sveukupna snaga  $V_0$  [14]. Relativističkim računima vremena poluživota  $\beta$  raspada jezgara bogatih neutronima neuspješnim se pokazalo korištenje jedne konstantne vrijednosti sveukupne snage interakcije za različita područja nuklearne mape. Stoga se koristi *ansatz* [20]:

$$V_0 = V_L + \frac{V_D}{1 + e^{a+b(N-Z)}}. \quad (3.45)$$

Vrijednosti parametara su prilagođene tako da se dobiju najbolji dostupni podaci za vremena poluživota nestabilnih jezgara:

$$\begin{aligned} V_L &= 160.0 \text{ MeV}, \\ V_D &= 15.0 \text{ MeV}, \\ a &= 7.2, \\ b &= -0.3. \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3 Vremena poluživota $\beta$ raspada

Kako je već spomenuto, nuklearni  $\beta$  raspad je proces u kojem se jezgra od  $Z$  protona i  $N$  neutrona raspada u susjednu jezgru istog broja nukleona pri čemu dolazi do  $pn$  prijelaza. Za određivanje spektra antineutrina se razmatra  $\beta^-$  raspad kod kojeg jedan neutron prelazi u proton:

$$A(Z, N) \longrightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}. \quad (3.47)$$

Vjerojatnost prijelaza se povezuje s nuklearnim matričnim elementima počevši od Fermijevog zlatnog pravila:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \rho(E_f). \quad (3.48)$$

Početno stanje  $|\phi_0(\mathbf{r})\rangle$  se sastoji samo od osnovnog stanja početne jezgre  $|J_i M_i \xi\rangle$ , dok konačno stanje uz konačnu jezgru  $|J_f M_f \xi\rangle$  ima i neutralni lepton  $\bar{\nu}$  te nabijeni lepton  $e^-$ , a pojednostavljeno glasi:

$$|\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V} \left\{ 1 + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(kr)Y_{10}(\theta, 0) + O((kr)^2) \right\} |J_f M_f \xi\rangle. \quad (3.49)$$

Očekivano s obzirom na pobuđenje izmjene naboja  $pn$  koji se pritom odvija, operator prijelaza je jednočestičan i sadržava izospinske operatore dizanja i spuštanja.

Nadalje, prema  $V - A$  teoriji su dva člana koja doprinose u slaboj interakciji:

- $\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\pm}$  : reprezentira vektorski član  $V$  sa jakošću vezanja  $G_V$ ,
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\pm}$  : reprezentira aksijalno vektorski član  $A$  sa jakošću vezanja  $G_A$ .

Uvaživši navedene rezultate skupa s relacijama za početno i konačno stanje se dobije izraz za matrični element prijelaza:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) | H'' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{V} \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^A \left[ G_V \boldsymbol{\tau}_{\pm}(j) + G_A \boldsymbol{\sigma}(j) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\pm}(j) \right] \\ &\times \left[ 1 - i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(kr)Y_{10}(\theta, 0) + O((kr)^2) \right] | J_i M_i \xi \rangle. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Prva dva člana u razvoju su tzv. *dozvoljeni* prijelazi za koje operator prijelaza iznosi 1 čime je određeno da se prenosi 0 jedinica angularnog momenta, pa je potrebno je razmotriti samo spinske kvantne brojeve. Budući da su elektron i antineutrino fermioni, spin im iznosi  $1/2$  i stoga se mogu vezati paralelno ili antiparalelno:

- $S = 0 \longrightarrow \Delta J = 0$  ;  $\Delta\pi = -1$  : tzv. *Fermijev* ili *superdozvoljeni* raspad,
- $S = 1 \longrightarrow \Delta J = 0, \pm 1$  ;  $\Delta\pi = -1$  : tzv. *Gamow-Tellerov* ili *dozvoljeni* raspad.

Viši članovi u razvoju matričnog elementa (3.50) su poznati kao *zabranjeni* prijelazi [4]. Unatoč nazivu, ovi prijelazi se pojavljuju, ali su značajno manje vjerojatni uslijed narušenja pariteta što rezultira dugim vremenima raspada. Potisnuti su jer dolaze sa faktorom  $kq$ , a kako su im  $Q$ -vrijednosti malene, onda je ujedno i transfer impulsa malen. Za njih se u razmatranje mora uzeti i orbitalni angularni moment, jer operator prijelaza prenosi  $\geq 1$  jedinica angularnog momenta.

Za potrebe ovog rada se u razmatranje uzimaju sljedeći tipovi raspada:

- dozvoljeni:  $L = 0$ ,
- prvo-zabranjeni  $L = 0, 1$ .

Općenito vrijedi da se vremena poluživota dobivaju iz stopa raspada:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_\beta}, \quad (3.51)$$

a stopa  $\beta$  raspada za prijelaz između početnog i konačnog nuklearnog stanja je [20]:

$$\lambda_\beta = \frac{\ln 2}{K} \int_0^{p_0} p_e^2 (W_0 - W)^2 F(Z, W) C(W) dp_e, \quad (3.52)$$

gdje je  $p_e$  količina gibanja elektrona u jedinicama  $m_e c$ , a  $p_0$  maksimalna vrijednost:

$$p_0 = \sqrt{W_0^2 - 1}, \quad (3.53)$$

dok je  $W$  je energija elektrona izražena u jedinicama  $m_e c^2$  [11]:

$$W = \frac{E}{m_e c^2} + 1, \quad (3.54)$$

s maksimalnom vrijednošću  $W_0$  danom kao razlika nuklearnih masa:

$$W_0 = \frac{M_i - M_f}{m_e}, \quad (3.55)$$

što se aproksimira na sljedeći način:

$$M_i - M_f \approx \lambda_n - \lambda_p + \Delta M_{nH} - E_{\text{QRPA}}. \quad (3.56)$$

Konstanta  $K$  je izmjerena u superdozvoljenom  $\beta$  raspada:

$$K = (6144 \pm 2)\text{s}, \quad (3.57)$$

dok se konstanta  $g_A$  odnosi na slabo aksijalno vezanje:

$$g_A = -1.2701(25). \quad (3.58)$$

Faktor  $F(Z, W)$  je Fermijeva funkcija koja korigira spektar na račun kulonskog međudjelovanja izlaznog elektrona i jezgre, a detaljno je objašnjena u potpoglavlju 4.5.1. Faktor oblika  $C(W)$  ovisi pak o tipu raspadu. Za zabranjene raspade ovisi o energiji kako je navedeno jednadžbama (4.11) - (4.13) u poglavlju 4.4. Za dozvoljene raspade ne ovisi o energiji te se u slučaju  $\beta$  raspada jezgara bogatih neutronima jednostavno radi o Gamow-Tellerovoj reduciranoj vjerojatnosti prijelaza [20]:

$$\begin{aligned} C(W) &= B(GT) \\ &= g_A^2 \frac{\langle f || \sum_k \sigma^k \mathbf{t}_-^k || i \rangle^2}{(2J_i + 1)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Naravno, suma ide po svim nukleonima, s time da je matrični element reduciran samo s obzirom na operator spina  $\sigma$  u Condon-Shortley konvenciji. Condon-Shortley faza se odnosi na kvantno-mehanički faktor  $(-1)^m$  za  $m > 0, 1$ . Uobičajena praksa je fazni faktor ili uključiti u definiciju pridruženih Legendreovih polinoma ili ga dodati u definiciju sfernih harmonika. Uobičajena praksa je fazni faktor ili uključiti u definiciju pridruženih Legendreovih polinoma ili ga dodati u definiciju sfernih harmonika.

Iako neobavezna, Condon-Shortley faza može pojednostaviti kvantno-mehaničke operacije, poput primjene operatora dizanja i spuštanja koji prema konvenciji glase:

$$\begin{aligned} t_- n &= p \\ t_+ p &= n. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Faktor oblika za prvo-zabranjene (FF<sup>24</sup>) prijelaze glasi [21]:

$$C(W) = C_0 + C_1 W + C_{-1} \frac{1}{W} + C_2 W^2, \quad (3.61)$$

gdje su faktori  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_{-1}$  i  $C_2$  definirani kako slijedi:

$$\begin{aligned} C_0 &= \left[ \zeta_0^2 + \frac{1}{9} w^2 \right]_{(0)} \\ &+ \left[ \zeta_1^2 + \frac{1}{9} (x+u)^2 - \frac{4}{9} \mu_1 \gamma u (x+u) + \frac{1}{18} W_0^2 (2x+u)^2 - \frac{1}{18} \lambda_2 (2x-u)^2 \right]_{(1)} \\ &+ \left[ \frac{1}{12} z^2 (W_0^2 - \lambda_2) \right]_{(2)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$C_1 = \left[ -\frac{4}{3} u Y - \frac{1}{9} W_0 (4x^2 + 5u^2) \right]_{(1)} - \left[ \frac{1}{6} W_0 z^2 \right]_{(2)}, \quad (3.63)$$

$$C_{-1} = \frac{2}{3} \mu_1 \gamma \left\{ - \left[ \zeta_0 w \right]_{(0)} + \left[ \zeta_1 (x+u) \right]_{(1)} \right\}, \quad (3.64)$$

$$C_2 = \frac{1}{18} \left[ 8u^2 + (2x+u)^2 + \lambda_2 (2x-u)^2 \right]_{(1)} + \frac{1}{12} \left[ (1 + \lambda_2) z^2 \right]_{(2)}, \quad (3.65)$$

a pritom su uvedene pokrate [20]:

$$\begin{aligned} V &= \xi' v + \xi w', \\ Y &= \xi' y - \xi (u' + x'), \\ \zeta_0 &= V + \frac{1}{3} w W_0, \\ \zeta_1 &= Y + \frac{1}{3} (u - x) W_0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Broj u zagradama u indeksu se odnosi na rang operatora u uglatim zagradama, dok za parametar  $\gamma$  vrijedi:

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}. \quad (3.67)$$

Za kulonske valne funkcije se koriste aproksimacije:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx 1, \\ \lambda_2 &\approx 1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Nadalje, definirana je veličina:

$$\xi = \frac{\alpha Z}{2R}, \quad (3.69)$$

$$R = \sqrt{\langle r \rangle^2}. \quad (3.70)$$

---

<sup>24</sup>eng. FF = first-forbidden

Matrični elementi za  $\beta^-$  prijelaze u Condon-Shortley faznoj konvenciji glase [20]:

$$w = -g_A \sqrt{3} \frac{\langle f || \sum_k r_k [\mathbf{C}_1^k \otimes \boldsymbol{\sigma}^k]^0 \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.71)$$

$$x = -\frac{\langle f || \sum_k r_k \mathbf{C}_1^k \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.72)$$

$$u = -g_A \sqrt{2} \frac{\langle f || \sum_k r_k [\mathbf{C}_1^k \otimes \boldsymbol{\sigma}^k]^1 \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.73)$$

$$z = 2g_A \frac{\langle f || \sum_k r_k [\mathbf{C}_1^k \otimes \boldsymbol{\sigma}^k]^2 \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.74)$$

$$w' = -g_A \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\langle f || \sum_k r_k I(1, 1, 1, 1, r_k) [\mathbf{C}_1^k \otimes \boldsymbol{\sigma}^k]^0 \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.75)$$

$$x' = -\frac{2}{3} \frac{\langle f || \sum_k r_k I(1, 1, 1, 1, r_k) \mathbf{C}_1^k \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.76)$$

$$u' = -g_A \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\langle f || \sum_k r_k I(1, 1, 1, 1, r_k) [\mathbf{C}_1^k \otimes \boldsymbol{\sigma}^k]^1 \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}. \quad (3.77)$$

Matrični elementi povezani s relativističkim korekcijama su:

$$\xi'v = -g_A \frac{\langle f || \sum_k \gamma_5^k \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.78)$$

$$\xi'y = -\frac{\langle f || \boldsymbol{\alpha}^k \mathbf{t}_-^k || i \rangle}{\sqrt{2J_i + 1}}, \quad (3.79)$$

pri čemu su  $\gamma_5$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  Diracove matrice. Veličina  $\mathbf{C}_{LM}$  je:

$$\mathbf{C}_{LM} = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_{LM}, \quad (3.80)$$

gdje su  $Y_{LM}$  sferni harmonici. Budući da matrični elementi ne ovise o energijama elektrona i neutrina, integrali po faznom prostoru elektrona se računaju neovisno te se pojavljuju samo kao multiplikativni faktori. Funkcija  $I(1, 1, 1, 1, r)$  uzima u obzir raspodjelu naboja tako da u aproksimaciji uniformne sferne raspodjele ima oblik:

$$I(1, 1, 1, 1, r) = \frac{3}{2} \begin{cases} 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2 & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{R}{r} - \frac{1}{5} \left( \frac{R}{r} \right)^3 & r > R. \end{cases} \quad (3.81)$$

Sistematski računi vremena poluživota beta raspada određeni Gamow-Tellerovim prijelazima su pokazali da teorijski matrični elementi trebaju biti potisnuti faktorom  $q$  za koji se ispostavilo da je neovisan o pojedinom razmatranom prijelazu i približno konstantan duž cijele nuklearne mape. Također, postoje dokazi koji idu u prilog tome da je teorijskim pristupom preuveličana snaga ukupnog prvo-zabranjenog prijelaza. K tome, čini se da je faktor potiskivanja ovisan o prostoru modela koji se koristi te o pojedinom prvo-zabranjenom operatoru. Gamow-Tellerovi i prvo-zabranjeni prijelazi se za potrebe ovog rada potiskuju pomoću efektivne vrijednosti [20]:

$$g_A = -1.0. \quad (3.82)$$

## 4 Rezultati

### 4.1 Eksperimentalna pozadina reaktorskih antineutrina

Postrojenja nuklearnih elektrana su najintenzivniji izvori antineutrina koji su pod čovjekovom kontrolom. Prosječno se po fisiji oslobodi oko 200 MeV energije, a duž lanca  $\beta$  raspada fizijskih produkata se stvori 6 antineutrina. Na temelju tih podataka bi se moglo očekivati da se u punom kutu  $4\pi$  emitira nekih  $2 \times 10^{20} \nu/s$  iz reaktora 1 GW termalne snage. S obzirom da su nestabilni fizijski produkti zapravo jezgre bogate neutronima, svi  $\beta$  raspadu su tipa  $\beta^-$  tako da tok neutrina čine čisti elektronski antineutrini [9].

Proces detekcije antineutrina se odvija putem tzv. *inverznog  $\beta$  raspada*:

$$\bar{\nu} + p \longrightarrow n + e^+, \quad (4.1)$$

pritom dolazi do uhvata antineutrina protonom (zbog zakona očuvanja leptonskog broja nije moguć proces uhvata od strane neutrona). Minimum energije potreban za pokretanje reakcije iznosi 1.804 MeV, a udarni presjek je reda veličine  $10^{-19} \text{ b} = 10^{-43} \text{ cm}^2$ . O koliko nevjerovatno malom udarnom presjeku je riječ (u usporedbi s nukleon–nukleon udarnim presjekom raspršenja od 20 b) dolazi do izražaja izračuna li se vjerojatnost da neutrino bude uhvaćen. Da bi vjerojatnost uhvata bila neka razumna, neutrino mora proći kroz oko  $10^{19} \text{ cm}$  materijala što je oko 10 svjetlosnih godina. Ne čudi podatak da je bilo potrebno 25 godina eksperimentalnih napora da bi se uhvatio jedan [4]. Konkretna eksperimentalna detekcija je izvedena genijalnom serijom eksperimenata koje su 1950.-ih godina sproveli u djelo Reines i Cowan [11]. Čitav eksperimentalni postav se nalazio 11 m od nuklearnog reaktora, a 12 m ispod zemlje kako bi se čim bolje zaštitili od kozmičkih zraka. Kao svoj neutrinski detektor su koristili tekući scintilator koji je bogat slobodnim protonima, a u njega su uveli komponentu Cd. Kad proton uhvati  $\bar{\nu}$ , dobiju se neutron i pozitron. Pozitron se u scintilatoru brzo anihilira kroz reakciju:

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma \quad (4.2)$$

što daje bljesak svjetlosti. Neutron putuje kroz tekućinu, a potrebno je otprilike  $10 \mu\text{s}$  da uspori dok ga konačno ne uhvati jezgra Cd koja ima veliki udarni presjek za uhvat neutrona. Posljedično, jezgra se nalazi u visoko pobuđenom stanju koje se brzo vraća u osnovno stanje i pritom emitira  $\gamma$  zraku. Dakle, karakteristični signal za uhvat  $\bar{\nu}$ :

- i) fotoni energije 0.511 MeV od anihilacije pozitrona i elektrona,
- ii)  $\gamma$  zraka energije 9.1 MeV od uhvata neutrona.

Uspjeli su opaziti nekoliko događaja po satu koji su bili kandidati za uhvat  $\bar{\nu}$ , a mnogi dodatni eksperimenti su potvrdili da je antineutrino prava čestica – ne samo puka izmišljotina Paulijeve i Fermijeve mašte [4]. Eksperimenti antineutrina iz nuklearnih reaktora igraju ključnu ulogu u oblikovanju našeg razumijevanja fizikalnih svojstava neutrina, a tome će tako biti i u budućnosti [11].



U komercijalnim nuklearnim reaktorima,  $^{238}\text{U}$  predstavlja  $\sim 97\%$  početnih šipki goriva, a budući da njegovu fisiju potiču samo brzi neutroni, snazi reaktora doprinosi svega  $\sim 10\%$  i malo se mijenja tijekom ciklusa [10]. U jezgri reaktora bi samo jedan neutron, među njih nekoliko generiranih fisijom  $^{235}\text{U}$ , trebao inducirati drugu fisiju, tako da jezgra nikad ne dostigne režim prekritičnog rada. Dio neutrona biva uhvaćen dominantnim izotopom  $^{238}\text{U}$  koji vodi na proizvodnju novih fisijskih izotopa:  $^{239}\text{Pu}$  i u manjoj mjeri  $^{241}\text{Pu}$ . Ovo je *proces izgaranja* [9]. Dakle, tijekom tipičnog ciklusa, dominantni doprinos  $^{235}\text{U}$  na početku ciklusa se polako smanjuje, dok se doprinos jezgara proizvedenih u reaktoru  $^{239}\text{Pu}$  i  $^{241}\text{Pu}$  povećava [10].

Većina modernih nuklearnih reaktora su tipa PWR<sup>25</sup> u kojima se voda pod visokim tlakom pumpa u reaktorsku jezgru gdje se zagrijava energijom koja je nusprodukt fisije. Zatim zagrijana voda teče u generator gdje se stvara para koja pokreće turbine, a koje zauzvrat generiraju električnu energiju. Stlačena voda se, osim kao rashladno sredstvo, koristi i kao moderator brzih fisijskih neutrona na način da se neutroni višestruko sudaraju s laganim atomima vodika (zato je bolje da je voda čim gušća) jer se tom povratnom spregom odvija tzv. *proces samoregulacije* zbog čega su ti reaktori vrlo stabilni. Tipično vrijeme trajanja ciklusa reaktora što je 1 godina [9]. Na sreću, fisije ta četiri izotopa čine više od 99% svih reaktorskih antineutrina čija je energija iznad praga inverznog  $\beta$ -raspada:  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$  i  $^{238}\text{U}$ . Međutim, rezultirajući tok antineutrina je superpozicija tisuća grana  $\beta$ -raspada fisijskih fragmenata tih četiriju izotopa i prema tome, izazovan je račun počevši od prvih principa [10].

Spektri elektrona koji odgovaraju fisijama aktinida  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  i  $^{241}\text{Pu}$  termalnim neutronima, izmjereni su u periodu 1982.-1989. godine u seriji ILL<sup>26</sup> eksperimenata korištenjem  $\beta$  spektrometra BILL [10]. Tanke folije mete fisijskih izotopa  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  i  $^{241}\text{Pu}$  su bile izložene toku termalnih neutrona na 80 cm udaljenosti od centra sklopa nuklearnog goriva. Jezgru reaktora je mogao napustiti vrlo mali postotak emitiranih elektrona i to kroz ravnu vakuumsku cijev gdje su detektirani visoko rezolucijskim elektronskim spektrometrom. Stope elektrona su se bilježile mjerenjem spektra u magnetskom polju u koracima od 50 keV, pružajući odlično određen oblik spektra elektrona s ispod-postotnom statističkom greškom. Objavljeni podaci su izgladeni preko 250 keV. Ovisno o mjenom izotopu, ILL spektri su dobiveni nakon kratkog vremena zračenja, između 12 sati i 1.8 dana [9]. Rezultati su izloženi u referentnim radovima Feilitzsch *et al.* [22], Schreckenbach *et al.* [23] i Hahn *et al.* [24].

Dugo vremena jedino  $^{238}\text{U}$  nije imao eksperimentalno izmjeren spektar elektrona. Konačno su 2013. godine u radu Haaga *et al.* [25] objavljeni rezultati eksperimenta FRM II reaktora u Garchingu. Folije mete prirodnog urana su bile ozračene termalnim i brzim neutronima te se emitirani  $\beta$  spektar bilježio elektronskim teleskopom koji potiskuje  $\gamma$  zračenje. Tako dobiveni  $\beta$  spektar je normaliziran na podatke magnetskog spektrometra BILL za  $^{235}\text{U}$  [25].

<sup>25</sup>eng. PWR = Pressurized Water Reactor

<sup>26</sup>fra. ILL = Institut Laue-Langevin (Grenoble, Francuska)

## 4.2 Osvrt na prijašnje metode određivanja spektra antineutrina

Dva su generalna pristupa koja se koriste za izračunavanje spektra antineutrina:

- 1) tzv. metoda *pretvorbe* ili *inverzije* – temelji se na izmjerenom elektronskom spektru koji je pridružen fisiji individualnih goriva, a koji se prilagođava skupu virtualnih  $\beta$  grana i tek zatim se pretvara u odgovarajući spektar antineutrina. Procedura se sastoji u dijeljenju elektronskog spektra na  $n$  dijelova jednake širine, što je najjednostavniji i najekonomičniji odabir jer se minimizira broj slobodnih parametara [10]. Počevši od dijela najviše energije, nekoliko točaka podataka u tom dijelu se koristi za prilagodbu na krajnju točku i omjer grananja prve virtualne grane, uz pretpostavku dozvoljenog oblika pomoću jednadžbe:

$$N(E_e) = \underbrace{k(E_0, Z)}_{\text{norma}} \times \underbrace{E_e p_e(E_0 - E_e)^2}_{\text{fazni prostor}} \times \underbrace{F(Z + 1, E_e)}_{\text{Fermijeva funkcija}}. \quad (4.3)$$

Kad su parametri određeni, čitav doprinos virtualne grane (od krajnje točke prema nultoj energiji) se oduzima od eksperimentalnog spektra i procedura se ponavlja dok svih  $n$  grana nije okarakterizirano svojim intenzitetima i krajnjim točkama. Slobodni parametar  $n$  se optimizira tako da originalni eksperimentalni elektronski spektar i izvedeni prilagođeni budu međusobno čim sličniji [10]. Tad se prilagođene virtualne grane pretvaraju u antineutrinske zamjenom [9]:

$$E_\nu = E_0 - E_e, \quad (4.4)$$

pritom je zanemaren odboj jezgre, tako da je ukupni antineutrinski spektar suma svih pretvorenih antineutrinskih grana. Unatoč diskontinuitetu Fermijeve funkcije u krajnjoj točki pojedine grane, “pravi” antineutrinski spektar se čini kontinuiran jer tisuće grana doprinose kvazikontinuiranosti raspodjele [10].

Autori ILL eksperimenata su koristili samo 30 virtualnih beta grana zbog čega se oko svake virtualne krajnje energije pojavljivala lažna oscilacija s obzirom na pravi spektar. Stoga su kompletnu proceduru ponavljali nekoliko puta, ali opisujući spektar nešto drugačijim skupom krajnjih energija. Stepence u obliku spektra su zaglađene uzimanjem srednje vrijednosti svih spektara i grupiranjem u cjeline od 250 keV umjesto 50 keV. Valja napomenuti da su korekcije tretirali na samom kraju kao efektivnu linearnu korekciju [9].

Vogel je ispitao proceduru pretvorbe *per se* i ustanovio da se elektronski spektar može pretvoriti u antineutrinski s greškom koja ne prelazi  $\sim 1\%$  ukoliko su (i) dijelovi na koje je elektronski spektar podijeljen dovoljno mali, (ii) pretvoreni spektar antineutrina se izglađuje grupiranjem u cjeline koje su nekoliko puta veće od širine originalnih dijelova te (iii) optimalni usrednjeni nuklearni naboj  $\langle Z \rangle$  je neovisno poznat kao funkcija krajnje energije  $E_0$  [10]. Potonji podatak se ispostavio izrazito važan za oblik visoko-energijskog dijela antineutrinskog spektra [9]. Prema tome, neodređenost rezultirajućeg spektra je kombinacija eksperimentalnih neodređenosti ILL spektra i neodređenosti same procedure.

