SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Marija Pavleković

EKSPERIMENT U NASTAVI GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji i Robertu

Sadržaj

Uvod

Matematika je jedan od najomraženijih predmeta u školama u Hrvatskoj. Postoji mnogo razloga za to. Mnogi govore da je toliko neomiljena među učenicima jer ne mogu jednostavno sjesti i naštrebati za test. Je li to uistinu tako? Zar stvarno većina naših učenika nema sposobnosti savladavanja matematičkih problema i primjene logičkog mišljenja i zaključivanja? Ako je tako, zašto je tako? Postoji mnogo pitanja koja bi se o ovoj temi mogla postaviti, ali možda najbitnije od svih je pitanje: "Što bismo mogli napraviti da se stvari promijene?"

U školama u Hrvatskoj i danas prevladava tradicionalna nastava matematike. Ona je često ograničena nastavnim planom i programom te skoncentrirana na njegovu realizaciju. Obilježja su joj i jasno odijeljene nastavne cjeline, teme i jedinice, slabije povezivanje usvojenih znanja, vještina i sposobnosti, kao i nekoreliranost s drugim predmetima. Jedno od glavnih obilježja tradicionalne nastava matematike je frontalna nastava u koju su učenici često uključeni kao pasivni promatrači, dok nastavnik ima dominantnu ulogu. Također, prevladava individualni rad učenika koji se često svodi na rješavanje zadataka iz udžbenika. Ti zadaci najčešće su zatvorenog tipa, s jedinstvenim rješenjem i zadanom tehnikom rješavanja. U nastavi nedostaje zadataka otvorenog i problemskog tipa za čije rješavanje bi učenici trebali samostalno izabrati metodu. Isto tako, zadaci učestalo nisu povezani s realnim svijetom, životom i pravim problemima. (Prema [7])

Ova obilježja nastave zapravo uvelike utječu i na rezultate PISA i TIMSS istraživanja. PISA i TIMSS bave se evaluacijom obrazovnih sustava država svijeta kroz ispite znanja i vještina učenika. Njihovi ispiti zapravo ne ispituju učenike što su naučili nego kako koliko su to u stanju primijeniti. Zapravo, rezultati naših učenika su prilično poražavajući. Ono što je bitno naglasiti je da učenici u gospodarski razvijenim zemljama uglavnom postižu bolje rezultate na ovim testovima. (Prema [1])

Rijetko se u našim školama javlja timski rad učenika, a jedini pravi projektni zadatak je maturalni rad. Također, nastava je koncentrirana na realizaciju materijalnih i dijela funkcionalnih zadaća nastave. Nastava matematike najčešće se svodi na uvježbavanje tehnika za rješavanje zadataka. Ona rijetko izlazi iz okvira uskih matematičkih sadržaja, a gotovo nikad ne izlazi iz okvira školske matematike. (Prema [8])

Razmislimo li malo bolje, uočit ćemo da ovakav oblik nastave ne pogoduje razvoju matematičke kompetencije ni ostvarenju općih ciljeva matematičkog obrazovanja. Učenici često nemaju priliku argumentirati svoje zaključke, rješavati probleme pomoću matematike niti modelirati probleme. Tako se kod učenika ne javlja pozitivan stav prema matematici, a izostaje i odgovornost za vlastiti napredak u matematici. Zbog toga ne možemo reći da učenici na nastavi matematike razvijaju vještine i sposobnosti logičkog mišljenja, zaključivanja i generaliziranja. (Prema [8])

Nasuprot tradicionalnoj nastavi matematike stoji suvremena nastava matematike obično opisana sintagmom: Nastava orijentirana učenicima. Ona podrazumijeva orijentiranost učenicima, partnerski odnos učenika i nastavnika (s dominantnom učeničkom, a ne nastavničkom aktivnosti), otvorenost prema problemskim situacijama i zadacima, povezanost s drugim područjima znanosti i ljudske djelatnosti, te stvaranje matematičkih kompetencija. Obilježja su joj i suradničko-timski rad te razvoj organizacijskih i komunikacijskih kompetencija učenika. Takva nastava matematike realizira se kroz različite aktivnosti u kojima učenici samostalno otkrivaju matematičke koncepte i zakonitosti. Pri tome, oni imaju priliku argumentirati svoje zaključke, komunicirati s drugim učenicima, razvijati logičko mišljenje, ali i steći pozitivan stav prema matematici. (Prema [7])

U ovom radu naći će se desetak tema iz osnovnoškolske i srednjoškolske geometrije i aktivnosti prikladne za njihovu obradu. Te aktivnosti nude učenicima priliku da na zanimljiv način sami otkriju neke matematičke zakonitosti, da komuniciraju svoje ideje i da kao aktivni sudionici u nastavi steknu matematičke kompetencije.

Poglavlje 1

Planimetrija

1.1 Zbroj mjera unutrašnjih kutova trokuta

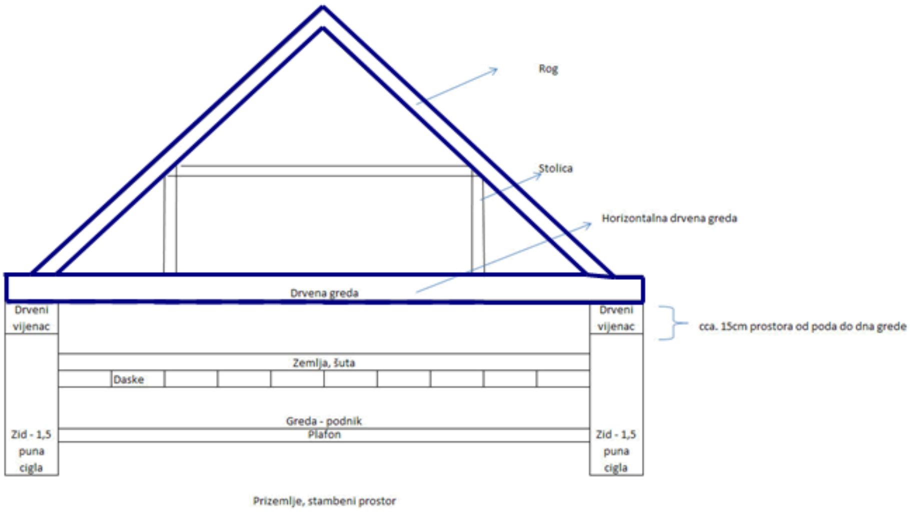
Aktivnost 1: Režimo i lijepimo

U šestom razredu osnovne škole učenici saznaju da je zbroj veličina svih unutrašnjih kutova trokuta jednak 180°. Do ovog saznanja učenici mogu doći samostalno navođeni nastavnikovim uputstvima. U nastavku je prikazan prijedlog aktivnosti kojom učenici otkrivaju ovu pravilnost. (Prema [10])

Prije same aktivnosti može se učenicima zadati neki zadatak iz realnog konteksta.

Motivacija

Na slici 1.1 se nalazi bokocrt kuće. Rogovi zatvaraju kut od 94°, *a s horizontalnom gredom zatvaraju kutove jednake veličine. Koliki je kut što ga zatvara rog s horizontalnom drvenom gredom? Do rješenja treba doći bez pribora za mjerenje.*

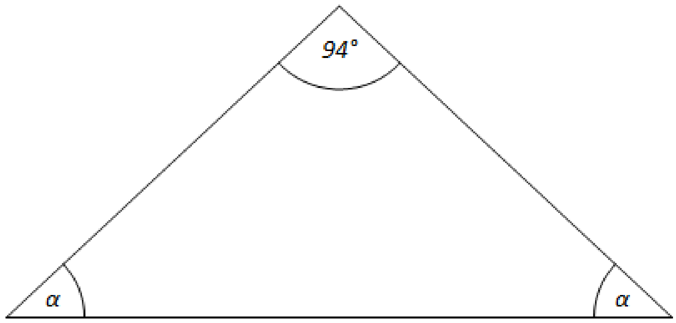


Slika 1.1: Motivacija

Nastavnik postavlja učenicima neka pitanja o zadatku.

- Imate li ideje za rješavanje zadatka?
- Matematički gledano, što slika zapravo prikazuje?
- Koji podaci su nam poznati?
- Što trebamo otkriti?
- Imamo li dovoljno podataka za rješavanje zadatka?
- Može li se ovaj zadatak uopće riješiti?

