Elektrodinamika crnih rupa

Gulin, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:836452

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

zir.nsk.hr

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Luka Gulin

ELEKTRODINAMIKA CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Luka Gulin

Diplomski rad

Elektrodinamika crnih rupa

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____
Zagreb, 2017.

Zahvaljujem se mentoru, doc. dr. sc. Ivici Smoliću na pomoći, strpljenju i pogledu u svijet stvarne fizike.

Mojoj obitelji.

Sažetak

Ovaj diplomski rad daje pregled elektrodinamike crnih rupa. Prvo se bavimo testnim poljima da dobijemo ideju kako se elektromagnetizam ponaša na zakrivljenoj pozadini prostorvremena. Nakon toga prolazimo kroz odabrana bitna svojstva elektromagnetskog polja kao što su ponašanje potencijala, Smarrove relacije, nasljeđivanja simetrije i Meissnerovog efekta. Nakon pregleda standardnog, Maxwellovog elektromagnetizma bavimo se generalizacijama, tj. gledamo kakvu teoriju elektromagnetskog polja proizvode Lagranžijani s proizvoljnim vezanjima i prezentiramo nedavne rezultate u vezi nasljeđivanja simetrije i formulacije Smarrove relacije.
Ključne riječi: elektrodinamika crnih rupa, besilni elektromagnetizam, Meissnerov efekt crnih rupa, nelinearna elektrodinamika.

Black hole electrodynamics

Abstract

This thesis gives an overview of black hole electrodynamics. Firstly, we introduce test fields to obtain perspective how electromagnetism behaves on curved spacetime background. Then, we go through chosen important properties of the electromagnetic field such as potentials behaviour, Smarr's relation, symmetry inheritance and Meissner effect. After the overview of standard, Maxwell's, electromagnetism, we deal with generalisations, i.e. we investigate which theory of electromagnetic fields is produced by Lagrangians with arbitrary couplings and we present recents results in relation with symmetry inheritance and Smarr's relation formulation.

Keywords: black hole electrodynamics, force-free electrodynamics, black hole Meissner effect, nonlinear electrodynamics.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Testna polja **5**

2.1 Wald-Papapetrou 5

2.2 Besilna elektrodinamika crnih rupa 8

2.2.1 Formulacija 8

2.2.2 Jednostavna rješenja 11

2.2.3 Polje sa simetrijama 15

2.2.4 Stacionarna i osnosimetrična polja 18

3 Općenita svojstva **24**

3.1 Električni i magnetski potencijali 24

3.2 Smarrova relacija 27

3.3 Nasljeđivanje simetrije 30

3.4 Meissnerov efekt 31

3.4.1 Pregled Meissnerovog efekta 32

3.4.2 Otvoreni problemi 34

4 Nelinearna elektrodinamika crnih rupa **36**

4.1 Smarrova relacija 42

4.2 Nasljeđivanje simetrije 43

5 Zaključak **46**

Dodaci **47**

A Pregled crnih rupa **47**

A.1 Schwarzschildova crna rupa 47

A.2 Reissner-Nordströmova crna rupa 47

A.3 Kerrova crna rupa 48

A.4 Kerr-Newmanova crna rupa 49

B Liejeve derivacije i izometrije **49**

Literatura **53**

1 Uvod

Elektrodinamika je, iako je često nazivamo klasičnom, inherentno relativistička teorija. Štoviše, to je teorija koja nam je otkrila relativnost. Ogroman uspjeh J. C. Maxwella krajem 19. stoljeća u dovršavanju jednadžbi kojima opisujemo elektrodinamiku, nadalje poznatim kao Maxwellovim jednadžbama ostavio je, po Lordu Kelvinu [1], jedan od dva oblaka nad ljepotom i bistrinom tadašnje dinamičke teorije[1]. Nakon negativnog ishoda Michelson–Morleyjevog eksperimenta počela su objašnjenja neobičnih transformacijskih svojstava Maxwellovih jednadžbi u smjeru koji je kulminirao 1905. godine i Einstenovim člankom kojim počinje nova era – era moderne fizike kojom vladaju relativnost i kvantna mehanika, posljedice dvaju oblaka Lorda Kelvina. Kako je svima poznato, Einstein ne staje na specijalnoj relativnosti, nego proučavajući njene implikacije naslućuje još širu teoriju danas poznatu kao opću teoriju relativnosti.

Klasična elektrodinamika opisana je spomenutim Maxwellovim jednadžbama. Skalarnih jednadžbi je zapravo osam, iako se često govori o četiri Maxwellove jednadžbe jer je najpoznatiji zapis tih jednadžbi u vektorskom obliku na način da su dvije vektorske, a dvije skalarne. Maxwellove jednadžbe u vektorskom obliku u SI jedinicama glase

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Iako je ovaj oblik najrasprostranjeniji, ipak nije pogodan za tretiranje crnih rupa zbog njihove relativističke prirode. Prvi korak je napisati ove jednadžbe u kovarijantnom zapisu. Za tu svrhu uvodimo antisimetrični tenzor elektromagnetskog polja. Njegov

[1] Drugi oblak je bila ultraljubičasta katastrofa.

oblik u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru Minkowskog glasi

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Sada kovarijantne Maxwellove jednadžbe glase, ovaj put u prirodnim jedinicama

$$\nabla_a F^{ab} = -4\pi j^b \tag{1.6}$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \tag{1.7}$$

gdje je j^b četverovektor struje definiran kao $j = (\rho, \vec{j})$.

S druge strane, koristeći vektorski (baždarni) četveropotencijal $A = (\phi, \vec{A})$ imamo

$$F^{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]} \tag{1.8}$$

$$\nabla_a F^{ab} = 2\nabla_a(\nabla^{[a} A^{b]}) = -4\pi j^b. \tag{1.9}$$

Energiju koje elektromagnetsko polje ima opisujemo elektromagnetskim tenzorom energije i impulsa definiranim kao

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}g_{ab}\right). \tag{1.10}$$

Taj tenzor zadovoljava jednadžbu kontinuiteta tj. zakon očuvanja energija (i impulsa)

$$\nabla^b T_{ab} + F_{ab} j^b = 0. \tag{1.11}$$

Budući da u gornjim jednadžbama za opisivanje polja koristimo samo vektore i jedan antisimetrični tenzor, možemo se poslužiti jezikom diferencijalnih formi koji nam daje ljepši/jednostavniji zapis matematičkih operacija potrebnih za izražavanje

Maxwellovih jednadžbi.

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{1.12}$$

$$\mathrm{d} *F = 4\pi *j \tag{1.13}$$

gdje je d vanjska derivacija, a $*$ Hodgeov dual. Također, konvencija koja će se koristiti kroz ovaj diplomski rad je da će se 3-struja, Hodgeov dual 1-struje, označavati velikim slovom $J = *j$.

Veza između elektromagnetske 2-forme i 1-forme potencijala jednostavno je

$$F = \mathrm{d}A. \tag{1.14}$$

Rastav elektromagnetske 2-forme na 1-forme električnog i magnetskog polja s obzirom na općenito vektorsko polje dano je

$$E(X) = -i_X F \tag{1.15}$$

$$B(X) = i_X *F. \tag{1.16}$$

Obratno, elektromagnetska 2-forma može se napisati pomoću polja kao

$$-NF = u \wedge E + *(u \wedge B) \tag{1.17}$$

gdje vrijedi $N = u^a u_a$.

Kroz ovaj diplomski rad upotrebljavat će se zadnja dva formalizma, ovisno koji je prikladniji u danoj situaciji.

S druge strane, opća teorija relativnosti proširuje specijalnu teoriju relativnosti tako što pozadinu na kojoj su se odvijali fizikalni procesi, prostorvrijeme, stavlja u prvi plan te tvrdi da se prostorvrijeme ponaša sukladno energijskom sadržaju na njemu prema jednostavnom skupu jednadžbi

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{1.18}$$

u prirodnim jedinicama gdje je R_{ab} Riccijev tenzor, g_{ab} metrički tenzor, a T_{ab} tenzor energije-impulsa. Iako jednadžbe izgledaju prilično jednostavno, njihova rješenja i posljedice nisu takve. Jedna od posljedica je i postojanje crnih rupa – dijelova prostorvremena u kojima svi se geodezici svjetlosnog ili vremenskog tipa jednom kad nađu tu, ostaju tu.

Budući da crne rupe ne mogu imati kosu (prema poznatim *no hair* teoremima, na primjer [2]), nego samo masu M, naboj e i angularni moment J, stacionarno i elektrovakumsko rješenje koje uzima u obzir sva tri parametra je i najopćenitije. Naziva se Kerr-Newmanovo rješenje (crna rupa). Crne rupe ne moraju imati naboj i/ili angularni moment pa stoga prepoznajemo ukupno četiri stacionarna i vakuumska rješenja

	$J = 0$	$J \neq 0$
$e = 0$	Schwarzschild	Kerr
$e \neq 0$	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Pregled sva četiri tipa crnih rupa se nalazi u dodatku.

2 Testna polja

Za promatranje svojstava prostorvremena i elektromagnetskih polja prisutnih u njima često posežemo za alatom kojim nazivamo testno polje. Testno polje je elektromagnetsko polje koje je dovoljno slabo da možemo zanemariti utjecaj njegovog energetskog sadržaja na geometriju prostorvremena ($T_{ab} = 0$), dok je utjecaj geometrije na elektromagnetsko polje u središtu pažnje. Ovaj alat je vrlo koristan jer bitno pojednostavnjuje račun budući da je metrički tenzor fiksan, a daje značajan uvid u ponašanje polja u stvarnim, astrofizičkim situacijama jer su elektromagnetska polja koja imaju značajan utjecaj na geometriju rijetka.

2.1 Wald-Papapetrou

Killingovi vektori (preciznije, vektorska polja) generiraju rješenja Maxwellovih jednadžbi ukoliko ih identificiramo kao baždarne potencijale [3]. To je činjenica koja se lako pokaže.

Maxwellove jednadžbe u vakuumu glase

$$\begin{aligned} F^{ab} &= 2\nabla_{[a}A_{b]} \\ \nabla_a F^{ab} &= 2\nabla_a(\nabla^{[a}A^{b]}) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Prva jednadžba je odmah zadovoljena, dok drugu trebamo još pokazati. Koristimo identitet iz dodatka A

$$\nabla^a\nabla_a K^c = R^c{}_d K^d. \tag{2.2}$$

Desna strana je po Einsteinovoj jednadžbi 0 jer je Riccijev tenzor u vakuumu 0. Time smo zadovoljili i drugu Maxwellovu jednadžbu koja sadrži baš takve članove.

Ovo je Papapetrou dio rješenja. Wald je iskoristio ovu činjenicu da nađe rješenje za elektromagnetsko polje kada je Kerrova crna rupa uronjena u homogeno magnetsko polje [4]. Osnosimetrično, stacionarno prostorvrijeme ima dva Killingova vektorska polja pridruženima tim simetrijama. Killingovo vektorsko polje pridruženo

vremenskoj simetriji neka bude $k^a = (\partial_t)^a$, a ono osnoj simetriji neka bude $m^a = (\partial_\phi)^a$. Tada koristeći elektromagnetsku 2-formu i forme pridružene Killingovim vektorskim poljima možemo definirati sve fizikalne veličine (tkz. Komarove integrale) pridružene tom prostorvremenu na idući način [5]

$$M_{\mathcal{S}} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}} *\mathrm{d}k \tag{2.3}$$

$$J_{\mathcal{S}} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{S}} *\mathrm{d}m \tag{2.4}$$

$$Q_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *F \tag{2.5}$$

$$P_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} F \tag{2.6}$$

gdje je $\mathcal{S}$ topološka 2-sfera po kojoj integriramo, a $M_{\mathcal{S}}$, $J_{\mathcal{S}}$, $Q_{\mathcal{S}}$, $P_{\mathcal{S}}$ redom masa, zamah, električni i magnetski naboji. Dva najčešća izbora za takvu sferu su ili horizont događaja ili sfera u beskonačnosti za asimptotski ravne prostore.

Vratimo se na činjenicu da Killingova vektorska polja rješavaju vakuumske Maxwellove jednadžbe kada se uvrste na mjesto baždarnog potencijala. Prvo, razmotrimo osnu simetriju. Po definiciji imamo

$$F_m = \mathrm{d}m. \tag{2.7}$$

Ovo rješenje je stacionarno $\pounds_k F_m = \pounds_k \mathrm{d}m = \mathrm{d}\pounds_k m = 0$ i osnosimetrično $\pounds_m F_m = \pounds_m \mathrm{d}m = \mathrm{d}\pounds_m m = 0$. Nadalje, u beskonačnosti F_m postaje uniformno magnetsko polje zato što prostorvrijeme tamo postaje ravno i $\mathrm{d}m$ poprima vrijednost za ravni prostor. U Minkowskom prostoru vrijedi

$$m_a = r^2 \sin^2\theta(\mathrm{d}\phi)_a = x(\mathrm{d}y)_a - y(\mathrm{d}x)_a. \tag{2.8}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} F_m &= \mathrm{d}m \\ &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Očitavanjem iz (1.5) vidimo da je ovo komponenta elektromagnetskog tenzora u B_z

smjeru. Magnetski monopolni moment pridružen ovakvom polju iščezava

$$P_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} F_m = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}m = 0, \tag{2.10}$$

ali električni naboj ne

$$Q_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *F_m = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *\mathrm{d}m = 4J. \tag{2.11}$$

Dakle, Killingovo vektorsko polje pridruženo osnoj simetriji kao baždarni potencijal generira stacionarno, osnosimetrično testno elektromagnetsko polje naboja $4J$ i bez monopolnog magnetskog momenta.