- 2) tzv. metoda *sumacije* ili *ab initio* – koristi sve dostupne podatke o  $\beta$  raspadima svakog fisijskog fragmenta, sumirajući individualni  $\beta$  spektar svakog nuklida, pritom otežan njegovim doprinosom u fisiji [10], što se može raspisati ovako:

$$S_{\text{tot}}(E) = \sum_{k=^{235}\text{U}, ^{239}\text{Pu}, ^{241}\text{Pu}, ^{238}\text{U}} \alpha_k S_k(E), \quad (4.5)$$

$$S_k(E) = \sum_{f=1}^{N_f} \mathcal{A}(t) S_f(E), \quad (4.6)$$

$$S_f(E) = \sum_{b=1}^{N_b} BR_f^b S_f^b(Z_f, A_f, E_{0f}^b, E), \quad (4.7)$$

gdje je  $\alpha_k$  broj fisija  $k$ -tog goriva u razmatranom vremenu,  $\mathcal{A}(t)$  aktivnost  $f$ -tog fisijskog produkta, a  $N_b$  broj  $b$ -ta grana, dok su  $S_k(E)$ ,  $S_f(E)$  i  $S_f^b(Z_f, A_f, E_{0f}^b, E)$  odgovarajući  $\beta$  spektri normalizirani na jednu fisiju, redom fisijskog goriva, fisijskog produkta te pojedine grane. Nadalje,  $E$  je kinetička energija emitiranih elektrona, a  $E_{0f}^b$  krajnja energija  $b$ -te grane  $f$ -tog fisijskog produkta, dok su  $Z_f$  i  $A_f$  broj naboja i mase jezgre roditelja. Grane povezuju osnovno stanje (ili pak izomerno stanje) jezgre roditelja sa različitim pobuđenim nivoima jezgre kćeri. Omjer grananja  $BR_f^b$  se normalizira na parcijalnu širinu  $\beta$  raspada koja iznosi 1 ako je roditelj čisti  $\beta^-$  emiter, a inače je  $< 1$  [9].

Jednadžbe (4.5) - (4.7) vrijede i za elektronske i antineutrinske spektre. Izraz za elektronski spektar  $b$ -te grane je jednak spektru pojedinog  $\beta$  raspada (4.3). Ponovno se antineutrinski spektar  $b$ -te grane dobije zamjenom (4.4). Relacija jedan-na-jedan je valjana samo na razini pojedinačne beta grane. Naime, radi se o jedinstvenom svojstvu *ab initio* postupka da elektronske i antineutrinske spektre predviđa s jednakom točnošću. Spektar je, naravno, normaliziran [9].

Ova metoda trenutno ima značajno veće neodređenosti zbog neodređenosti i podataka o  $\beta$  raspadima i fisijskih doprinosa što se posebno odnosi na fisijske fragmente s vrlo kratkim vremenima života koji zato imaju visoke  $Q$  vrijednosti. Jedan izlaz predstavljaju različiti nuklearni modeli [10].

Visoko-energijski dijelovi spektra mogu biti preuveličani i zbog pandemonijskog efekta [9]. Naime, omjeri grananja i krajnje točke se određuju mjerenjem gama zračenja emitiranog neposredno nakon  $\beta$  prijelaza pomoću visoko rezolucijskih, ali nisko efikasnih Ge kristala. U slučaju velikog  $Q$ , dio  $\beta$  grana povezuje jezgru roditelja s vrlo pobuđenim nivoima jezgre kćeri, pa je prijelaz ili raspodijeljen preko nekoliko manjih  $\gamma$  zraka ili koncentriran u jednoj većoj  $\gamma$  zruci, tako da eksperimentalna aparatura može propustiti dio ili čitavu gama kaskadu. Efekt se može izbjeći eksperimentalnim tehnikama različitim od  $\beta - \gamma$  koincidencije (npr. mjerenja Tenglada *et al.* i Greenwooda *et al.*). Kvalitetna mjerenja mogu poboljšati predviđanja kako je pokazano u članku [26]. K tome, koristi se i Grossova teorija za jezgre za koje se sumnja da pate od pandemonijskog efekta.

### 4.3 Anomalija reaktorskih antineutrina

Kako je već istaknuto, *ab initio* metoda ima velika ograničenja zbog nepoznatih doprinosa egzotičnih jezgara. Ipak,  $\beta$  prijelazi dani u nuklearnim bazama podataka predstavljaju oko 90% ILL spektra [9]. Ove fizikalne raspodjele krajnjih točaka i nuklearnih naboja su dragocjene informacije za kontroliranje pretvorbe elektronskog i antineutrinskog spektra. Mueller *et al.* su to kombinirali sa vrlo preciznim ILL podacima elektrona za poboljšano predviđanje spektra antineutrina.

Nova *mješovita* ili *hibridna* metoda omogućava komplementarni *ab initio* pristup, ali sa strategijom iskorištavanja svih podataka dostupnih u modernim nuklearnim bazama podataka pritom smanjujući oslanjanje na nuklearne modele. Konkretno, korištenje efektivnih grana se ograničava na prilagodbu samo onih nekoliko posto koji čine razliku s obzirom na referentne ILL elektronske podatke. Na ovaj način se raspodjela  $\beta$  grana drži vrlo blizu fizikalnoj, a korekcije se mogu primijeniti na razini grane. Motivaciju za ovakav pristup čini što je u slučaju poznatih svih parametara  $\beta$  raspada, ujedno i grana antineutrina poznata na način neovisan o modelu te se sve greške ulaznih parametara u principu mogu propagirati [9].

Zabranjenost  $\beta$  prijelaza se izvodi iz spina i pariteta povezanih nuklearnih nivoa. Ukoliko ta informacija nedostaje ili je nepotpuna, po *defaultu* se bira najniža moguća zabranjenost, a svi prijelazi označeni kao zabranjeni se prisilno uzimaju kao da su jedinstvenog tipa. Zatim se ukupni  $\beta$  spektar jednog fisijskog izotopa gradi kao suma spektara svih fisijskih fragmenata otežanih njihovom aktivnošću. Pritom se koriste svi dostupni podaci iz ENSDF<sup>27</sup> plus jezgre iz “pandemonijski korigiranih” mjerenja. Svaki izmjereni  $\beta$  spektar se mora prilagoditi na skup grana. Ove grane se razlikuju od virtualnih grana korištenih za prilagodbu ILL podataka time što im je nuklearni naboj savršeno poznat. K tome, doprinos koji nedostaje da se postigne podudaranje s ILL elektronskim spektrom, prilagođava se korištenjem skupa od pet efektivnih  $\beta$  grana s nuklearnim nabojem  $Z = 46$  (odabran kao srednja vrijednost raspodjele fisijskih produkata) uz pretpostavku da su prijelazi dozvoljenog tipa. Normalizacija i krajnja točka su dva slobodna parametra za svaku granu.

Uspoređujući antineutrinske ostatke dobivene korištenjem neovisnih doprinosa nakon 36 sati umjesto 12 sati ili čak kumulativnih fisijskih doprinosa koji odgovaraju ravnotežnom režimu nakon konačnog vremena zračenja, može se uočiti da su time uzrokovane varijacije u antineutrinском spektrima zanemarive ( $\leq 1\%$ ) što se može objasniti činjenicom da, iako različiti skupovi fisijskih doprinosa utječu na promjenu oblika *ab initio* spektra za nekoliko posto, ta promjena biva apsorbirana virtualnim granama koje se prilagođavaju na doprinose koji nedostaju u odnosu na ILL spektar elektrona. Raspodjele nuklearnih naboja i krajnjih energija u podlozi ostaju vrlo slične, a to vodi na iste finalne ostatke. Ovim se ilustrira kako se mješoviti pristup rješava dominantnih grešaka *ab initio* pristupa [9].

---

<sup>27</sup>eng. ENSDF = Evaluated Nuclear Structure Data Files

Mueller *et al.* su u istom članku [9] proveli račun pogreške koji pokazuje da su poboljšani spektri trenutno najprecizniji. Konačna pogreška jest usporediva s ILL spektrima, čak se dobilo dobro slaganje oblika, ali je srednja vrijednost normalizacije pomaknuta za oko +3%. Upravo to opažanje da srednja vrijednost eksperimentalno dobivenog toka reaktorskih antineutrina na udaljenostima reaktor-detektor manjim od 100 m broji tek  $0.943 \pm 0.023$ , umjesto  $0.976 \pm 0.024$  teorijskog očekivanja se naziva *anomalija reaktorskih antineutrina* [8].

U međuvremenu se pojavilo više mogućih objašnjenja anomalije, međutim još nijedno nije potvrđeno:

- Odmah prilikom izlaganja rezultata mješovite procedure, Mueller *et al.* su se osvrnuli na potencijalno objašnjenje [9]. Prema definiciji, procedura prilagodbe optimizira parametre virtualnih elektronskih grana tako da se ukupni spektar elektrona uvijek podudara s ILL podacima. Stoga je u procesu pretvorbe, samo antineutrinski spektar osjetljiv na članove korekcije. Kada su primjenjene na razini grane, korekcije odstupaju od efektivne formule i predviđen pomak od 3% objašnjavaju u području niskih energija. Valja naglasiti da poboljšanje nije učinjeno u pogledu teorijskih izraza za korekcije, već je jedino revidiran način implementacije. Na višim energijama, dominantni izvor odstupanja dolazi od parametrizacije raspodjele naboja pridruženog virtualnim  $\beta$  granama uslijed pregrube aproksimacije konstantnim nuklearnim nabojima.
- Mention *et al.* su ponudili objašnjenje ove anomalije u vidu nove fizike prema kojoj standardni neutriini koji nose slabi nuklearni naboj mogu oscilirati u tzv. “sterilini” neutriino koji ne nosi slabi nuklearni naboj te zato bježi detekciji [8].
- Huber je ponovno istraživao i potvrdio zaključke Muellerovog rada [9], s tim da su u njegovom radu [11] ispitani efekti različitih korekcija na očekivane spektre antineutrina. Međutim, ispostavilo se da sve te korekcije zajedno nisu dostatne da objasne anomaliju.
- Za razliku od Huberovog rada gdje su analizirani samo dozvoljeni raspad, Hayes *et al.* su na četiri različita načina ispitali utjecaj prvo-zabranjenih (FF) raspada uz pretpostavku nekih virtualnih FF grana. Ustanovljeno je da rezultati mogu odgovarati veličini toka antineutrina koji nedostaje [12].
- No, stvarni FF raspad su mnogo kompliciraniji od oblika pretpostavljenog u radu Hayes *et al.*, pa su Fang i Brown ispitali koji efekt realistični FF raspad ima na antineutrinski spektar u sklopu računa mikroskopske nuklearne strukture. Analiziranjem FF grana raspada parno-parnih jezgara su došli do zaključka da FF raspad mogu biti odgovorni za dio antineutrina koji nedostaju u anomaliji reaktorskih antineutrina [21].

Sa sigurnošću se može konstatirati da su potrebna dodatna istraživanja koja bi ukazala na pravo objašnjenje anomalije reaktorskih antineutrina. Nova mjerenja  $\beta$  raspada odabranih fisijskih produkata bi mogla donijeti nova spektralna predviđanja, neovisna od mjerenja [22] - [24], jedinstvena još od 1980.-ih godina.

#### 4.4 $\beta$ spektar pojedinog prijelaza

Nastavno na razmatranja iz potpoglavlja 3.3, dozvoljeni ili Gamow-Teller spektar se izvodi iz stope  $\beta$  raspada dane jednadžbom (3.52) kao derivacija s obzirom na energiju elektrona:

$$\frac{dN_\beta}{dW} = N_\beta \frac{d\lambda_\beta}{dW} = p_e(W_0 - W)^2 C(W), \quad (4.8)$$

tako da osnovni, tj. bez korekcija, dozvoljeni  $\beta$  spektar glasi [4]:

$$N_\beta(W) = K \underbrace{p_e^2 (W - W_0)^2}_{\text{fazni prostor}} C(W), \quad (4.9)$$

gdje su normalizacijska konstanta  $K$ , količina gibanja elektrona  $p_e$ , trenutna  $W$  i maksimalna  $W_0$  energija elektrona te faktor oblika  $C(W)$  definirani jednadžbama (3.53) - (3.59) te (4.24).

Fisijski fragmenti sadrže i značajan udio grana zabranjenih prijelaza pri kojima dolazi do promjene pariteta između početnog i konačnog stanja. Najvažniji među njima su prvo-zabranjeni (FF) za koji su moguća 3 tipa prijelaza pridružena različitim promjenama spina [21]:

$$\Delta J^\pi = 0^-, 1^-, 2^-. \quad (4.10)$$

Općenito, faktor oblika za FF prijelaze je dan jednadžbom (3.61). Međutim, svaki tip ima drugačije matrične elemente te prema tome i drugačiju ovisnost oblika spektra o energiji  $W$ :

$$C^{\Delta J=0}(W) = C_0 + C_{-1}/W, \quad (4.11)$$

$$C^{\Delta J=1}(W) = C_0 + C_1 W + C_{-1}/W + C_2 W^2, \quad (4.12)$$

$$C^{\Delta J=2}(W) = C_0 + C_1 W + C_2 W^2, \quad (4.13)$$

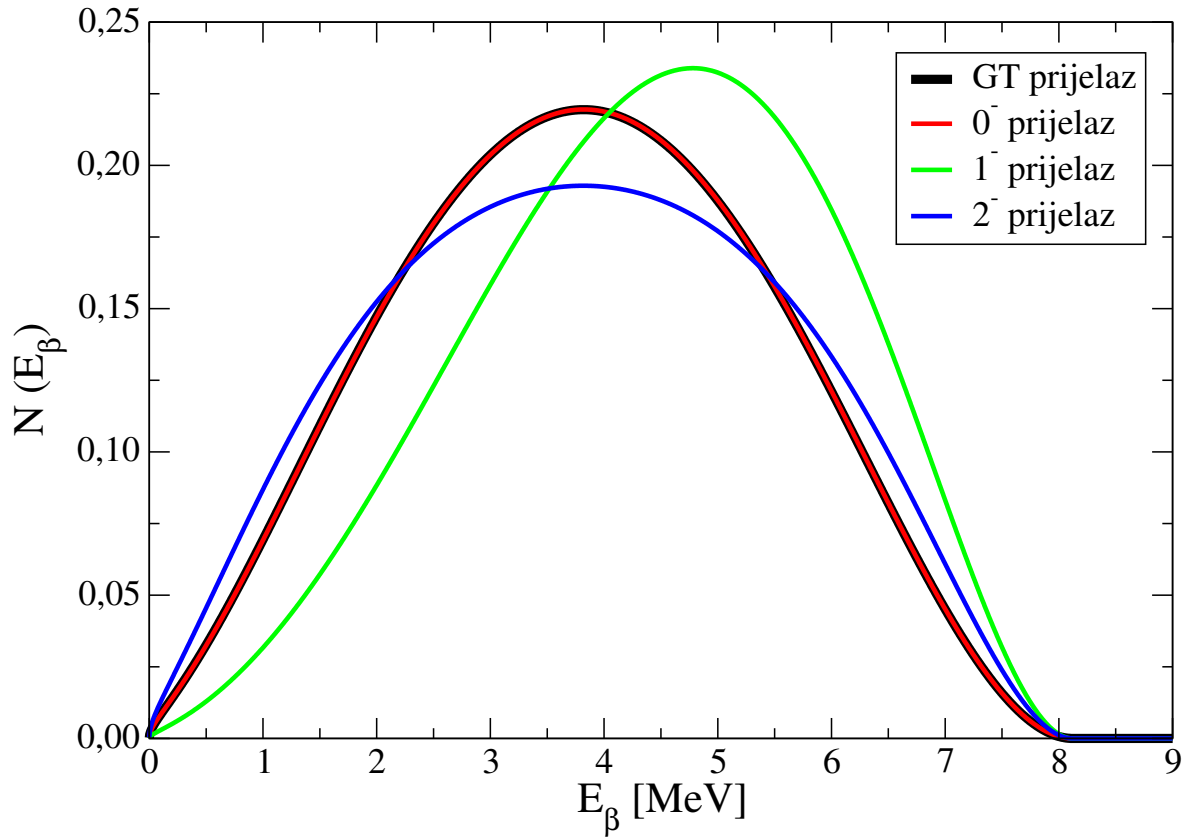
gdje su koeficijenti  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_{-1}$  i  $C_2$  definirani jednadžbama (3.62) - (3.65) [20].

Za potrebe ovog rada su se koristili prvo-zabranjeni prijelazi  $0^-$ ,  $1^-$  i  $2^-$  te su na slici 4.1 uspoređeni sa dozvoljenim Gamow-Teller prijelazom. Iz toga se vidi da je  $0^-$  prijelaz oblika sukladnog GT prijelazu, zatim da je  $2^-$  prijelaz širih krakova i nižeg maksimuma, dok  $1^-$  ima viši maksimum pomaknut prema većim energijama.

Analogni račun primjenjen na osnovni spektar antineutrina glasi [21]:

$$N_{\bar{\nu}}(W_{\bar{\nu}}) = K W_{\bar{\nu}}^2 \sqrt{(W_0 - W_{\bar{\nu}})^2 - 1} C(W_0 - W_{\bar{\nu}}), \quad (4.14)$$

gdje je  $W_{\bar{\nu}}$  energija antineutrina u jedinicama  $m_e$ . Usporedbom pripadnih spektara elektrona i antineutrina se može uočiti da elektronski spektar dostiže maksimum na nižim energijama od antinutrinuskog zbog toga što elektrone privlači pozitivno nabijena jezgra. Osim toga, spektar elektrona ima konačnu vrijednost na energiji 0, što se kod spektra antineutrina reflektira oštrim rezom na maksimalnoj energiji antineutrina [4].



Slika 4.1: Usporedba Gamow-Tellerovog i prvo-zabranjenih prijelaza za  $\beta$  spektar

Činjenica je da je trenutno znanje  $\beta$  spektara iz fizijskih produkata prilično slabo. Većina preciznih spektara je izmjerena samo za nuklide blizu doline stabilnosti što automatski povlači da se radi o znatno nižim  $Q$  vrijednostima [27]. Upravo pokazana vrlo velika sličnost  $0^-$  spektra dozvoljenom spektru je omogućila korištenje oblika dozvoljenog spektra za opis raspada kod jezgara  $^{92}\text{Rb}$  i  $^{96}\text{Y}$  u radu [27] jer obje  $\sim 95\%$  podliježu prvo-zabranjenim prijelazima s osnovnog stanja  $0^-$  na osnovno stanje  $0^+$ .

Problemu faktora oblika zabranjenih prijelaza se može pristupiti i aproksimativno kako je primjenjeno u referenci [11]. Pritom se za zabranjene raspade jednostavni faktor faznog prostora množi dodatnim faktorom kako su navedeni u tablici 4.1 ovisno o tipu zabranjenog prijelaza. Dodatni faktori su simetrični na zamjenu  $p_e$  i  $p_{\bar{\nu}}$ , pa svaka promjena  $\beta$  oblika simetrična između  $E_{\bar{\nu}}$  i  $E_e$ , ne mijenja  $\bar{\nu}$  spektar. Zahvaljujući tome se dobilo da su korekcije zabranjenih raspada na invertirani ILL spektar antineutrina malog iznosa unatoč sveukupno velikom doprinosu zabranjenih raspada kod fizijskih fragmenata.

| faktor uz fazni prostor $p^2(W - W_0)^2$                                  | jedinstveni | nejedinstveni |
|---------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------|
| $p_{\bar{\nu}}^2 + p_e^2$                                                 | prvi        | drugi         |
| $p_{\bar{\nu}}^4 + \frac{10}{3}p_{\bar{\nu}}^2p_e^2 + p_e^4$              | drugi       | treći         |
| $p_{\bar{\nu}}^6 + 7p_{\bar{\nu}}^4p_e^2 + 7p_{\bar{\nu}}^2p_e^4 + p_e^6$ | treći       | četvrti       |

Tablica 4.1: Dodatni faktori za fazni prostor zabranjenih prijelaza

## 4.5 Korekcije na $\beta$ spektar

Za precizne račune je potrebno osnovni  $\beta$  spektar (4.9) proširiti uključivanjem dodatnih članova koji kompenziraju efekte čime modificirani  $\beta$  spektar postaje [11]:

$$\begin{aligned}
 N_\beta(W) = & K p_e^2 (W - W_0)^2 C(W) && \text{osnovni spektar} \\
 & \times F(Z, W) && \text{Fermijeva korekcija} \\
 & \times L(Z, W) && \text{korekcija elektromagnetske interakcije} \\
 & \times C(Z, W) && \text{korekcija slabe interakcije} \\
 & \times S(Z, W) && \text{korekcija zasjenjenja} \\
 & \times G_\beta(Z, W) && \text{radijativna korekcija} \\
 & \times (1 + \delta_{WM} W). && \text{korekcija slabog magnetizma}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Analogno se sljedećim zamjenama poboljšava i spektar antineutrina (4.14):

$$\begin{aligned}
 W & \rightarrow W_0 - W, \\
 G_\beta & \rightarrow G_\nu.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Kako je u potpoglavlju 4.4 izloženo, vrijede ista objašnjenja i jednačbe za elemente osnovnog spektra:  $K$ ,  $p_e$ ,  $W$  i  $W_0$ .

Valja istaknuti razliku između faktora oblika  $C(W)$  i preostalih članova. Faktor oblika donosi dodatnu ovisnost o energiji koja je izvan trivijalnog faktora faznog prostora Fermijeve teorije nuklearnog  $\beta$  raspada, a proizlazi iz nuklearnog matričnog elementa koji povezuje početno i konačno stanje. Da njegova kompleksnost ovisi o zabranjenosti prijelaza, točnije o spin-paritetu povezanih nivoa, već je prethodno istaknuto u potpoglavlju 3.3. U slučaju dozvoljenih prijelaza ne ovisi o energiji te mu je vrijednost jednaka snazi Gamow-Teller prijelaza koja ovisi o stanjima u kojima se nalaze neutron i proton, te o jezgri [9]. Za razliku od tog faktora, sve korekcije na spektar  $F(Z, W)$ ,  $L(Z, W)$ ,  $C(Z, W)$ ,  $S(Z, W)$ ,  $G(Z, W)$  i  $(1 + \delta W)$  se odnose jednako na prvo-zabranjene, kao i dozvoljene prijelaze.

Među njima je svakako najvažnija korekcija kulonskog polja, dana Fermijevom funkcijom  $F(Z, W)$  koja je objašnjena u potpoglavlju 4.5.1. Korekcije  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  su posljedica konačne veličine jezgre, a obrađene su u potpoglavlju 4.5.2.

Korekcija slabog magnetizma ( $WM^{28}$ ) pripada klasi tzv. induciranih struja, tj. struja koje ne odgovaraju sparivanju prisutnom u početnom hamiltonijanu, a koje se pojavljuju samo pri konačnom prijenosu količine gibanja. Njihov izvod počiva na konceptu očuvanih vektorskih struja ( $CVC^{29}$ ) [11]. Korekcija  $S(Z, W)$  se odnosi na zasjenjenje nuklearnog naboja, a radijativne korekcije  $G(Z, W)$  proizlaze iz zračenja virtualnih i realnih fotona.

Na slici 1. u referenci [11] su uspoređene relativne veličine korekcija za tipični  $\beta$  raspad na osnovu čega se može vidjeti da su korekcije  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  značajno veće od  $S(Z, W)$ ,  $G(Z, W)$  te  $\delta_{WM}$  što opravdava njihov odabir za daljnju analizu.