Učenici će uočiti da se na slici nalazi trokut kojemu je jedan kut mjere 94°, a preostala dva su sukladna. Primijetit će da zapravo trebaju otkriti mjeru tog kuta, no neće znati imaju li dovoljno podataka za rješavanje ni je li zadatak uopće rješiv. Dok učenici odgovaraju na pitanja, nastavnik na ploču crta sliku koja opisuje matematički problem. Crta trokut kada oni uoče trokut na bokocrtu. Označava kut od 94°, te sukladne kutove označi s α (slika 1.2). Tada im kaže da će danas na matematici otkriti kako možemo riješiti ovaj problem.



Slika 1.2: Apstrahiranje

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti koliki je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: metoda dijaloga, heuristička metoda

Potrebni materijal: izrezani trokuti za svaku skupinu učenika, škare, ljepilo

Detaljan tijek:

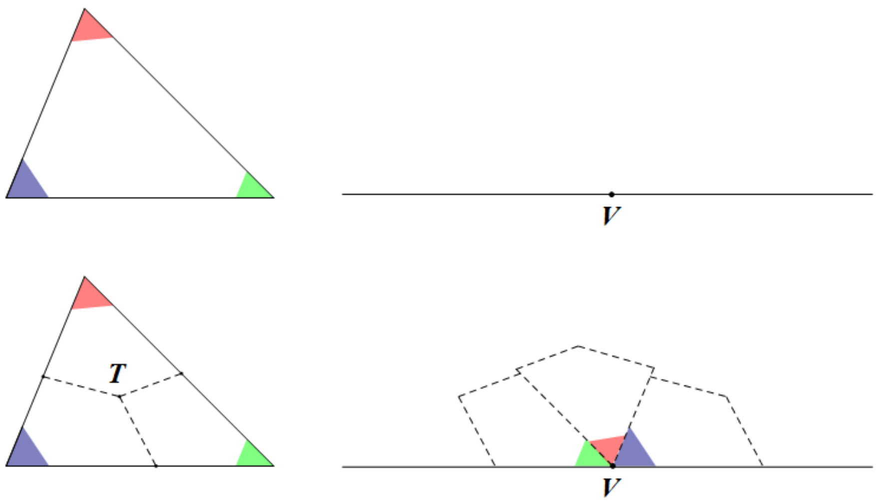
Na početku sata nastavnik podijeli razred u skupine. Svakoj skupini daje trokut, vodeći računa o tome da su zastupljene sve vrste trokuta s obzirom na duljine stranica i veličine kutova, te nastavni listić na kojemu su zapisane upute za učenike.

1. Bojicama obojite unutarnje kutove dobivenoga trokuta (svaki kut drugom bojom)
2. U bilježnicu nacrtajte pravac p i na njemu točku V.
3. Unutar dobivenoga trokuta nacrtajte točku T.
4. Na svakoj od stranica trokuta odaberite po jednu točku (bilo koju osim vrhova trokuta).
5. Nacrtajte dužine koje spajaju točku T s te tri točke.
6. Izrežite trokut po nacrtanim dužinama.
7. Dobivene dijelove zalijepite u svoje bilježnice tako da sva tri obojena kuta imaju vrh u točki V, da se jedan krak prvog kuta što ga lijepite u bilježnicu poklapa s pravcem p te da se jedan krak prvog nalijepljenog kuta podudara s jednim krakom drugog nalijepljenog kuta, a jedan krak drugog nalijepljenog kuta s jednim krakom trećeg nalijepljenog kuta.

8. Što uočavate?

   Učenici će uočiti da spojeni dijelovi trokuta čine ispruženi kut, odnosno da kad zbroje veličine tri unutarnja kuta trokuta dobiju 180°.

Diskusija: Nastavnik pita učenike kakve trokute su imali. Oni uočavaju da su imali trokute različitih vrsta i dimenzija, te da je u svakom od tih trokuta zbroj unutarnjih kutova bio jednak 180°. Učenici naslućuju da uočena zakonitost vrijedi za svaki trokut (slika 1.3).



Slika 1.3: Zbroj veličina unutrašnjih kutova trokuta

Aktivnost 2: Crtajmo i mjerimo

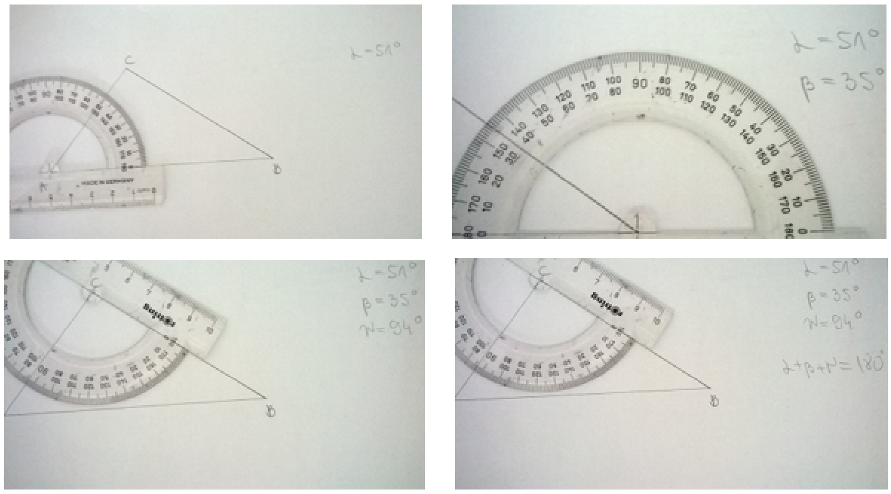
Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći individualno, provjeriti je li zbroj mjera unutrašnjih kutova slučajno odabranoga trokuta jednak 180°.

Nastavni oblik: individualni rad

Potrebni materijal: trokut ili ravnalo i kutomjer

Detaljan tijek:

Učenici u svoje bilježnice crtaju jedan trokut. Mjere veličine njegovih unutrašnjih kutova te računaju koliki je njihov zbroj (slika 1.4).



Slika 1.4: Crtajmo i mjerimo

Da bi se uvjerili da tvrdnja uistinu vrijedi općenito, nastavnik pokazuje pripremljene materijale u alatu dinamičke geometrije. Promatrajući pripremljene materijale, učenici navođeni nastavnikovim pitanjima donose zaključke te dokazuju tvrdnju.

Aktivnost 3: The Geometer's Sketchpad

Cilj aktivnosti: Učenici će, pomoću bilježnice u alatu dinamičke geometrije Geometer's Sketchpad, potvrditi zaključke do kojih su došli u prethodnoj aktivnosti

Nastavni oblik: frontalna nastava

Potrebni materijal: radna bilježnica u alatu dinamične geometrije

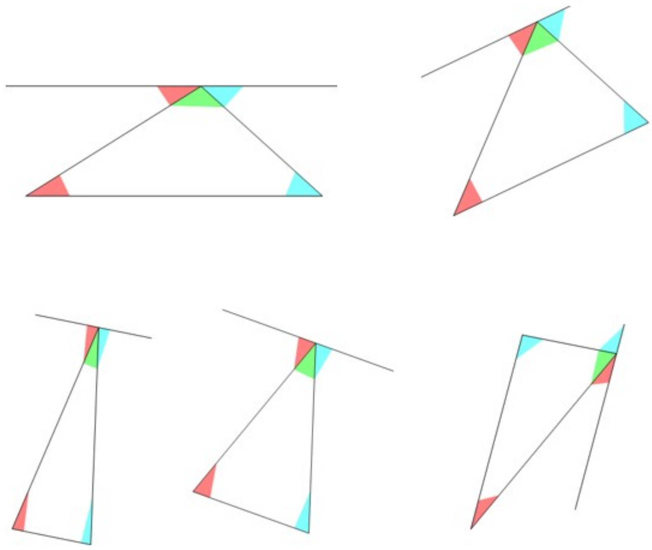
Detaljan tijek:

U alatu dinamične geometrije nastavnik konstruira trokut $\triangle ABC$ i oboji mu unutarnje kutove.