Koristeći istu proceduru gledamo vremensku simetriju (stacionarnost)

$$F_k = \mathrm{d}k \tag{2.12}$$

kao i prethodno, ovo rješenje je stacionarno $\pounds_k F_k = \pounds_k \mathrm{d}k = \mathrm{d}\pounds_k k = 0$ i osnosimetrično $\pounds_m F_k = \pounds_m \mathrm{d}k = \mathrm{d}\pounds_m k = 0$. Magnetski monopolni moment je opet nula

$$P_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} F_k = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}k = 0 \tag{2.13}$$

i električni naboj je različit od nule

$$Q_{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *F_k = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *\mathrm{d}k = -2M. \tag{2.14}$$

Dakle, Killingovo vektorsko polje pridruženo vremenskoj simetriji kao baždarni potencijal generira stacionarno, osnosimetrično testno elektromagnetsko polje naboja $-2M$ bez monopolnog magnetskog momenta koje asimptotski opada.

Iz svega navedenoga, možemo vidjeti da je elektromagnetsko polje oblika

$$F = \frac{B_0}{2}\left(\mathrm{d}m + \frac{2J}{M}\mathrm{d}k\right) \tag{2.15}$$

nesingularno, stacionarno, osnosimetrično, nenabijeno i uniformno u beskonačnosti, što se jasno vidi iz načina na koji smo konstruirali polja iz svake simetrije pojedinačno

te ih zbrojili da se električni naboji pokrate.

2.2 Besilna elektrodinamika crnih rupa[2]

2.2.1 Formulacija

Besilni elektromagnetizam (Force-Free Electrodynamics) opisuje magnetski dominiranu relativističku plazmu ($F^2 = F_{ab}F^{ab} > 0$). Pristup se temelji na aproksimaciji da je izmjena impulsa i energije između polja i materije zanemariva što nam omogućava praćenje evolucije polja ne uzimajući u obzir dinamiku nabijene materije pa pozornost možemo zadržati isključivo na polju. U zakonu očuvanja energije 4-impuls teče između polja i materije pomoću 4-sile koju aproksimiramo da je nula

$$F_{ab}j^b = 0. \tag{2.16}$$

Tada iz Maxwellovih jednadžbi možemo eliminirati struju množenjem druge jednadžbe tenzorom elektromagnetskog polja

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{2.17}$$

$$F_{ab}\nabla_c F^{bc} = 0. \tag{2.18}$$

Elektromagnetska polja za koja postoji vektor w^a tako da

$$w^a F_{ab} = 0 \tag{2.19}$$

nazivaju se degenerirana elektromagnetska polja (u ravnom prostoru to je ekvivalentno izrazu $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$). Za primjetiti je da je svako besilno elektromagnetsko polje degenerirano jer upravo vektor 4-struje kontrahiran s elektromagnetskim tenzorom daje gornju jednadžbu. Degeneracija nam daje način da elektromagnetski tenzor razložimo na antisimetrizirani produkt dva vektora. Uvjet degeneriranosti možemo pisati i kao

$$w^a F_{[ab}F_{cd]} = 0 \tag{2.20}$$

[2]Ovo poglavlje se sastoji od materijala mog seminara iz kolegija Diferencijalna geometrija u fizici naslova *Besilni elektromagnetizam*

obzirom da svaki član antisimetrizacije iščezava upravo iz jednadžbe (2.19). Pošto je svaki potpuno antisimetrični tenzor ranga četiri proporcionalan volumnom elementu, pišemo

$$F_{[ab}F_{cd]} = \beta\epsilon_{abcd} \tag{2.21}$$

gdje je β neka funkcija. Uvrštavanjem dobivamo

$$\beta w^a \epsilon_{abcd} = 0 \tag{2.22}$$

no volumni element nema svojstveni vektor s svojstvenom vrijednosti 0, stoga zaključujemo da je $\beta = 0$ što znači da je tenzor $F_{[ab}F_{cd]}$ sam za sebe 0.
To nam pomaže da tenzor F_{ab} napišemo kao

$$F_{ab} = 2\alpha_{[a}\beta_{b]} \tag{2.23}$$

To vidimo ovako: neka su v^a i w^a vektori t.d vrijedi $v^a w^b F_{ab} \neq 0$. Budući da je $F_{[ab}F_{cd]}$ sam po sebi 0, možemo pisati

$$v^a w^b F_{[ab}F_{cd]} = 0. \tag{2.24}$$

Proširivanjem antisimetrizacije u indeksima dobijemo

$$v^a w^b F_{ab} F_{cd} + \left[(v^a F_{ac})(w^b F_{bd}) - (v^a F_{ad})(w^b F_{bc})\right] = 0. \tag{2.25}$$

Kako je $v^a w^b F_{ab} \neq 0$ cijelu jednadžbu možemo dijeliti s tim faktorom, a kovektore nastale u kontrakciji u uglatim zagradama, uz pripadajuće faktore, možemo identificirati kao u (2.23). Isti izraz u jeziku diferencijalnih formi je

$$F = \alpha \wedge \beta. \tag{2.26}$$

Koristeći još činjenicu da je F zatvorena forma ($\mathrm{d}F = 0$), možemo pisati

$$F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2. \tag{2.27}$$

Kada degenerativno polje F_{ab} zadovoljava Maxwellovu jedadžbu $\nabla_{[c}F_{ab]} = 0$, tada su dvodimenzionale jezgre F_{ab} integrabilne tj. tvore dvodimenzionalne podmnogostrukosti. U magnetskom dominiranom slučaju te mnogostrukosti su vremenskog tipa. Ukoliko presječemo takve mnogostrukosti vremenskog tipa s hiperplohom prostornog tipa, dobit ćemo silnice magnetskog polja kako ih vidi promatrač čija je četverobrzina ortogonalna na prethodno navedenu hiperplohu. Zbog svega navedenog, podmnogostrukosti koje čine jezgru F_{ab} predstavljaju evoluciju silnica polja pa je zbog toga nazivamo ploha polja. Za primjetiti je kako ploha polja ne ovisi o promatraču, za razliku od samoga polja, što bitno pojednostavljuje promatranje problema. Nadalje, uvjet besilnosti $F_{ab}j^b = 0$ se svodi na to da struja j^a je tangencijalna na plohu polja. To za posljedicu ima da je u besilnoj plazmi, u kojoj nema električnog polja, struja tangencijalna silnicama magnetskog polja. Plohe polja su presjeci hiperploha konstantnih ϕ_1 i ϕ_2, po definiciji. U Eulerovim potencijalima, koji su dva skalarna polja, zapisana je sva sloboda koju može imati bilo koje degenerirano elektromagnetsko polje.

Budući da su sva degenerativna polja besilna, formuliramo besilnu teoriju kao teoriju dva skalarna polja. Besilni uvjet možemo zapisati pomoću 3-struje $J = *j$ pa iz definicije duala imamo

$$F_{a[b}J_{cde]} = 0. \tag{2.28}$$

Koristeći 1-forme α i β gornji uvjet možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \alpha \wedge J &= 0 \\ \beta \wedge J &= 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Koristeći Maxwellovu jednadžbu $\mathrm{d} * F = 4\pi J$ te $\alpha = \mathrm{d}\phi_1$ i $\beta = \mathrm{d}\phi_2$ možemo gornje jednadžbe napisati kao

$$\mathrm{d}\phi_i \wedge \mathrm{d} * F = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.30}$$

Budući da je $\mathrm{d}^2 = 0$, gornju jednadžbu možemo pisati kao

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi_i \wedge *F) = 0. \tag{2.31}$$

Veličine u zagradi, $\mathrm{d}\phi_i \wedge *F$, nazivamo Eulerovim strujama jer vidimo da za njih vrijedi zakon kontinuiteta.

2.2.2 Jednostavna rješenja

Magnetski monopol 2-forma F elektromagnetskog polja za magnetski monopol g glasi

$$F = \frac{g}{4\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi. \tag{2.32}$$

Budući da je ovo vakuumsko rješenje

$$\begin{aligned} J = \mathrm{d} * F &= \mathrm{d} * \left(\frac{g}{4\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \right) \\ &= \mathrm{d} \left(\frac{g}{4\pi r^2} \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

automatski je i besilno zato što odmah zadovoljava besilne jednadžbe (2.30).

Izlazni tok Također, relativno je jednostavno konstruirati rješenja koja predstavljaju izlazni tok energije u Schwarzschildovom i Kerrovom prostorvremenu. U Schwarzschildovom prostorvremenu možemo provjeriti da vrijedi ansatz

$$F = \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u \tag{2.34}$$

gdje je u retardirano vrijeme $u = t - r$, a $\zeta = \zeta(\theta, \varphi, u)$. 3-struja ovakvog rješenja glasi

$$J = (\Delta_2 \zeta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \tag{2.35}$$

gdje je Δ_2 dvodimenzionalni laplasijan. Ukoliko $\mathrm{d}\zeta$ rastavimo na komponente

$$\mathrm{d}\zeta = \zeta_{,u}\mathrm{d}u + \zeta_{,\theta}\mathrm{d}\theta + \zeta_{,\varphi}\mathrm{d}\varphi. \tag{2.36}$$

Vidimo da su obje besilne jednadžbe zadovoljene. Tok Killingove energije u vremenu u na $r = \infty$ je

$$\mathcal{P}(u) = \lim_{r\to\infty} \int T_{ab}(\partial_t)^a (\mathrm{d}r)^b \mathrm{d}\Omega = \int |\mathrm{d}\zeta|^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{2.37}$$

Primjećujemo da je ovo čisto izlazno rješenje, da nema nikakvog raspršenja prema natrag od zakrivljenog prostorvremena. Kerrov slučaj je malo kompliciraniji. Ukoliko nad Kerrovom metrici u Boyer-Lindquistovim koordinatama upotrijebimo iduću supstituciju

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u + ((r^2 + a^2)/\Delta)\mathrm{d}r \tag{2.38}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\bar{\varphi} + (a/\Delta)\mathrm{d}r \tag{2.39}$$

dobijemo koordinate koje su regularne na *prošlom* horizontu događaja pa su korisne prilikom opisa radijacije. Metrika izgleda

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}r(\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}^2 \\ &+ \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \frac{2Mr}{\Sigma}(\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi})^2\end{aligned} \tag{2.40}$$

i moramo pretpostaviti malo općenitiji ansatz u obliku

$$F = (A\mathrm{d}\theta + B\mathrm{d}\bar{\varphi}) \wedge (\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}) \tag{2.41}$$

gdje su A i B funkcije u, θ i $\bar{\varphi}$. Nametanje Faradayevog zakona daje

$$\mathrm{d}F = (A_{,\bar{\varphi}} - B_{,\theta} + a\sin^2\theta A_{,u})\mathrm{d}\bar{\varphi} \wedge \theta \wedge \mathrm{d}u \tag{2.42}$$

što znači da imamo diferencijalnu jednadžbu

$$A_{,\bar{\varphi}} - B_{,\theta} + a\sin^2\theta A_{,u} = 0 \tag{2.43}$$

kao uvjet na funkcije A i B.

Michelov monopol Ukoliko rub zvijezde uzmemo kao savršeni vodič koji se rotira kutnom brzinom Ω i u središte takve zvijezde stavimo magnetski monopol dobijemo Michelovo rješenje. Rotirajući vodič u monopolnom magnetskom polju razvije na svojoj plohi raspodjelu naboja σ koja je proporcionalna $\cos\theta$. Zbog toga uvjet degeneriranosti $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ ne stoji. Međutim, slučaj koji promatramo je takav da je kutna brzina Ω dovoljno velika da čupa naboje s polova i stvara plazmu i time zasjeni površinsku raspodjelu naboja i napravi uvjete u kojima možemo koristiti formalizam besilnog elektromagnetizma.