<sup>28</sup>eng. WM = Weak Magnetism

<sup>29</sup>eng. CVC = Conserved Vector Currents

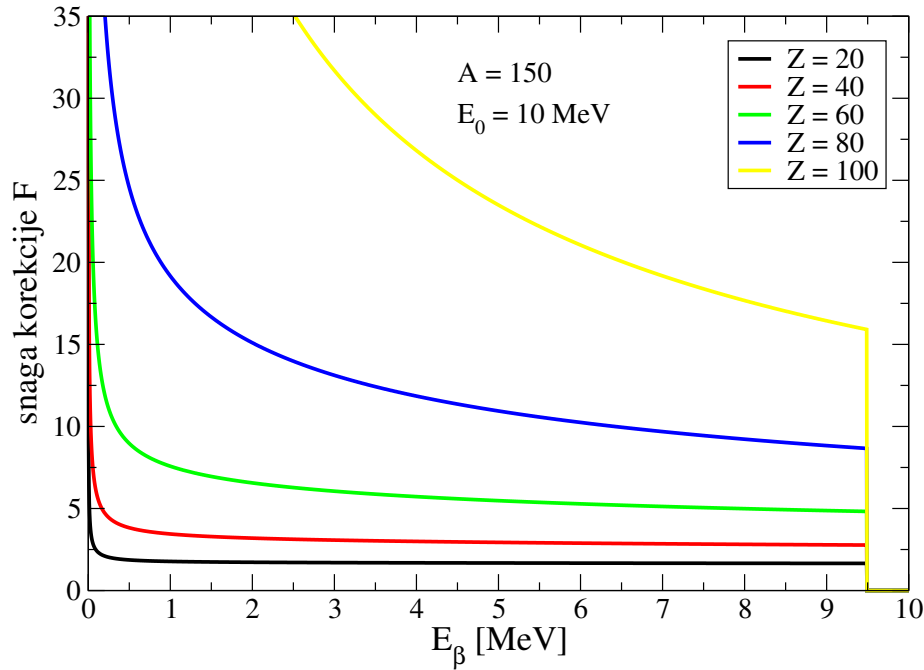


#### 4.5.1 Korekcija nuklearnog kulonskog polja

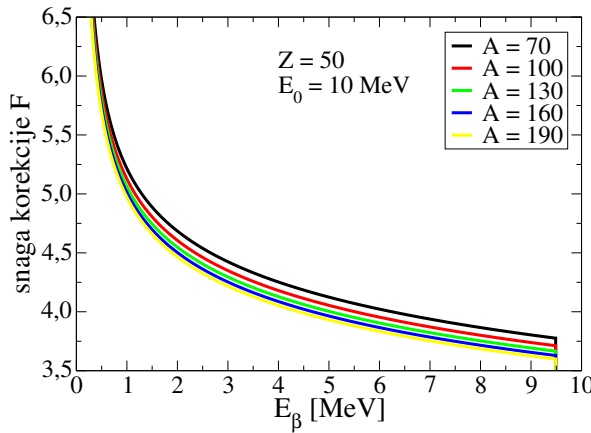
Vodeća QED<sup>30</sup> korekcija nuklearnog  $\beta$  raspada je tzv. Fermijeva funkcija [11]:

$$F(Z, W) = 2(\gamma + 1)(2pR)^{2(\gamma-1)} e^{\pi\alpha ZW/p} \frac{|\Gamma(\gamma + i\alpha ZW/p)|^2}{\Gamma(2\gamma + 1)^2}. \quad (4.17)$$

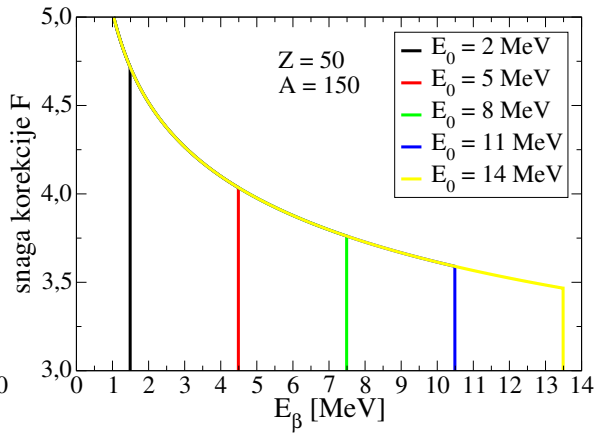
Fermijeva funkcija uračunava činjenicu da se izlazni elektron giba u kulonskom polju jezgre, a izvedena je iz rješenja Diracove jednačbe za točkaste i beskonačno teške jezgre. Manifestira se tako što usporava elektrone. Upravo to je razlog zašto spektar elektrona počinje vrijednošću različitom od nule pri nultoj kinetičkoj energiji, a što se na antineutrinski spektar prevodi kao oštra stepenica pri krajnjoj energiji te dovodi do diskontinuiteta prilikom sumiranja nekoliko grana različitih krajnjih točaka [9]. Ovisnosti korekcije o parametrima su prikazane na slici 4.2.



(a) Ovisnost korekcije  $F$  o atomskom broju  $Z$



(b) Ovisnost korekcije  $F$  o masenom broju  $A$



(c) Ovisnost korekcije  $F$  o energiji  $E_0$

Slika 4.2: Ovisnost korekcije  $F$  o parametrima  $Z$ ,  $A$  i  $E_0$  za  $\beta$  spektar

<sup>30</sup>eng. QED = Quantum Electrodynamics

#### 4.5.2 Korekcije konačne veličine

Za korekcije konačne veličine jezgre, potrebna je mjera polumjera jezgre. Pomoću tzv. Eltonove formule se izražava u jedinicama  $m_e c^2$  [11]:

$$R = 0.0029A^{1/3} + 0.0063A^{-1/3} - 0.017A^{-1}. \quad (4.18)$$

Uslijed različitog oblika raspodjele naboja, poput varijante da je naboj konstantan unutar jezgre ili pak da su svi naboji na površini, dolazi do vrlo malih razlika koje se mogu zanemariti. Također, razumne varijacije Eltonove formule imaju tek minoran utjecaj na rezultate (10% promjene vrijednosti  $A$  mijenja ukupni tok za 0.05%) [11]. Posljedice konačne veličine, tj. gibanja nukleona unutar nuklearnog potencijala su:

i) raspodjela električnog naboja više nije točkasta – elektromagnetski efekt  $L$ :

$$L(Z, W) = 1 + \frac{13}{60}(\alpha Z)^2 - WR \frac{41 - 26\gamma}{15(2\gamma - 1)} \alpha Z R \gamma \frac{17 - 2\gamma}{30W(2\gamma - 1)} \alpha Z + a_{-1} \frac{R}{W} + \sum_{n=0}^5 a_n (WR)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (4.19)$$

gdje se  $a_n$  računaju formulom:

$$a_n = \sum_{x=1}^6 b_x (\alpha Z)^x, \quad (4.20)$$

a koeficijenti  $b_x$  se navedeni u tablici 4.2:

|          | $b_1$    | $b_2$    | $b_3$    | $b_4$    | $b_5$    | $b_6$    |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $a_{-1}$ | 0.115    | -1.8123  | 8.2498   | -11.223  | -14.854  | 32.086   |
| $a_0$    | -0.00062 | 0.007165 | 0.01841  | -0.53736 | 1.2691   | -1.5467  |
| $a_1$    | 0.02482  | -0.5975  | 4.84199  | -15.3374 | 23.9774  | -12.6534 |
| $a_2$    | -0.14038 | 3.64953  | -38.8143 | 172.137  | -346.708 | 288.787  |
| $a_3$    | 0.008152 | -1.15664 | 49.9663  | -273.711 | 657.629  | -603.703 |
| $a_4$    | 1.2145   | -23.9931 | 149.972  | -471.299 | 662.191  | -305.68  |
| $a_5$    | -1.5632  | 33.4192  | -255.133 | 938.53   | -1641.28 | 1095.36  |

Tablica 4.2: Koeficijenti  $b_x$  ovisno o vrijednosti  $a_n$

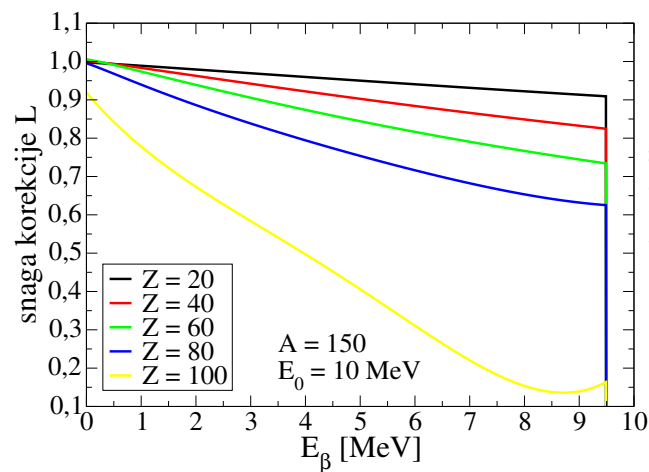
ii) raspodjela hipernaboja više nije točkasta – korekcija slabe interakcije  $C$ :

$$C(Z, W) = 1 + C_0 + C_1 W + C_2 W^2, \quad (4.21)$$

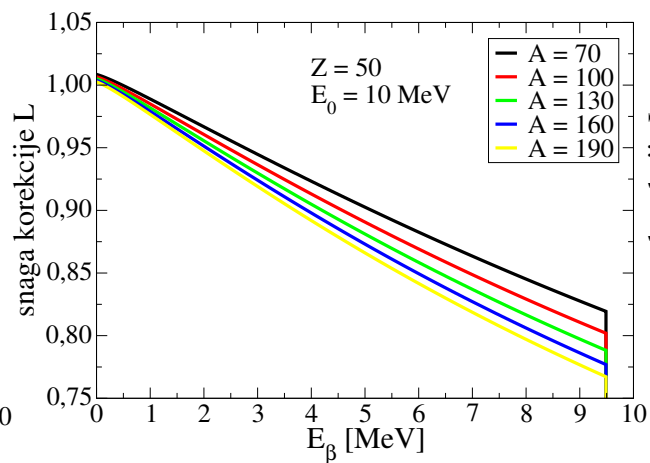
pri čemu vrijedi:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{233}{630}(\alpha Z)^2 - \frac{1}{5}(W_0 R)^2 + \frac{2}{35}\alpha Z W_0 R, \\ C_1 &= -\frac{21}{35}R\alpha Z - \frac{4}{9}W_0 R^2, \\ C_2 &= -\frac{4}{9}R^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

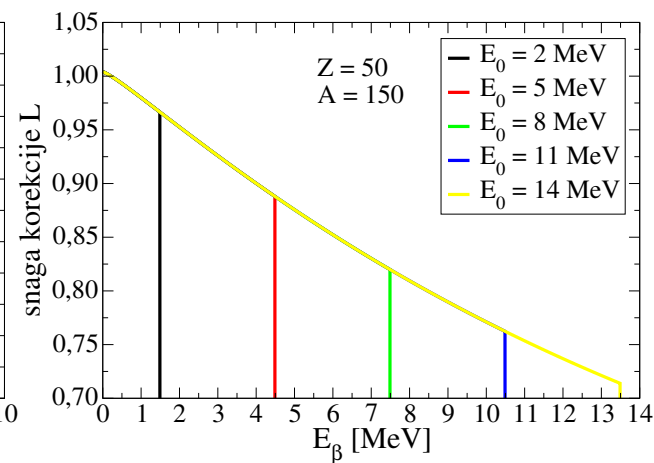
Ovisnosti korekcija  $L$  i  $C$  posebno o parametrima  $Z$ ,  $A$  i  $E_0$  za hipotetske  $\beta$  raspade su prikazane na slikama 4.3 i 4.4.



(a) Ovisnost korekcije  $L$  o atomskom broju  $Z$

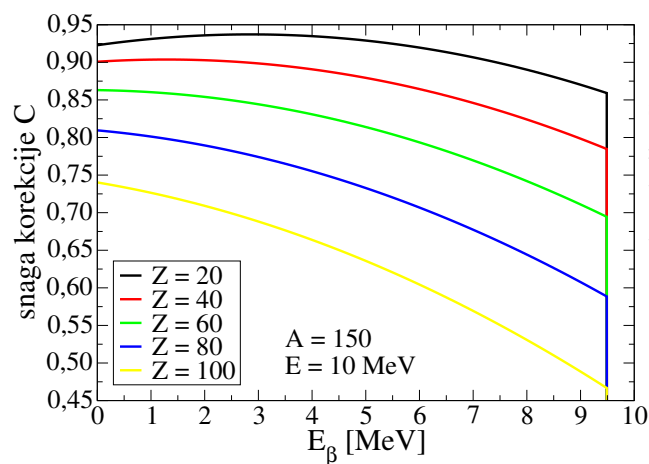


(b) Ovisnost korekcije  $L$  o masenom broju  $A$

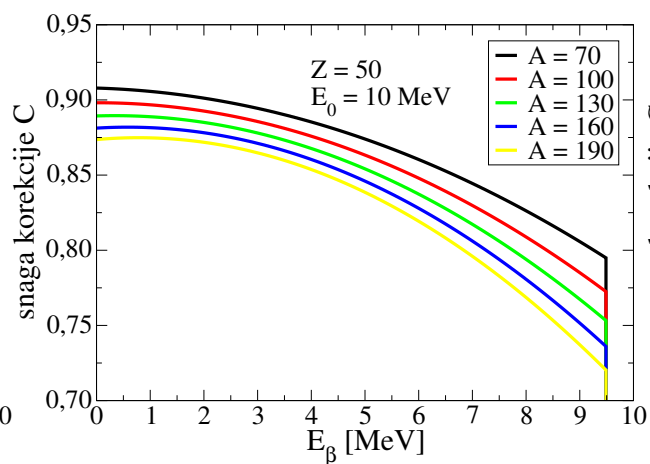


(c) Ovisnost korekcije  $L$  o energiji  $E_0$

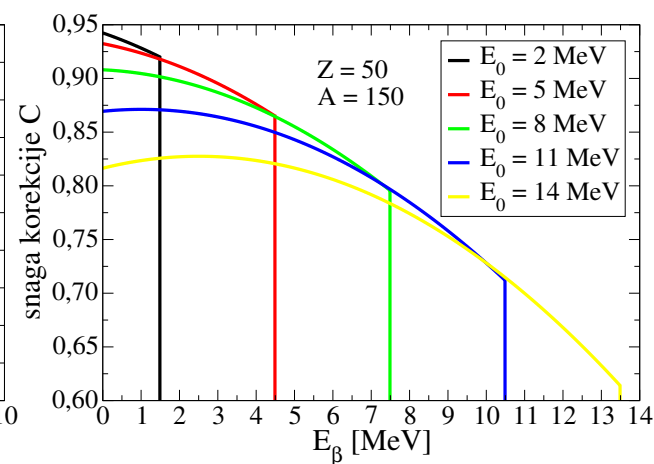
Slika 4.3: Ovisnost korekcije  $L$  o parametrima  $Z$ ,  $A$  i  $E_0$  za  $\beta$  spektar



(a) Ovisnost korekcije  $C$  o atomskom broju  $Z$



(b) Ovisnost korekcije  $C$  o masenom broju  $A$



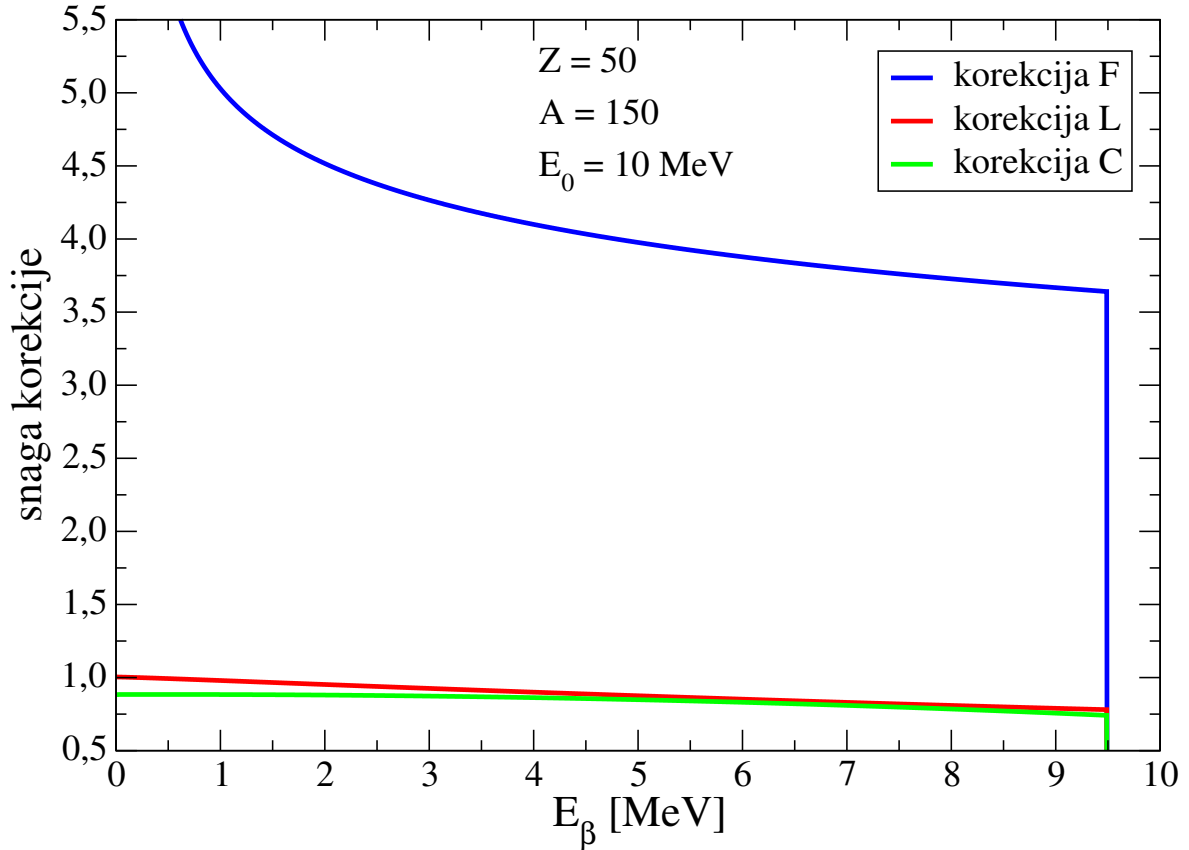
(c) Ovisnost korekcije  $C$  o energiji  $E_0$

Slika 4.4: Ovisnost korekcije  $C$  o parametrima  $Z$ ,  $A$  i  $E_0$  za  $\beta$  spektar

### 4.5.3 Usporedba korekcija

Na slici 4.5 su uspoređene relativne veličine upotrebljenih korekcija  $F(Z, W)$ ,  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  za hipotetski  $\beta$  raspad s parametrima atomskog broja  $Z = 50$ , masenog broja  $A = 150$  i energijom oslobođenom tijekom raspada  $E_0 = 10$  MeV. Oblik i veličina korekcija  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  se slaže sa slikom 1) u referenci [11]. Kao što je i bilo očekivano, Fermijeva funkcija višestruko odskaače od ostalih korekcija. Uočava se da generalno snage svih korekcija opadaju s porastom energije prijelaza.

Pogreška aproksimacije konačnog doseg elektromagnetske korekcije  $L(Z, W)$  dana jednadžbom (4.19) u usporedbi s numerički točnim rezultatima je manja od  $10^{-5}$ . Također, procjenjuje se da su pogreške obje korekcije konačnog doseg  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  manje od 10% njihove veličine te se stoga mogu zanemariti kao relevantan izvor pogreške [11].



Slika 4.5: Usporedba snaga korekcija  $F$ ,  $L$  i  $C$  za  $\beta$  spektar

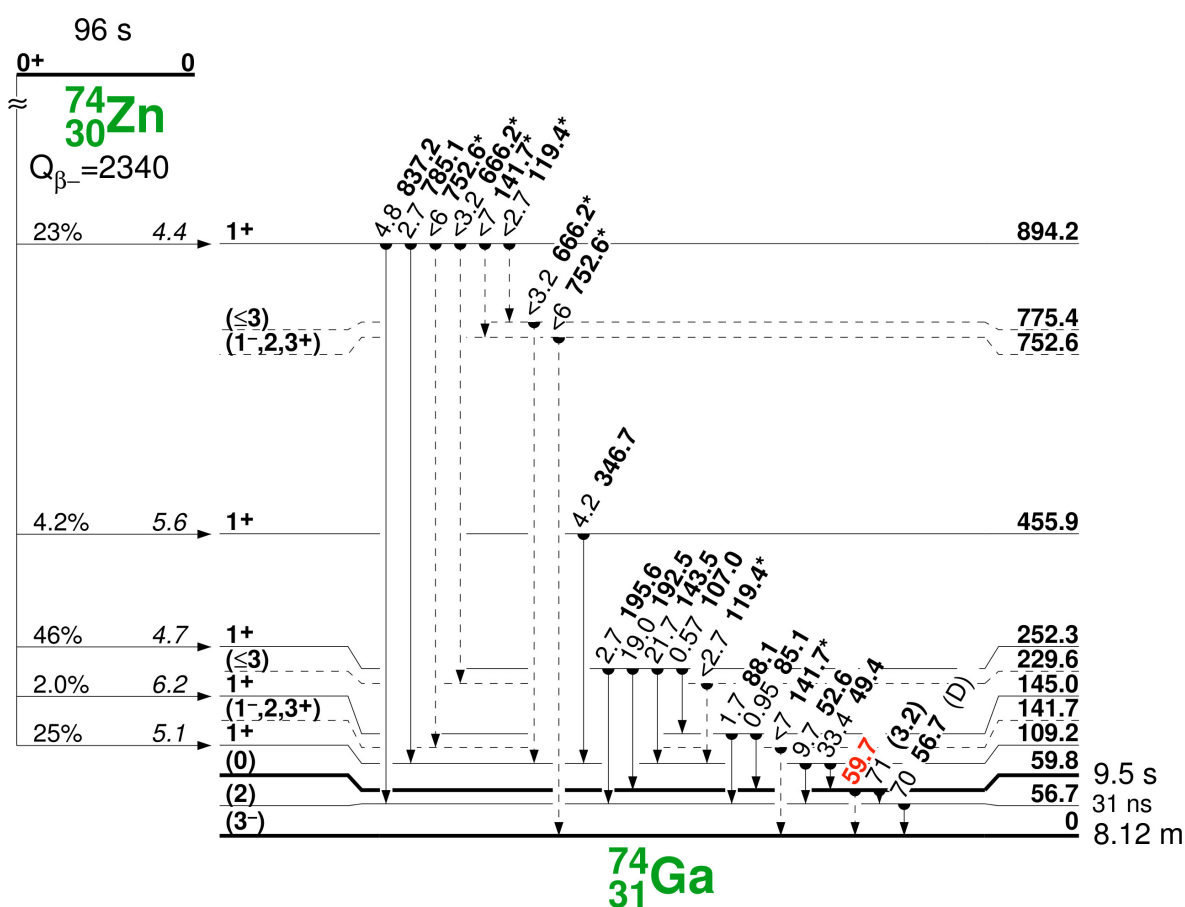
Budući da je Fermijeva funkcija  $F(W)$  najznačajnija korekcija spektra, potrebno je osvrnuti se na fizikalno objašnjenje utjecaja kulonskog polja. Poluklasično gledano, izlazni elektron iz  $\beta$  raspada međudjeluje s jezgrom kćeri putem privlačne kulonske interakcije što za rezultat daje više niskoenergijskih elektrona. Preciznije govoreći, sa stajališta kvantne mehanike – kulonski potencijal unutar jezgre kćeri uzrokuje devijaciju valne funkcije elektrona od oblika ravnog vala za slobodne čestice [4]:

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}. \quad (4.23)$$

#### 4.6 $\beta$ spektar pojedine jezgre

Nestabilne jezgre se mogu raspasti u više konačnih stanja. Stoga je prvo potrebno izračunati  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektre za svaki prijelaz prema izrazima (4.9) i (4.14), pritom se u obzir uzimaju Gamow-Tellerovi (GT) sami ili sa prvo-zabranjenim (FF) prijelazima, a potom se provodi normalizacija spektra što za rezultat daje osnovni spektar jezgre.

Primjera radi, na slici 4.6 je prikazan eksperimentalni spektar jezgre  $^{74}_{30}\text{Zn}$ . Kako se vidi, početna jezgra se može raspasti u nekoliko stanja  $|i\rangle$  u konačnoj jezgri  $^{74}_{31}\text{Ga}$ . Omjer grananja ili parcijalna stopa raspada je omjer parcijalne vjerojatnosti prijelaza u određeno konačno stanje (parcijalna konstanta raspada  $\lambda_i$ ) i ukupne vjerojatnosti prijelaza iz danog početnog stanja (konstanta raspada  $\lambda$ ). Tim faktorom se otežavaju spektri različitih prijelaza prilikom zbrajanja u ukupni spektar pojedine jezgre.