Kroz vrh C konstruira pravac p paralelan sa stranicom c trokuta $\triangle ABC$ (slika 1.5)

Diskusija: Pita učenike uočavaju li koje sukladne kutove na slici, te traži da objasne zašto su ti kutovi sukladni. Oni se prisjećaju presječnice usporednih pravaca, te odgovaraju na postavljena pitanja. Učenici uočavaju da kutovi α, β i γ zajedno čine ispruženi kut i zaključuju da vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. *(Preuzeto iz [12, str. 87-88])*

U alatu dinamične geometrije, nastavnik mijenja položaj točaka, a učenici primjećuju da zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta uvijek ostaje 180°.



Slika 1.5: Kutovi u trokutu: Sketchpad

Nakon toga, vraćamo se motivacijskom zadatku. Učenici će opet promotriti sliku koju smo nacrtali na početku. Još ne znaju rješavati jednadžbe, no zaključit će da vrijednost α mogu dobiti tako da od 180° oduzmu 94° te tako dobiveni rezultat podijele s 2. Zaključuju da vrijedi $\alpha = 43°$.

Kut što ga rogovi kuće zatvaraju s horizontalnom gredom jednak je 43°.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti da je zbroj unutrašnjih kutova trokuta jednak 180°
- učiti matematiku pomoću alata dinamične geometrije
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- suradnički raditi u skupinama
- mjeriti veličine kutova pomoću kutomjera

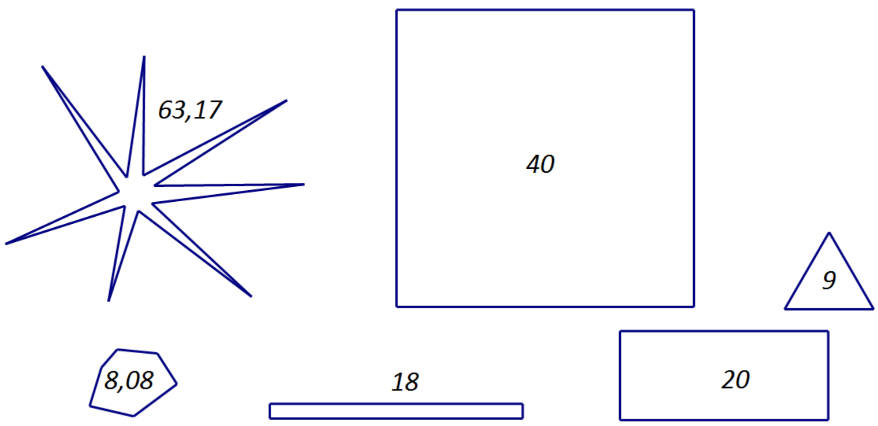
- zbrajati veličine kutova u stupanjskim mjerama

1.2 Opseg kruga

Aktivnost 1: Mjerimo i uočavamo

Jedna od tema koje se obrađuju u osnovnoj školi je i opseg kruga. U nastavku teksta opisana je aktivnost kojom učenici kroz suradnički rad samostalno dolaze do formule za opseg. (Prema [6])

Prije svega s učenicima bi trebalo ponoviti pojam opsega. Nastavnik im na prezentaciji može pokazati slike različitih mnogokuta takve da je unutar svakog mnogokuta ili pored njega zapisan broj koji govori koliki je opseg tog mnogokuta (slika 1.6). Nastavnik tada pita učenike uočavaju li na koji način su mnogokuti sa slika povezani s brojem koji piše pored njih. Učenici bi mogli pomisliti da se radi o površinama likova, no pažljivijim razmatranjem shvatit će da to ne može biti. Tada će uočiti da ti brojevi govore koliki je opseg svakog od mnogokuta.



Slika 1.6: Pojam opsega

Potom ih nastavnik pita što je opseg mnogokuta. Oni bi mogli odgovoriti da je opseg mnogokuta broj koji nam govori koliki je zbroj duljina svih stranica tog mnogokuta. Možemo li računati opseg kruga? Učenici naslućuju da mogu. Čemu je jednak opseg kruga? Učenici analogijom s opsegom mnogokuta dolaze do zaključka da je opseg kruga zapravo duljina kružnice koja omeđuje taj krug.

Kako bi učenici uočili da uistinu postoji potreba za računanjem opsega kruga, dobro je aktivnost započeti s nekim problemom iz stvarnog života koji učenici ne znaju riješiti.

Motivacija:

Nikola želi popločiti rub bazena kružnog oblika. Duljina jedne pločice je 20 cm, a bazen ima promjer 5 metara. Koliko pločica treba Nikoli za popločavanje?

Nastavnik pita učenike što zapravo trebaju izračunati u zadatku. Oni uočavaju da trebaju saznati kolika je duljina ruba bazena kako bi otkrili koliko pločica treba za popločavanje. Promotrimo sada problem s matematičkog aspekta.

Kakav oblik ima bazen?

Bazen ima oblik kruga.

Ako promatramo bazen kao krug, što je onda duljina ruba tog bazena?

To je zapravo duljina kružnice koja omeđuje taj krug.

Čemu je jednaka duljina kružnice koja omeđuje neki krug?

Duljina kružnice jednaka je opsegu tog kruga.

Dakle, što mi zapravo trebamo napraviti u zadatku?

Trebamo izračunati opseg kruga.

Učenici uočavaju da ne znaju kako izračunati opseg kruga.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četveročlanim skupinama, otkriti formulu za opseg kruga.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: metoda eksperimenta, metoda dijaloga, heuristička metoda

Potrebni materijal: objekti oblika valjka ili stošca za svaku skupinu učenika,konac, ravnalo, nastavni listići s tablicama

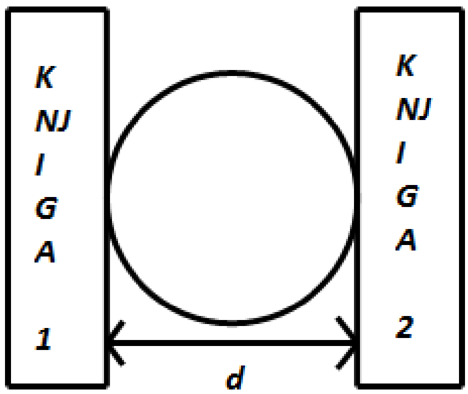
Detaljan tijek:

Na početku sata nastavnik podijeli razred u skupine. Svakoj skupini daje komad konca i objekte oblika valjka ili stošca, npr. čaše, kutije od kreme, limenke i slično. Nastavnik prvo kaže učenicima da pogledaju dno dobivenoga predmeta i pita ih o kojem se geometrijskom liku radi. Oni uočavaju da se radi o krugu. Tada im nastavnik kaže da trebaju izmjeriti promjer i opseg tog kruga. Na ploču crta tablicu i kaže učenicima da iste takve tablice nacrtaju u svoje bilježnice te da dobivene rezultate zapišu u tablice (tablica 1.1).

d	O	$O+d$	$O-d$	Od	$O:d$

Tablica 1.1: Primjer prazne tablice: opseg kruga

Napominje učenicima da promjer i opseg trebaju biti prikazani u istim mjernim jedinicama (cm). Pita ih i na koliko decimala ima smisla zapisivati rezultat. Oni primjećuju da ravnalom mogu izmjeriti O i d približno, s preciznošću od milimetra, te da stoga rezultat možemo zaokružiti na jednu decimalu. Da bi izmjerili promjer kruga, uz rub stola trebaju staviti svoj predmet te njemu slijeva i zdesna prisloniti uspravno po jednu deblju knjigu tako da one budu paralelne jedna na drugu. Nakon toga trebaju izmjeriti udaljenost među knjigama. Ta udaljenost jednaka je promjeru kruga (slika 1.7).



Slika 1.7: Promjer

Tada trebaju izmjeriti opseg kruga. Primjećuju da je opseg zapravo duljina kružnice koja omeđuje krug te da mogu koncem omotati krug, a zatim ravnalom izmjeriti koliko im je konca trebalo za to.