Moramo pretpostaviti da električno polje nema paralelnu komponentu s površinom, tj. $i_u F$ je 0 u paralelnom smjeru. F koji zadovoljava taj uvjet ćemo pokušati pronaći superponirajući monopolno polje i polje izlaznog toka. Monopolno polje i F izlaznog toka rješenja jednadžbi besilnog elektromagnetizma, no zbog nelinearnosti istih, nemamo garanciju da je i njihova superpozicija besilno rješenje. Međutim, monopolno rješenje je vakuumsko, nema izlazne struje pa je superpozicija takvog rješenja i nekog drugog opet rješenje. Zbog toga onda slijedi ansatz

$$F = q\sin\theta \mathrm{d}\theta\wedge(\mathrm{d}\phi + C(\theta,u)\mathrm{d}u) \tag{2.44}$$

gdje je C neka funkcija koordinata θ i u. Rubni uvjet nam govori

$$\begin{aligned} i_u F &\propto i_{(\partial_t+\Omega\partial_\varphi)}\mathrm{d}\theta\wedge(\mathrm{d}\varphi + C(\theta,u)\mathrm{d}u) \\ &\propto \mathrm{d}\theta(\Omega + C(\theta,u)). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Uvjet je da tangencijalna komponenta $i_u F$ te budući da je $\mathrm{d}\theta$ tangencijalna na sferu, fiksiramo C kao konstantu

$$C = -\Omega. \tag{2.46}$$

Tada je polje

$$F = q\sin\theta \mathrm{d}\theta\wedge(\mathrm{d}\varphi - \Omega\mathrm{d}u). \tag{2.47}$$

Struja $J = \mathrm{d} * F$ ovog rješenja se dobije kao u odjeljku s izlaznim tokom jer monopol ne doprinosi.

$$\begin{aligned} J = \mathrm{d} * F &= \mathrm{d} * \left[(-q\Omega \sin\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi\right] \\ &= -q\Omega \mathrm{d}(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u) \\ &= -2q\Omega \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Vektor 4-struje glasi

$$j^a = -\frac{2q\Omega\cos\theta}{r^2}(\partial_r)^a. \tag{2.49}$$

Tenzoru energije-impulsa ne pridonosi monopolski dio pa imamo, kao prije, $T_{ab} = |\mathrm{d}\zeta|^2(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b$ što se evaluira u

$$T_{ab} = q^2\Omega^2 \sin^2\theta (\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b \tag{2.50}$$

što nakon integracije po sferi daje

$$\mathcal{P} = \frac{8\pi}{3} q^2\Omega^2. \tag{2.51}$$

Zanimljivo je pogledati i plohu polja za Michelov monopol u ravnom prostoru. Eulerovi potencijali se lagano očitaju

$$\phi_1 = q\cos\theta \tag{2.52}$$

$$\phi_2 = \varphi - \Omega(t - r). \tag{2.53}$$

Za $t = konst.$ linije polja su zadane s

$$\begin{aligned} \theta &= konst. \\ \varphi + \Omega r &= konst. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Primjećujemo da silnice polja, za određeni $\theta = \theta_0$ sada nisu više pravci, nego postaju Arhimedove spirale da bi se očuvala priroda vremenskog tipa plohe polja. Ako bi silnice polja bile pravci, postojala bi neka udaljenost na kojoj bi se rotirale brzinom

većom od brzine svjetlosti.

Slučaj magnetosfere rotirajuće crne rupe je malo kompliciraniji. Prvo, metrika postaje Kerrova, a ne Schwarzschildova kao u prethodnom slučaju pa račun mora biti perturbacijski. Drugo, nemamo klasičan rub na koji možemo postaviti rubni uvjet. Zbog toga za rubni uvjet namećemo regularnost polja na horizontu. Nakon perturbacijskog računa dobijemo

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_H \tag{2.55}$$

zbog čega onda elektromagnetsko polje ima oblik

$$F = q \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\Omega_H \mathrm{d}u). \tag{2.56}$$

2.2.3 Polje sa simetrijama

Polje s jedno simetrijom Uzevši da je polje F degenerirano i da ima neku simetriju, zanima nas što možemo reći o Eulerovim potencijalima za takvo polje. Za početak pretpostavimo da postoji Killingovo vektorsko polje X^a tako da

$$\pounds_X F = 0. \tag{2.57}$$

Koristeći Cartanovu magičnu formulu i Faradayev zakon $\mathrm{d}F = 0$ gornji uvjet se može prepisati kao

$$\mathrm{d}(i_X F) = 0 \tag{2.58}$$

što nadalje znači da postoji neka funkcija f za koju vrijedi

$$i_X F = \mathrm{d}f. \tag{2.59}$$

Budući da je $F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2$, gornji izraz postaje

$$(i_X \mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (i_X \mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{d}f. \tag{2.60}$$

Eulerovi potencijali nisu jednoznačno određeni. Možemo koristiti bilo koje druge potencijale za koje vrijedi $F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 = \mathrm{d}\tilde{\phi_1} \wedge \mathrm{d}\tilde{\phi_2}$. Drugim riječima, to je uvjet da preslikavanje $(\phi_1, \phi_2) \to (\tilde{\phi_1}, \tilde{\phi_2})$ ima jedinični Jacobijan. Koristeći ovu slobodu, možemo izabrati $\tilde{\phi_1} = -f$, dok drugi potencijal $\tilde{\phi_2}$ dobijemo rješavanjem diferencijalne jednadžbe koja slijedi iz Jakobijana. Nova jednadžba (2.60) tada postaje

$$(i_X \mathrm{d}\tilde{\phi_1})\mathrm{d}\tilde{\phi_2} - (i_X \mathrm{d}\tilde{\phi_2})\mathrm{d}\tilde{\phi_1} = -\mathrm{d}\tilde{\phi_1}. \tag{2.61}$$

Direktno iz ovoga zaključujemo

$$\begin{aligned} i_X \mathrm{d}\tilde{\phi_1} &= 0 \\ i_X \mathrm{d}\tilde{\phi_2} &= 1. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Znači, možemo izabrati takve potencijale da je jedan invarijantan na X^a, dok drugi ima konstantnu derivaciju na X^a.

Polje s dvije komutirajuće simetrije Uzmimo da postoje dva vektorska polja X^a i Y^a takva da vrijedi $[X, Y] = 0$ i da su simetrije polja F, tj. $\pounds_X F = \pounds_Y F = 0$. Znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} i_X F &= \mathrm{d}f \\ i_Y F &= \mathrm{d}g. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ukoliko izračunamo vanjski produkt ove dvije veličine dobijemo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g &= (i_X F) \wedge (i_Y F) \\ &= (i_Y i_X F)F \end{aligned} \tag{2.64}$$

gdje skalar $i_Y i_X F$ mora biti konstantan jer

$$\mathrm{d}(i_Y i_X F) = \pounds_Y (i_X F) - i_Y \mathrm{d}(i_X F) = 0. \tag{2.65}$$

Problem kao i prije podijelimo na dva slučaja

$$\begin{aligned} i_Y i_X F &= 0 \\ i_Y i_X F &\neq 0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

U prvom slučaju, ukoliko obje veličine $i_X F$ i $i_X F$ iščezavaju, onda su oba Eulerova potencijala invarijantna s obzirom na ta vektorska polja. Zato pretpostavimo da je jedan od njih dva $i_X F \neq 0$. Sada, opet koristeći ono što smo dobili u slučaju s jednom simetrijom zaključujemo da možemo odabrati $\phi_1 = -f$. Budući da u ovom slučaju vrijedi $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = 0$, također zaključujemo da je funkcija $g = g(\phi_1)$. Tada pišemo

$$i_Y F = (i_Y \mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (i_Y \mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1 = g'(\phi_1)\mathrm{d}\phi_1. \tag{2.67}$$

Očitavamo

$$\begin{aligned} i_X \mathrm{d}\phi_1 = 0, \quad i_X \mathrm{d}\phi_2 = 1 \\ i_Y \mathrm{d}\phi_1 = 0, \quad i_Y \mathrm{d}\phi_2 = \kappa(\phi_1) \end{aligned} \tag{2.68}$$

gdje je $\kappa\phi_1 = -g(\phi_1)$.
U drugom slučaju kada je $i_Y i_X F \neq 0$, zaključujemo da obje veličine X^a i Y^a moraju biti različite od nule zbog linearne neovisnosti Eulerovih potencijala. Tada možemo izabrati Eulerove potencijale jednostavno kao $\phi_1 = -f$ i $\phi_2 = g/\lambda$, gdje je $\lambda = F_{ab} X^a Y^b$. Tada, zbog svega prethodno navedenog, jednostavno dobijemo

$$\begin{aligned} i_X \mathrm{d}\phi_1 = 0, \quad i_X \mathrm{d}\phi_2 = 1 \\ i_X \mathrm{d}\phi_1 = \lambda, \quad i_X \mathrm{d}\phi_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

U ovom slučaju ni jedna linearna kombinacija od X^a i Y^a neće biti tangencijalna na plohu polja.

2.2.4 Stacionarna i osnosimetrična polja

U ovom slučaju Killingovi vektori su dani s

$$\begin{aligned} X^a &= (\partial_\varphi)^a = m^a \\ Y^a &= (\partial_t)^a = k^a. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Ukoliko se radi da je $i_k F = 0$ i $i_m F = 0$, tada je polje samo u smjeru $F \sim \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$. Za $i_m F \neq 0$ koristeći dobivene rezultate možemo pisati

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi(r, \theta) \\ \phi_2 &= \psi_2(r, \theta) + \varphi + \Omega_F(\psi) t \end{aligned} \tag{2.71}$$

gdje smo κ preimenovali u $-\Omega_F$. Polje tada poprima oblik

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 \\ &= \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\psi_2 + \mathrm{d}\psi \wedge \eta \end{aligned} \tag{2.72}$$

gdje je $\eta = \mathrm{d}\varphi + \Omega_F(\psi)\mathrm{d}t$. Za vanjsku derivaciju Ω_F se ne moramo brinuti budući da u polje ulazi kao vanjski produkt s $\mathrm{d}\psi$.

Zbog navedenih simetrija, prostorvrijeme možemo podijeliti na dva dijela: poloidalni (r, θ) dio i toroidalni (t, φ) dio. Iako je toroidalni dio inače samo φ dio, ovdje je prirodno uključiti i vrijeme t. Ovo je posebno korisno jer u Kerrovoj metrici, koristeći Boyer-Lindquistove koordinate, ne postoji matrični elementi koji miješaju ova dva dijela tj. metrika je blok dijagonalna s obzirom na poloidalni i toroidalni dio. Zbog tih svojstava možemo pisati relacije

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^T \wedge \epsilon^P \\ *\epsilon^T &= -\epsilon^P \\ *\epsilon^P &= \epsilon^T \end{aligned} \tag{2.73}$$

gdje su

$$\begin{aligned}\epsilon^T &= \sqrt{-g^T}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi \\ \epsilon^P &= \sqrt{g^P}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{2.74}$$

Sada pretpostavimo da imamo vanjski produkt dvije forme $\omega^P \wedge \omega^T$. Dualna forma se, zbog ortogonalnosti sada jednostavno nađe. Uvodimo operator $\star$ koji označava dual na pripadnom potprostoru

$$*(\omega^P \wedge \omega^T) = -(\star\omega^P) \wedge (\star\omega^T) \tag{2.75}$$

Vratimo se na jednadžbu (2.72) u kojoj uočavamo da su forme koje se nalaze u vanjskom produktu čisto polodijalne ili torodijalne. Prvi član je poloidalan zato imamo

$$*F = \frac{I}{2\pi}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi - (\star\mathrm{d}\psi_2) \wedge (\star\eta) \tag{2.76}$$

gdje je $I = I(\psi)$ funkcija koju ćemo kasnije odrediti. Sada je samo znamo kao

$$*(\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\psi_2) = \frac{I}{2\pi}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi. \tag{2.77}$$

F, također, možemo napisati na idući način

$$F = \frac{I}{2\pi\sqrt{-g^T}}\epsilon^P + \mathrm{d}\psi \wedge \eta. \tag{2.78}$$

Funkcija toka i polarna struja Za veličinu I može se pokazati da ima vrlo zanimljivu interpretaciju. Ukoliko pokušamo izračunati tok kroz kuglinu kapu definiranu ishodištem koordinatnog sustava kao središtem kugle, osi z kao osi simetrije kugline kape te točkom (r, θ) koja definira radijus kugle i veličinu kape dobijemo iduće

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} F &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\psi\mathrm{d}\phi_2 \\ &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}(\psi\mathrm{d}\phi_2) \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \psi\mathrm{d}\phi_2\end{aligned} \tag{2.79}$$

gdje smo u zadnjoj liniji iskoristili Stokesov teorem. No, ψ je funkcija samo r i θ. Dakle, ne ovise o varijabli integracije te funkcija može izaći ispred integrala. Za ϕ_2 vidimo da jedini doprinos da je φ stoga imamo

$$\int_{\mathcal{S}} F = 2\pi\psi. \tag{2.80}$$

Zbog prethodno navedenog, funkciju ψ nazivamo funkcijom magnetskog toka.

Nakon toga pokušamo izračunati struju koja je protekla kroz istu površinu. Struja je, kao 3-forma, dana s $J = \mathrm{d} * F$. Budući da će integral ove veličine po 3-plohi (volumenu) $\mathcal{S} \times \Delta t$ biti naboj, ponovno koristeći Stokesov teorem možemo integrirati po plohi koji taj volumen obuhvaća.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J &= \int_{\mathcal{S}\times\Delta t} \mathrm{d} * F \\ &= \int_{\mathcal{C}\times\Delta t} * F. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Pošto se integrali po početnoj i završnoj kopiji kružne kape $\mathcal{S}$ poništavaju, ostaje samo $\int J = \int_{\mathcal{C}\times\Delta t}$. $*F$ očitamo iz (2.77) i budući da su ovisni samo o r i θ, samo prvi dio jednadžbe sudjeluje u integraciji stoga imamo

$$\int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J = I(r,\theta)\Delta t. \tag{2.82}$$

Dakle,

$$I(r,\theta) = \frac{1}{\Delta t}\int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J. \tag{2.83}$$

Sada je očita interpretacija veličine I. To je polarna struja. Nazivamo je polarna, a ne poloidalna jer smo to ime sačuvali za lokalnu gustoću struje već definiranom poloidalnom smjeru.