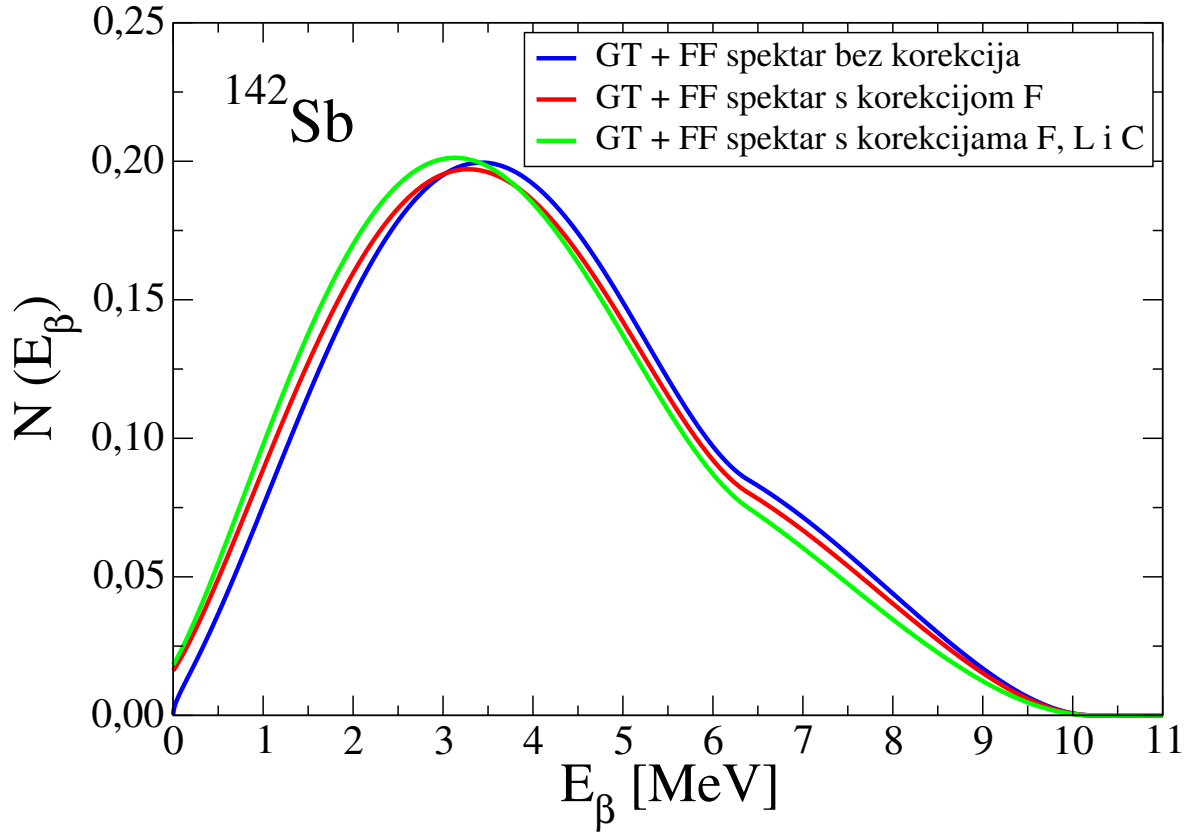


Slika 4.6: Eksperimentalni spektar jezgre  $^{74}_{30}\text{Zn}$

Kod funkcija koje se ne mogu reprezentirati polinomom trećeg ili nižeg reda, jedini način kontroliranja pogreške pri integraciji je smanjivanje koraka do mjere da dovoljno malen korak rezultira zanemarivom pogreškom što je tzv. *Simpsonovo kompozitno pravilo*. U tom slučaju normalizacija se provodi dijeljenjem intervala na paran broj  $n$  jednakih podintervala koji su dovoljno maleni te se unutar njih primjeni standardno pravilo, a rezultati se sumiraju u aproksimaciju:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right], \quad (4.24)$$

Korigirani spektar jezgre se dobije analognim postupkom iz jednadžbe (4.15) gdje su efekti uključeni već na razini pojedinog prijelaza. Sa slike 4.7 se vidi da su ukupni  $\beta$  spektri s korekcijama pomaknuti prema nižim energijama u odnosu na osnovni spektar. Razlikuju se time što spektar jezgre samo sa  $F(Z, W)$  ima niži maksimum, dok onaj sa  $F(Z, W)$ ,  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  korekcijama ima veći. Fermijeva funkcija je odgovorna i za odstupanje u ishodištu gdje su korigirani spektri veći od osnovnog.

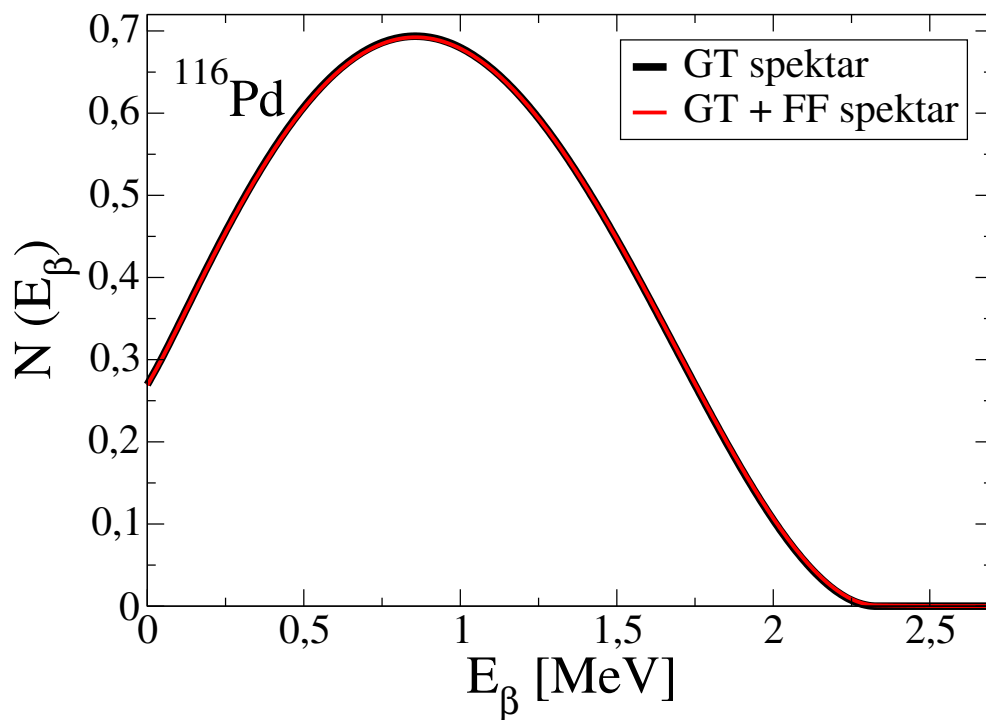


Slika 4.7: Ukupni  $\beta$  spektar jezgre bez korekcija, samo s  $F$  te s  $F, L, C$  korekcijama

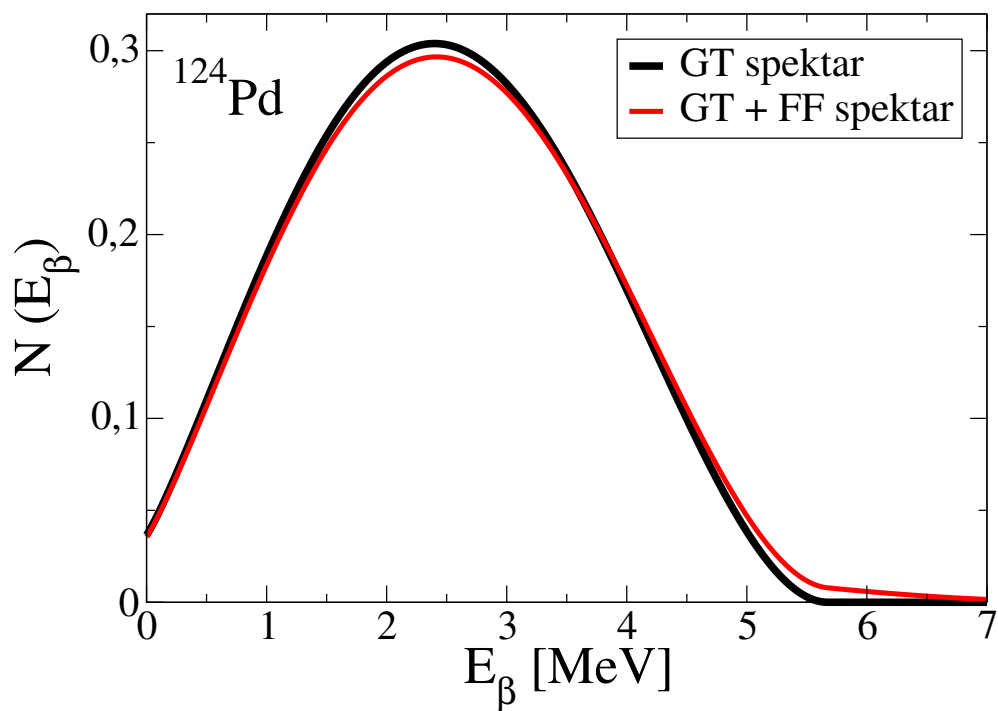
Efekt prvo-zabranjenih prijelaza na spektar se može pokazati na primjeru izotopa  $^{116}\text{Pd}$  i  $^{124}\text{Pd}$ , značajno različitog udjela FF prijelaza kako je navedeno u tablici 4.3. Usporedbom njihovih spektara (slike 4.8a i 4.8b) se zorno vidi da su spektri sa i bez FF prijelaza gotovo identični u slučaju malog udjela FF prijelaza kod izotopa  $^{116}\text{Pd}$ , dok se odstupanje javlja za izotop  $^{116}\text{Pd}$  s većim udjelom FF prijelaza. Kod obje jezgre dominira dozvoljeni prijelaz  $\nu 1g_{7/2} \rightarrow \pi 1g_{9/2}$  jer su oba stanja  $g$  istog pariteta, premda različitog angularnog momenta, valne funkcije su im slične, pa je njihov preklop, i prema tome matrični element, vrlo velik. Takav ishod se može objasniti uvidom u konfiguraciju nukleona. Izotop  $^{116}\text{Pd}$  ima 46 protona i 70 neutrona što znači da je orbitala  $h_{11/2}$  potpuno prazna, kod neutrona su popunjena stanja samo pozitivnog pariteta i na raspolaganju su jedino slobodna stanja pozitivnog pariteta od kojih je najpovoljnija orbitala  $g_{9/2}$  s 4 šupljine. Očekivano, zabranjeni prijelazi su vrlo slabi. S druge pak strane, izotop  $^{124}\text{Pd}$  ima 8 neutrona više čime je praktički popunjeno oko  $2/3$  orbitale  $h_{11/2}$  negativnog pariteta, pa su mogući prijelazi koji mijenjaju paritet, tj. zabranjeni. Među njima preko 90% brzine raspada čini  $1^-$  prijelaz  $\nu 1h_{11/2} \rightarrow \pi 1g_{9/2}$ .

| prijelaz          | GT | 0 <sup>-</sup> | 1 <sup>-</sup> | 2 <sup>-</sup> |
|-------------------|----|----------------|----------------|----------------|
| <sup>116</sup> Pd | 1  | 2              | 5              | 6              |
| <sup>124</sup> Pd | 12 | 6              | 18             | 24             |

Tablica 4.3: Usporedba izotopa s različitim udjelima prvo-zabranjenih prijelaza



(a)  $\beta$  spektar jezgre s malim udjelom zabranjenih prijelaza



(b)  $\beta$  spektar jezgre s velikim udjelom zabranjenih prijelaza

Slika 4.8: Usporedba  $\beta$  spektra jezgre ovisno o udjelu zabranjenih prijelaza

## 4.7 Kumulativni spektri fisijskih izotopa

Za sva goriva nuklearnih reaktora  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$ , fisijski fragmenti su široko raspodjeljeni po nuklearnim masama i nabojima što se zorno može vidjeti sa slika 4.9 (a) - (h) preuzetih s [28]. Većina ih je radioaktivna te imaju kompleksne sheme  $\beta$  raspada, a superpozicija svih njih rezultira kumulativnim spektrima [10].

Za fisiju potaknutu neutronima, raspodjela kumulativnih doprinosa ima dva vrha za fisijske produkte. Jedan od njih je centriran blizu  $^{94}\text{Sr}$ , a drugi blizu  $^{140}\text{Xe}$  što se također može vidjeti sa slika 4.9 (a) - (h). Oba ova područja mogu imati usporedive količine FF grana [27]. U ovom radu je fokus na primjenu RQRPA kako bi se ispitao utjecaj FF  $\beta$  raspada na oblik spektra elektrona i antineutrina. Već se na osnovu spektra pojedine jezgre, na slikama 4.8a i 4.8b može uočiti da u slučaju većeg udjela FF grana dolazi do odstupanja spektra od oblika dozvoljenog (GT) prijelaza.

Kumulativni fisijski spektri elektrona i antineutrina u ravnotežnim reaktorskim uvjetima za dani aktinid se određuju sumom velikog broja spektara  $S(W, Z_i, A_i)$  svih individualnih nestabilnih fisijskih fragmenata  $F_i$  [29]:

$$N(W) = \sum_{i=0}^n R_i \sum_{j=0}^m f_{ij} S_{ij}(W, Z_i, A_i), \quad (4.25)$$

gdje je  $R_i$  ravnotežna stopa raspada izotopa  $i$  u jezgri reaktora. Izotop se raspada na pojedinu razinu energije  $j$  jezgre izotopa s relativnom vjerojatnošću ili udjelom grananja  $f_{ij}$ . Spektar za pojedinu granu raspada se označava kao  $S_{ij}$ . Kumulativna emisija iz nuklearnih reaktora je posljedica  $> 1000$  izotopa kćeri s  $> 6000$  jedinstvenih  $\beta$  raspada, od kojih je oko 1500 zabranjenih [12]. Procjena stopa raspada  $R_i$  ovisi o poznavanju nuklearnih procesa unutar jezgre reaktora. Vjerojatnost fragmentiranja jezgre roditelja  ${}^A_Z\text{N}_p$  na jezgru kćer  ${}^{A'}_{Z'}\text{N}_d$  je dana *trenutnim* doprinosom  $Y_{pd}^i$ . Većina ovih fisijskih kćeri je nestabilna te će se nastaviti raspadati dok ne postignu stabilno izotopsko stanje. Vjerojatnost da je pojedini izotop  ${}^{A'}_{Z'}\text{N}_i$  proizveden putem lanca  $\beta$  raspada bilo koje početne fisijske kćeri je tzv. *kumulativni* doprinos  $Y_{pi}^c$ . U prosjeku, da bi postigle stabilnost, kćeri izotopi prođu 6  $\beta$  raspada. Za kratkoživuće izotope, stopa raspada  $R_i$  je približno jednaka fisijskoj stopi  $R_p^f$  roditelja izotopa  $p$  pomnoženoj kumulativnim doprinosom izotopa  $i$  [29]:

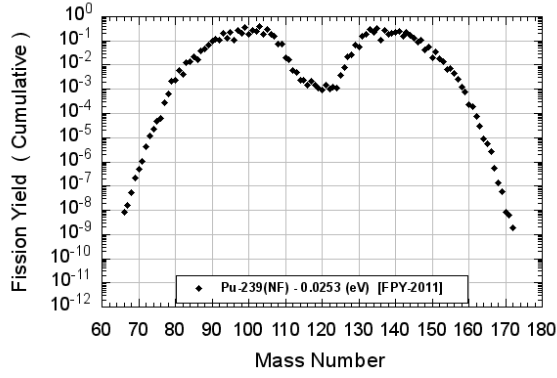
$$R_i \simeq \sum_{p=0}^P R_p^f Y_{pi}^c. \quad (4.26)$$

Dakle, kumulativni spektri su suma spektara pojedinih nuklida otežanih njihovim kumulativnim fisijskim doprinosima  $Y_{Fi}$ , pomoću kojih su u ravnotežnim uvjetima rada reaktora određene stope  $\beta$  raspada. Spektar za svaki fragment  $(Z_i, A_i)$  se sumira po svim granama raspada, a zatim se mora normalizirati na jedinicu [12]:

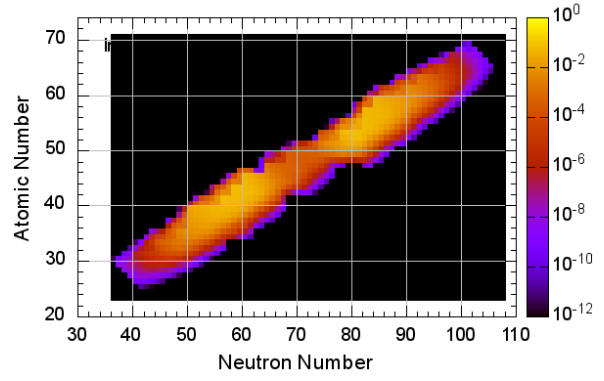
$$\int S(W, Z, A) dW = 1. \quad (4.27)$$

Kako je već u potpoglavlju 4.6 objašnjeno, korekcije  $F(Z, W)$ ,  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$  se uključuju na razini pojedinih prijelaza.

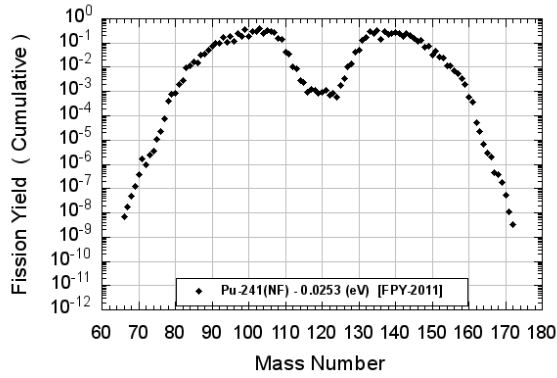




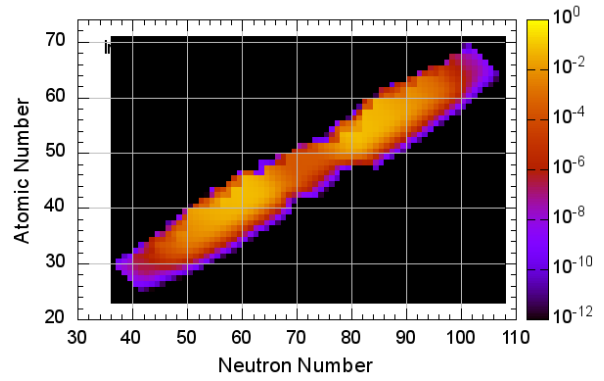
(a) 2D (A/Z, doprinos) za izotop  $^{239}\text{Pu}$



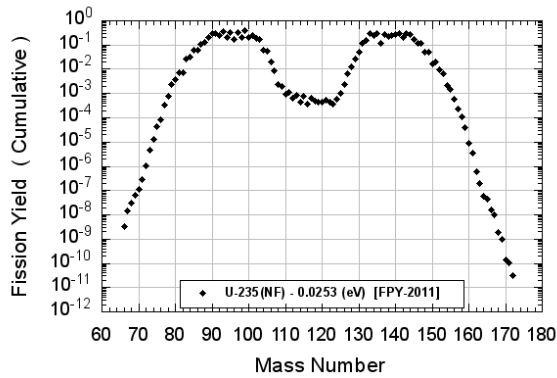
(b) mapa (Z, A/N, doprinos) za izotop  $^{239}\text{Pu}$



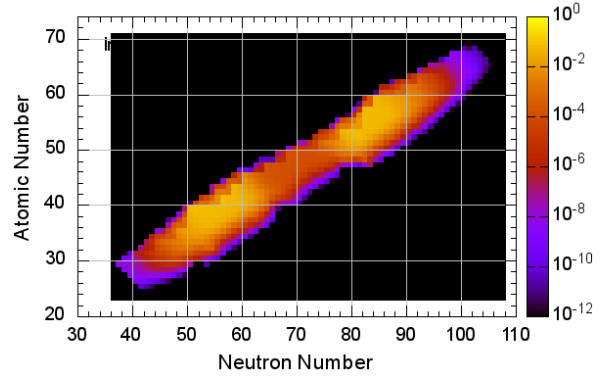
(c) 2D (A/Z, doprinos) za izotop  $^{241}\text{Pu}$



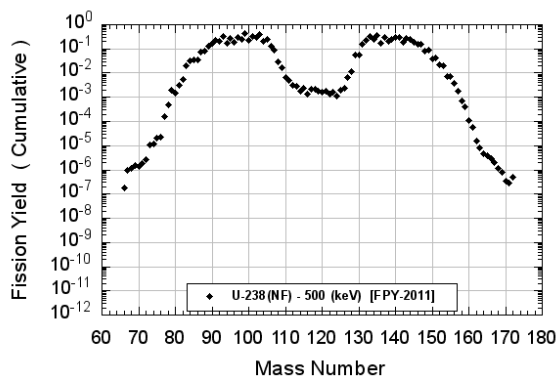
(d) mapa (Z, A/N, doprinos) za izotop  $^{241}\text{Pu}$



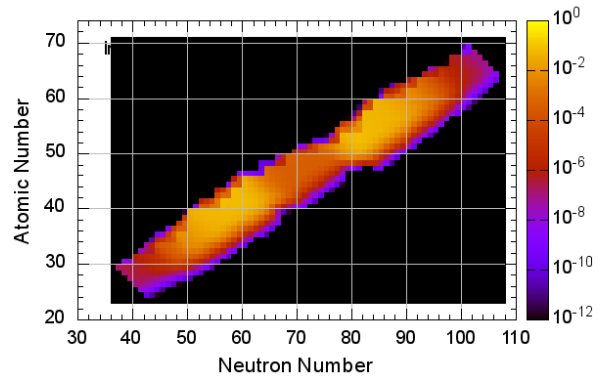
(e) 2D (A/Z, doprinos) za izotop  $^{235}\text{U}$



(f) mapa (Z, A/N, doprinos) za izotop  $^{235}\text{U}$



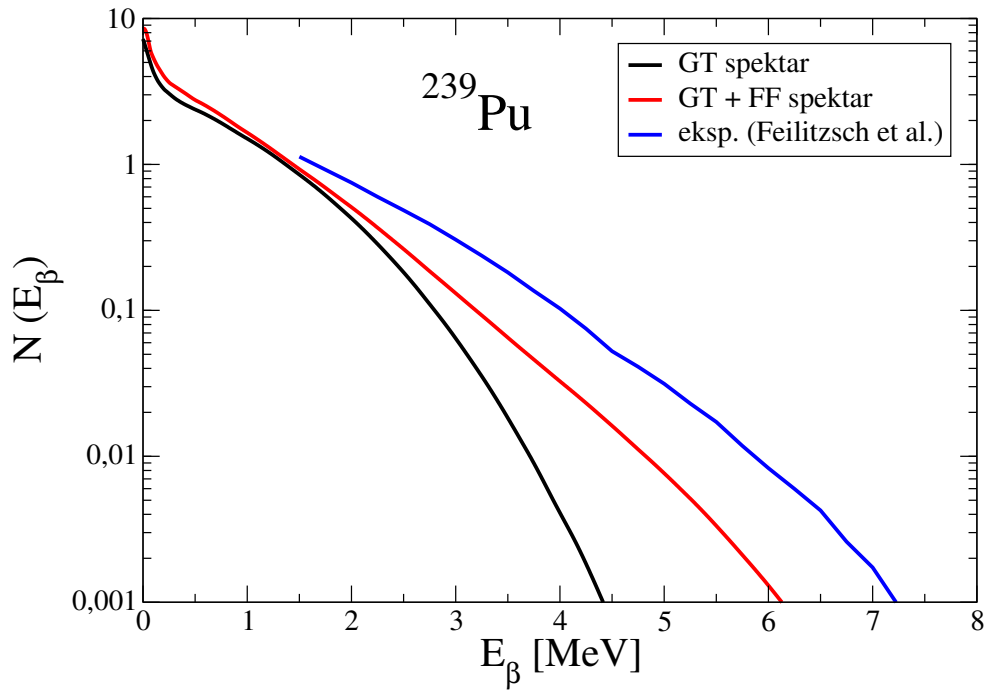
(g) 2D (A/Z, doprinos) za izotop  $^{238}\text{U}$



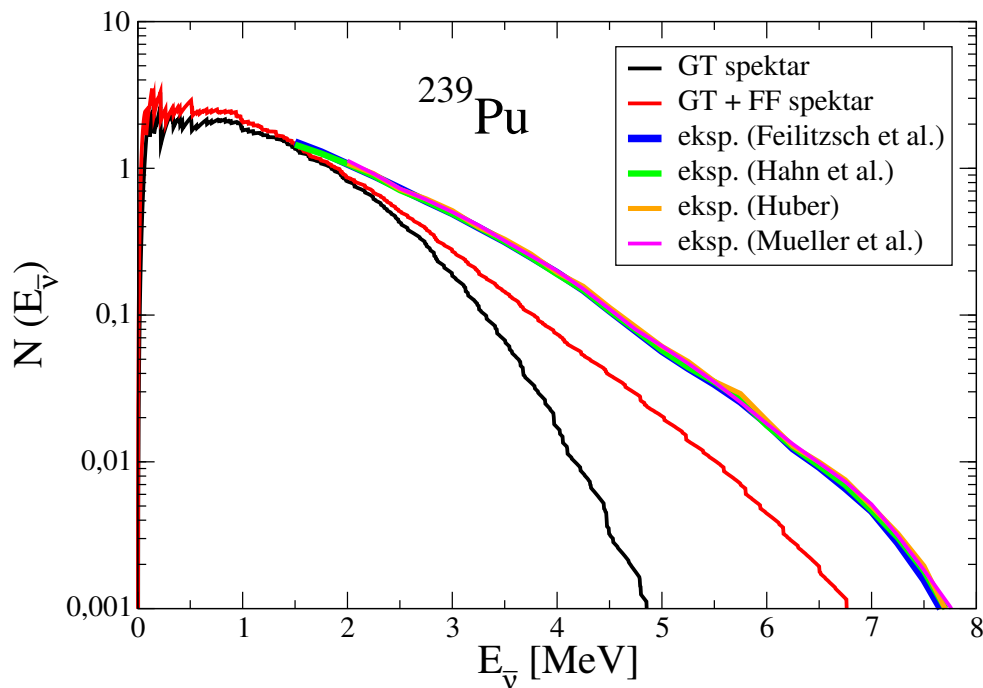
(h) mapa (Z, A/N, doprinos) za izotop  $^{238}\text{U}$

Slika 4.9: Distribucije kumulativnih doprinosa za  $^{239,241}\text{Pu}$  i  $^{235,238}\text{U}$  preuzete s [28]

Na slikama 4.10a i 4.10b su prikazani elektronski i antineutrinski kumulativni spektri izotopa  $^{239}\text{Pu}$ . Analogni rezultati za izotope  $^{241}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  su na slikama B.1a - B.1f. U usporedbi s pripadnim spektrima pojedinih prijelaza, razlike između kumulativnih spektara elektrona i antineutrina su puno manje. Naime, dok se kod spektra antineutrina pojedinog prijelaza uočava oštra stepenica, ti diskontinuiteti se uslijed doprinosa brojnih  $\beta$  raspada izgube i postaju neprimjetni u krajnjoj točki. Za sva 4 fisijska izotopa vrijede ista opažanja i komentari jer su im spektri vrlo slični.