Učenici mjere promjer kruga i zapisuju ga u tablicu. Zatim špagom omotavaju krugove, pa mjere koliko im je konca trebalo da omotaju krug, tj. kolika je duljina kružnice, odnosno opseg dobivenoga kruga. Dok učenici rade, nastavnik obilazi razred. Kada dobiju i opseg O i promjer d, učenici računaju vrijednosti izraza $O+d$, $O-d$, Od i $O:d$ i zapisuju ih u svoje bilježnice. Na kraju po jedan učenik iz svake grupe dolazi pred ploču i zapisuje podatke koje je dobila njegova grupa i u tablicu na ploči. Tada se provodi razredna diskusija. Nastavnik ih pita uočavaju li kakve pravilnosti u tablici na ploči, a oni uočavaju da je zadnji stupac u tablici približno jednak za svaki od krugova. Nastavnik im napominje da na rezultat utječe preciznost, odnosno nepreciznost u mjerenju. Govori im da je omjer opsega kruga i njegova promjera konstantan te da on iznosi približno 3,14. Nastavnik taj broj označava slovom π te im priča kratku priču o tom broju. *(Preuzeto iz [4, str. 150])*

Da bi došli do željenog zaključka postavlja im sljedeća pitanja:

1. Koja je veza između opsega i promjera kruga?
2. Koja je veza između promjera i polumjera kruga?
3. Što zaključujete, koja je onda veza između opsega kruga i njegova polumjera?

Učenici uočavaju da je veza opsega kruga i njegova promjera dana formulom $O = d\pi$, a veza promjera i polumjera s $d = 2r$ te zaključuju da je onda veza između opsega kruga i njegova polumjera dana sa $O = 2r\pi$.

Primjer ispunjene tablice (tablica 1.2):

d	O	$O+d$	$O-d$	Od	$O:d$
2	6,3	8,3	4,3	12,6	**3,15**
4	12,8	16,8	8,8	51,2	**3,2**
6	19	25	13	114	**3,17**
8	25	33	17	200	**3,125**
10	32	42	22	320	**3,2**
12	40	52	28	480	**3,33**
14	43,9	57,9	29,9	614,6	**3,14**

Tablica 1.2: Primjer ispunjene tablice: opseg kruga

Kada su došli do ovih rezultata, učenici mogu s lakoćom riješiti motivacijski zadatak. Oni će uočiti da je duljina ruba bazena jednaka 5π metara, tj. približno 15,71 m ili 1571 cm.

Duljina jedne pločice jednaka je 20 cm. Dijele ove dvije vrijednosti te dobivaju rezultat $1571 : 20 \approx 78,54$. Uočavaju da nema smisla naručiti 78,54 pločica, a da im je 78 pločica premalo. Zaključuju da im je potrebno 79 pločica kako popločali rub bazena.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti formulu za opseg kruga
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- uočavati pravilnosti u tablici
- mjeriti opseg i promjer kruga pomoću nastavnih sredstava
- povezati matematiku sa svakodnevnim životom
- primijeniti formulu za opseg kruga pri rješavanju problema iz svakodnevnog života

1.3 Pitagorin poučak

Aktivnost 1: Preslagivanje

Kako bi učenici bolje zapamtili odnos među stranicama pravokutnog trokuta, može se napraviti kratki eksperiment. Učenici mogu izrezivanjem i preslagivanjem papira otkriti povezanost između površine kvadrata nad hipotenuzom i površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta.

Motivacija:

Koliko duge moraju biti ljestve ako im podnožje mora biti udaljeno od zida 0.8 m kako bi dosegnule visinu od 4 m? (Prema [10])

Učenici će nacrtati skicu na ploči i u svoje bilježnice te će uočiti da se na slici pojavljuje pravokutni trokut s katetama duljina 0.8 m i 4 m. Primijetit će da zapravo trebaju otkriti kolika je duljina hipotenuze tog pravokutnog trokuta, ali će shvatiti da ne znaju kako riješiti problem.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u parovima, otkriti Pitagorin poučak.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Nastavna metoda: metoda eksperimenta, metoda dijaloga, heuristička metoda

Potrebni materijal: geometrijski pribor, škare, prazan list papira i nastavni listići s uputstvima za rad za svaku skupinu učenika

Detaljan tijek:

Nastavnik podijeli učenike u skupine te svakoj skupini daje prazan list papira i nastavni listić s uputama za rad. Dok učenici rješavaju zadatke, nastavnik obilazi razred i pomaže onima koji imaju problema s razumijevanjem zadatka.

Upute s listića:

1. Na prazan papir koji ste dobili nacrtajte pravokutni trokut, a nad svakom njegovom stranicom nacrtajte kvadrat.
2. Kvadrat nad hipotenuzom obojite crvenom bojom, a preostale jedan plavom, a jedan žutom bojom.
3. Izrežite sve kvadrate iz papira.

Možete li plave i žute kvadrate izrezati na manje dijelove i složiti ih tako da njima prekrijete cijeli crveni kvadrat?

Učenici pokušavaju crveni kvadrat pokriti dijelovima plave i žute boje. Neki će možda vrlo lako prekriti crveni kvadrat dijelovima plave i žute i boje dok će kod drugih taj postupak potrajati. Možda će im se činiti da nikada neće komadići biti odgovarajućeg oblika da kvadrat bude u cijelosti prekriven njima već da će uvijek jedan mali dio biti neprekriven, dok će mali komadić papira stršiti sa strane (slika 1.8). Ipak uočit će da površina crvenog kvadrata mora biti jednaka ili približno jednaka zbroju površina preostalih kvadrata. Nakon toga slijedi razredna diskusija. Nastavnik postavlja učenicima sljedeća pitanja:

1. Jeste li uspjeli crveni kvadrat cijeli prekriti plavim i žutim dijelovima?
2. Što to znači, u kakvom su odnosu površina crvenog kvadrata i preostalih dvaju kvadrata?
3. Ako duljinu hipotenuze trokuta označimo s c, čemu je jednaka površina crvenog kvadrata?
4. Ako duljinu jedne katete trokuta označimo s a, čemu je jednaka površina kvadrata nad tom katetom?

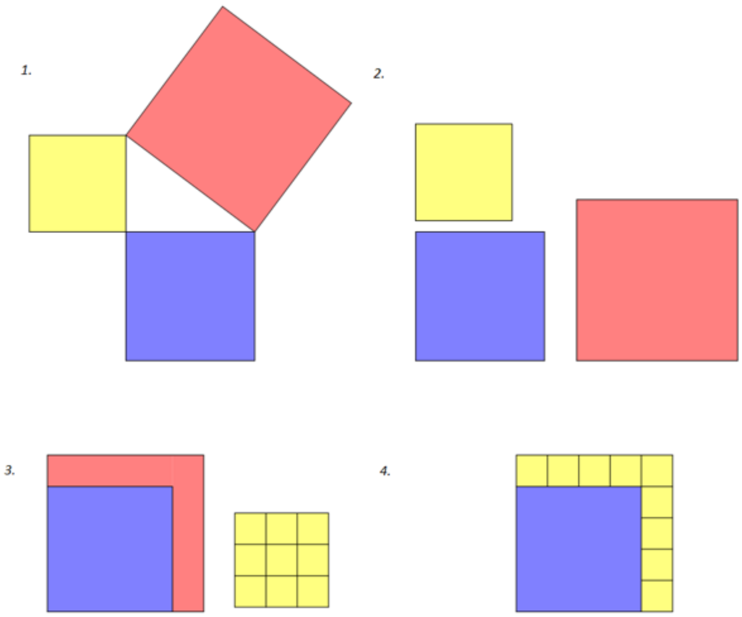
5. Ako duljinu druge katete trokuta označimo s b, čemu je jednaka površina kvadrata nad tom katetom?

Učenici uočavaju da se crveni kvadrat može cijeli prekriti s plavim i žutim dijelovima. Analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije zaključuju da je površina crvenog kvadrata jednaka zbroju površina plavog i žutog kvadrata, tj. da je površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama. Simbolički zapisuju $c^2 = a^2 + b^2$. Da bi se uvjerili da to vrijedi općenito nastavnik im pokazuje pripremljene materijale u alatu dinamične geometrije.

Nakon toga zapisuju zaključak. Nastavnik im kaže da taj poučak koji su otkrili nazivamo Pitagorin poučak po poznatom matematičaru Pitagori.

Pitagorin poučak. U pravokutnom trokutu je kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata kateta.

Naglašava da ovaj odnos između stranica trokuta vrijedi samo kad je trokut pravokutan.