Tok energije i angularnog momenta Ako imamo Killingovo vektorsko polje ξ^a, onda postoji pridružena Noetherina struja $\mathcal{J}_\xi$. Za elektromagnetsko polje ona glasi

$$\mathcal{J}_\xi = -(i_\xi F) \wedge * F + \frac{1}{4} F^2 i_\xi \epsilon. \tag{2.84}$$

Ovo je dual od $-T^a\xi^b$ i struja je očuvana samo kada $F_{ab}J^b\xi^a = 0$ tj. kada komponente 4-sile iščezavaju u ξ smjeru. Također, drugi član iščezava ukoliko polje F dijeli simetriju ξ s prostorvremenom. Za prvi član imamo

$$\begin{aligned} i_\xi F &= i_\xi(\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2) \\ &= (i_\xi \mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (i_\xi \mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Za stacionarna, osnosimetrična polja, prvi član iščezava, a iz drugog ostaje samo $\mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{d}\psi$. Za kutno Killingovo polje m^a faktor ispred drugog člana je $\Omega_F(\psi)$, a za vremensko k^a faktor je 1. Stoga dijelimo Noetherinu struju na struju angularnog momenta i struju energije kao

$$\mathcal{J}_L = -\mathrm{d}\psi \wedge *F - \frac{1}{4}F^2 i_m \epsilon \tag{2.86}$$

$$\mathcal{J}_E = -\Omega_F(\psi)\mathrm{d}\psi \wedge *F + \frac{1}{4}F^2 i_k \epsilon. \tag{2.87}$$

Do sada nismo koristili besilne uvjete, govorili smo općenito o degeneriranim poljima. Budući da je $\phi_1 = \psi$, uvjet izgleda kao $\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}{*F} = 0$. Koristeći jednadžbu (2.76) imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}{*F} \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}t - \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}(\star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Kad se primjeni vanjska derivacija, drugi član iščezava zato jer sadrži 3 1-forme u poloidalnom prostoru koji je dvodimenzionalan. Iz toga slijedi

$$\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}I = 0 \tag{2.89}$$

što implicira da je $I = I(\psi)$. Stoga je za stacionalno osnosimetrična polja polarna struja kao i kutna brzina silnica polja Ω_F funkcija samo ψ. Fizikalna interpretacija je da poloidalna struja teče uz poloidalne magnetske linije tako da Lorentzova sila uz m^a iščezava. Struje angularnog momenta i energije obje sadrže faktor $\mathrm{d}\psi$ što znači da iščezavaju na plohama konstantnog ψ. Da bi smo izračunali tok, pretpostavimo da imamo krivulju $\mathcal{P}$ u poloidalnom prostoru, drugim riječima, krivulju tijekom koje je $\mathrm{d}\psi = 0$. Rotiranjem oko osi i propagiranjem u vremenu možemo generirati plohu

$\mathcal{S} = \mathcal{P} \times S^1 \times \Delta t$. Ukupni angularni moment i energija dobiju se integracijom pripadne struje preko $\mathcal{S}$. Drugi članovi u izrazima ne doprinose jer njihovo povlačenje na plohu iščezava. Stoga su tokovi dani kao

$$\int_{\mathcal{S}} \mathcal{J}_L = -\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\psi \wedge *F \tag{2.90}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathcal{J}_E = -\int_{\mathcal{S}} \Omega_F(\psi)\mathrm{d}\psi \wedge *F. \tag{2.91}$$

Budući da je $\mathrm{d}\psi$ poloidalna forma, integral iščezava u smjerovima φ i t. Tok angularnog momenta i Killingove energije možemo tada izraziti vrlo jednostavno koristeći (2.76) kao

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{P}} I(\psi)\mathrm{d}\psi \tag{2.92}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{P}} \Omega_F(\psi) I(\psi)\mathrm{d}\psi. \tag{2.93}$$

Ovo rješenje nam zapravo govori da su energija i angularni moment očuvani duž poloidalne krivulje budući da gornji integrali iščezavaju u tom smjeru. Zbog toga se kaže da pripadne struje teku niz poloidalne linije polja.

Jednadžba toka Sada ćemo iskoristiti drugu besilnu jednadžbu da bi smo izveli jedandžbu toka koja se naziva Grad-Shafranova jednadžba ili trans-field jednadžba, a u ravnom prostorvremenu i jednadžba pulsara. To je nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba u funkciji ψ.

Drugi besilni uvjet glasi

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}\phi_2 \wedge \mathrm{d} * F \\
&= (\mathrm{d}\psi_2 + \eta - \Omega_F' t \mathrm{d}\psi) \wedge \left(\frac{I'}{2\pi} \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \varphi - \mathrm{d}(\star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta) \right) \\
&= \frac{I'}{2\pi} \mathrm{d}\psi_2 \wedge \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \varphi - \eta \wedge \mathrm{d}(\star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta) \\
&= \frac{II'}{4\pi^2 g^T} \epsilon + \mathrm{d}(\eta \wedge \star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta) - \eta \wedge \star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta \\
&= \frac{II'}{4\pi^2 g^T} \epsilon - \mathrm{d}(|\eta|^2 \star \mathrm{d}\psi \wedge \epsilon^T) + \Omega_F' \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \star \mathrm{d}\psi \wedge \star\eta \\
&= \frac{II'}{4\pi^2 g^T} \epsilon - \mathrm{d}(|\eta|^2 * \mathrm{d}\psi) + \Omega_F' |\mathrm{d}\psi|^2 \langle \mathrm{d}t, \eta \rangle \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

U drugoj liniji smo koristili jednadžbe (2.71) i (2.76). Od šest članova samo dva prežive u drugoj liniji, dva iščeznu zato što u sebi sadrže tri poloidalne 1-forme, jedna iščezne zato što ima tri toroidalne 1-forme i jedna iščezne zato što u sebi ima dvije iste forme. U idućoj liniji koristimo dual iz (2.77), zajedno s (2.73) i (2.74). Ostala dva člana dođu od parcijalne integracije. U poslijednjoj liniji koristimo (2.73) i (2.75) kao jednakost $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \epsilon$ uz definiciju produkta

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{p!} \alpha_{m_1 \dots m_p} \beta^{m_1 \dots m_p}. \tag{2.95}$$

Konačno, budući da $\mathrm{d}{*}\omega = \nabla_a \omega^a$, jednadžbu možemo napisati kao

$$\nabla_a (|\eta|^2 \nabla^a \psi) + \Omega_F' \langle \mathrm{d}t, \eta \rangle |\mathrm{d}\psi|^2 - \frac{II'}{4\pi^2 g^T} = 0. \tag{2.96}$$

U ovom obliku jednadžba toka funkcionira za bilo koju metriku koja se može napisati u blok dijagonalnom obliku. Jednadžbe toka za funkciju toka ψ imaju zanimljivo svojstvo da sadrže i funkcije $\Omega_F(\psi)$ i $I(\psi)$ koje također moraju biti nekako određene.

Ukoliko su takve funkcije određene, jednadžba toka postaje kvazilinearna za ψ. Za $|\eta|^2 \neq 0$ jednadžba je drugog reda, s eliptičkim glavnim dijelom. Stoga, u tom slučaju očekujemo jedinstveno rješenje. U slučaju da je η svjetlosni vektor, jednadžba toka je tada prvog reda.

Za analitička rješenja moramo ograničiti ovisnost ψ na jednodimenzionalni potprostor polodijalnog prostora. Tada jednadžba toka postaje obična diferencijalna jednadžba. Ukoliko Ω_F proglasimo konstantom, rubni uvjet za ψ može odrediti $I(\psi)$.

Konačno, stacionarna osnosimetrična rješenja mogu se odrediti numerički tako da krenemo od vremenski ovisnih, ne besilnih početnih uvjeta uz to da ručno mičemo električna polja koja se mogu pojaviti.

Formalizam besilnog elektromagnetizma nam je omogućio da relativno jednostavno izvedemo ovu jednadžbu.

3 Općenita svojstva

3.1 Električni i magnetski potencijali

Električni i magnetski potencijali su koncepti koji se relativno lako proširuju iz ravnog prostorvremena na zakrivljeno. Jednako se definiraju

$$E = -\mathrm{d}\Phi \tag{3.1}$$

$$B = -\mathrm{d}\Psi \tag{3.2}$$

i vrijede jednaka ograničenja u vidu da skalarni magnetski potencijal postoji samo tamo gdje nema električnih struja. Zanimljivo svojstvo potencijala, koje nema svoju analogiju u ravnom prostorvremenu, je da u stacionarnom i osnosimetričnom prostorvremenu Killingovi horizonti (razapeti s $\chi^a = k^a + \Omega_H m^a$) čine ekvipotencijalne plohe. U literaturi postoji mnogo dokaza te činjenice, ali mi ćemo se koncentrirati na onaj [6] koji koristi relativno najmanje dodatnih ograničenja. Definiramo 2-formu

$$\rho = k \wedge m \tag{3.3}$$

i onda napišemo jedini uvjet koji je potreban za dokaz – uvjet cirkularnosti

$$\rho \wedge j = 0. \tag{3.4}$$

Ovo znači da komponente struje koje mogu biti različite od nule moraju biti tangencijalne na Killingove vektore. Ukoliko imamo cirkularnost struje, Carter [7] je pokazao da vrijedi

$$\begin{aligned} i_m i_k F &= 0 \\ i_m i_k {*F} &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Drugi uvjet je ekvivalentan elektromagnetskoj cirkularnosti

$$\rho \wedge F = 0. \tag{3.6}$$

Uvođenjem pokrata $-V = \langle k, k\rangle$, $N = \langle k, k\rangle$, $W = \langle k, m\rangle$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\langle k, \chi\rangle &= -V + \Omega_H W \\ \langle k, \chi\rangle &= W + \Omega_H N.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Koristeći činjenicu da su ovi skalarni produkti nula na horizontu, za Ω_H vidimo

$$\Omega_H \overset{H}{=} \frac{V}{W} \overset{H}{=} -\frac{W}{N}. \tag{3.8}$$

Lako se mogu pokazati i sljedeće relacije

$$\begin{aligned} i_k\rho = i_k(k \wedge m) &= -Vm - Wk \overset{H}{=} -W\chi \\ i_m\rho = i_m(k \wedge m) &= Wm - Nk \overset{H}{=} -N\chi \\ i_k{*}\rho = i_k{*}(k \wedge m) &= 0 \\ i_m{*}\rho = i_m{*}(k \wedge m) &= 0 \qquad (3.9) \\ i_k i_m \rho &\overset{H}{=} 0. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Koristeći gornje relacije računamo

$$\begin{aligned} i_m i_k(\rho \wedge F) &= i_m\left(i_k\rho \wedge F - \rho \wedge i_k F\right) \\ &\overset{H}{=} i_m\left(-W\chi \wedge F - \rho \wedge i_k F\right) \\ &\overset{H}{=} -W(i_m\chi \wedge F - \chi \wedge i_m F) - i_m\rho \wedge i_k F + \rho \wedge i_m i_k F \\ &\overset{H}{=} W\chi \wedge i_m F - i_m\rho \wedge i_k F \\ &\overset{H}{=} W\chi \wedge i_m F + N\chi \wedge i_k F. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Koristeći definiciju električnog i magnetskog polja iz (1.15) s obzirom na χ, pišemo

$$\begin{aligned} i_m i_k(\rho \wedge F) &\overset{H}{=} W\chi \wedge i_m F + N\chi \wedge i_k F \\ &\overset{H}{=} N\chi \wedge \left(\frac{W}{N} i_m F + i_k F\right) \\ &\overset{H}{=} N\chi \wedge E. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Slično, računamo i

$$\begin{aligned} i_m i_k(\rho \wedge *F) &\overset{H}{=} i_m\left(-W\chi \wedge *F - \rho \wedge i_k *F\right) \\ &\overset{H}{=} W\chi \wedge i_m *F + N\chi \wedge i_k *F \\ &\overset{H}{=} -N\chi \wedge B. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Također,

$$\begin{aligned} i_m i_k(*\rho \wedge F) &= i_m\left(i_k *\rho \wedge F + *\rho \wedge i_k F\right) \\ &\overset{H}{=} i_m(*\rho \wedge i_k F) \\ &\overset{H}{=} i_m *\rho \wedge i_k F + *\rho \wedge i_m i_k F \\ &\overset{H}{=} 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Korištenjem gornja tri izraza, Poincaréove leme koja nam osigurava postojanje potencijala i relacije [8]

$$*\rho \wedge F = \rho \wedge *F \tag{3.15}$$

pišemo

$$\begin{aligned} -N\chi \wedge E &= N\chi \wedge \mathrm{d}\Phi = 0 \\ -N\chi \wedge B &= N\chi \wedge \mathrm{d}\Psi = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Iz ove dvije jednadžbe slijedi da su $\mathrm{d}\Phi$ i $\mathrm{d}\Psi$ ili nula ili proporcionalni χ, osim u točkama gdje os rotacije presjeca horizont. Stoga, za bilo koji tangentni vektor t^a horizontu H vrijedi $i_t \mathrm{d}\Phi \overset{H}{=} 0$ i $i_t \mathrm{d}\Psi \overset{H}{=} 0$ tako da su Φ i Ψ konstantni. Budući da je F_{ab} nesingularan na horizontu, znamo da su potencijali konstantni i da izraz vrijedi i za točke polova.