(a) Kumulativni  $\beta$  spektar izotopa  $^{239}\text{Pu}$



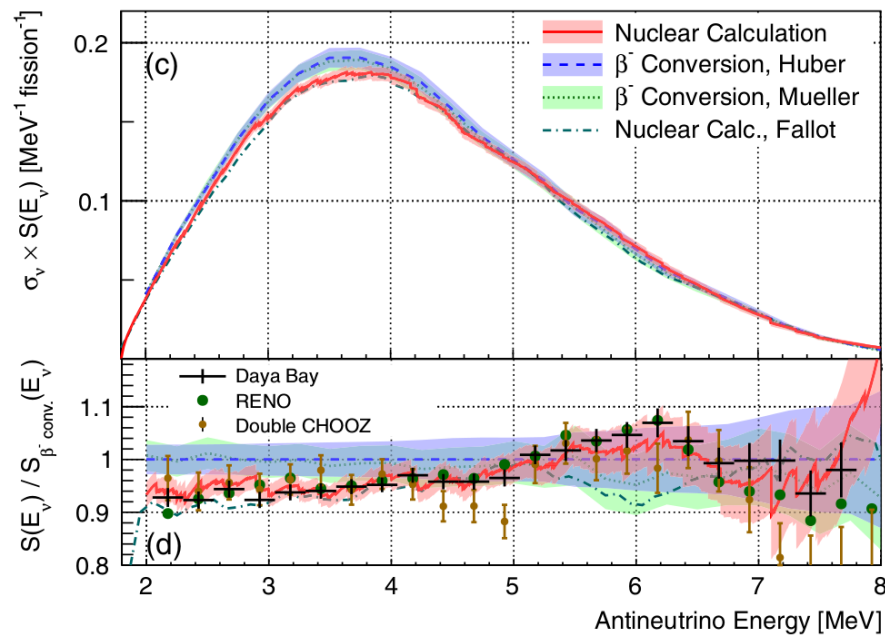
(b) Kumulativni  $\bar{\nu}$  spektar izotopa  $^{239}\text{Pu}$

Slika 4.10: Kumulativni spektri sa i bez zabranjenih prijelaza za izotop  $^{239}\text{Pu}$

Izračunati kumulativni spektri elektrona i antineutrina su za sve fisijске izotope uspoređeni s dostupnim eksperimentalnim mjerenjima. Inverzni  $\beta$  raspad slobodnog protona se koristi za detekciju antineutrina, a energijski prag za taj proces iznosi 1.804 MeV što objašnjava zašto na nijednom grafu nema eksperimentalnih podataka ispod te vrijednosti. Može se uočiti i da je u svim slučajevima odstupanje spektra sve veće prema višim energijama. Glavni razlog za toliko odstupanje leži u činjenici da model lošije opisuje neparne jezgre što pak utječe na dva načina:

- 1) direktno – na višim energijama je općenito veći doprinos neparnih jezgara kako je objašnjeno i potkrijepljeno tablicama u potpoglavlju 4.7.1,
- 2) posredno – na višim energijama je svega par jezgara odgovorno za čitav spektar, što znači da je puno osjetljiviji na grešku jer jako ovisi o tipu tih jezgara (na nižim energijama su doprinosi raspoređeniji, pa se greške uprosječe).

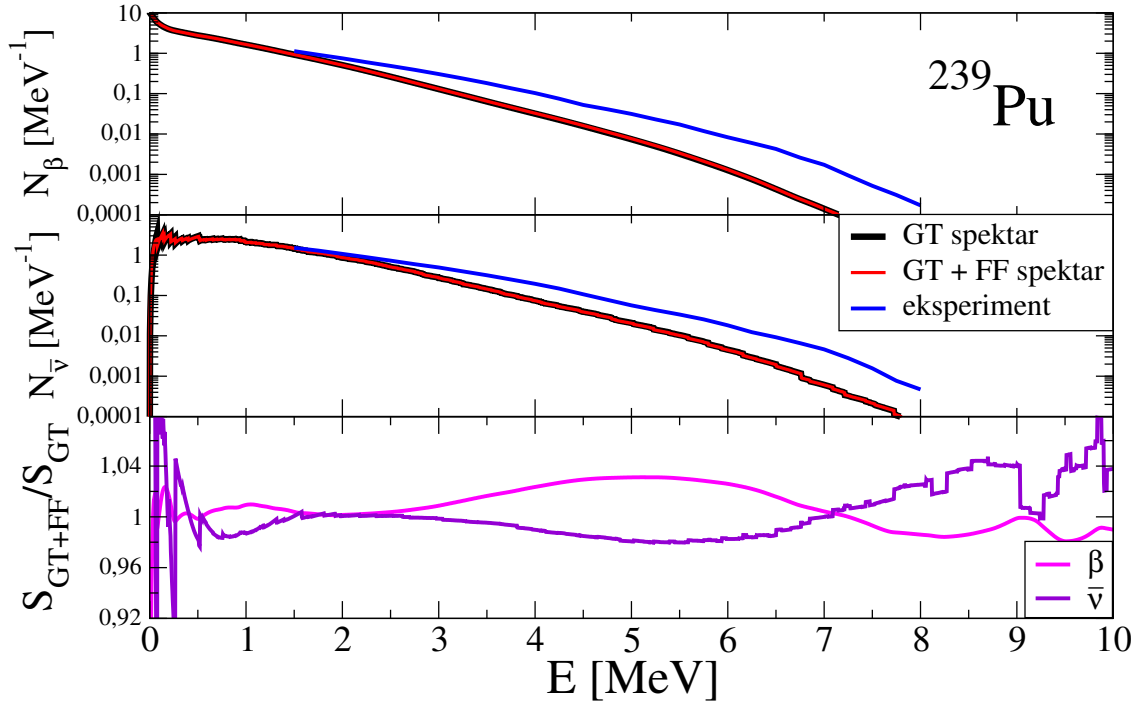
Unatoč tome, korišteni model objašnjava razliku između eksperimenta i teorije.



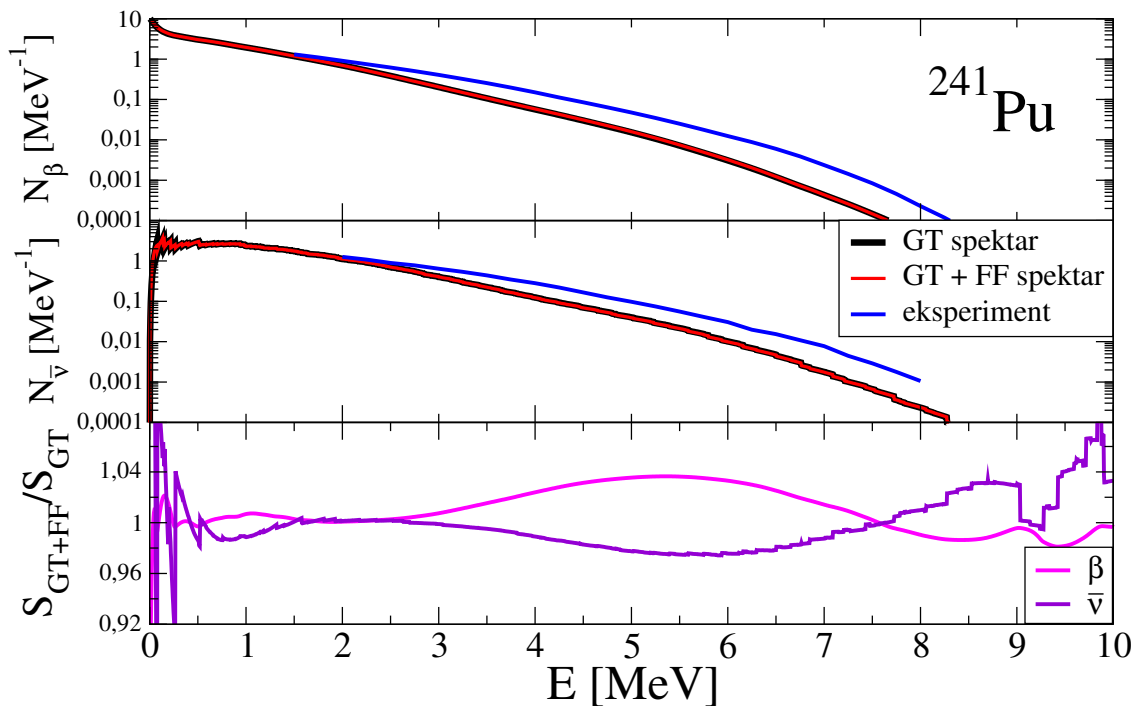
Slika 4.11: Usporedba teorijskih i eksperimentalnih antineutrinskih spektara

Slika 4.11 je preuzeta iz članka [29], a prikazuje ukupni izračunati antineutrinski spektar sa relativnim stopama fisije 0.584, 0.076, 0.29, 0.05 redom za fisijске izotope  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$  pri čemu su pojedinačni kumulativni spektri otežani udarnim presjekom inverznog  $\beta$  raspada kako bi čim bolje odgovarali spektrima dobivenim eksperimentima. Na energijama 5 – 7 MeV se može uočiti tzv. spektralni *bump* koji nije predviđen Huberovim, Muellerovim ni Fallotinim modelom, ali jest nedavnim mjerenjima (Daya Bay, RENO, Double CHOOZ) koja su baš u tom području ustanovila povećanje spektra  $\sim 10\%$ . Pritom 42% doprinosa dolazi od samo 8 prvo-zabranjenih raspada:  $^{96,97}\text{Y}$ ,  $^{92,93}\text{Rb}$ ,  $^{142,140}\text{Cs}$ ,  $^{100}\text{Nb}$  i  $^{95}\text{Sr}$ . Svaka od ostalih  $> 1000$  grana najviše doprinosi 2% [29]. Nameće se zaključak da jedino moguće objašnjenje mora u obzir uzimati efekt prvo-zabranjenih prijelaza. Nadalje, anomalija reaktorskih antineutrina se vidi kao odstupanje izmjerenih spektara od očekivanja Huberovog modela.

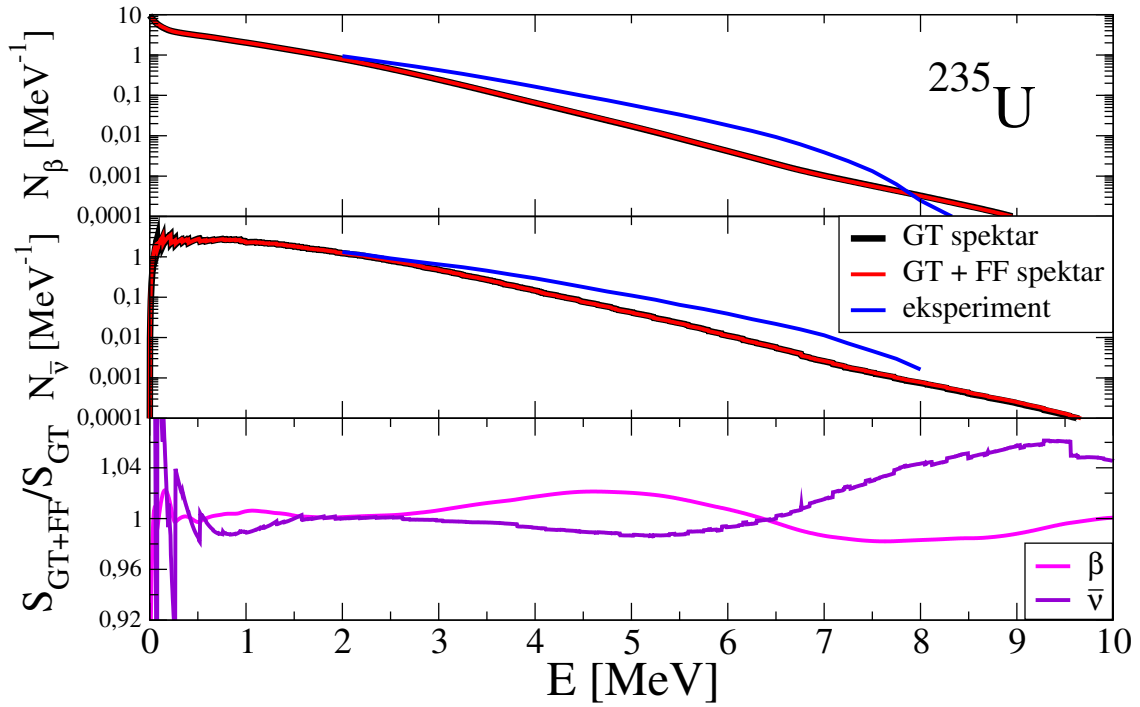
S obzirom da je iz grafova samih kumulativnih spektara sa i bez prvo-zabranjenih prijelaza teško procijeniti njihov utjecaj, na slikama 4.12 - 4.15 su uz elektronske i antineutrinske spektre prikazani i njihovi pripadni omjeri. Može se uočiti da je na energijama 5 – 7 MeV odstupanje spektra s uključenim prvo-zabranjenim prijelazima najveće te da iznosi oko 3% (za spektar elektrona je pozitivno, a za antineutrine negativno). Anomalija i spektralni *bump* na slici 4.11 se podudaraju s tim opisom.



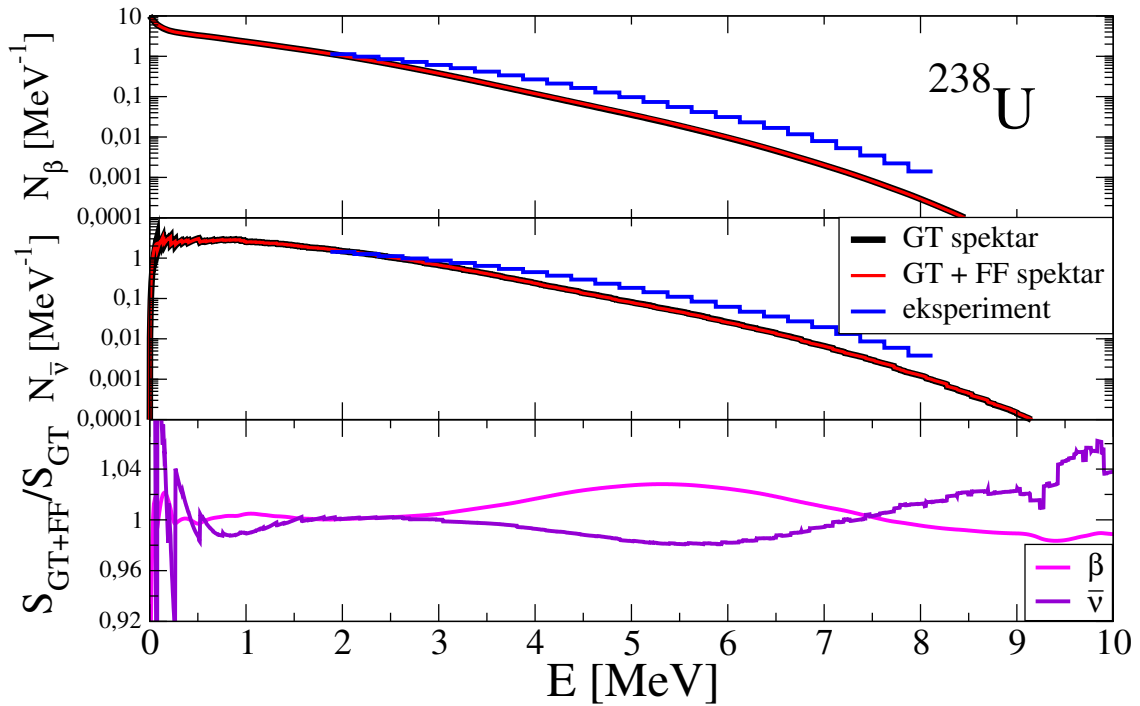
Slika 4.12: Omjeri kumulativnog  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za  $^{239}\text{Pu}$



Slika 4.13: Omjeri kumulativnog  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za  $^{241}\text{Pu}$



Slika 4.14: Omjeri kumulativnog  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za  $^{235}\text{U}$



Slika 4.15: Omjeri kumulativnog  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za  $^{238}\text{U}$

Dakle, iz slika 4.12 - 4.15 se uviđa važnost pravilnog tretiranja prvo-zabranjenih prijelaza u analizi kumulativnih spektara jer to za posljedicu ima dovođenje u pitanje postojanja anomalije reaktorskih antineutrina. Pokazalo se da valjano uvažavanje prvo-zabranjenih raspada smanjuje broj očekivanih antineutrina na razinu onog što je izmjereno, odnosno: anomalija izostaje – što je ključni rezultat ovog rada. Ujedno se utječe i na *bump* na 5 – 7 MeV gdje prvo-zabranjeni raspadi najviše doprinose.

#### 4.7.1 Vodeći doprinosi kumulativnim spektrima

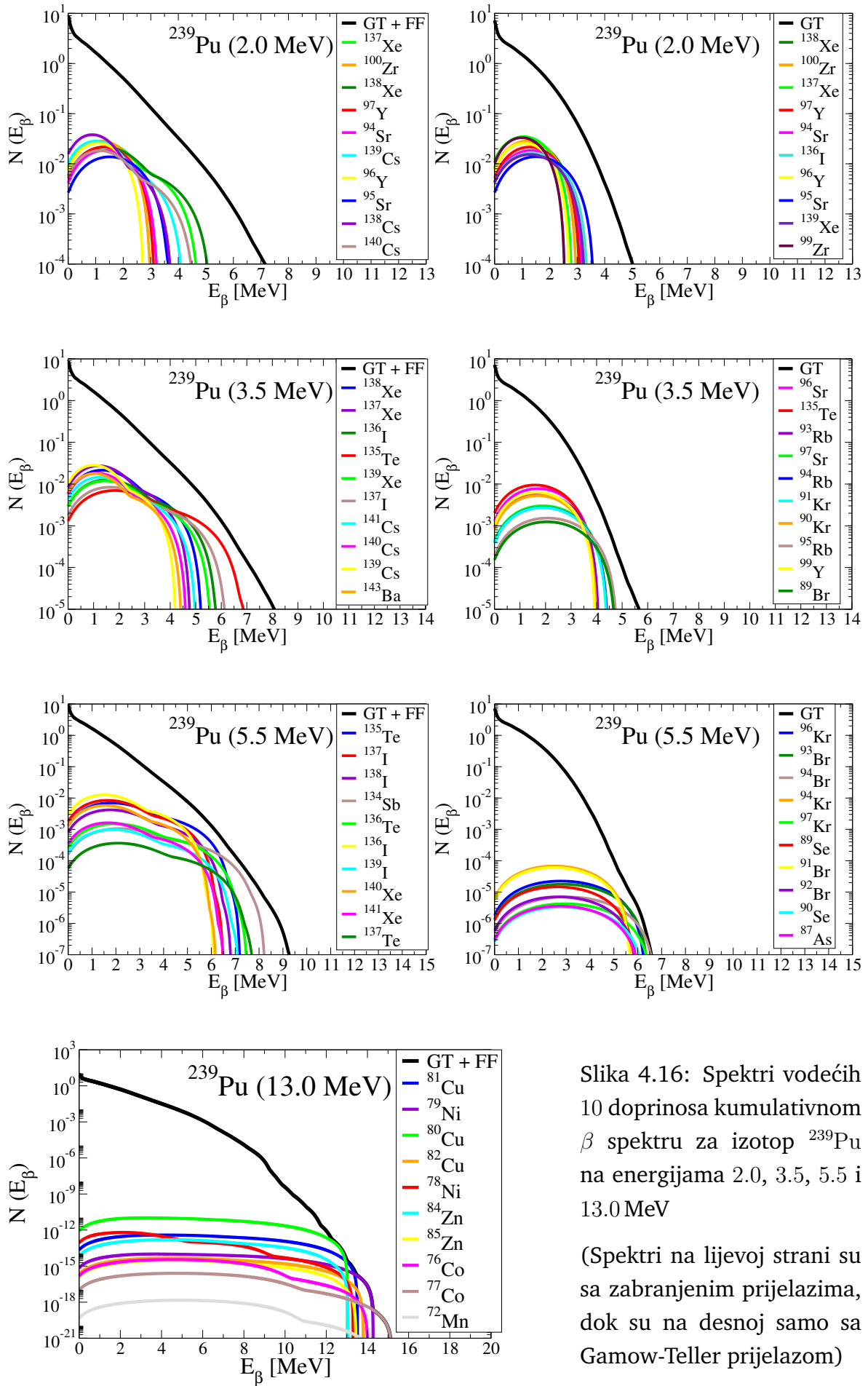
Uz netom izložen utjecaj prvo-zabranjenih prijelaza na kumulativne spektre, kao drugi glavni rezultat ovog rada se mogu istaknuti vodeći doprinosi kumulativnim spektrima. Iako je svaki kumulativni spektar posljedica beta raspada više od 1000 fisijskih produkata, energijskim područjem najrelevantnijim za neutrinske oscilacije i anomaliju reaktorskih antinutrina dominira manje od 20 jezgara. S obzirom na danu kompleksnost cjelokupnog računa i ogroman broj nuklida koji doprinose, zapravo je izvanredan ishod da ipak samo “šaka” jezgara značajno utječe na spektar, pogotovo na višim energijama [27].

Na slikama 4.16 i 4.17 su prikazani kumulativni spektri elektrona i antineutrina za izotop  $^{239}\text{Pu}$  te individualni spektri 10 vodećih doprinosa. Paralelno su prikazani ekvivalentni grafovi: jedni koji uključuju prvo-zabranjene prijelazi, a drugi su samo s Gamow-Tellerovim prijelazima. Također, prikazani grafovi se odnose na različite energije: 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV. Ekvivalentni grafovi kumulativnih spektara i 10 pripadnih vodećih doprinosa za ostale izotope  $^{241}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  su dani u dodatku na slikama B.2 - B.7.

Za početak se valja osvrnuti na usporedbu ukupnog spektra i spektra doprinosa različitih fisijskih izotopa. Očekivano su se na istim energijama i za isti tip spektra (elektronski ili antineutrinski) dobili međusobno vrlo slični rezultati za sve fisijske izotope. Iz tih slika se također lijepo može uočiti razlika između spektra pojedine jezgre koji je objašnjen u potpoglavlju 4.6 i kumulativnog spektra. Naime, na razini pojedine jezgre dosta su velike razlike između oblika elektronskog i antineutrinskog spektra: efekt kulonske korekcije se ogleda na niskoenergijskom dijelu elektronskog spektra, zbog čega spektar ne počinje u ishodištu već s konačnom vrijednošću, što se u antineutrinskom spektru reflektira oštrim diskontinuitetom na maksimalnoj energiji. Razlike na razini kumulativnih spektara elektrona i antineutrina su znatno manje jer zbrajanjem mnogobrojnih individualnih doprinosa dolazi do usrednjavanja konačne vrijednosti antineutrinskog spektra, što se pogotovo manifestira na energijama od interesa za reaktorsku anomaliju gdje je spektar potpuno gladak. Oscilacijski oblik se zadržao jedino na energijama ispod 1 MeV uslijed nedostatnog broja doprinosa različitih grana.