Slika 1.8: Pitagorin poučak

Aktivnost 2: Provjerimo

Cilj aktivnosti: Učenici će , pomoću bilježnice u alatu dinamičke geometrije The Geometer's Sketchpad, potvrditi zaključke do kojih su došli u prethodnoj aktivnosti.

Nastavni oblik: frontalna nastava

Nastavna metoda: metoda demonstracije

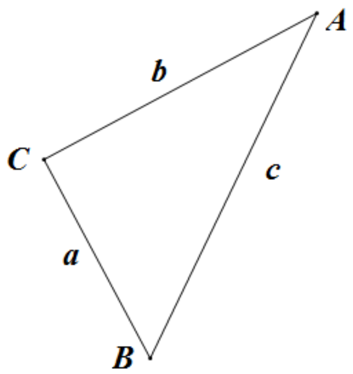
Potrebni materijal: radna bilježnica u alatu dinamične geometrije

Detaljan tijek:

1. U alatu dinamične geometrije nastavnik konstruira pravokutni trokut $\triangle ABC$.
2. U Sketchpadu mjeri duljine stranica trokuta.
3. Računa vrijednosti izraza a^2, b^2, c^2 i $a^2 + b^2$.
4. Tabelira podatke, a potom mijenja duljine stranica trokuta. (slika 1.9)

Učenici uočavaju da neovisno o duljinama stranica vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$.

a	b	c	$a \cdot a$	$b \cdot b$	$c \cdot c$	$(a \cdot a) + (b \cdot b)$
7,40 cm	12,00 cm	14,09 cm	54,73 cm^2	143,88 cm^2	198,61 cm^2	198,61 cm^2
5,32 cm	8,63 cm	10,13 cm	28,30 cm^2	74,41 cm^2	102,71 cm^2	102,71 cm^2
3,32 cm	5,38 cm	6,32 cm	11,01 cm^2	28,93 cm^2	39,94 cm^2	39,94 cm^2
5,23 cm	8,47 cm	9,95 cm	27,30 cm^2	71,79 cm^2	99,09 cm^2	99,09 cm^2
3,95 cm	8,47 cm	9,35 cm	15,60 cm^2	71,79 cm^2	87,39 cm^2	87,39 cm^2
2,77 cm	5,94 cm	6,56 cm	7,68 cm^2	35,31 cm^2	42,99 cm^2	42,99 cm^2
4,32 cm	5,94 cm	7,35 cm	18,66 cm^2	35,31 cm^2	53,97 cm^2	53,97 cm^2
4,32 cm	5,94 cm	7,35 cm	18,66 cm^2	35,31 cm^2	53,97 cm^2	53,97 cm^2



Slika 1.9: Pitagorin poučak: Sketchpad

Učenici se na kraju aktivnosti vraćaju na motivacijski zadatak. Primjenom Pitagorinog poučka dolaze do zaključka da hipotenuza pravokutnog trokuta s katetama duljina 4 m i 0.8 m ima približnu duljinu 4.08 m. Zaključuju da su ljestve duge 4 m i 8 cm.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti Pitagorin poučak
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezati matematiku sa svakodnevnim životom
- primijeniti formulu za Pitagorin poučak pri rješavanju problema iz svakodnevnog života
- učiti matematiku pomoću alata dinamične geometrije

1.4 Površina paralelograma

U osnovnoj i u srednjoj školi dosta vremena se posvećuje četverokutima. U nastavku je prikazan niz aktivnosti kojima učenici na zanimljive i raznovrsne načine mogu doći do površina nekih četverokuta. Aktivnosti kojima učenici otkrivaju formule za površinu kvadrata i pravokutnika prikladne su za peti razred osnovne škole. Preostale aktivnosti prikladne su za šesti razred osnovne škole, a dokazi za 1. razred srednjih škola (ovisno o smjeru).

Potreba za računanjem površine četverokuta se dosta često javlja u svakodnevnom životu. Zbog toga bi se prije aktivnosti mogao postaviti problem iz realnog života povezan s temom. Dobro bi bilo da je taj primjer povezan s učeničkim interesima.

Aktivnost 1: Površina kvadrata i površina pravokutnika

Motivacija

Marko popločava hodnik. Hodnik ima oblik pravokutnika dimenzija 1.8 m $\times$ 3 m. Pločice su dimenzija 60 cm $\times$ 60 cm. Koliko pločica treba Marku za popločavanje?

Što u zadatku trebamo napraviti?

Trebamo izračunati površinu hodnika i površinu pločice te izračunati koliko pločica treba za popločavanje hodnika.

Kakvog su oblika pločice, a kakvog hodnik?

Hodnik ima oblik pravokutnika, a pločice oblik kvadrata.

Matematički gledano, što trebamo napraviti?

Trebamo izračunati površinu pravokutnika i površinu kvadrata. Nakon toga trebamo odrediti koliko je puta površina pravokutnika veća od površine kvadrata.

Znamo li mi izračunati površinu pravokutnika i površinu kvadrata?

Ne, ne znamo.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u paru, otkriti formule za površinu kvadrata i pravokutnika.

Nastavni oblik: rad u paru

Nastavna metoda: metoda uočavanja pravilnosti

Potrebni materijal: milimetarski papir za svaki par učenika

Detaljan tijek:

Nastavnik rasporedi učenike u parove i svakom paru daje milimetarski papir. Prvo ih pita kolika je površina kvadratića sa stranicom duljine 1 mm. Oni se prisjećaju da je njegova površina jednaka 1 mm^2 . Kolika je površina kvadratića sa stranicama duljine 1 cm? Učenici uočavaju da je njegova površina jednaka 1 cm^2.

Kako bismo mogli izračunati površinu nekog geometrijskog lika čija stranice nisu jedinične duljine? Mogli bismo prebrojiti koliko kvadratića jedinične površine stane u taj geometrijski lik. (Prema [5])

Tada nastavnik rasporedi učenike u parove i dijeli svakom paru učenika milimetarski papir s oznakom A, B, C ili D. Svaki par učenika na milimetarski papir treba nacrtati jedan pravokutnik i jedan kvadrat zadanih dimenzija. Parovi s oznakom A crtaju kvadrat s duljinom stranice 2 cm i pravokutnik s duljinama stranica 4 cm i 6 cm. Parovi s oznakom B crtaju kvadrat s duljinom stranice 3 cm i pravokutnik s duljinama stranica 3 cm i 7 cm. Parovi s oznakom C crtaju kvadrat s duljinom stranice 4 cm i pravokutnik s duljinama stranica 2 cm i 6 cm. Parovi s oznakom D crtaju kvadrat s duljinom stranice 5 cm i pravokutnik s duljinama stranica 2 cm i 3 cm. Učenici prebrojavaju od koliko se jediničnih kvadrata sastoje zadani pravokutnici i kvadrati. Na kraju aktivnosti učenici upisuju svoja rješenja u tablice na ploči. Nastavnik ih pita uočavaju li kakve pravilnosti u tablicama. Oni uočavaju da je površina kvadrata sa stranicom duljine 2 cm jednaka 4 cm^2 , a sa stranicom duljine 3 cm jednaka 9 cm^2. Također, uočavaju da je površina kvadrata sa stranicom duljine 4 cm jednaka 16 cm^2, dok je površina kvadrata sa stranicom duljine 5 cm jednaka 25 cm^2. Nastavnik ih tada pita što misle čemu je jednaka površina kvadrata sa stranicom duljine a. Analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije učenici dolaze do zaključka da je površina kvadrata sa stranicom duljine a jednaka $a \cdot a$.

Tada učenici promatraju drugu tablicu. Oni uočavaju da je površina pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 6 cm jednaka 24 cm^2, da je površina pravokutnika sa stranicama duljina 3 cm i 7 cm jednaka 21 cm^2, da je površina pravokutnika sa stranicama duljina 2 cm i 6 cm jednaka 12 cm^2 dok je površina pravokutnika sa stranicama duljina 2 cm i 3 cm jednaka jednaka 6 cm^2 (slika 1.10).

Nakon toga ih nastavnik pita što misle čemu je jednaka površina pravokutnika sa stranicama duljina a i b. Oni analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije dolaze do zaključka da je površina pravokutnika sa stranicama duljina a i b jednaka $P = ab$.