3.2 Smarrova relacija

Gibbsov-Duhemova relacija je poznata termodinamička relacija koja povezuje unutarnju energiju i produkte svih parova konjugiranih intezivnih i ekstenzivnih varijabli

$$U - TS + pV - \mu N = 0. \tag{3.17}$$

Početkom 1970-ih godina, u vrijeme kada su Bekenstein i Hawking došli do formule za entropiju crne rupe, Smarr je primjetio da analogna relacija Gibbs-Duhemovoj vrijedi i za Kerr-Newmanovu crnu rupu [9] koja je u skladu s Bekensteinovim i Hawkingovim rezultatima. Relacija glasi

$$M = 2T_H S + 2\Omega_H J + \Phi_H Q_H \tag{3.18}$$

gdje su $T_H = \kappa/2\pi$ temperatura crne rupe, $S = A/4$ entropija, Ω_H kutna brzina horizonta, J kutna količina gibanja, Φ_H elektrostatski potencijal na horizontu i Q_H njegov naboj.
Dokaza ove relacije ima više, no jedan od najjednostavnijih je "geometrijski" pristup.

Masa i angularni moment na horizontu opisani su već spomenutim Komarovim relacijama

$$M - M_H = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma *\mathrm{d}k \tag{3.19}$$

$$J - J_H = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma *\mathrm{d}m \tag{3.20}$$

gdje je H Killingov horizont generiran svjetlosnim Killingovim vektorskim poljem $\chi^a = k^a + \Omega_H m^a$, a Σ hiperploha prostornog tipa. Koristeći svojstva Killingovih vektora i vanjske derivacije, gornja dva identiteta možemo zapisati kao

$$M - M_H = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma *R(k) \tag{3.21}$$

$$J - J_H = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma *R(m). \tag{3.22}$$

Ukoliko uzmemo standardnu Einsteinovu jednadžbu

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{3.23}$$

uzmemo joj trag i pomnožimo s polovinom metrike, možemo je napisati kao

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right). \tag{3.24}$$

Namještamo linearnu kombinaciju jednadžbi (3.21) i (3.22) da dobijemo točno χ^a u kontrakciji s Riccijevim tenzorom

$$\begin{aligned} M - M_H - 2\Omega_H (J - J_H) &= -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma *R(\chi) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\, 8\pi \int_\Sigma \left(*T(\chi) - \frac{1}{2}\, T * \chi \right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ovo nam je korisno jer znamo da trag elektromagnetskog tenzora iščezava. Također, elektromagnetski tenzor se može zapisati u idućem obliku

$$8\pi T_{ab} = F_{ac} F_b^{\ c} + *F_{ac} * F_b^{\ c}. \tag{3.26}$$

Ako definiramo električna i magnetska polja s obzirom na χ^a na način pokazan u Uvodu, kontrakciju tenzora energije i impulsa s χ^a možemo napisati kao

$$8\pi T(\chi) = i_E F - i_B * F \tag{3.27}$$

ili

$$-8\pi * T(\chi) = E \wedge *F + B \wedge F. \tag{3.28}$$

Uvođenjem skalarnih potencijala $E = -\mathrm{d}\Phi$ i $B = -\mathrm{d}\Psi$ i korištenjem prve Maxwellove jednadžbe imamo

$$8\pi * T(\chi) = \mathrm{d}(\Phi * F + \Psi F). \tag{3.29}$$

Stoga, sve skupa daje

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\mathrm{d}(\Phi *F+\Psi F) &= -\frac{1}{4\pi}\left(\int_{S_\infty}-\int_{\mathcal{H}}\right)(\Phi *F+\Psi F)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{H}}(\Phi *F+\Psi F)\\
&= \Phi_H Q_H+\Psi_H P_H
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

gdje smo koristili pretpostavku da potencijali u beskonačnosti iščezavaju i da su konstantni na horizontu, kako je pokazano u prethodnom poglavlju.

S druge strane, možemo pokazati još jednu relaciju koristeći postupak iz poglavlja 7 iz [10]. Ukoliko integriramo (3.21) samo na horizontu imamo

$$
M_H=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{H}}*\mathrm{d}k \tag{3.31}
$$

i izrazimo k pomoću χ dobijemo

$$
M_H=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{H}}*\mathrm{d}\chi+2\Omega_H J_H \tag{3.32}
$$

gdje je u drugom članu iskorištena Komarova definicija kutne količine gibanja. Budući da za svaku 2-formu vrijedi

$$
\int_{\mathcal{H}}*\Lambda=\int_{\mathcal{H}} i_{n_\chi}i_\chi\Lambda\,\mathrm{d}\mathcal{A} \tag{3.33}
$$

gdje je n_χ još jedan svjetlosni vektor okomit Killingov horizont i normiran tako da $\langle n_\chi,\chi\rangle=-1$. Prvi član iz (3.32) postaje

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}}*\mathrm{d}\chi &= \int_{\mathcal{H}} i_{n_\chi}i_\chi\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\mathcal{A}\\
&= \int_{\mathcal{H}} i_{n_\chi}\mathrm{d}N\mathrm{d}\mathcal{A}\\
&= -\int_{\mathcal{H}}\langle n_\chi,\mathrm{d}N\rangle\mathrm{d}\mathcal{A}\\
&= -\langle n_\chi,\mathrm{d}N\rangle\int_{\mathcal{H}}\mathrm{d}\mathcal{A}\\
&= -2\kappa A_H
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

gdje je u drugoj liniji iskorištena činjenica da vanjska derivacija i kontrakcija s vektorom komutiraju na Killingovim vektorima te je definirana norma $N = \langle \chi, \chi \rangle$. U četvrtoj i petoj liniji je iskorištena činjenica da je izraz $\langle n_\chi, \mathrm{d}N \rangle$ konstantan na horizontu i da je proporcionalan površinskoj gravitaciji koja se definira kao sila kojom opažač u beskonačnosti mora djelovati na tijelo jedinične mase na horizontu da ono ne bi upalo u crnu rupu. Dakle,

$$M_H = \frac{\kappa A_H}{4\pi} + 2\Omega_H J_H. \tag{3.35}$$

Sada, jednadžbe (3.30) i (3.35) zajedno daju

$$M = \frac{\kappa A_H}{4\pi} + 2\Omega_H J + \Phi_H Q_H + \Psi_H P_H \ . \tag{3.36}$$

3.3 Nasljeđivanje simetrije

Ako prostorvrijeme posjeduje simetriju, tada postoji (Killingovo) vektorsko polje ξ za koje vrijedi jednadžba

$$\pounds_\xi g_{ab} = 0. \tag{3.37}$$

Ovo povlači da su Liejeve derivacije geometrijskih veličina kao što su Riemannov tenzor, Riccijev tenzor i Riccijev skalar nula. S druge strane, ako za neko polje $W_{a\ldots b}$ nužno vrijedi

$$\pounds_\xi W_{a\ldots b} = 0 \tag{3.38}$$

kažemo da polje nasljeđuje simetriju prostorvremena.

Zbog Einsteinove jednadžbe, simetriju prostorvremena možemo pisati kao simetriju tenzora energije i impulsa

$$\pounds_\xi T_{ab} = 0. \tag{3.39}$$

Elektromagnetsko polje u standardnom, četverodimenzionalnom ne nasljeđuje sime-

triju [11, 12], nego postoji iduće ponašanje

$$\pounds_\xi F_{ab} = f * F_{ab} \tag{3.40}$$

gdje je f neka funkcija ako je polje svjetlosnog tipa ($F_{ab}F^{ab} = 0$), a konstanta ako nije. Ovo je dosta koristan rezultat, no ne pokazuje potpuno nasljeđivanje simetrije, već samo neka ograničenja na polja. U tri dimenzije pokaže se [13] da je simetrija potpuno nasljeđena tj.

$$\pounds_\xi F_{ab} = 0. \tag{3.41}$$

3.4 Meissnerov efekt[3]

Meissnerov efekt, istiskivanje magnetskog polja na niskim temperaturama, otkrili su W. Meissner i R. Ochsenfeld 1933. Jednadžba koja opisuje magnetsko polje unutar supravodiča je druga Londonova jednadžba koja nakon primjene Ampèrovog zakona glasi

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} \tag{3.42}$$

gdje je

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_*}{\mu_0 n e_*^2}}, \tag{3.43}$$

μ_0 permeabilnost vakuuma, a m_*, e_* i n su redom efektivna masa nosilaca naboja, naboj i njihova koncentracija. Efektivni naboj i masa su, u ovom slučaju, dvostruko veće veličine od onih za elektron zbog formiranja Cooperovih parova.

Kao i u brojnim drugim situacijama u fizici, javlja se iznenađujuće analogno ponašanje između fizike čvrstog stanja i crnih rupa. Temperatura crne rupe je definirana kao

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{3.44}$$

[3]Ovo poglavlje se sastoji od materijala mog seminara iz kolegija Napredni seminar iz istraživanja u fizici naslova *Meissnerov efekt crnih rupa*

gdje je κ površinska gravitacija. Ona je veća za manje crne rupe i crne rupe s manjim kutnim količinama gibanja. Temperatura je nula za maksimalnu kutnu količinu gibnja dopuštenu kozmičkim principom cenzure što je upravo količina gibanja ekstremalne crne rupe. Ovakvo ponašanje je analogno s ponašanjem supravodiča tipa 2 u magnetskom polju u miješanom stanju s $T_{c_1} = 0$.

3.4.1 Pregled Meissnerovog efekta

Ono što danas znamo pod Meissnerovim efektom crnih rupa je činjenica da ekstremalne crne rupe iz sebe izbacuju vanjsko osnosimetrično stacionarno magnetsko polje koje je poravnato s osi simetrije same crne rupe.

Meissnerov efekt dijelimo u dvije grupe: jaki i slabi. Slabi Meissnerov efekt je onaj s testnim poljima, dok je jaki onaj u kojem ne zanemarujemo utjecaj energije polja na prostorvrijeme. Jakom efektu je posvećen znatno manji dio literature.

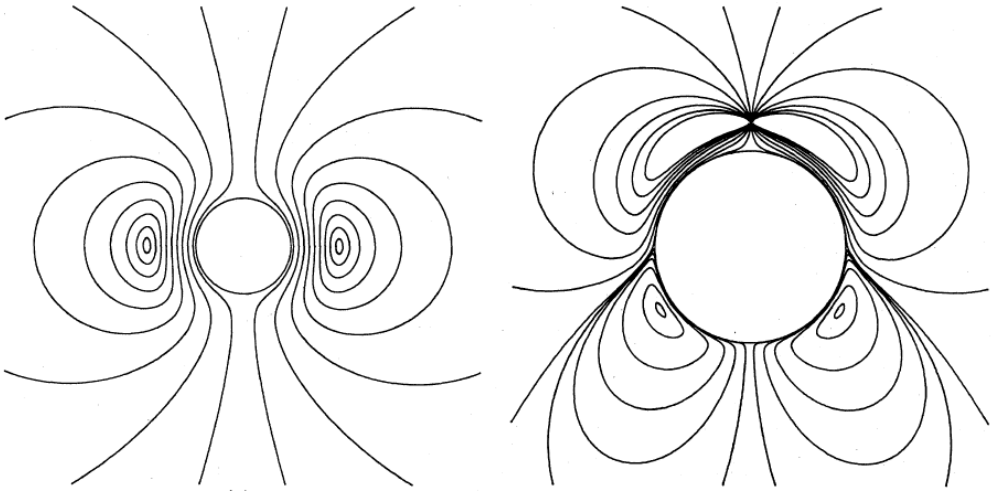
Izbacivanje polja Da crne rupe izbacuju vanjsko magnetsko polje, prvi su pokazali King, Lasota i Kundt [14] u Kerrovom prostorvremenu nad Waldovim rješenjem računanjem magnetskog toka kroz gornju hemisferu crne rupe. Dobili su izraz

$$\Phi = \pi r_+^2 B \left(1 - \frac{a^4}{r_+^4}\right) \tag{3.45}$$

gdje je r_+ položaj horizonta događaja, a $a = J/M$. U Kerrovom prostorvremenu za ekstremalnu vrijedi $r_+ = a = M$ što znači da polje ne prodire u crnu rupu.

Nastavak istraživanja dalje od asimptotski homogenog polja pokrenuli su Bičák i Dvořák koji su promatrali efekt u Reissner-Nordströmovom prostorvremenu [15]. Repliciraju efekt koji je dobiven u Kerrovom prostorvremenu i dobivaju malo općenitije rješenje u kojem polje više nije homogeno, nego je generirano strujnim petljama u ekvatorijalnoj ravnini i na osi simetrije crne rupe. Svoj račun rade perturbacijski što je cijena koju su platili za poopćenje rješenja.