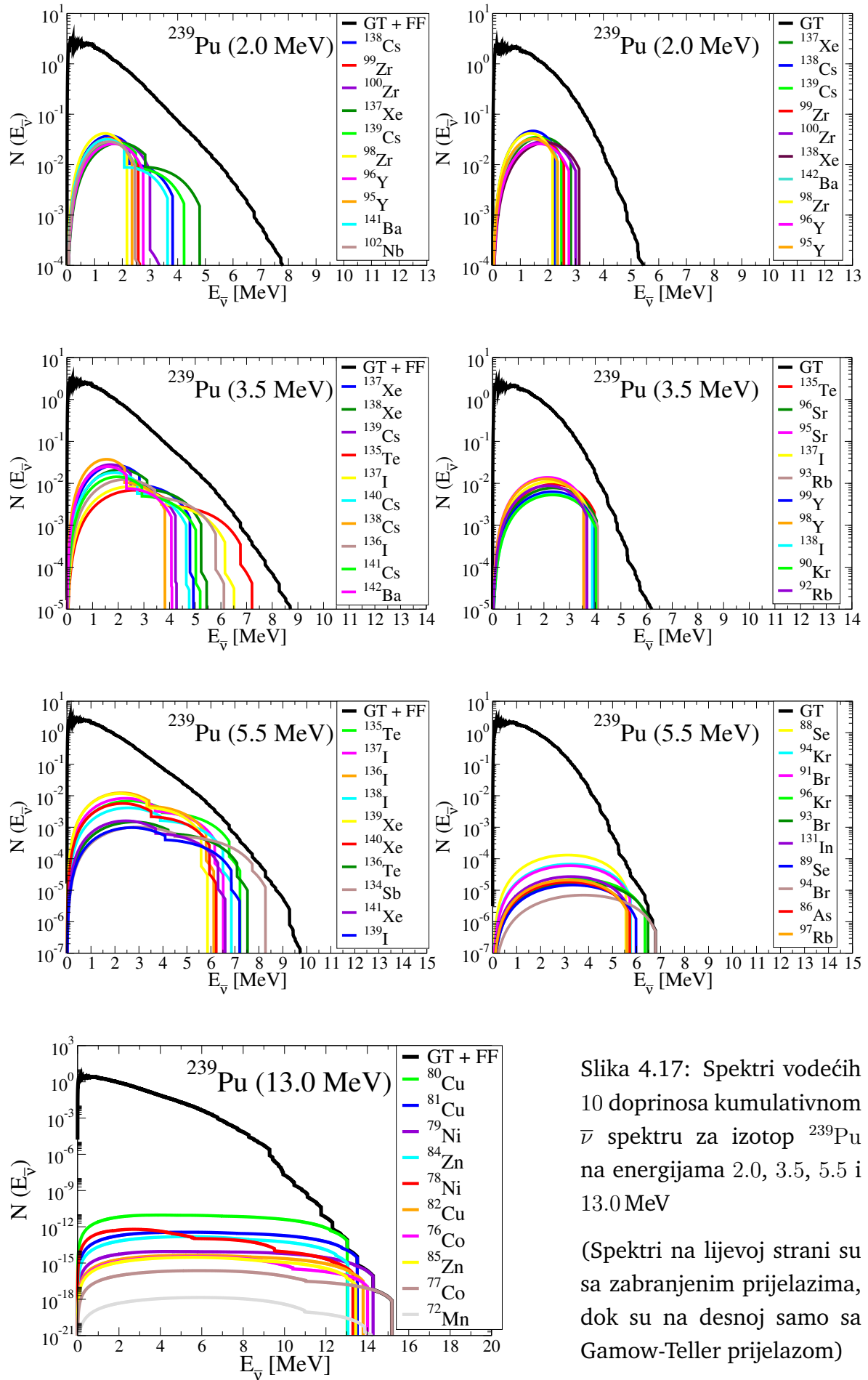
Generalnom usporedbom grafova s dozvoljenim prijelazima i onih s uključenim prvo-zabranjenim prijelazima na istoj energiji te za isti tip spektra (elektronski ili antineutrinski), može se uočiti da u slučajevima s dozvoljenim i prvo-zabranjenim prijelazima dominiraju individualni spektri viših  $Q$  vrijednosti. Takav ishod ne čudi budući da su i pripadni kumulativni spektri koji sadrže obje vrste prijelaza pomaknuti prema višim energijama.

Uspoređujući pak spektre na različitim energijama, može se uočiti da su na nižim energijama spektri pojedinačnih doprinosa poprilično grupirani, odnosno da se dosta preklapaju, dok prema višim energijama dolazi do sve većeg “razilaženja” što ukazuje da spektrom izražno dominira sve manji broj doprinosa.



Slika 4.16: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\beta$  spektru za izotop  $^{239}\text{Pu}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



Slika 4.17: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\bar{\nu}$  spektru za izotop  $^{239}\text{Pu}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



Pomna analiza vodećih doprinosa pojedinim fisijskim izotopima ovisno o energiji i prvo-zabranjenim prijelazima se najbolje može prikazati tablično kako slijedi.

|      | $^{239}\text{Pu}$ |             | $^{241}\text{Pu}$ |             | $^{235}\text{U}$ |             | $^{238}\text{U}$ |             |
|------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-------------|
| MeV  | $\beta$           | $\bar{\nu}$ | $\beta$           | $\bar{\nu}$ | $\beta$          | $\bar{\nu}$ | $\beta$          | $\bar{\nu}$ |
| 2.0  | 7/10              | 8/10        | 8/10              | 9/10        | 9/10             | 7/10        | 8/10             | 7/10        |
| 3.5  | 1/10              | 2/10        | 1/10              | 4/10        | 2/10             | 7/10        | 3/10             | 8/10        |
| 5.5  | 0/10              | 0/10        | 0/10              | 0/10        | 2/10             | 1/10        | 0/10             | 0/10        |
| 13.0 | —                 | —           | —                 | —           | —                | —           | —                | —           |

Tablica 4.4: Podudarnost vodećih doprinosa između kumulativnog spektra sa i bez zabranjenih prijelaza na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

U tablici 4.4 su prikazane podudarnosti vodećih doprinosa kumulativnih spektara s uključenim prvo-zabranjenim prijelazima i bez njih za svaku od navedenih energija, odvojeno za elektrone i antineutrone svakog fisijskog izotopa. Može se uočiti da su na niskim energijama podudarnosti doprinosa između spektara veće (7 – 9/10), a s porastom energije da drastično opadaju. Štoviše, na energiji od 13 MeV ne postoji kumulativni spektar samo sa dozvoljenim prijelazima tako da se niti ne može govoriti o podudarnosti. Na energiji od 5.5 MeV kumulativni spektar bez prvo-zabranjenih prijelaza još postoji, ali među vodećih 10 doprinosa nema podudaranja kod izotopa  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$  i  $^{238}\text{U}$ . Jedino se za  $^{235}\text{U}$  podudaraju 2 doprinosa kod elektronskog i 1 kod antineutrinskog. Objašnjenje leži u pratećem porastu prvo-zabranjenih raspada.

|      | $^{239}\text{Pu}$ |      | $^{241}\text{Pu}$ |      | $^{235}\text{U}$ |      | $^{238}\text{U}$ |      |
|------|-------------------|------|-------------------|------|------------------|------|------------------|------|
| MeV  | GT + FF           | GT   | GT + FF           | GT   | GT + FF          | GT   | GT + FF          | GT   |
| 2.0  | 5/10              | 5/10 | 6/10              | 4/10 | 3/10             | 3/10 | 4/10             | 3/10 |
| 3.5  | 8/10              | 5/10 | 8/10              | 5/10 | 6/10             | 5/10 | 5/10             | 6/10 |
| 5.5  | 9/10              | 6/10 | 9/10              | 7/10 | 7/10             | 8/10 | 8/10             | 7/10 |
| 13.0 | 10/10             | —    | 9/10              | —    | 10/10            | —    | 9/10             | —    |

Tablica 4.5: Podudarnost vodećih doprinosa između  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  kumulativnog spektra na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

U tablici 4.5 su prikazane podudarnosti vodećih doprinosa kumulativnih spektara elektrona i antineutrina za svaku od navedenih energija, odvojeno za slučajeve sa i bez uključenih prvo-zabranjenih prijelaza svakog fisijskog izotopa. Može se uočiti da su s porastom energije podudarnosti doprinosa između spektara veće što ukazuje da je više zajedničkih nuklida koji dominiraju elektronskim i antineutrinским spektrom. Na energiji 5.5 MeV podudarnosti su u rang 6 – 9/10, dok na 13 MeV iznose 9 – 10/10. To znači da na višim energijama praktično par jezgara daje čitav spektar. Primjerice, kod  $^{235}\text{U}$  se na 5.5 MeV ističe doprinos  $^{86}\text{Ge}$  i kod spektra elektrona i antineutrina i to u oba slučaja (sa i bez uključenih prvo-zabranjenih raspada).

| 2.0 MeV           |                   | 3.5 MeV           |                   | 5.5 MeV           |                  | 13.0 MeV         |    |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|----|
| GT + FF           | GT                | GT + FF           | GT                | GT + FF           | GT               | GT + FF          | GT |
| <sup>100</sup> Zr | <sup>100</sup> Zr | <sup>135</sup> Te | <sup>96</sup> Sr  | <sup>138</sup> I  | <sup>91</sup> Br | <sup>85</sup> Zn | —  |
| <sup>137</sup> Xe | <sup>138</sup> Xe | <sup>137</sup> I  | <sup>135</sup> Te | <sup>137</sup> I  | <sup>94</sup> Kr | <sup>84</sup> Zn | —  |
| <sup>139</sup> Cs | <sup>137</sup> Xe | <sup>138</sup> Xe | <sup>97</sup> Sr  | <sup>136</sup> Te | <sup>89</sup> Se | <sup>82</sup> Cu | —  |
| <sup>138</sup> Xe | <sup>136</sup> I  | <sup>140</sup> Xe | <sup>91</sup> Kr  | <sup>135</sup> Te | <sup>86</sup> As | <sup>80</sup> Cu | —  |
| <sup>138</sup> Cs | <sup>139</sup> Cs | <sup>137</sup> Xe | <sup>93</sup> Rb  | <sup>134</sup> Sb | <sup>87</sup> As | <sup>78</sup> Ni | —  |
| <sup>97</sup> Y   | <sup>99</sup> Zr  | <sup>136</sup> I  | <sup>94</sup> Rb  | <sup>139</sup> I  | <sup>90</sup> Se | <sup>76</sup> Co | —  |
| <sup>96</sup> Y   | <sup>97</sup> Y   | <sup>139</sup> Xe | <sup>99</sup> Y   | <sup>140</sup> Xe | <sup>92</sup> Br | <sup>81</sup> Cu | —  |
| <sup>99</sup> Zr  | <sup>96</sup> Y   | <sup>140</sup> Cs | <sup>137</sup> I  | <sup>141</sup> Xe | <sup>93</sup> Br | <sup>79</sup> Ni | —  |
| <sup>140</sup> Cs | <sup>140</sup> Cs | <sup>139</sup> Cs | <sup>90</sup> Kr  | <sup>136</sup> I  | <sup>96</sup> Kr | <sup>83</sup> Cu | —  |
| <sup>95</sup> Sr  | <sup>95</sup> Sr  | <sup>141</sup> Cs | <sup>92</sup> Kr  | <sup>137</sup> Te | <sup>95</sup> Kr | <sup>80</sup> Ni | —  |
| <sup>101</sup> Zr | <sup>139</sup> Xe | <sup>96</sup> Sr  | <sup>95</sup> Sr  | <sup>139</sup> Xe | <sup>88</sup> Se | <sup>77</sup> Co | —  |

Zastupljenost pojedine jezgre u seriji: 

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 8 x | 7 x | 6 x | 5 x | 4 x | 3 x |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Tablica 4.6: Zajedničkih 11 vodećih doprinosa kumulativnim  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektrima sa i bez zabranjenih prijelaza na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

U tablici 4.6 su prikazani zajednički vodeći doprinosi kumulativnim spektrima elektrona i antineutrina skupa za sve fisijske izotope, za svaku od navedenih energija, odvojeno za slučajeve sa i bez uključenih prvo-zabranjenih prijelaza. Dakle, za svaku energiju se gledala zastupljenost pojedine jezgre u seriji sačinjenoj od 8 spektara, po 2 (elektronski i antineutrinski) za svaki od 4 fisijska izotopa (<sup>239</sup>Pu, <sup>241</sup>Pu, <sup>235</sup>U, <sup>238</sup>U). Ponavljaju se prethodna opažanja da su veće podudarnosti doprinosa:

- kod spektara na većim energijama,
- kod spektara s uključenim prvo-zabranjenim prijelazima.

Vodeći doprinosi su grupirani oko dva vrha <sup>94</sup>Sr i <sup>140</sup>Xe, kako je i bilo očekivano prema slici 4.9. Za integral signala izmjenjenog u antineutrinskim eksperimentima je ustanovljeno da postoji ovisnost o masenom i protonskom broju fisijskog sustava. K tome, opaženo je da  $\sim 70\%$  signala proizlazi iz grupe lakih fisijskih fragmenata i oko 50% iz raspada nuklida neparnog  $Z$  i neparnog  $N$  [27].

Konkretnije, najvažniji doprinos na energiji od 2.0 MeV je <sup>100</sup>Zr, na energijama 3.5 i 5.5 MeV su to izotopi Te, I, Sr i Kr, dok je čak 5 jezgara zajedničko svim spektrima na energiji 13.0 MeV: <sup>84,85</sup>Zn, <sup>80,82</sup>Cu i <sup>78</sup>Ni. Na višim energijama se uglavnom radi o neparnim jezgrama za koje model radi lošije od parno-parnih jezgara. Takav ishod se slaže i s prethodno ustanovljenim odstupanjem izračunatih kumulativnih spektara od različitih eksperimentalnih mjerenja na visokim energijama (slike 4.10 i B.1).

Upravo u tome leži važnost ovih rezultata jer ukazuju na to koje jezgre bi trebale biti prioritet za buduća eksperimentalna mjerenja, a ujedno ukazuju i na važnost poboljšanja teorijskog opisa neparnih jezgara.

## 5 Zaključak

U sklopu ovog rada, spektar antineutrina iz nuklearnih reaktora se određuje *ab initio* računom, tj. počevši iz prvih principa. Za osnovna stanja sfernih jezgara je primjenjen RHB model s interakcijom  $D3C^*$  ovisnom o gustoći nuklearnog medija te impulsu, što je proširena verzija DD-ME1 interakcije. Vremena poluživota  $\beta$  raspada slijede iz PN-RQRPA. Sparivanje  $pp$  i  $T = 1$  je preuzeto iz D1S Gogny interakcije konačnog dosega, dok se kanal  $T = 0$  opisuje zbrojem dviju Gaussovih funkcija, kao u nerelativističkoj QRPA. Slobodni parametri se prilagođavaju na očekivana svojstva nuklearne tvari i eksperimentalnim podacima o osnovnom stanju konačnih jezgara.

U ravnotežnim uvjetima rada nuklearnih reaktora, kumulativni spektri elektrona i antineutrina za dani fisijski izotop se računaju kao suma velikog broja spektara pojedinih jezgara na koje se raspadaju nestabilni fisijski fragmenti. Pritom se spektri moraju otežati odgovarajućim kumulativnim doprinosima. U prosjeku se fisijske kćeri raspadaju 6 puta dok postignu stabilno izotopsko stanje, a ono može nastati putem različitih  $\beta$  lanaca. Spektri se normaliziraju Simpsonovim kompozitnim pravilom.

Spektri jezgara se većinom sastoje od više prijelaza čiji se osnovni spektri množe korekcijama  $F(Z, W)$ ,  $L(Z, W)$  i  $C(Z, W)$ . Najznačajnija je korekcija kulonskog polja  $F(Z, W)$  koja maksimum  $\beta$  spektra jezgre smanji i pomakne prema nižim energijama. Preostale korekcije ga povećaju iznad osnovnog i još malo pomaknu u istom smjeru.

Ukupno je  $> 1000$  izotopa kćeri s  $> 6000$  jedinstvenih  $\beta$  prijelaza, od kojih je oko 1500 zabranjenih. Razliku između spektra dozvoljenog (GT) i prvo-zabranjenih (FF) prijelaza uzrokuje faktor oblika  $C(W)$ . Oblik  $0^-$  je sukladan GT prijelazu,  $1^-$  ima viši maksimum pomaknut prema većim energijama, a  $2^-$  niži maksimum i šire krakove. FF prijelazi smanjuju maksimum te na višim energijama povećaju  $\beta$  spektar jezgre. Zato i kumulativni spektri s FF prijelazima na višim energijama pokazuju dosta veće vrijednosti, pa se puno bolje slažu s eksperimentom od spektra samo s GT prijelazima.

Efekt FF prijelaza na kumulativne spektre se točnije može procijeniti iz omjera spektra sa i bez FF prijelaza. Kod svih fisijskih izotopa se na energiji 5 – 7 MeV vidi najveće odstupanje iznosa  $\sim 3\%$ : pozitivno za elektrone, a negativno za antineutrine upravo kako je opisano reaktorskom anomalijom. Također, u istom rasponu energija se opaža i tzv. spektralni *bump* veličine  $\sim 10\%$  kojem gotovo pola doprinosa čine FF prijelazi. Na osnovu toga se kao glavni rezultat ističe pravilno tretiranje FF prijelaza.

Drugi ključni rezultat su vodeći doprinosi kojih na tim energijama od interesa za neutrinske oscilacije ima  $< 20$ . Kumulativnim spektrom s porastom energije dominira svega nekoliko jezgara i to mahom neparanih što za posljedicu ima veće odstupanje od eksperimenta. Uz to što model lošije opisuje neparne jezgre, nema uprosječavanja pogreške s parnim jezgrama. Doprinosi se očekivano grupiraju oko  $^{94}\text{Sr}$  i  $^{140}\text{Xe}$ .

Zaključno – korišteni model dovoljno dobro predviđa spektre te se sa sigurnošću može konstatirati da su FF prijelazi neizostavni čimbenik. No, potrebno je poboljšati teorijski opis neparanih jezgara i u eksperimentima se usmjeriti na vodeće doprinose.

# Dodaci

## Dodatak A Stacionarne jednađžbe gibanja

RMF teorija odgovara aproksimaciji srednjeg polja, a koja je najniži red kvantne teorije polja. Pretpostavka je da se operatori mezonskih polja mogu zamijeniti svojim očekivanim vrijednostima u osnovnom stanju, prilikom čega se zanemaruju kvantne fluktuacije mezonskih polja što *de facto* rezultira ponašanjem klasičnih polja. Time se problem više tijela reducirao na sliku neovisnih nukleona u samosuglasnim poljima.

Budući da su nukleoni po svojoj prirodi fermioni, jezgra se opisuje Slaterovom determinantom  $\Phi$  koja sadržava  $A$  jednočestičnih spinora  $\psi_i$ . Izvori mezonskih polja  $\langle \bar{\psi} \Gamma_\phi \psi \rangle$  su određeni nuklearnim gustoćama i izvorima, a računaju se sumiranjem po svim spinorima Slaterove determinante nukleona, odnosno popunjenim orbitalama Fermijevog mora stanja pozitivne energije. Primjenjena je tzv. *no-sea* aproksimacija. U potpuno relativističkom duhu, u sumu bi se trebalo uključiti i Diracovo more stanja negativne energije. Međutim, to bi rezultiralo divergirajućim članovima, koji se mogu otkloniti pravilnom renormalizacijom, ali je sama realizacija vrlo komplicirana jer se odgovarajuće jednađžbe mogu riješiti samo numerički (analitičko rješenje je moguće za beskonačnu nuklearnu materiju). Naime, dodavanje polarizacije vakuuma u račun zahtijeva novu prilagodbu parametara efektivnog lagranžijana na eksperimentalne podatke. U krajnjoj liniji, dobiju se približno isti rezultati kao u slučaju zanemarene polarizacije vakuuma što opravdava korištenje *no-sea* aproksimacije.

Kako se iz teorije klasične mehanike već zna, lagranžijan je funkcija koja sadržava svu fizikalnu informaciju o sustavu i silama koje na njega djeluju. Na njemu se temelji funkcional djelovanja (akcije) pomoću kojeg Hamiltonov princip određuje dinamiku sustava – čestica bira trajektoriju stacionarne akcije, tj. varijacija djelovanja iščezava:

$$\delta \int \mathcal{L}(q_i, \partial_\mu q_i) d^4x = 0, \quad (\text{A.1})$$

što za svaku generaliziranu koordinatu rezultira Euler-Lagrangeovom jednađžbom:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (\text{A.2})$$

U slučaju relativističke gustoće lagranžijana, polja postaju generalizirane koordinate. Ovisno o kojem polju se radi, dobivene jednađžbe su poznate pod vlastitim nazivima:

$$\left. \begin{array}{l} q_i = \psi \} \Rightarrow \text{Diracova jednađžba} \\ q_i = \sigma \} \Rightarrow \text{Klein-Gordonova (u užem smislu)} \\ q_i = \omega_\mu \} \Rightarrow \text{Procine jednađžbe} \\ q_i = \vec{\rho}_\mu \} \\ q_i = A_\mu \} \Rightarrow \text{Poissonova jednađžba} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Klein-Gordonove jednađžbe}$$

Varijacijom lagražijana po  $\bar{\psi}$  se dobije vremenski ovisna Diracova jednadžba:

$$\left[ \gamma^\mu \left( i\partial_\mu - \underbrace{\left( g_\omega \omega_\mu + g_\rho \vec{\tau} \vec{\rho}_\mu + e A_\mu \frac{1-\tau_3}{2} \right)}_{\Sigma_\mu} - \Sigma_\mu^R \right) - \underbrace{\left( m + g_\sigma \sigma \right)}_{m_{\text{eff}}} \right] \psi = 0. \quad (\text{A.3})$$

Nukleonska jednočestična stanja ne miješaju izospin, a iz relacije očuvanja naboja:

$$Q = \vec{\tau}_3 + \frac{A}{2}, \quad (\text{A.4})$$

slijedi da doprinosi jedino treća, neutralna komponenta  $\rho$  mezona. Kako je označeno, članovi koji pripadaju mezonima su grupirani u skalarno  $\Sigma_\sigma$  i vektorsko  $\Sigma_\mu$  polje. Ovisnost konstati vezanja o nuklearnom mediju predstavlja tzv. *rearrangement* član:

$$\Sigma_\mu^R = \frac{j_\mu}{\rho_v} \left( \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \psi \sigma + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \omega_\nu + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \cdot \vec{\rho}_\nu \right). \quad (\text{A.5})$$

Ti članovi su od presudne važnosti za očuvanje energije i impulsa te termodinamičku konzistentnost modela (tlak dobiven preko termodinamičke definicije mora biti jednak onom dobivenom iz tenzora energije i impulsa). Varijacijom lagražijana se pojavljuju efekti retardacije (zbog vremena potrebnog za propagaciju polja) u vidu članova  $\partial_t^2 \phi$ . Zanimaju se na račun velikih masa mezona koje vode na kratki doseg interakcije, čime se postiže tzv. *stacionarna* aproksimacija. Oblik Klein-Gordonovih jednadžbi je:

$$\underbrace{\left[ \partial^\mu \partial_\mu + m_\phi^2 \right]}_{\square} \phi = \pm \langle \bar{\psi} \Gamma_\phi \psi \rangle \quad \begin{cases} + & \text{vektorska polja} \\ - & \text{skalarna polja} \\ 0 & \text{fotonsko polje} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

gdje je  $\square$  d'Alembertov operator (poopćenje laplasijana na prostor Minkowskog), a skalarna, vektorska, izovektorska i gustoća naboja djeluju kao izvori mezonskih polja:

$$\langle \bar{\psi} \Gamma_\phi \psi \rangle = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i \Gamma_\phi \psi_i. \quad (\text{A.7})$$

Uvrštavanjem pripadnih izraza za izvore mezonskih polja iz jednadžbe (2.9) slijedi:

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma = -g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad (\text{A.8})$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega^\mu = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle, \quad (\text{A.9})$$

$$(\square + m_\rho^2) \vec{\rho}^\mu = g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi \rangle, \quad (\text{A.10})$$

$$\square A^\mu = e^2 \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1-\tau_3}{2} \psi \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Skup jednadžbi (A.3) i (A.8)-(A.11) se rješava samosuglasno tako da se za odabrane početne vrijednosti polja iz Klein-Gordonovih jednadžbi riješi Diracova, pomoću čega se određuju nove vrijednosti mezonskih i elektromagnetskog polja. Iteracija se odvija sve dokle se ne postigne željena razina konvergencije. Taj skup jednadžbi predstavlja konzistentan opis jezgre. U vremenski ovisnom slučaju bi to rezultiralo nelinearnom propagacijom spinora, dok se u statičkom reducira na nelinearni problem svojstvenih vrijednosti – standardni zadatak kvantne fizike, čije rješenje je osnovno stanje jezgre.