KVADRAT

a (cm)	P (cm^2)
2	4
3	9
4	16
5	25

PRAVOKUTNIK

a (cm)	b (cm)	P (cm^2)
4	6	24
3	7	21
2	6	12
2	3	6

Slika 1.10: Površina kvadrata i pravokutnika

Nakon otkrivanja jednakosti, učenici trebaju riješiti motivacijski zadatak. Sada će oni lako izračunati da je površina hodnika jednaka 1.8 m $\cdot$ 3 m = 5.4 m^2. Uočit će da su dimenzije hodnika dane u metrima, a pločica u centimetrima. Zbog toga će pretvoriti metre kvadratne u centimetre kvadratne. Zaključit će da je površina hodnika jednaka 54 000 cm^2. Uočit će da je površina svake pločice jednaka 60 cm $\cdot$ 60 cm = 3600 cm^2.

Računaju 54000 : 3600 = 15.

Za popločavanje hodnika Marku će trebati 15 pločica.

Nastavnik može postaviti učenicima pitanje za dodatno razmišljanje.

Hoće li Marko morati rezati pločice ili neće?

Ako će učenicima biti problem odrediti treba li rezati pločice ili ne, nastavnik im može nacrtati na ploču pravokutnik koji će predstavljati hodnik. U taj pravokutnik potom treba ucrtavati kvadrate koji će predstavljati pločice. Treba ih pitati gdje bi bilo najbolje staviti prvu pločicu. Oni će uočiti da prvu pločicu treba staviti tako da se njena dva ruba podudaraju s rubovima hodnika. Kako ćemo nastaviti postupak slaganja? Slagati ćemo kockice jednu do druge dok nam bude stalo, a kada ne bude, počet ćemo ih slagati u novi red. Nastavnik će u pravokutnik ucrtavati kvadrate, a nakon svakog ucrtanog pitat će učenike stane li u taj red još jedan kvadrat. Učenici će uočiti da u svaki red stane točno 3 kvadrata, a u svaki stupac točno 5. Zaključit će da Marko neće morati rezati pločice kako bi popločio hodnik.

Aktivnost 2: Površina paralelograma

Motivacija

Lana i Tena posvađale su se neki dan oko toga koja od njih ima veće dvorište. Lana tvrdi da je njeno dvorište veće, a Tena obratno. Oba dvorišta imaju oblik paralelograma. Lanino je dugo 5 m, a široko 4 m. Tenino je dugo 6 m, a široko 3 m. Koja je djevojčica u pravu?

Što trebamo napraviti u zadatku?

Trebamo odrediti površinu svakog dvorišta. Tada ćemo vidjeti koja je djevojčica u pravu.

Kakvog oblika su dvorišta?

Dvorišta imaju oblik paralelograma.

Prema tome, što zapravo trebamo napraviti?

Trebamo izračunati površine paralelograma.

Znamo li to napraviti?

Ne, ne znamo.

Na ploču možemo skicirati slike dvorišta te dogovorno naznačiti njegovu širinu i dužinu. Tako će učenici vidjeti da je u zadatku zapravo zadana duljina stranice paralelograma i visina na tu dužinu.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u paru, otkriti formulu za površinu paralelograma

Nastavni oblik: rad u paru

Nastavna metoda: metoda uočavanja pravilnosti

Potrebni materijal: paralelogrami od papira, škare

Detaljan tijek:

Nastavnik rasporedi učenike u parove te daje svakom paru jedan list A4 papira sa slikama paralelograma na njima. Kaže im da će danas računati površinu paralelograma te ih pita imaju li ideju kako bi mogli izračunati površinu paralelograma. Pita ih kojim geometrijskim likovima znaju izračunati površinu. Oni znaju izračunati površinu kvadrata i pravokutnika. Može li nam to pomoći pri računanju površine paralelograma? Učenici uz nastavnikovo navođenje dolaze do zaključka da trebaju razrezati paralelogram i presložiti tako dobivene dijelove tako da dobiju lik kojemu znaju izračunati površinu. Bitno je pitati učenike hoće li se površina promijeniti ako razrežemo paralelogram i presložimo njegove dijelove. Oni će zaključiti da se površina ne mijenja jer ne odbacujemo dijelove niti dodajemo još neke dijelove. Kako bismo mogli razrezati paralelogram? Učenicima će vjerojatno htjeti rezati duž dijagonale ili visine. Nastavnik im kaže da režu duž visine. Oni ucrtavaju visinu paralelograma koja paralelogram dijeli na pravokutni trokut i pravokutni trapez. Tada mijenjaju položaj trokuta i uočavaju da ako ga stave na odgovarajuće mjesto dobivaju pravokutnik. Kako računamo površinu pravokutnika? Površinu pravokutnika računamo kao umnožak duljina njegovih stranica. Ako pravokutnik ima stranice duljina a i b, onda je njegova površina jednaka $P = ab$. Koje su duljine stranica dobivenoga pravokutnika? Dobiveni pravokutnik ima stranice duljina a i v_a pri čemu je v_a visina paralelograma na stranicu a. Što zaključujete? Kako bismo mogli računati površinu paralelograma? Učenici zaključuju da bi površinu paralelograma mogli računati po formuli $P = av_a$. Da bi se uvjerili da to vrijedi općenito izrezuju i druge paralelograme i preslaguju njihove dijelove kako bi vidjeli hoće li opet dobiti pravokutnik (slika 1.12). Analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije dolaze do zaključka da uočena formula vrijedi općenito.

Dokažimo da uočena tvrdnja uistinu vrijedi.

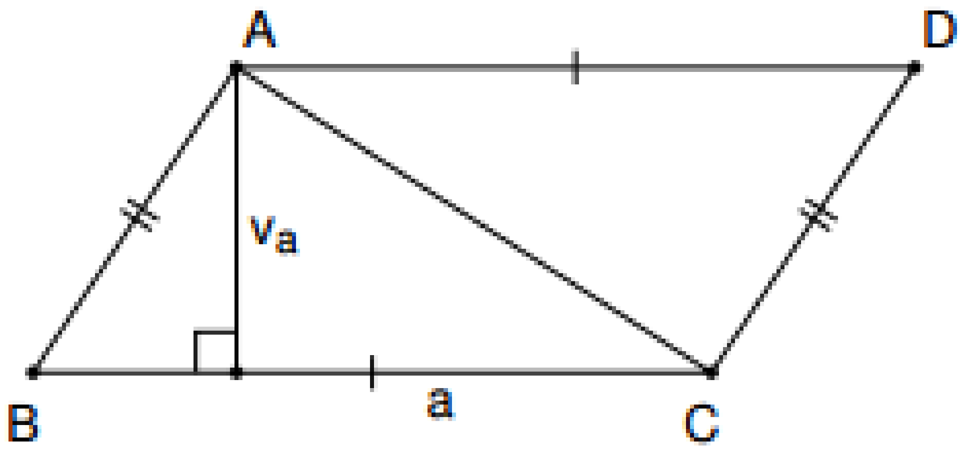
Neka je $ABCD$ paralelogram točka E nožište visine iz vrha A na pravac BC

Prema S-S-K teoremu trokuti AED i BFC su sukladni pa imaju jednaku površinu.

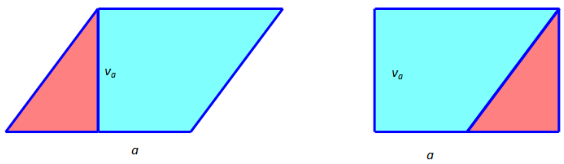
Stoga je

$P(ABCD) = P(AED) + P(EBCD) = P(BFC) + P(EFCD) = av$

jer je $EFCD$ pravokutnik sa stranicama duljina a i v (slika 1.11).



Slika 1.11: Prvi dokaz



Slika 1.12: Prvi način

Vratimo se na motivacijski zadatak. Sada će učenici bez problema odrediti da je površina Laninog dvorišta jednaka 5 m · 4 m = 20 m^2. Vidjet će i da je površina Teninog dvorišta jednaka 6 m · 3 m = 18 m^2. Zaključit će da je Lanino dvorište veće od Teninog, tj. da je Lana u pravu.

Nastavnik im napominje da isto tako površinu paralelograma sa stranicama duljina a i b možemo računati i po formuli $P = bv_b$.