Činjenicu da je usklađenost simetrije prostorvremena i simetrije elektromagnetskog polja nužnu za ostvarivanje Meissnerovog efekta pokazali su Bičák i Janiš. U



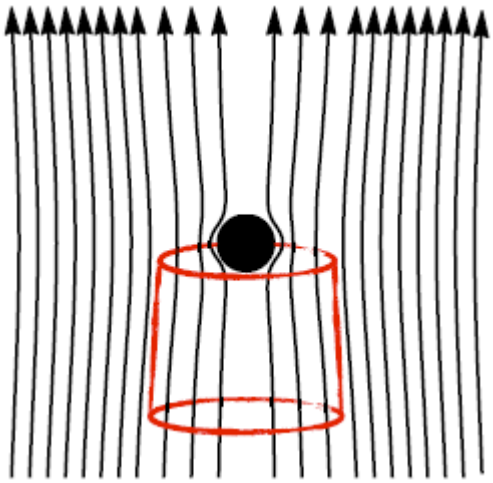
Slika 3.1: Strujna petlja u ekvatorijalnoj ravnini i na osi, preuzeto iz [15]

istom članku [16] su pokazali i da postoji gornja granica na tok magnetskog polja kroz horizont crne rupe u magnetski dominiranom svemiru.

Potencijalni problem s Meissnerovim efektom se javlja u astrofizičkim primjenama. Naime, za mehanizam za koji se vjeruje da je zaslužan za stvaranje astrofizičkih mlazova, Blanford-Znajekov mehanizam, nužno je postojanje magnetskog polja na horizontu što je točno ono što Meissnerove efekt potiska. Meissnerov efekt nije izražen za slabo rotirajuće crne rupe, no novija astrofizička mjerenja su pokazala da postoje crne rupe koje su jako rotirajuće i koje izbacuju astrofizičke mlazove. U pokušaju da to objasni Penna [17] daje zanimljive argumente za Meissnerov efekt i kako ga je možda moguće izbjeći. Prvo, važno je primjetiti da je za svaku ekstremalnu stacionarnu i osnosimetričnu crnu rupu udaljenost mjerena normalnom koordinatom ide u beskonačno [18]

$$\int_{r_H}^{r_H+\epsilon} \sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r \to \infty \tag{3.46}$$

i zbog toga Penna daje jednostavan geometrijski argument. Na slici (3.2) vidimo ucrtan valjak čija je gornja baza u ekvatorijalnoj ravnini crne rupe. Zbog toga, površina gornje baze divergira, a s površinom donje se ne događa ništa neuobičajeno stoga ona ostaje konačna. Da bi Maxwellova jednadžba $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bila zadovoljena, magnetsko polje mora iščeznuti na horizontu. Penna nudi i način kako izbjeći Meissnerov efekt, a to je nabijanje crne rupe nabojem podijeljenog monopola. To je objekt koji je sličan običnom monopolu, samo mu naboj mijenja predznak na drugoj strani



Slika 3.2: Meissnerov efekt za Waldovo rješenje i Pennov valjak, preuzeto iz [17]

ekvatorijalne ravnine. U druge mogućnosti izbjegavanja Meissnerovog efekta spada i promatranje polja koja nisu osnosimetrična i polja koja nisu stacionarna.

Gralla, Lupsasca i Strominger [19] promatraju limes u blizini horizonta ekstremalno rotirajuće Kerrove crne rupe te na temelju simetrija takvog prostorvremena zaključuju oblik elektromagnetskog tenzora koji povučen na horizont crne rupe iščezava. To je rezultat koji je analogan onome iz [16], ali je dobiven bez eksplicitnog rješavanja vakuumskih Maxwellovih jednadžbi u Kerrovom prostorvremenu.

Jaki režim Meissnerov efekt u jakom režimu, kao što je već napomenuto, je slabo proučavan te postoji tek nekoliko članaka na tu temu. Karas i Budínová prvi promatraju tok magnetskog polja preko horizonta crne rupe [20] u magnetiziranoj Kerr-Newmanovoj metrici te pokazuju stupanj smanjenja toka kroz horizont, uz posebne uvjete. Nedavno je dokazano [21], koristeći puni formalizam opće relativnosti, da crne rupe izbacuju rotirajuće magnetsko polje čak i kada su deformirane okolnom materijom, tj. akrecijskim diskovima.

3.4.2 Otvoreni problemi

Općenitost rješenja Općenitost ili univerzalnost rješenja je obično ono prvo što se u svakom fizikalnom modelu ili teoriji nastoji postići. Za primjetiti je kako je kroz čitav povijesni diskurs izložen u člancima o Meissnerovom efektu nekoliko stvari zajedničko. Prvi put kad se primijetilo izbacivanje polja bilo je to nad Waldovim, veoma

specifičnim rješenjem s homogenim magnetskim poljem. U prvih par članaka nakon toga došlo se do najveće slobode u simetrijama za koje se vjeruje da je moguć Meissnerov efekt. Radi se, kako je već napomenuto, o stacionarnosti (dakle, slabijim zahtjevom od statičnosti) i osnoj simetriji. Na tome se gradila teorija i sva iduća rješenja se temelje na tim zahtjevima. Iako se u dosadašnjem znanstvenom radu o tom efektu pretpostavljaju samo te dvije stvari, svi autori se, prije ili kasnije, pozivaju na neku konkretnu geometriju prostorvremena koja u sebi ima pojam ekstremalnosti dobro definiran. Pitanje je može li se zaista za općenito prostorvrijeme pokazati da se Meissnerov efekt događa.

Pitanje ostaje kako uvjet ekstremalnosti uklopiti u čitavu sliku i koji pristup iskoristiti. Killingovi vektori su jako korisni objekti iz kojih se mogu relativno lako izvući ograničenja na polje jer oni su na prilično jasan način definirani bez reference na neko konkretno prostorvrijeme, dok s ekstremalnosti nije takav slučaj. Dobar pristup prema tome ima Penna koristeći činjenicu da "vrat" crne rupe za ekstremalne rupe ide u beskonačno (3.46). Drugačiji pristup može biti korištenje činjenice da površinska gravitacija, odnosno temperatura ide u nulu kod ekstremalnih crnih rupa. Konkretan pristup bi trebao biti predmet budućeg istraživanja.

Utjecaj kozmološke konstante na efekt Do sada ne postoji sustavna analiza Meissnerovog efekta uz prisustvo kozmološke konstante. Kozmološka konstanta predstavlja energetsku gustoću vakuuma koja bi bila odgovorna za metričku ekspanziju prostorvremena (u Einsteinovoj jednadžbi množi metrički tenzor). Budući da je nedvojbeno utvrđeno, a za što je i dobivena Nobelova nagrada [22], da se svemir ubrzano širi, bilo bi preciznije u sva razmatranja uključiti i neiščezavajuću kozmološku konstantu. Međutim, na kozmološki malim udaljenostima, reda veličina crne rupe ili koji red više, utjecaj kozmološke konstante je zanemariv i predstavlja opravdan razlog zbog kojeg se ona može izostaviti iz razmatranja. No, zbog potpunosti, bilo bi dobro da znamo što se događa s Meissnerovim efektom i tada. Jedan od prvih problema koji se javlja s uvrštavanjem kozmološke konstante je što se koncept ekstremalnosti crne rupe ili skroz ruši ili se mora redefinirati jer $1/g_{rr}$ element metrike sada postaje polinom 4. reda i više nemamo garanciju da bilo kakvim namještanjem

naboja ili angularnog momenta možemo dobiti da se dvije nultočke, koje su prije označavale unutarnji ili Cauchyjev horizont i horizont događaja, degeneriraju u istu vrijednost. Zbog toga što sada imamo polinom 4. reda, javljaju se dodatne nultočke. Nultočka koja je veća od nule i ima veću vrijednost od one koja označava horizont događaja, naziva se kozmološki horizont. To je ploha koja se nalazi na najvećoj mogućoj udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava s koje se može poslati informacija u konačnom vremenu u ishodište. Kozmološki horizont nam je bitan zbog toga što globalne simetrije, koje smo prije imali, više nisu globalne, nego lokalne i vrijede u području do kozmološkog horizonta.

4 Nelinearna elektrodinamika crnih rupa

Jedan od načina fizikalnog istraživanja je na temelju postojećih, provjerenih fizikalnih modela i teorija smišljati nove proširivanjem starih da bi se objasnila šira klasa problema ili izbjegle neke loše strane postojećih modela. Na primjer, Einsteinove gravitacijske jednadžbe se mogu dobiti iz varijacijskog principa, preciznije iz Einstein-Hilbertove akcije

$$S = \frac{1}{16\pi} \int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{4.1}$$

gdje je R Riccijev skalar. Iz ovog formalizma postoji prirodan način za generaliziranje teorije. Lagranžijanu (preciznije njegovoj gustoći), dopušta se njegova kompliciranija funkcionalna ovisnost. Onda imamo

$$S = \frac{1}{16\pi} \int f(R)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{4.2}$$

i onda se generalizirane opće teorije relativnosti često zovu $f(R)$ teorije.
Ovo poglavlje diplomskog rada će se baviti proširenjima Maxwellove teorije. Akcija iz koje se dobiju Maxwellove jednadžbe glasi

$$S = \int \left(\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - j_a A^a\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{4.3}$$

U nastavku se koncentriramo samo na vakuumske $j^a = 0$ teorije. Uvođenjem dvije pokrate za obje elektromagnetske skalarne[4] invarijante

$$\mathcal{F} = F_{ab}F^{ab} \quad \text{i} \quad \mathcal{G} = F_{ab}{*F}^{ab} \tag{4.4}$$

pišemo najopćenitiji lagranžijan kao njihovu funkciju jer u lagranžijan mogu ulaziti samo invarijante budući da i on sam mora biti invarijantan

$$L = \mathscr{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}){*1}. \tag{4.5}$$

Uvođenjem pokrata za derivacije lagranžijana

$$\mathscr{L}_{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathcal{F}} \quad \text{i} \quad \mathscr{L}_{\mathcal{G}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathcal{G}} \tag{4.6}$$

izvodimo tenzor energije i impulsa te generalizirane Maxwellove jednadžbe. Tenzor energije i impulsa se dobije

$$T_{ab} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(L\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{ab}}. \tag{4.7}$$

Dakle,

$$\frac{\delta(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}} = \left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g^{ab}}\sqrt{-g} + \mathscr{L}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ab}}\right). \tag{4.8}$$

Zbog preglednosti, svaki od ovih članova gledamo posebno.

$$\frac{\delta}{\delta g^{ab}}\mathscr{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathscr{L}_F\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta g^{ab}} + \mathscr{L}_G\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta g^{ab}}. \tag{4.9}$$

Prvo računamo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= \delta(F_{ab}F^{ab}) = \delta(g^{ac}g^{bd}F_{ab}F_{cd}) \\ &= \delta(g^{ac})g^{bd}F_{ab}F_{cd} + g^{ac}\delta(g^{bd})F_{ab}F_{cd} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}F_{cd}).\end{aligned} \tag{4.10}$$

[4]Dvije skalarne invarijante postoje samo u 4 dimenzije!

U prvom članu mijenjamo slijepe indekse $c \leftrightarrow b$, a u drugom $d \leftrightarrow a$ te imamo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= \delta(g^{ab})g^{cd}F_{ac}F_{bd} + g^{dc}\delta(g^{ba})F_{db}F_{ca} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}F_{cd}) \\ &= (F_{ac}F_b{}^c + g^{dc}F_{bd}F_{ac})\delta g^{ab} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}F_{cd}) \\ &= 2F_{ac}F_b{}^c\delta g^{ab} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}F_{cd}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Stoga,

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta g^{ab}} = 2F_{ac}F_b{}^c. \tag{4.12}$$

Drugi slučaj je jako sličan

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G} &= \delta(F_{ab}{*}F^{ab}) = \delta(g^{ac}g^{bd}F_{ab}{*}F_{cd}) \\ &= \delta(g^{ac})g^{bd}F_{ab}{*}F_{cd} + g^{ac}\delta(g^{bd})F_{ab}{*}F_{cd} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}{*}F_{cd}) \\ &= 2F_{ac}{*}F_b{}^c\delta g^{ab} + g^{ac}g^{bd}\delta(F_{ab}{*}F_{cd})\end{aligned} \tag{4.13}$$

i u konačnici imamo

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta g^{ab}} = 2F_{ac}{*}F_b{}^c. \tag{4.14}$$

Iako izgleda da bi zadnji član mogao biti ovisan o δg^{ab} zbog dualnog tenzora, može se pokazati (kroz relativno lako razumljiv, ali naporan račun) da to nije slučaj. Preostali član iz 4.8 za varirati se može naći u poglavlju 21 u [23].