Spinori su svojstveni vektori, a jednočestične energije svojstvene vrijednosti:

$$\{\alpha[-i\nabla - \Sigma(\mathbf{r})] + \beta m_{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \Sigma(\mathbf{r}) + \Sigma^R(\mathbf{r})\}\psi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i\psi_i(\mathbf{r}), \quad (\text{A.12})$$

gdje je  $\Sigma(\mathbf{r})$  prostorna, a  $\Sigma(\mathbf{r})$  svjetlosna komponenta vektora vlastite energije. Opet se  $\Sigma^R$  odnosi na *rearrangement* članove, dok je efektivna masa nukleona:

$$m_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = m + \Sigma_\sigma = m + g_\sigma\sigma(\mathbf{r}). \quad (\text{A.13})$$

U svrhu pojednostavljenja se koristi svojstvo da parno-parne jezgre u osnovnom stanju imaju dobar paritet te ostaju invarijantne na vremensku inverziju. Posljedično, iščezavaju struje te pripadne prostorne komponente vektorskih potencijala, a ostaju samo njihove vremenske komponente, pa se za konačnu Diracovu jednadžbu dobije:

$$[-i\alpha\nabla + \beta m_{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \Sigma(\mathbf{r}) + \Sigma^R(\mathbf{r})]\psi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i\psi_i(\mathbf{r}). \quad (\text{A.14})$$

Uzevši u obzir pojednostavljenje, skup Klein-Gordonovih jednadžbi postaje:

$$(-\Delta + m_\sigma^2)\sigma(\mathbf{r}) = -g_\sigma\rho_s(\mathbf{r}), \quad (\text{A.15})$$

$$(-\Delta + m_\omega^2)\omega^0(\mathbf{r}) = g_\omega\rho_v(\mathbf{r}), \quad (\text{A.16})$$

$$(-\Delta + m_\rho^2)\rho_3^0(\mathbf{r}) = g_\rho\rho_I(\mathbf{r}), \quad (\text{A.17})$$

$$-\Delta A^0(\mathbf{r}) = e\rho_p(\mathbf{r}). \quad (\text{A.18})$$

Klein-Gordonove jednadžbe se mogu riješiti analitički pomoću Greenovih funkcija:

$$\sigma(\mathbf{r}) = - \int d^3r' D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_s(\mathbf{r}')g_\sigma(\rho_s(\mathbf{r}')) \quad \text{skalarno polje}, \quad (\text{A.19})$$

$$\omega^0(\mathbf{r}) = - \int d^3r' D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_v(\mathbf{r}')g_\omega(\rho_v(\mathbf{r}')) \quad \text{vektorsko polje}, \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_3^0(\mathbf{r}) = - \int d^3r' D_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_I(\mathbf{r}')g_\rho(\rho_I(\mathbf{r}')) \quad \text{izovektorsko polje}, \quad (\text{A.21})$$

$$A^0(\mathbf{r}) = e \int d^3r' D_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_p(\mathbf{r}') \quad \text{elektromagnetsko polje}. \quad (\text{A.22})$$

Propagatori polja mezona  $\phi$  mase  $m_\phi$  te fotona glase:

$$D_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m_\phi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{mezonski propagatori}, \quad (\text{A.23})$$

$$D_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{fotonski propagator}. \quad (\text{A.24})$$

Gustoće se računaju iz nukleonskih valnih funkcija u *no-sea* aproksimaciji:

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \psi_i^\dagger(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) \quad \text{skalarna gustoća}, \quad (\text{A.25})$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \psi_i^\dagger(\mathbf{r})\gamma^0\psi_i(\mathbf{r}) \quad \text{vektorska gustoća}, \quad (\text{A.26})$$

$$\rho_I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \psi_i^\dagger(\mathbf{r})\gamma^0\tau_3\psi_i(\mathbf{r}) \quad \text{izovektorska gustoća}, \quad (\text{A.27})$$

$$\rho_p(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A \psi_i^\dagger(\mathbf{r})\gamma^0\frac{1-\tau_3}{2}\psi_i(\mathbf{r}) \quad \text{elektromagnetska gustoća}. \quad (\text{A.28})$$

Dobivene gustoće ulaze kao izvori polja u pripadne Klein-Gordonove jednađžbe, čija rješenja su mezonska polja, a koja zatim ulaze u Diracovu jednađžbu. Procedura se iterira do konvergencije. Slično kao u kovarijantnoj teoriji funkcionala energije, i sad ukupna vezana energija slijedi iz integrala komponente  $T^{00}$  tenzora energije-impulsa:

$$E_{\text{RMF}} = \sum_{i=1}^A \int d^3r \psi_i^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m) \psi_i + \frac{1}{2} \int d^3r (g_\sigma \rho_s \sigma + g_\omega \omega^0 \rho_v + g_\rho \rho_3^0 \rho_I). \quad (\text{A.29})$$

Za sferne jezgre, gustoće i polja ovise samo o radijalnoj koordinati  $r$ , a nukleonski spinor o kvantnim brojevima, dok je izospinski dio odvojen u valnu funkciju  $\chi_t(t)$ :

$$\psi(\mathbf{r}, s, t) = \begin{pmatrix} f(r) & \Omega_{j,l,m}(\theta, \varphi, s) \\ ig(r) & \Omega_{j,\tilde{l},m}(\theta, \varphi, s) \end{pmatrix} \chi_t(t). \quad (\text{A.30})$$

Angularne i spinske komponente su vezane u ukupni angularni moment  $j$ :

$$\Omega_{j,l,m}(\theta, \varphi, s) = \sum_{m_s, m_l} \left\langle \frac{1}{2} m_s l m_l \middle| j m \right\rangle \chi_{m_s}(s) Y_{lm_l}(\theta, \varphi). \quad (\text{A.31})$$

Orbitalni angularni moment za veliku komponentu spinora je  $l$ , a za malu  $\tilde{l}$ :

$$\begin{cases} l = j + \frac{1}{2}, & \tilde{l} = j - \frac{1}{2} & \text{za } \pi = (-1)^{j+\frac{1}{2}}, \\ l = j - \frac{1}{2}, & \tilde{l} = j + \frac{1}{2} & \text{za } \pi = (-1)^{j-\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Diracova jednađžba se svodi na par običnih vezanih diferencijalnih jednađžbi:

$$\left[ m^*(r) + \Sigma(\mathbf{r}) \right] f(r) + \left( \partial_r - \frac{\kappa - 1}{r} \right) g(r) = \epsilon f(r), \quad (\text{A.33})$$

$$-\left( \partial_r + \frac{\kappa + 1}{r} \right) f(r) - \left[ m^*(r) + \Sigma(\mathbf{r}) \right] g(r) = \epsilon g(r), \quad (\text{A.34})$$

pri čemu vrijedi:

$$\kappa = \pm(j + \frac{1}{2}) \quad \text{za } j = \mp \frac{1}{2}. \quad (\text{A.35})$$

Gustoće se mogu izraziti pomoću nukleonskih radijalnih funkcija  $f_i$  i  $g_i$ :

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1} (2j_i + 1) [|f_i(r)|^2 - |g_i(r)|^2], \quad (\text{A.36})$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{i=1} (2j_i + 1) [|f_i(r)|^2 + |g_i(r)|^2], \quad (\text{A.37})$$

$$\rho_I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1} t_i (2j_i + 1) [|f_i(r)|^2 - |g_i(r)|^2], \quad (\text{A.38})$$

$$\rho_p(\mathbf{r}) = \sum_{i=1} (2j_i + 1) (1 - t_i) [|f_i(r)|^2 - |g_i(r)|^2], \quad (\text{A.39})$$

gdje se  $t_i$  odnosi na tip nukleona:

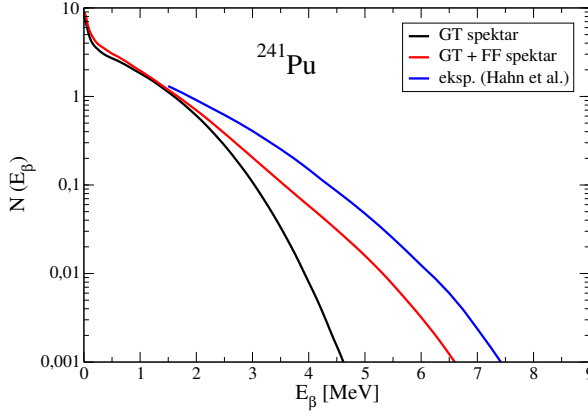
$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{za neutrone,} \\ -1 & \text{za protone.} \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

U ovakvoj formulaciji, Klein-Gordonove jednađžbe se mogu pisati kao:

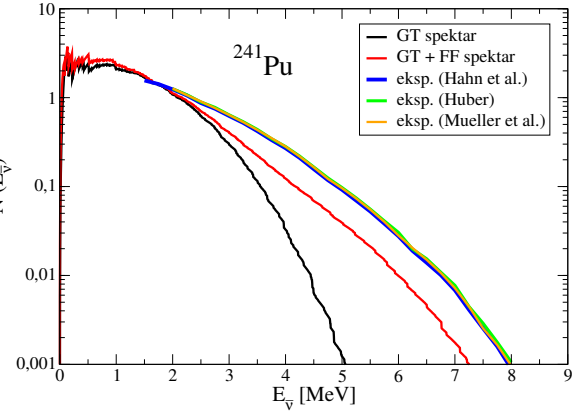
$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\phi^2 \right) = g_\phi(\rho_v(r)) \phi(r). \quad (\text{A.41})$$

## Dodatak B Kumulativni spektri za $^{241}\text{Pu}$ , $^{235}\text{U}$ i $^{238}\text{U}$ te njihovi vodeći doprinosi

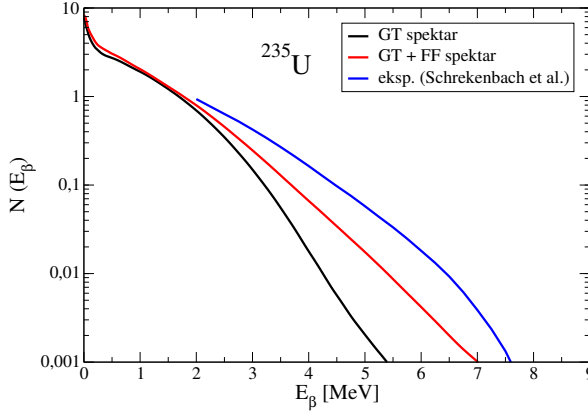
Kumulativni  $\beta$  i  $\bar{\nu}$  spektri izotopa  $^{241}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  se dobivaju na isti način kao i za  $^{239}\text{Pu}$  kako je opisano u potpoglavlju 4.7, a što se ujedno odnosi i na dobivanje njihovih vodećih doprinosa čiji su spektri prikazani na slikama (B.2 - B.7). Pritom je provedena detaljna analiza i rasprava rezultata zajednička za sve fisijske izotope.



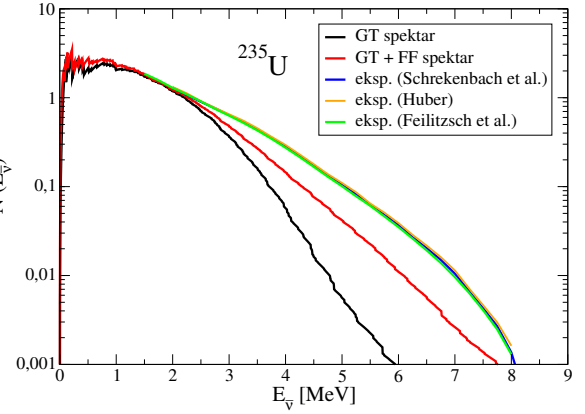
(a) Kumulativni  $\beta$  spektr izotopa  $^{241}\text{Pu}$



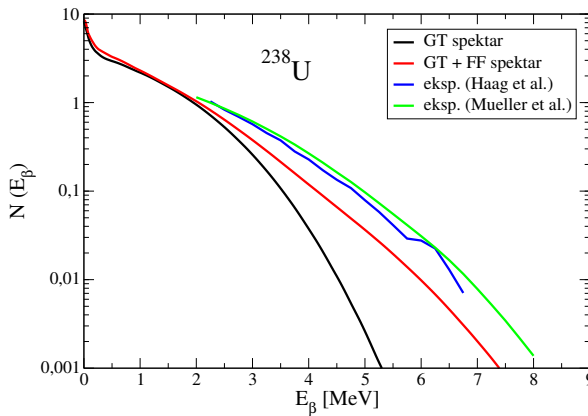
(b) Kumulativni  $\bar{\nu}$  spektr izotopa  $^{241}\text{Pu}$



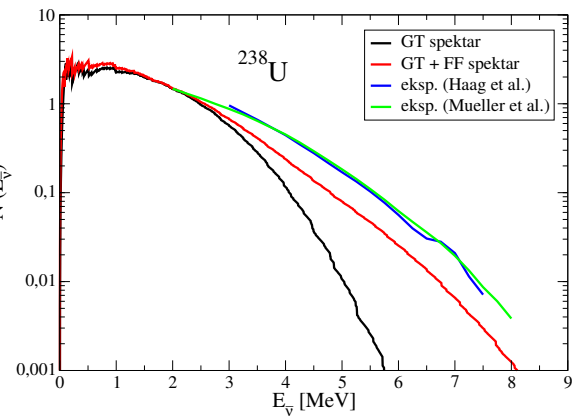
(c) Kumulativni  $\beta$  spektr izotopa  $^{235}\text{U}$



(d) Kumulativni  $\bar{\nu}$  spektr izotopa  $^{235}\text{U}$



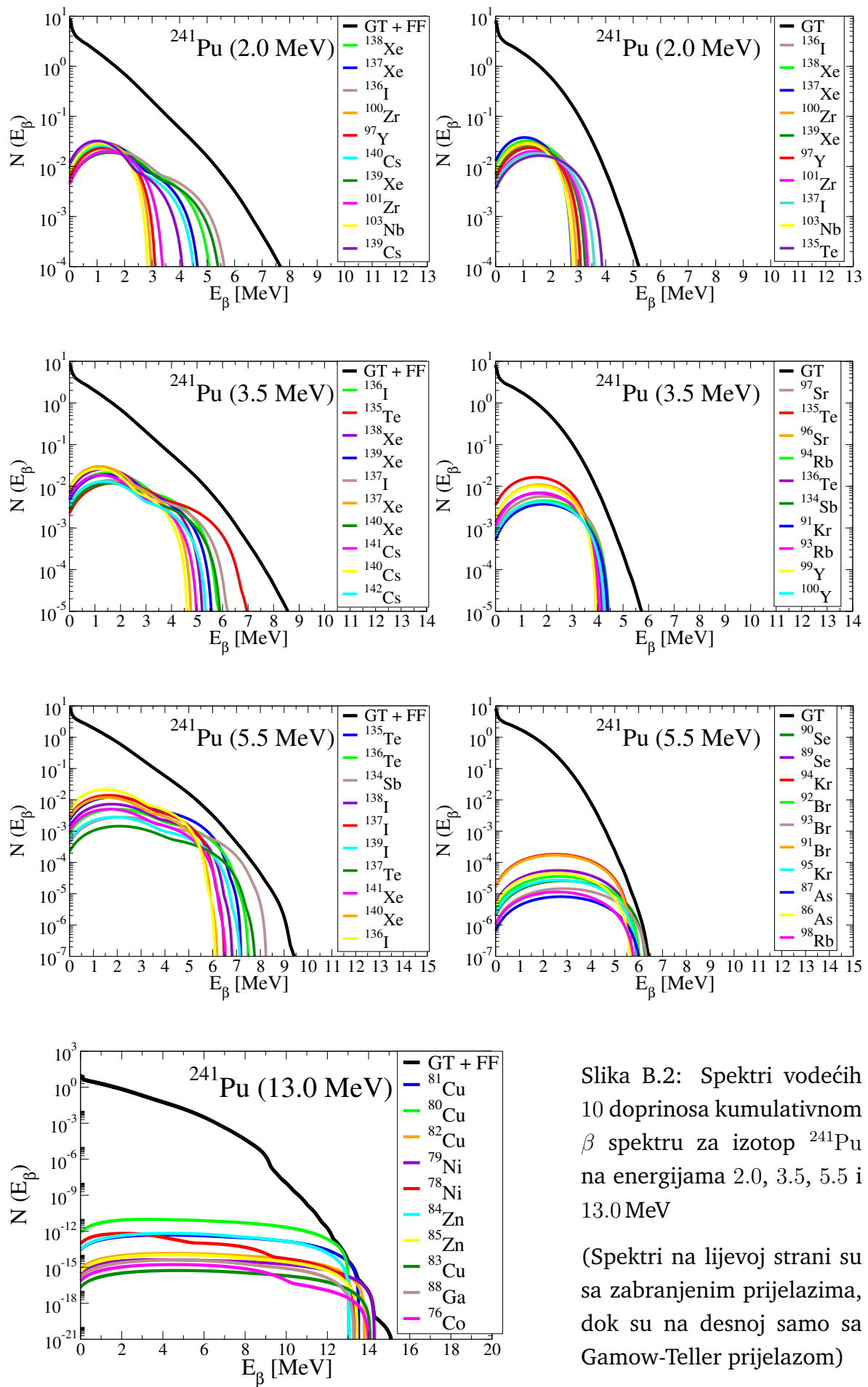
(e) Kumulativni  $\beta$  spektr izotopa  $^{238}\text{U}$



(f) Kumulativni  $\bar{\nu}$  spektr izotopa  $^{238}\text{U}$

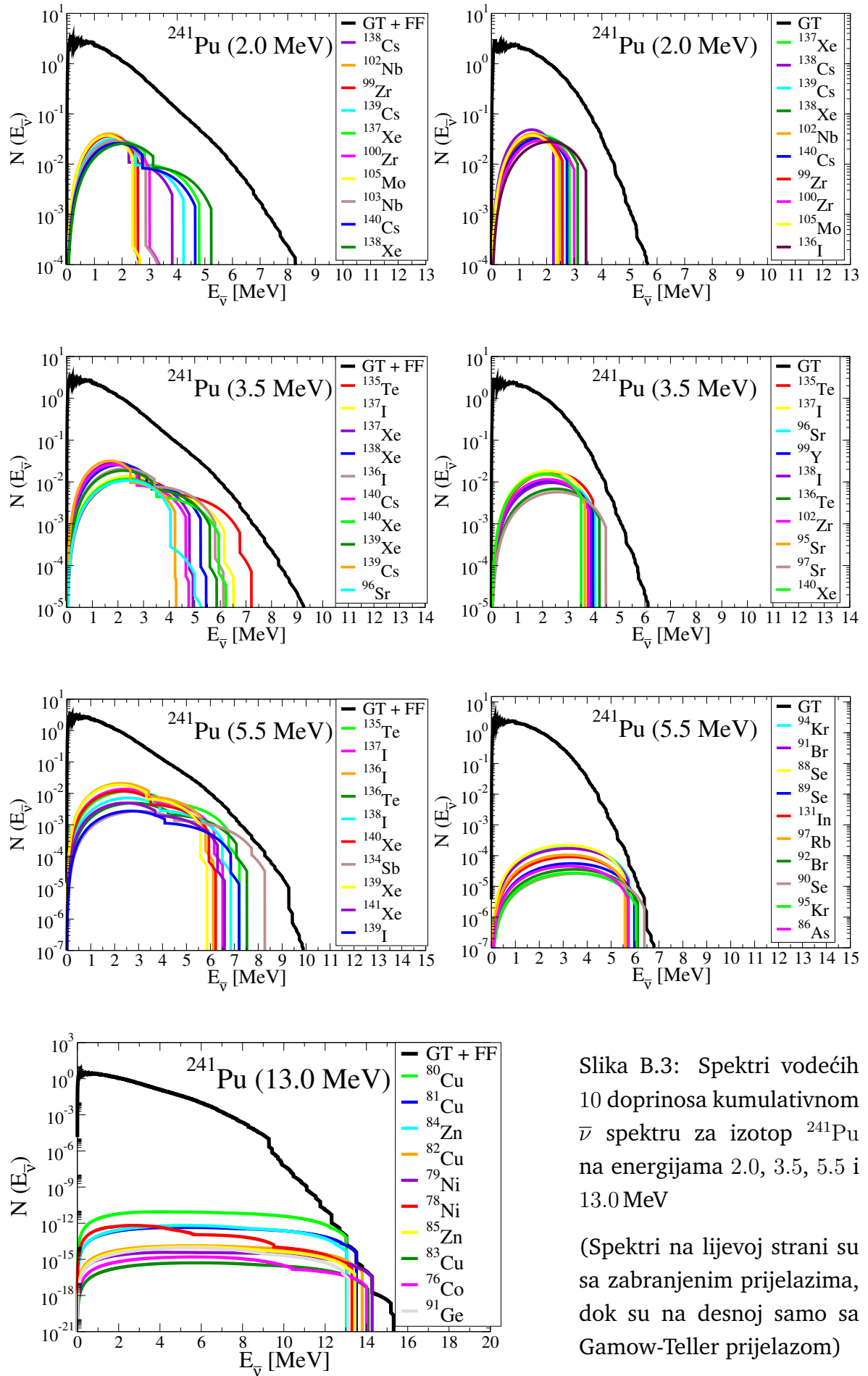
Slika B.1: Kumulativni spektri sa i bez zabranjenih prijelaza za  $^{241}\text{Pu}$  i  $^{235,238}\text{U}$





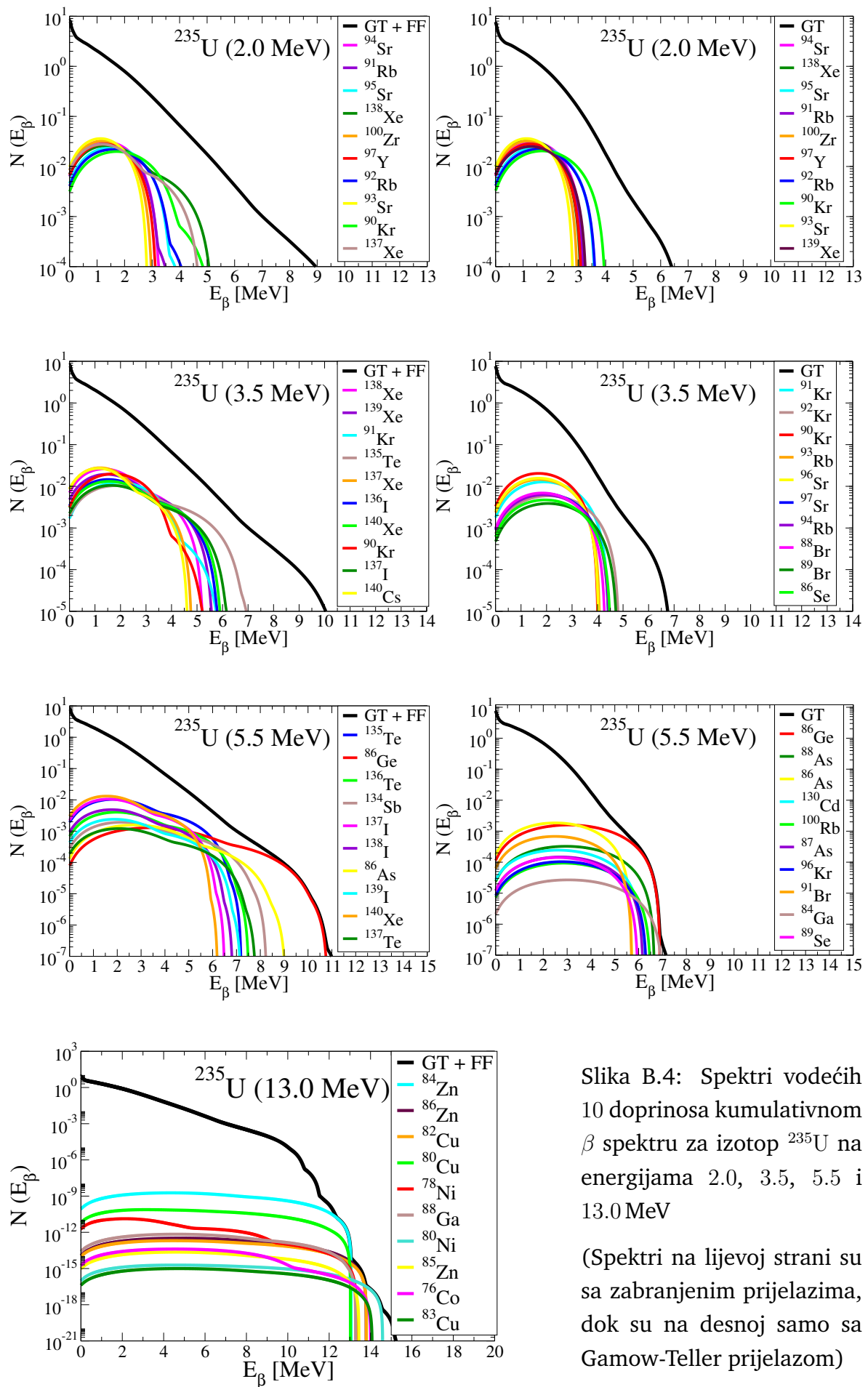
Slika B.2: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\beta$  spektru za izotop  $^{241}\text{Pu}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