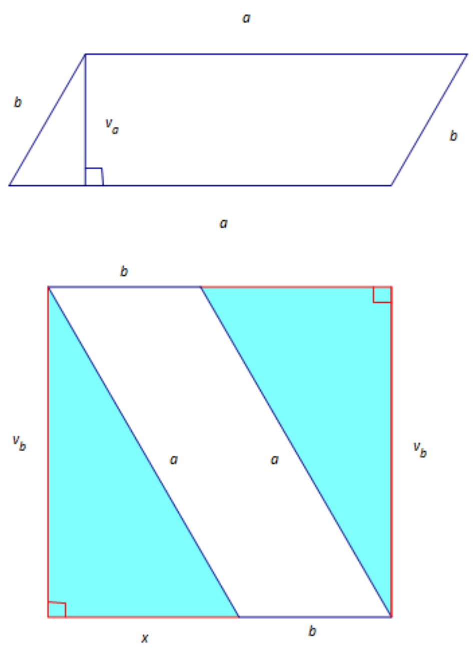
U ovoj aktivnosti učenici ne dokazuju da uistinu vrijedi $P = bv_b$. Ipak ćemo u nastavku pojasniti zašto to vrijedi. Nadopunimo paralelogram do pravokutnika sa stranicama duljina v_b i $b + x$ (kao na slici 1.13). Uočimo da se dobiveni pravokutnik sastoji od paralelograma čiju površinu tražimo i dvaju pravokutnih trokuta. Hipotenuza svakog od tih dvaju trokuta

je a, a jedna kateta je v_b. Prema tome, ta dva trokuta su sukladna po S-S-K poučku o sličnosti. Površina svakog od tih trokuta (uz oznake kao na slici 1.13) iznosi $P = \frac{1}{2}xv_b$.
Dakle, zbroj površina tih dvaju trokuta jednak je $P_{trokuti} = 2 \cdot \frac{1}{2}xv_b = xv_b$.

(Prema [3])

Za površinu pravokutnika vrijedi $P_{pravokutnik} = (b + x)v_b = bv_b + xv_b$.

Uočimo da je površina danog paralelograma jednaka $P = P_{pravokutnik} - P_{trokuti}$. Odavde slijedi $P = bv_b + xv_b - xv_b$. Dakle, $P = bv_b$. (Prema [5])



Slika 1.13: Površina paralelograma

Aktivnost 3: Površina romba

Motivacija

Deanu se svidio Lukin zmaj od papira pa je odlučio sebi napraviti isti takav. Zmaj ima oblik romba. Luka mu je rekao da su udaljenosti između dvaju nasuprotnih vrhova romba 30 cm i 52 cm. Koliko papira treba Deanu za zmaja?

Matematički gledano, što trebamo napraviti u zadatku?

Trebamo izračunati površinu romba.

Koji podaci su nam poznati?

Poznate su nam duljine dijagonala romba.

Imate li ideju za rješavanje zadatka?

Nastavnik im kaže da će otkriti kako mogu riješiti ovaj problem.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četveročlanim skupinama, otkriti formulu za površinu romba

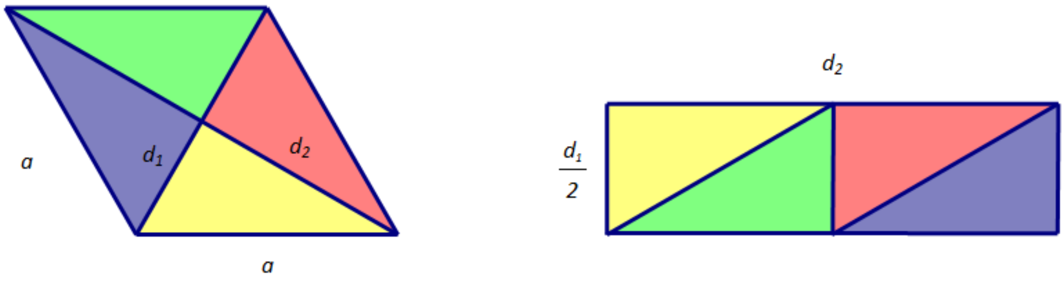
Nastavni oblik: rad u četveročlanim skupinama

Nastavna metoda: metoda uočavanja pravilnosti

Potrebni materijal: 4 romba od papira za svaku skupinu učenika, škare

Detaljan tijek:

Nastavnik pita učenike bi li znali izračunati površinu romba. Učenici uočavaju da je romb također paralelogram te da bismo površinu romba mogli računati po formuli za površinu paralelograma $P = av$. U prošlom primjeru rezali smo paralelogram duž jedne njegove visine kako bismo otkrili kolika mu je površina. Što je s rombom? Možemo li i romb izrezati na manje dijelove tako da njihovim preslagivanjem dobijemo geometrijski lik čiju površinu smo ranije naučili računati? Pokušajte izrezati romb na manje dijelove tako da njihovim preslagivanjem dobijete pravokutnik, ali ne tako da ga razrežete duž njegove visine. Učenici se konzultiraju u skupinama te traže odgovarajući način da razrežu romb. Za to vrijeme nastavnik obilazi učenike i prati njihov rad te im sugerira rezanje duž dijagonala. Na taj način nastat će četiri sukladna pravokutna trokuta čijim preslagivanjem bi mogli složiti pravokutnik. Ovisno o načinu na koji su slagali, dobili bi pravokutnik sa stranicama duljina $\frac{d_1}{2}$ i d_2 ili d_1 i $\frac{d_2}{2}$. Neovisno o izgledu pravokutnika, primjenjujući formulu za površinu pravokutnika, učenici će doći do zaključka da površinu romba možemo računati po formuli $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ pri čemu su d_1 i d_2 duljine dijagonala romba (slika 1.14).



Slika 1.14: Površina romba

Ovisno o razrednom odjelu u kojem se aktivnost odvija, nastavnik može postaviti još neka pitanja, npr. "Kako možemo biti sigurni da je dobiveni geometrijski lik uistinu pravokutnik"? Ova aktivnost primjerena je za 6. razred osnovne škole te se u tom slučaju ne očekuje da učenici dokazuju da za površinu romba uistinu vrijedi dobivena formula. Ipak učenici se mogu uvjeriti da tvrdnja vrijedi. Nastavnik im postavlja pitanja.

U kakvom su odnosu ova 4 trokuta što ste ih dobili?

Trokuti su sukladni.

Kako znate da su trokuti sukladni?

Vidimo da su trokuti sukladni kada ih preklopimo.

U kakvom su odnosu kutovi u tim trokutima koji se nalaze nasuprot njihovih najduljih stranica?

Ti kutovi su također sukladni.

Kolika je suma tih četiriju kutova?

Njihova je suma $360°$.

Kako znate da je njihova suma $360°$?

Znamo da to vrijedi jer ta četiri kuta čine puni kut.

Kolika je onda veličina svakog od njih?

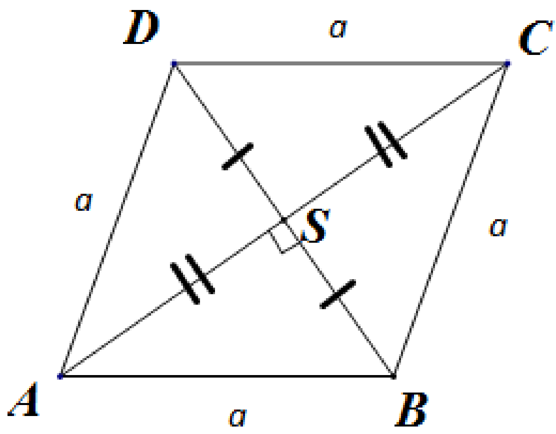
Veličina svakog od njih je $360° : 4 = 90°$.

Je li onda lik koji smo dobili preslagivanjem stvarno pravokutnik?

Da, lik koji smo dobili preslagivanjem je uistinu pravokutnik.

U srednjoj školi, mogao bi se provesti i formalni dokaz. Prvo bi trebalo pokazati da se dijagonale paralelograma raspolavljaju.

Neka je $ABCD$ paralelogram i točka S sjecište njegovih dijagonala (slika 1.15).