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ab}} = -\frac{1}{2}g_{ab}. \tag{4.15}$$

Čitav izraz 4.8 glasi

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(L\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{ab}} &= \left(2\mathscr{L}_F F_{ac}F_b{}^c + 2\mathscr{L}_G F_{ac}{*}F_b{}^c - \frac{1}{2}g_{ab}\mathscr{L}\right)\sqrt{-g} \\ &= 2\left(\mathscr{L}_F F_{ac}F_b{}^c + \mathscr{L}_G F_{ac}{*}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}\mathscr{L}\right)\sqrt{-g}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Vraćanjem u definiciju tenzora energije i impulsa imamo

$$T_{ab} = \mathscr{L}_F F_{ac}F_b{}^c + \mathscr{L}_G F_{ac}{*}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}\mathscr{L}. \tag{4.17}$$

Koristeći identitet

$$F_{ac}{*}F_b^{\ c} = \frac{1}{4}\mathcal{G}g_{ab} \tag{4.18}$$

isti možemo napisati kao

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi}\left((\mathscr{L}_G\mathcal{G} - \mathscr{L})g_{ab} + 4\mathscr{L}_F F_{ac}F_b^{\ c}\right). \tag{4.19}$$

Budući da je F egzaktna forma $F = \mathrm{d}A$, jedna generalizirana Maxwellova jednadžba je odmah zadovoljena.

$$\mathrm{d}F = 0. \tag{4.20}$$

Drugu jednadžbu dobijemo variranjem po baždarnom potencijalu

$$\frac{\delta(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\delta A^a} = \mathscr{L}_\mathcal{F}\frac{\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g})}{\delta A^a} + \mathscr{L}_\mathcal{G}\frac{\delta(\mathcal{G}\sqrt{-g})}{\delta A^a} \tag{4.21}$$

Prvi član je

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g})}{\delta A^a} &= \mathscr{L}_\mathcal{F}\frac{\delta}{\delta A^a}(F_{ab}F^{ab}\sqrt{-g}) \\ &= \mathscr{L}_\mathcal{F}\frac{\delta}{\delta A^a}(F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd}\sqrt{-g}) \\ &= \mathscr{L}_\mathcal{F}\frac{\delta}{\delta A^a}((A_{b;a} - A_{a;b})(A_{d;c} - A_{c;d})g^{ac}g^{bd}\sqrt{-g}) \\ &= \mathscr{L}_\mathcal{F}\frac{\delta}{\delta A^a}((A_{b,a} - A_{a,b})(A_{d,c} - A_{c,d})g^{ac}g^{bd}\sqrt{-g}).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Množenjem svakog člana sa svakim i variranjem dobivamo

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g}) = \mathscr{L}_\mathcal{F}(&\partial_a\delta A_b\partial_c A_d + \partial_a A_b\partial_c\delta A_d + \partial_b\delta A_a\partial_d A_c + \partial_b A_a\partial_d\delta A_c \\ &- \partial_b\delta A_a\partial_c A_d - \partial_b A_a\partial_c\delta A_d - \partial_a\delta A_b\partial_d A_c - \partial_a A_b\partial_d\delta A_c)g^{ac}g^{bd}\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{4.23}$$

$\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g}$ ubacujemo pod derivaciju u svakom članu, uz pripadajuće indekse

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g}\partial_a\delta A_b &= \partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g}\delta A_b) - \delta A_b\partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g}) \\ &= -\delta A_b\partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\end{aligned} \tag{4.24}$$

Prvi član iščezava jer nakon integracije možemo upotrijebiti Gaussov teorem i integrirati po sferi kojoj radijus ide u beskonačno.

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g}) = &-(\delta A_b \partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_c A_d - \delta A_b \partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_d A_c \\ &+\delta A_d \partial_c(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_a A_b - \delta A_d \partial_c(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_b A_a \\ &+\delta A_a \partial_b(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_d A_c - \delta A_d \partial_b(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_c A_d \\ &+\delta A_c \partial_d(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_b A_a - \delta A_c \partial_d(\mathscr{L}_\mathcal{F}\sqrt{-g})\partial_a A_b) g^{ac} g^{bd} \end{aligned} \tag{4.25}$$

permutacijama slijepih indeksa može se vidjeti da su ovo zapravo četiri ista člana. Zato pišemo

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g}) &= -4\delta A_b \partial_a(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{cd}\sqrt{-g}) g^{ac} g^{bd} \\ &= -4\delta A^d \partial^c(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{cd}\sqrt{-g}) \\ &= -4\delta A^a \partial^b(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ba}\sqrt{-g}) \\ &= 4\delta A^a \partial^b(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ab}\sqrt{-g}) \end{aligned} \tag{4.26}$$

što na kraju znači

$$\frac{\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g})}{\delta A^a} = 4\partial^b(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ab}\sqrt{-g}). \tag{4.27}$$

Istu stvar dobijemo i za drugi član budući da nam dual ne doprinosi u variranju i ukupno imamo

$$\frac{\delta(\mathscr{L}\sqrt{g})}{\delta A^a} = 4\sqrt{-g}\nabla^b(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ab} + \mathscr{L}_\mathcal{G} {*F}_{ab}) = 0 \tag{4.28}$$

što se može napisati i kao

$$\mathrm{d}{*}(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ab} + \mathscr{L}_\mathcal{G} {*F}_{ab}) = 0 \tag{4.29}$$

zbog čega definiramo novi (antisimetrični) tenzor

$$Z_{ab} = -4\left(\mathscr{L}_\mathcal{F} F_{ab} + \mathscr{L}_\mathcal{G} {*F}_{ab}\right). \tag{4.30}$$

Tada generalizirane (vakuumske) Maxwellove jednadžbe glase

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= 0 \\ \mathrm{d}{*}Z &= 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Zbog ovako definiranih Maxwellovih jednadžbi redefiniramo magnetski potencijal i uvodimo dva nova polja, slično kao u slučaju elektromagnetskog polja u nekom materijalu, te imamo dva stara polja

$$\begin{aligned} E &= -i_\chi F = -\mathrm{d}\Phi \\ B &= i_\chi {*}F \end{aligned} \tag{4.32}$$

i dva nova polja

$$\begin{aligned} D &= -i_\chi Z \\ H &= i_\chi {*}Z = -\mathrm{d}\Psi. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Potencijali Φ i Ψ su konstantni na horizontu baš kao i u Maxwellovom slučaju. Da bi reproducirali dokaz iz trećeg poglavlja dovoljno je samo zamijeniti polje B poljem H i pokazati da je ${*}Z(k,m) = 0$. Koristimo relaciju

$$i_X \pounds_Y - i_Y \pounds_X = i_X i_Y \mathrm{d} - \mathrm{d} i_X i_Y + i_{[X,Y]} \tag{4.34}$$

Uvrštavanjem k i m u X i Y te djelovanjem čitave jednadžbe na ${*}Z$ dobivamo

$$i_k \pounds_m {*}Z - i_m \pounds_k {*}Z = i_k i_m \mathrm{d}{*}Z - \mathrm{d} i_k i_m {*}Z + i_{[k,m]}{*}Z. \tag{4.35}$$

Oba člana s lijeve strane otpadaju jer polje ima nasljeđenu simetriju. Prvi član s desne strane otpada po drugoj generaliziranoj Maxwellovoj jednadžbi, a treći član otpada jer Killingova polja komutiraju. Dakle, imamo

$$\mathrm{d} i_k i_m {*}Z = \mathrm{d}{*}Z(k,m) = 0 \tag{4.36}$$

što nam govori da je ${*}Z(k,m)$ konstantan. No, Killingov vektor m^a na osi simetrije je nula pa onda i čitav izraz mora biti nula (na osi simetrije). Budući da je izraz

konstantan, nula je svugdje.

$$*Z(k,m) = 0 \tag{4.37}$$

Pokazavši ovo, možemo replicirati stari dokaz i dobiti sličan rezultat – Φ i Ψ su konstantni na horizontu.

4.1 Smarrova relacija

Izvod Smarrove relacije u nelinearnom slučaju temelji se u velikom dijelu na onome u linearnom slučaju. Pratimo isti postupak i pazimo na detalje. Kao što je prethodno napisano, tenzor energije i impulsa glasi

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi}\left((\mathscr{L}_G\mathcal{G} - \mathscr{L})g_{ab} + 4\mathscr{L}_F F_{ac}F_b{}^c\right). \tag{4.38}$$

U nelinearnom slučaju on više nije s tragom 0, nego imamo

$$T = \frac{1}{\pi}\left(\mathscr{L} - \mathscr{L}_\mathcal{G}\mathcal{G} - \mathscr{L}_\mathcal{F}\mathcal{F}\right). \tag{4.39}$$

Zadnji faktor u tenzoru energije i impulsa možemo izraziti

$$4\mathscr{L}_\mathcal{F}F_{ac}F_b{}^c = (\mathscr{L} - \mathscr{L}_\mathcal{G}\mathcal{G})g_{ab} - 4\pi T_{ab}. \tag{4.40}$$

Koristeći to i jednakost

$$F_{ac}F_b{}^c - *F_{ac}*F_b{}^c = \frac{1}{2}\mathcal{F}g_{ab} \tag{4.41}$$

možemo pokazati da uz analognu formu kao i u linearnom slučaju

$$*(E\wedge *Z + H\wedge F) = -i_E Z + i_H *F \tag{4.42}$$

imamo

$$\begin{aligned} *(E \wedge *Z + H \wedge F)_a &= 4\mathscr{L}_{\mathcal{F}}(F_{ac}F_b{}^c + *F_{ac}*F_b{}^c)\chi^b \\ &= 8\mathscr{L}_{\mathcal{F}}F_{ac}F_b{}^c\chi^b - 2\mathscr{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}\chi_a \\ &= 2(\mathscr{L} - \mathscr{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{G} - \mathscr{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{F})\chi_a - 8\pi T(\chi)_a \,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Stoga, evaluacija izraza pod integralom iz 3.25 glasi

$$8\pi\left(*T(\chi)_a - \frac{1}{2}T*\chi_a\right) = -2(\mathscr{L} - \mathscr{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{G} - \mathscr{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{F})\chi_a - *(E \wedge *Z + H \wedge F)_a \tag{4.44}$$

što nam na kraju daje staru Smarrovu relaciju

$$M - M_H - 2\Omega_H(J - J_H) = \Phi_H Q_H + \Psi_H P_H + \Delta \tag{4.45}$$

to jest

$$M = \frac{\kappa A_H}{4\pi} + 2\Omega_H J + \Phi_H Q_H + \Psi_H P_H + \Delta \tag{4.46}$$

i jedan dodatni član, Δ, u kojem je sadržana sva sloboda nelinearnog vezanja

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}(\mathscr{L} - \mathscr{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{G} - \mathscr{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{F})*\chi. \tag{4.47}$$

4.2 Nasljeđivanje simetrije

Nedavno su pronađena [24] prva ograničenja za nasljeđivanje simetrije kod nelinearnog vezanja elektromagnetska polja. Prvo primjetimo da se tenzor energije i impulsa može napisati kao

$$T_{ab} = -4\mathscr{L}_{\mathcal{F}}T^{(\text{Max})}_{ab} + \frac{1}{4}Tg_{ab} \tag{4.48}$$

Uzimanjem Liejeve derivacije s obzirom na Killingovo polje koje generira simetriju prostorvremena jednostavno dobivamo

$$\begin{aligned} 0 = \pounds_\xi T_{ab} &= \pounds_\xi\left(-4\mathscr{L}_{\mathcal{F}}T^{(\text{Max})}_{ab} + \frac{1}{4}Tg_{ab}\right) \\ &= -4\pounds_\xi\left(\mathscr{L}_{\mathcal{F}}T^{(\text{Max})}_{ab}\right) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Odavde vidimo da samo redefiniranje tenzora polja

$$\tilde{F}_{ab} = \sqrt{|\mathscr{L}_{\mathcal{F}}|} F_{ab} \tag{4.50}$$

replicira rezultat 3.40 za tenzor $\tilde{F}_{ab}$ jer problem postaje matematički identičan

$$\pounds_\xi \tilde{F}_{ab} = f * \tilde{F}_{ab}. \tag{4.51}$$

što implicira da za tenzor F_{ab} vrijedi relacija

$$\pounds_\xi F_{ab} = \alpha * F_{ab} + \beta F_{ab} \tag{4.52}$$

gdje je

$$\beta = -\frac{1}{2\mathscr{L}_{\mathcal{F}}} \pounds_\xi \mathscr{L}_{\mathcal{F}}. \tag{4.53}$$

Ukoliko se ograničimo samo na vezanja kada je $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathcal{F})$, tenzor energije i impulsa može se napisati kao

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathscr{L} g_{ab} - 4\mathscr{L}_{\mathcal{F}} F_{ac} F_b{}^c \right). \tag{4.54}$$

Korištenjem simetrije prostorvremena $\pounds_\xi T_{ab} = 0$ dobijemo jednadžbu

$$\begin{aligned} 0 &= \left(4\mathcal{F}\mathscr{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - (D-4)\mathscr{L}_{\mathcal{F}}\right) \pounds_\xi \mathcal{F} \\ &\equiv K(\mathcal{F}) \pounds_\xi \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

U područjima gdje funkcija $K(\mathcal{F})$ iščezava ne možemo dobiti nikakvu korisnu informaciju. To se događa u slučajevima kada je lagranžijan oblika $\mathscr{L} = A\mathcal{F}^{D/4} + B$. U ostalim slučajevima vrijede relacije

$$\pounds_\xi \mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathcal{F}} \pounds_\xi \mathcal{F} = 0 \tag{4.56}$$

i

$$\pounds_\xi \mathscr{L}_{\mathcal{F}} = \mathscr{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \pounds_\xi \mathcal{F} = 0. \tag{4.57}$$

Ove jednadžbe impliciraju

$$\pounds_\xi(F_{ac}F_b{}^c) = 0 \tag{4.58}$$

što je prvo poznato ograničenje na nasljeđivanje simetrije kod nelinearno vezanog elektromagnetskog polja.