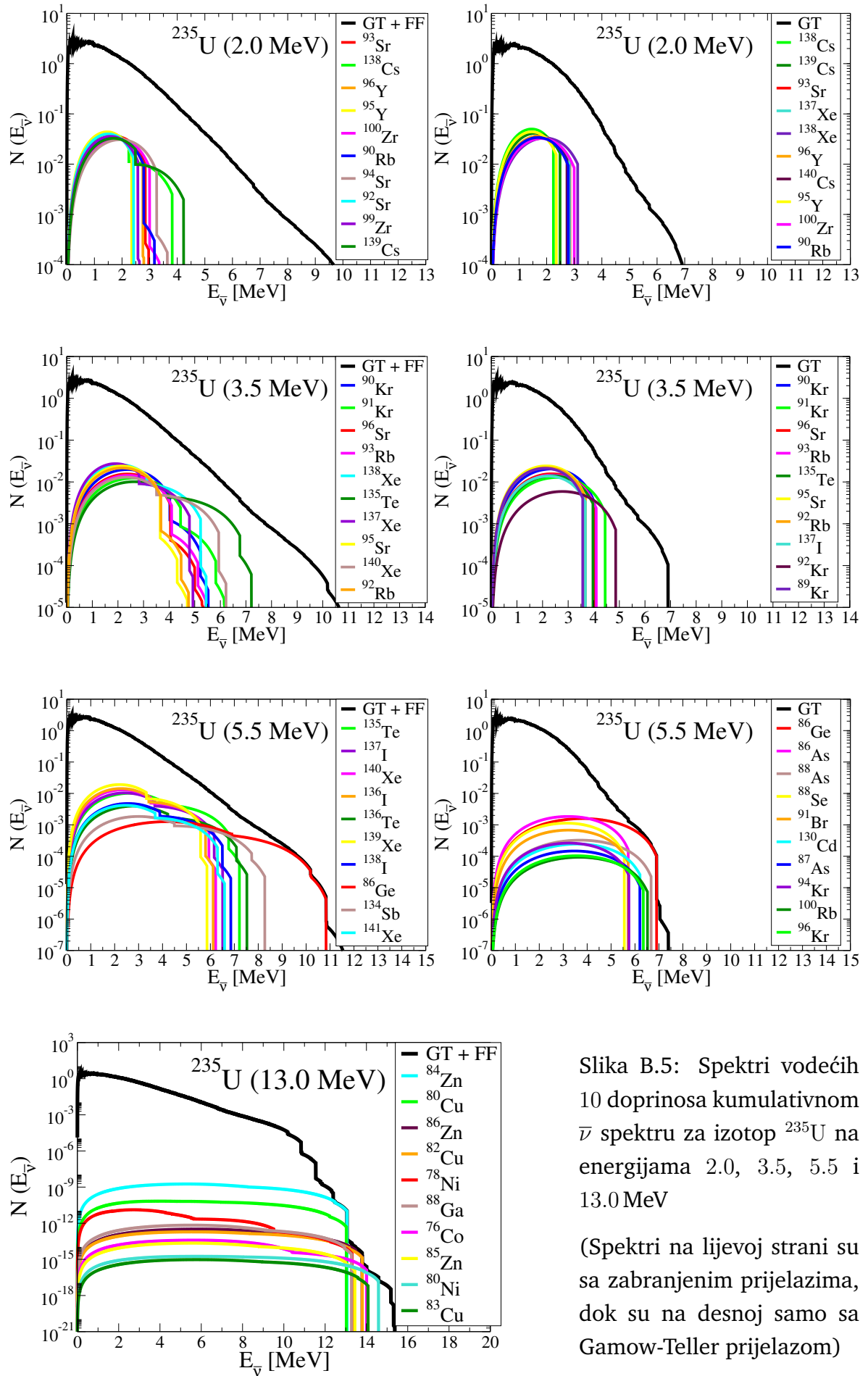
Slika B.3: Spektre vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\bar{\nu}$  spektru za izotop  $^{241}\text{Pu}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektre na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



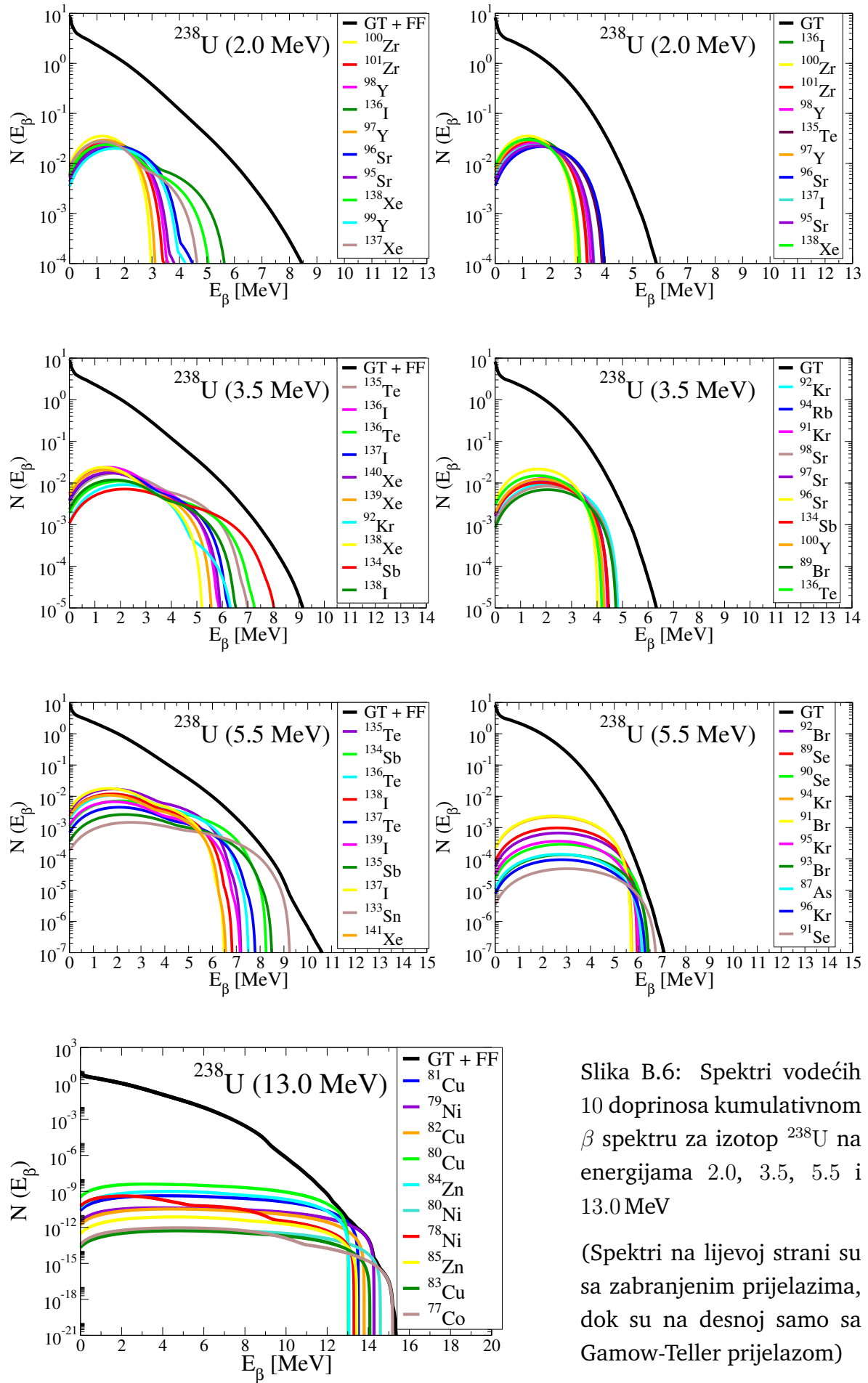
Slika B.4: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\beta$  spektru za izotop  $^{235}\text{U}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektre na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



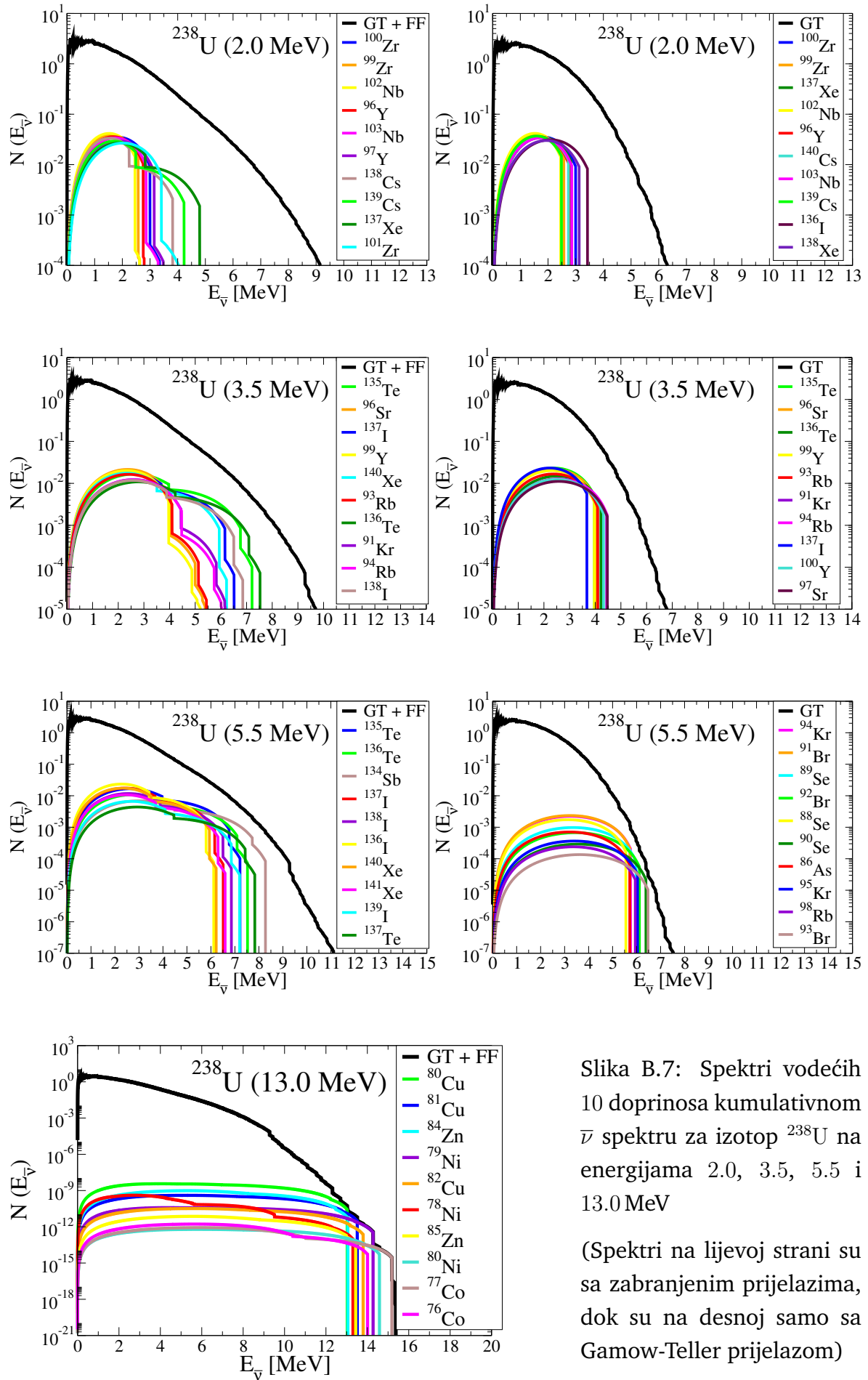
Slika B.5: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\bar{\nu}$  spektru za izotop  $^{235}\text{U}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



Slika B.6: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\beta$  spektru za izotop  $^{238}\text{U}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)



Slika B.7: Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom  $\bar{\nu}$  spektru za izotop  $^{238}\text{U}$  na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV

(Spektri na lijevoj strani su sa zabranjenim prijelazima, dok su na desnoj samo sa Gamow-Teller prijelazom)

## Popis slika

|      |                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Elementi Feynmanovih dijagrama . . . . .                                                              | 5  |
| a    | Skalarni vrh . . . . .                                                                                | 5  |
| b    | Vektorski vrh . . . . .                                                                               | 5  |
| 4.1  | Usporedba Gamow-Tellerovog i prvo-zabranjenih prijelaza za $\beta$ spektar                            | 33 |
| 4.2  | Ovisnost korekcije $F$ o parametrima $Z$ , $A$ i $E_0$ za $\beta$ spektar . . . . .                   | 35 |
| a    | Ovisnost korekcije $F$ o atomskom broju $Z$ . . . . .                                                 | 35 |
| b    | Ovisnost korekcije $F$ o masenom broju $A$ . . . . .                                                  | 35 |
| c    | Ovisnost korekcije $F$ o energiji $E_0$ . . . . .                                                     | 35 |
| 4.3  | Ovisnost korekcije $L$ o parametrima $Z$ , $A$ i $E_0$ za $\beta$ spektar . . . . .                   | 37 |
| a    | Ovisnost korekcije $L$ o atomskom broju $Z$ . . . . .                                                 | 37 |
| b    | Ovisnost korekcije $L$ o masenom broju $A$ . . . . .                                                  | 37 |
| c    | Ovisnost korekcije $L$ o energiji $E_0$ . . . . .                                                     | 37 |
| 4.4  | Ovisnost korekcije $C$ o parametrima $Z$ , $A$ i $E_0$ za $\beta$ spektar . . . . .                   | 37 |
| a    | Ovisnost korekcije $C$ o atomskom broju $Z$ . . . . .                                                 | 37 |
| b    | Ovisnost korekcije $C$ o masenom broju $A$ . . . . .                                                  | 37 |
| c    | Ovisnost korekcije $C$ o energiji $E_0$ . . . . .                                                     | 37 |
| 4.5  | Usporedba snage korekcija $F$ , $L$ i $C$ za $\beta$ spektar . . . . .                                | 38 |
| 4.6  | Ekperimentalni spektar jezgre $^{74}_{30}\text{Zn}$ . . . . .                                         | 39 |
| 4.7  | Ukupni $\beta$ spektar jezgre bez korekcija, samo s $F$ te s $F$ , $L$ , $C$ korekcijama              | 40 |
| 4.8  | Usporedba $\beta$ spektra jezgre ovisno o udjelu zabranjenih prijelaza . . .                          | 41 |
| a    | $\beta$ spektar jezgre s malim udjelom zabranjenih prijelaza . . . . .                                | 41 |
| b    | $\beta$ spektar jezgre s velikim udjelom zabranjenih prijelaza . . . . .                              | 41 |
| 4.9  | Distribucije kumulativnih doprinosa za $^{239,241}\text{Pu}$ i $^{235,238}\text{U}$ preuzete s [28]   | 43 |
| a    | 2D ( $A/Z$ , doprinos) za izotop $^{239}\text{Pu}$ . . . . .                                          | 43 |
| b    | mapa ( $Z$ , $A/N$ , doprinos) za izotop $^{239}\text{Pu}$ . . . . .                                  | 43 |
| c    | 2D ( $A/Z$ , doprinos) za izotop $^{241}\text{Pu}$ . . . . .                                          | 43 |
| d    | mapa ( $Z$ , $A/N$ , doprinos) za izotop $^{241}\text{Pu}$ . . . . .                                  | 43 |
| e    | 2D ( $A/Z$ , doprinos) za izotop $^{235}\text{U}$ . . . . .                                           | 43 |
| f    | mapa ( $Z$ , $A/N$ , doprinos) za izotop $^{235}\text{U}$ . . . . .                                   | 43 |
| g    | 2D ( $A/Z$ , doprinos) za izotop $^{238}\text{U}$ . . . . .                                           | 43 |
| h    | mapa ( $Z$ , $A/N$ , doprinos) za izotop $^{238}\text{U}$ . . . . .                                   | 43 |
| 4.10 | Kumulativni spektri sa i bez zabranjenih prijelaza za izotop $^{239}\text{Pu}$ . . .                  | 44 |
| a    | Kumulativni $\beta$ spektar izotopa $^{239}\text{Pu}$ . . . . .                                       | 44 |
| b    | Kumulativni $\bar{\nu}$ spektar izotopa $^{239}\text{Pu}$ . . . . .                                   | 44 |
| 4.11 | Usporedba teorijskih i eksperimentalnih antineutrinskih spektara . . .                                | 45 |
| 4.12 | Omjeri kumulativnog $\beta$ i $\bar{\nu}$ spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za $^{239}\text{Pu}$ | 46 |
| 4.13 | Omjeri kumulativnog $\beta$ i $\bar{\nu}$ spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za $^{241}\text{Pu}$ | 46 |
| 4.14 | Omjeri kumulativnog $\beta$ i $\bar{\nu}$ spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za $^{235}\text{U}$  | 47 |
| 4.15 | Omjeri kumulativnog $\beta$ i $\bar{\nu}$ spektra sa i bez zabranjenih prijelaza za $^{238}\text{U}$  | 47 |

|      |                                                                                                                                            |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.16 | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\beta$ spektru za izotop $^{239}\text{Pu}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .     | 49 |
| 4.17 | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\bar{\nu}$ spektru za izotop $^{239}\text{Pu}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . . | 50 |
| B.1  | Kumulativni spektri sa i bez zabranjenih prijelaza za $^{241}\text{Pu}$ i $^{235,238}\text{U}$ . .                                         | 58 |
| a    | Kumulativni $\beta$ spektar izotopa $^{241}\text{Pu}$ . . . . .                                                                            | 58 |
| b    | Kumulativni $\bar{\nu}$ spektar izotopa $^{241}\text{Pu}$ . . . . .                                                                        | 58 |
| c    | Kumulativni $\beta$ spektar izotopa $^{235}\text{U}$ . . . . .                                                                             | 58 |
| d    | Kumulativni $\bar{\nu}$ spektar izotopa $^{235}\text{U}$ . . . . .                                                                         | 58 |
| e    | Kumulativni $\beta$ spektar izotopa $^{238}\text{U}$ . . . . .                                                                             | 58 |
| f    | Kumulativni $\bar{\nu}$ spektar izotopa $^{238}\text{U}$ . . . . .                                                                         | 58 |
| B.2  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\beta$ spektru za izotop $^{241}\text{Pu}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .     | 59 |
| B.3  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\bar{\nu}$ spektru za izotop $^{241}\text{Pu}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . . | 60 |
| B.4  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\beta$ spektru za izotop $^{235}\text{U}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .      | 61 |
| B.5  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\bar{\nu}$ spektru za izotop $^{235}\text{U}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .  | 62 |
| B.6  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\beta$ spektru za izotop $^{238}\text{U}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .      | 63 |
| B.7  | Spektri vodećih 10 doprinosa kumulativnom $\bar{\nu}$ spektru za izotop $^{238}\text{U}$ na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .  | 64 |

## Popis tablica

|     |                                                                                                                                                               |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Potencijalni kandidati za mezonske stupnjeve slobode . . . . .                                                                                                | 3  |
| 2.2 | Sistematski prikaz operatora stvaranja i poništenja . . . . .                                                                                                 | 9  |
| 2.3 | D1S parametrizacija Gogny interakcije . . . . .                                                                                                               | 14 |
| 4.1 | Dodatni faktori za fazni prostor zabranjenih prijelaza . . . . .                                                                                              | 33 |
| 4.2 | Koeficijenti $b_x$ ovisno o vrijednosti $a_n$ . . . . .                                                                                                       | 36 |
| 4.3 | Usporedba izotopa s različitim udjelima prvo-zabranjenih prijelaza . .                                                                                        | 41 |
| 4.4 | Podudarnost vodećih doprinosa između kumulativnog spektra sa i bez zabranjenih prijelaza na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .                     | 51 |
| 4.5 | Podudarnost vodećih doprinosa između $\beta$ i $\bar{\nu}$ kumulativnog spektra na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . .                              | 51 |
| 4.6 | Zajedničkih 11 vodećih doprinosa kumulativnim $\beta$ i $\bar{\nu}$ spektrima sa i bez zabranjenih prijelaza na energijama 2.0, 3.5, 5.5 i 13.0 MeV . . . . . | 52 |



## Literatura

- [1] D. Lacroix, *Review of mean-field theory*, Lectures at École Joliot-Curie: Nice (2011).
- [2] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, London: Imperial College Press (2004).
- [3] S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Weinheim: WILEY - VCH (2004).
- [4] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, New York: John Wiley & Sons (1987).
- [5] F. Ardellier *et al.*, *Double Chooz: A Search for the Neutrino Mixing Angle  $\theta_{13}$* , arXiv:hep-ex/0606025 (2006).
- [6] X. Guo *et al.*, *A Precision Measurement of the Neutrino Mixing Angle  $\theta_{13}$  using Reactor Antineutrinos at Daya Bay*, arXiv:hep-ex/0701029 (2007).
- [7] J. K. Ahn *et al.*, *RENO: An Experiment for Neutrino Oscillation Parameter  $\theta_{13}$  Using Reactor Neutrinos at Yonggwang*, arXiv:1003.1391 [hep-ex] (2010).
- [8] G. Mention, M. Fechner, Th. Lasserre, Th. A. Mueller, D. Lhuillier, M. Cribier, and A. Letourneau, *Reactor antineutrino anomaly*, Physical Review D **83**, 073006 (2011).
- [9] Th. A. Mueller, D. Lhuillier, M. Fallot, A. Letourneau, S. Cormon, M. Fechner, L. Giot, T. Lasserre, J. Martino, G. Mention, A. Porta, and F. Yermia, *Improved predictions of reactor antineutrino spectra*, Physical Review C **83**, 054615 (2011).
- [10] P. Vogel, *Conversion of electron spectrum associated with fission into the antineutrino spectrum*, Physical Review C **76**, 025504 (2007).
- [11] P. Huber, *Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors*, Physical Review C **84**, 024617 (2011).
- [12] A. C. Hayes, J. L. Friar, G. T. Garvey, G. Jungman, and G. Jonkmans, *Systematic uncertainties in the analysis of the reactor neutrino anomaly*, Physical Review Letters **112**, 202501 (2014).
- [13] N. Paar, P. Ring, T. Nikšić, and D. Vretenar, *Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree-Bogoliubov model*, arXiv:0212011v3 [nucl-th] (2003).
- [14] T. Marketin, *Primjena relativističkih funkcionala gustoće u procesima slabog međudjelovanja u atomskim jezgrama* (Doktorska disertacija), Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Zagreb (2010).

- [15] N. Paar, *Relativistic Mean-Field Description of Exotic Excitations in Finite Nuclei*, Technische Universität München, Physik-Department, Institut für Theoretische Physik, München (2003).
- [16] D. Vretenar, A. Afanasjev, G. A. Lalazissis, and P. Ring, *Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure*, Physics Reports **409**, 101 (2005).
- [17] T. Marketin, D. Vretenar, and P. Ring, *Calculation of  $\beta$ -decay rates in a relativistic model with momentum-dependent self-energies*, Physical Review C **75**, 024304 (2007).
- [18] N. Paar, D. Vretenar, E. Khan, and G. Colò, *Exotic modes of excitation in atomic nuclei far from stability*, Reports on Progress in Physics **70**, 691 (2007).
- [19] T. Marketin,  *$\beta^-$  raspad i egzotičnim jezgrama u relativističkoj kvazičestičnoj aproksimaciji slučajnih faza* (Diplomski rad), Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Zagreb (2004).
- [20] T. Marketin, L. Huther, and G. Martínez-Pinedo, *Large scale evaluation of beta-decay rates of r-process nuclei with the inclusion of first-forbidden transitions*, arXiv:1507.07442v1 [nucl-th] (2015).
- [21] D.-L. Fang, and B. Alex Brown, *Effect of first forbidden decays on the shape of neutrino spectra*, Physical Review C **91**, 025503 (2015).
- [22] F. von Feilitzsch, A. A. Hahn and K. Schreckenbach, *Experimental beta-spectra from  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra*, Physics Letters B **118**, 1, 2, 3 (1982).
- [23] K. Schreckenbach, G. Colvin, W. Gelletly and F. von Feilitzsch, *Determination of the antineutrino spectrum from  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products up to 9.5 MeV*, Physics Letters B **160**, 4, 5 (1985).
- [24] A. A. Hahn, K. Schreckenbach, W. Gelletly, F. von Feilitzsch, G. Colvin, and B. Krusche, *Antineutrino spectra from  $^{241}\text{Pu}$  and  $^{239}\text{Pu}$  thermal neutron fission products*, Physical Letters B **218**, 3 (1989).
- [25] N. Haag, A. Gütlein, M. Hofmann, L. Oberauer, W. Potzel, K. Schreckenbach, and F. M. Wagner, *Experimental determination of the antineutrino spectrum of the fission products of  $^{238}\text{U}$* , arXiv:1312.5601v1 [nucl-ex] (2013).
- [26] M. Fallot, S. Cormon, M. Estienne, A. Algora, V. M. Bui, A. Cucoanes, M. Elnimr, L. Giot, D. Jordan, J. Martino, A. Onillon, A. Porta, G. Pronost, A. Remoto, J. L. Taín, F. Yermia, and A.-A. Zakari-Issoufou, *New antineutrino energy spectra predictions from the summation of beta decay branches of the fission products*, Physical Review Letters **109**, 202504 (2012).

- [27] A. A. Sonzogni, T. D. Johnson, and E. A. McCutchan, *Nuclear structure insights into reactor antineutrino spectra*, Physical Review C **91**, 011301(R) (2015).
- [28] Nuclear Data Center – Japan Atomic Energy Agency: Graph of Fission Product Yields, <http://www.ndc.jaea.go.jp/cgi-bin/FPYfig>.
- [29] D. A. Dwyer, and T. J. Langford, *Spectral structure of electron antineutrinos from nuclear reactors*, Physical Review Letters **114**, 012502 (2014).