5 Zaključak

U ovom diplomskom radu prošli smo kroz najbitnija svojstva elektromagnetskog polja u kontekstu opće teorije relativnosti. Na početku smo vidjeli kako se elektromagnetsko polje ponaša na fiksnoj prostorvremenskoj pozadini kroz Wald-Papapetrou rješenje koje opisuje Kerrovu crnu rupu uronjenu u homogeno magnetsko polje. Također, pokazali smo formalizam besilnog elektromagnetizma i pomoću njega izveli jednadžbu toka ili Grad-Shafranovu jednadžbu. U idućem poglavlju bavili smo se općenitim svojstvima elektromagnetskog polja te smo pokazali da Killingovi horizonti čine ekvipotencijalne plohe, izveli Smarrovu relaciju te prošli kroz svojstvo nasljeđivanja simetrije. Spomenuli smo i Meissnerov efekt crnih rupa, povijest njegova istraživanja i pokušaje sustavnog opisivanja. Na kraju, bavili smo se generaliziranom teorijom, nelinearnih elektromagnetskih polja i prezentirali neke nedavne rezultate kao što su ograničenja na nasljeđivanje simetrije i novi pristupi tretiranja Smarrove relacije.

Dodaci

Dodatak A Pregled crnih rupa

U ovom dodatku prikazan je pregled vakumskih rješenja Einstein-Maxwellovih jednadžbi koja sadrže crnu rupu.

A.1 Schwarzschildova crna rupa

Schwarzschildova crna rupa je najjednostavnija crna rupa koja nema naboja ni angularnog momenta. Linijski element, u standardnim koordinatama glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2) \tag{A.1}$$

Horizont događaja nalazimo kada

$$g_{rr} \to \infty \tag{A.2}$$

te se lako vidi da se nalazi na $r = 2M$. Rješenje je sfernosimetrično što se odmah vidi iz linijskog elementa.

A.2 Reissner-Nordströmova crna rupa

Malo kompliciranije rješenje je s nabijenom crnom rupom. Ono je isto sfernosimetrično što je bilo i za očekivati budući da je naboj skalarna veličina. Linijski element je

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2).$$

Iako smo dodali samo naboj, struktura je dosta bogatija. Horizont događaja opet tražimo na isti način i dobivamo

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{A.3}$$

te vidimo da se javljaju dva horizonta, vanjski i unutarnji. Vanjski nazivamo horizont događaja, dok unutarnjeg nazivamo Cauchyjev horizont. Ovdje možemo definirati ekstremalnost crne rupe. Vidimo da najveći naboj koji crna rupa može imati, a da horizonti ostanu realni, je kada vrijedi $M = Q$. Ako je $Q > M$ ne postoje realne nultočke stoga bi singulariteti ostali goli. Ovakvo rješenje nije fizikalno prema slabom kozmološkom principu.

Također, za napomenuti je da se u prirodi Reissner-Nordströmove crne rupe gotovo i ne pojavljuju zbog toga što se sva jako nabijena tijela brzo neutraliziraju privlačenjem suprotnog naboja, a isto vrijedi i za crne rupe.

A.3 Kerrova crna rupa

Kerova crna rupa je rotirajuća nenabijena crna rupa. Zbog rotiranja gubimo sfernu simetriju. Linijski element crne rupe mase M i angularnog momenta J, u Boyer-Lindquistovim koordinatama glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2\Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma}(a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}t)^2, \qquad \text{(A.4)}$$

gdje su: $a = J/M$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ i $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Na sličan način kao i za prethodne dvije rupe nađemo horizont događaja,

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \qquad \text{(A.5)}$$

No, ovakva geometrija je još malo bogatija od Reissner-Nordströmove zbog toga što postoji posebno područje koje se naziva ergopodručje ili ergosfera. U oba prethodna slučaja ploha na kojoj je komponenta g_{tt} mijenjala predznak poklapala se s horizontom događaja, ali sada to nije slučaj te zbog toga područje od horizonta događaja do plohe na kojoj g_{tt} mijenja predznak nazivamo ergosfera. Ta ploha je dana relacijom

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}. \qquad \text{(A.6)}$$

Njena posebnost je u tome što je sada vektor u smjeru vremena prostornog tipa i zbog toga tamo ne postoji statični promatrač, nego smo onaj koji se rotira zajedno sa

crnom rupom. Također, zbog tog istog svojstva, moguće je izvlačiti energiju iz crne rupe Penroseovim procesom koji je bitan u Blanford-Znajekovom mehanizmu.

A.4 Kerr-Newmanova crna rupa

Kerr-Newmanova crna rupa je najkompliciranija i najopćenitija od svih navedenih te se svaka od njih može dobiti postavljanjem pripadajućih parametara na 0. Linijski element glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}\left(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left(\left(r^2+a^2\right)\mathrm{d}\phi - a\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2, \quad \text{(A.7)}$$

gdje su slično kao u Kerrovom slučaju: $a = J/M$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ i $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Za horizonte dobivamo

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad \text{(A.8)}$$

Dodatak B Liejeve derivacije i izometrije

Neka je M glatka mnogostrukost. Za ϕ_t kažemo da je jednoparametarska C^∞ grupa difeomorfizama ako je za svaki t $\phi_t : \mathbb{R}\times M \to M$ difeomorfizam te ako za svaki $t, s \in \mathbb{R}$ vrijedi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Preslikavanju ϕ_t možemo pridružiti nekom vektorskom polju v^a. Za fiksnu točku $p \in M$, $\phi_t(p) : \mathbb{R} \to M$ je krivulja koju nazivamo orbita i koja za $t = 0$ prolazi kroz točku p. Vektor(sko polje) definiramo kao tangentu ove krivulje u točki $t = 0$. Obratno, orbite ϕ_t mogu biti generirane vektorskim poljima v^a kao integralne krivulje tih polja.

Stoga, ϕ_t možemo koristiti kao funkciju povlačenja ("pull back") koja "nosi" objekt na koji djeluje niz vektorsko polje pridruženo ϕ_t.
Koristeći navedeno, definiramo Liejevu derivaciju $\pounds_v$:

$$\pounds_v T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \lim_{t\to 0}\frac{\phi^*_{-t}T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} - T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}}{t} \quad \text{(B.1)}$$

gdje su svi tenzori izvrijednjeni u istoj točki. Odmah iz definicije je vidljivo da Liejeva derivacija zadržava isti rang tenzora koji se derivira, te budući da ima jako sličnu definiciju kao i "obična" derivacija zadržava sva njena svojstva, kao linearnost i Leibniztovo pravilo.

Kada Liejeva derivacija djeluje na skalar, vrijedi:

$$\pounds_v f = v(f). \tag{B.2}$$

Za vektor imamo:

$$(\pounds_v w)^a = [v, w]^a \tag{B.3}$$

gdje je komutator standardno definiran kao: $[v, w]^a = v^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_b v^a$.
Općenito, za tenzor relacija je:

$$\pounds_v T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l} \nabla_{b_j} v^c \tag{B.4}$$

Uvrštavanjem metrike u gornji izraz dobijemo:

$$\begin{aligned} \pounds_v g_{ab} &= v^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a v^c + g_{ac} \nabla_b v^c \\ &= \nabla_a v_b + \nabla_b v_a \end{aligned} \tag{B.5}$$

gdje prvi član iščezne po definiciji kovarijantne derivacije(adaptiranost na metriku).

Ako je ϕ_t jednoparametarska grupa izometrija, vektorsko polje ξ^a koje generira takve orbite naziva se Killingovo vektorsko polje. Iz definicije Liejeve derivacije, očito je da takvo vektorsko polje zadovoljava (nužan i dovoljan) uvjet $\pounds_\xi g_{ab} = 0$. Takav uvjet za posljedicu ima, koristeći gornji izraz, jednadžbu koju nazivamo Killingovom

$$\pounds_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \tag{B.6}$$

Budući da su Killingova vekorska polja potpis simetrije, odnosno izometrije, prostor-

vremena njihova svojstva su široko korištena u istraživanju crnih rupa jer standardni modeli crnih rupa posjeduju dvije (Kerr i Kerr-Newman) ili tri (Schwarzschild i Reissner–Nordström) simetrije.

Neka je ξ^a Killingovo vektorsko polje, γ geodezik s tangentom u^a. Tada je veličina $\xi_a u^a$ konstantna duž γ. Dokaz:

$$u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a = 0. \tag{B.7}$$

Prvi član, zbog Killingove jednadžbe, možemo gledati kao produkt simetričnog i antisimetričnog tenzora koji mora biti iščeznuti. Drugi član je identički nula po geodezijskoj jednadžbi.
Definicija Riemannovog tenzora je:

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = R_{abc}{}^d \xi_d \tag{B.8}$$

Koristeći Killingovu jednadžbu, ovo možemo napisati kao:

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}{}^d \xi_d \tag{B.9}$$

Ukoliko istu jednadžbu napišemo permutirajući indekse, na način da jednadžbu s indeksima (abc) dodamo jedndžbi (bca) i oduzmemo (cab) dobijemo slijedeće:

$$2\nabla_b \nabla_c \xi_a = (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d)\xi_d \tag{B.10}$$

$$= -2R_{cab}{}^d \xi_d \tag{B.11}$$

Dakle:

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d \tag{B.12}$$

Množenjem ove relacije s g^{ab} dobijemo još jednu korisnu relaciju:

$$\nabla_a \nabla^a \xi_c = -R_c{}^d \xi_d \tag{B.13}$$

Literatura

[1] Right. Hon. Lord Kelvin G.C.V.O. D.C.L. LL.D. F.R.S. M.R.I. I. nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. *Philosophical Magazine*, **2**(7):1–40, 1901.

[2] Werner Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Rev.*, **164**:1776–1779, Dec 1967.

[3] A. Papapetrou. Champs gravitationnels à symétrie axiale. *Ann. Inst. H. Poincare*, **4**:83, 1966.

[4] R. M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Phys. Rev. D*, **10**:1680, 1974.

[5] Arthur Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Phys. Rev.*, **113**:934–936, Feb 1959.

[6] I. Smolić. Killing Horizons as Equipotential Hypersurfaces. *Class. Quantum Grav.*, **29**:207002, 2012.

[7] B. Carter. *Black holes equilibrium states*. 1973.

[8] M. Nakahara. *Geometry, topology, and physics*. IOP Publishing, 2005.

[9] L. Smarr. Mass formula for Kerr black holes. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:71–73, 1973. [Erratum: Phys. Rev. Lett.30,521(1973)].

[10] Markus Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, 1996.

[11] H. Michalski and J. Wainwright. Killing vector fields and the Einstein-Maxwell field equations in General relativity. *Gen.Rel.Grav.*, **6**:289–318, 1975.

[12] P. Tod. Conditions for nonexistence of static or stationary, Einstein-Maxwell, non-inheriting black-holes. *Gen.Rel.Grav.*, **39**:111–127, 2007.

[13] M Cvitan, P Dominis Prester, and I Smolić. Does three-dimensional electromagnetic field inherit the spacetime symmetries? *Classical and Quantum Gravity*, **33**(7):077001, 2016.

[14] A. R. King, J.P. Lasota, and W. Kundt. Black holes and magnetic fields. *Phys. Rev. D*, **12**:3037, 1975.

[15] J. Bičák and L. Dvořák. Stationary electromagnetic fields around black holes. iii. general solutions and the fields of current loops near the reissner-nordström black hole. *Phys. Rev. D*, **22**:2933, 1979.

[16] J. Bičák and V. Janiš. Magnetic fluxes across black holes. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **212**:899, 1985.

[17] R. F. Penna. The black hole meissner effect and blandford-znajek jets. *Phys. Rev. D*, **89**:104057, 2014.

[18] A. J. M. Medved, D. Martin, and M. Visser. Dirty black holes: Symmetries at stationary nonstatic horizons. *Phys. Rev. D*, **70**:024009, 2004.

[19] S. E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Strominger. Near-horizon kerr magnetosphere. *Phys. Rev. D*, **93**:104041, 2016.

[20] V. Karas and Z. Budínová. Magnetic fluxes across black holes in a strong magnetic field regime. *Physica Scripta*, **61**:253, 1991.

[21] Norman Gürlebeck and Martin Scholtz. Meissner effect for weakly isolated horizons. *Phys. Rev. D*, **95**:064010, Mar 2017.

[22] Nobelova nagrada za fiziku. `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2011/`. Pristupljeno: 2017-08-28.

[23] S. A. Teukolsky A. P. Lightman, W. H. Press. *Problem Book in Relativity and Gravitation*.

[24] I. Barjašić, L. Gulin, and I. Smolić. Nonlinear electromagnetic fields and symmetries. *Phys. Rev. D*, **95**(12):124037, 2017.