Slika 1.15: Romb - srednja škola

Primjećujemo da zapravo treba dokazati da vrijedi

$$|SD| = |SB| \text{ i } |AS| = |CS|.$$

Da bismo to dobili dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\triangle ABS \cong \triangle CDS.$$

Znamo da je $|CD| = |AB| = a$. Također, mjera kuta $\measuredangle SAB$ jednaka je mjeri kuta $\measuredangle SCD$ dok je mjera kuta $\measuredangle ABS$ jednaka mjeri kuta $\measuredangle CDS$ jer su to kutovi uz transverzalu. Odavde, po K-S-K poučku o sukladnosti slijedi da su trokuti sukladni, pa su im i odgovarajuće stranice sukladne. Dakle,

$$|SD| = |SB| \text{ i } |AS| = |CS|$$

što je i trebalo pokazati.

Kada smo to pokazali, lako se vidi da se romb sastoji od 4 sukladna trokuta s katetama duljina $\frac{d_1}{2}$ i $\frac{d_2}{2}$ i hipotenuzom duljine a.

Zbog toga su kutovi $\measuredangle ASB$, $\measuredangle BSC$, $\measuredangle CSD$ i $\measuredangle DSA$ jednakih mjera.

Kako je zbroj njihovih mjera jednak 360° (puni kut), mjera svakog od njih jednaka je 360° : 4 = 90°.

Dakle, dijagonale romba su međusobno okomite.

Uočimo da i površinu romba možemo izračunati preko površina četiriju trokuta što ga čine.

Površina trokuta jednaka je

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2},$$

odnosno

$$P_1 = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}.$$

Dakle, površina romba jednaka je

$$P = 4P_1 = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

(Prema [3])

Vratimo se motivacijskom zadatku. Možemo li ga sada riješiti?

Učenici uočavaju da je površina zmaja jednaka $P = \dfrac{30 \cdot 52}{2} = 780 \text{ cm}^2$.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti formule za površinu kvadrata, pravokutnika, romba i paralelograma
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezivati matematičke koncepte i pojmove

Poglavlje 2

Stereometrija

2.1 Volumen kvadra i kocke

Učenici u osmom razredu na nastavi matematike uče o kvadru. Jedna od nastavnih jedinica kojom se tada bave je i volumen kvadra. Kako su ranije na nastavi spominjali kocku, nastavnik zadaje učenicima zadatak da na sljedeći sat svatko od njih donese 3 kocke od kartona. Prvo im spominje kako je u srednjovjekovnoj Engleskoj definirana mjerna jedinica za dužinu *palac* kao prosječna širina palca odraslih osoba. Napominje im da vrijedi 1 palac $\approx$ 25,4 mm. Tada im kaže da duljine bridova njihovih kocki trebaju biti 1 palac. Broj kockica koje će učenici donijeti ovisi o veličini razreda, nije nužno da to budu tri kockice. Za ovu aktivnost učenicima će trebati 57 kockica ako se aktivnost odvija u tri tima, a 114 ako odvija u 6 timova. Veličina timova može se odrediti u ovisnosti o raspoloživom broju kockica. Izrađujući kockice, učenici će ponoviti kako izgledaju mreže kocke. Te kockice poslužit će učenicima da otkriju formulu za volumen kvadra i volumen kocke. Na prethodnim satima učenici su se prisjetili što zapravo predstavlja volumen nekog geometrijskog tijela. Sjetili su se da je volumen ili zapremina dio prostora koji to tijelo zauzima. *(Preuzeto iz [11, str.83])*

Motivacija

Filip je kupio akvarij u obliku kocke s bridom duljine 50 cm. Koliko litara vode može primiti taj akvarij (u litrama)?

Učenici će uočiti da zapravo trebaju izračunati volumen kocke, ali ne znaju kako to napraviti.

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u skupinama, otkriti formulu za volumen kocke i stošca

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: metoda dijaloga, heuristička metoda, metoda uočavanja pravilnosti, metoda analogije i generalizacije

Potrebni materijal: kartonske kockice, nastavni listići sa zadacima i tablicama, PC, projektor

Detaljan tijek:

Na početku sata nastavnik podsjeća učenike kako su duljinu neke dužine mjerili jediničnom dužinom, a površinu nekog geometrijskog lika jediničnom površinom. Pita ih imaju li ideju kako bi mogli mjeriti volumen nekog geometrijskog tijela. Učenici analogijom dolaze do zaključka da bi volumen mogli mjeriti pomoću jediničnih kocaka. Nastavnik govori učenicima da će oni kao jedinične kocke koristiti kockice što su ih izradili za domaću zadaću. Tada rasporedi učenike u šest skupina (u tri skupine ako nemaju dovoljno kockica). Svakoj skupini daje nastavne listiće sa zadacima i potreban broj kockica. Po dvije grupe imaju iste nastavne listiće kako bi učenici mogli provjeriti jesu li dobro riješili zadatak.

Nastavni listić 1: Od dobivenih kockica izgradi kvadre s bridovima duljina:

1. a= 1 palac , b = 2 palca, c = 2 palca
2. a = 3 palca, b = 3 palca, c = 3 palca
3. a = 1 palac, b = 1 palac, c = 3 palca

Koliko vam je jediničnih kockica bilo potrebno za izgradnju prvog, koliko za izgradnju drugog, a koliko za izgradnju trećeg kvadra?

Što nam broj tih kockica zapravo govori o kvadrima?

Kako nazivamo kvadar u drugom zadatku?

Učenici uočavaju da im je za izgradnju prvog kvadra trebalo 4 kockice, za izgradnju drugog 27, a trećeg 3 kockice. Uočavaju da im taj broj zapravo govori koliki je volumen svakog od kvadara. Također, uočavaju da je kvadar u drugom zadatku zapravo kocka.

Nastavni listić 2: Od dobivenih kockica izgradi kvadre sa stranicama duljina:

1. a = 1 palac, b = 1 palac, c = 1 palac
2. a = 3 palca, b = 2 palca, c = 3 palca
3. a = 3 palca, b = 2 palca, c = 1 palac

Koliko vam je jediničnih kockica bilo potrebno za izgradnju prvog, koliko za izgradnju drugog, a koliko za izgradnju trećeg kvadra?

Što nam broj tih kockica zapravo govori o kvadrima?

Kako nazivamo kvadar u prvom zadatku?

Učenici uočavaju da im je za izgradnju prvog kvadra trebala 1 kockica, za izgradnju drugog 18, a trećeg 6 kockica. Uočavaju da im taj broj zapravo govori koliki je volumen svakog od kvadara. Također, uočavaju da je kvadar u prvom zadatku zapravo kocka.

Nastavni listić 3: Od dobivenih kockica izgradi kvadre sa stranicama duljina:

1. a = 1 palac,b = 3 palca, c= 3 palca
2. a = 3 palca,b = 2 palca, c = 2 palca
3. a = 2 palca, b = 2 palca, c = 2 palca

Koliko vam je jediničnih kockica bilo potrebno za izgradnju prvog, koliko za izgradnju drugog, a koliko za izgradnju trećeg kvadra?

Što nam broj tih kockica zapravo govori o kvadrima?

Kako nazivamo kvadar u trećem zadatku?

Učenici uočavaju da im je za izgradnju prvog kvadra trebalo 9 kockica, za izgradnju drugog 12, a trećeg 8 kockica. Uočavaju da im taj broj zapravo govori koliki je volumen svakog od kvadara. Također, uočavaju da je kvadar u trećem zadatku zapravo kocka.

Nastavnik ih prvo pita što im je o kvadru govorio broj kockica potrebnih za njegovu izgradnju. Oni odgovaraju da im je taj broj govorio koliki je volumen kvadra. Tada im pokazuje tablicu oblika kao na tablici 2.1.

a	b	c	broj kockica	V
1	1	1		
1	1	3		
1	2	2		
1	3	3		
2	2	2		
2	2	3		
3	2	1		
3	2	3		
3	3	3		

Tablica 2.1: Prazna tablica: Volumen kvadra i kocke

Učenici govore nastavniku koje vrijednosti treba upisati u određena polja. Npr. grupa koja je imala nastavni listić 1 govori mu koje vrijednosti treba upisati u drugi, treći i deveti redak. Druga grupa koja je imala taj nastavni listić kontrolira jesu li rješenja točna. Svi učenici popunjavaju svoje tablice na listićima.

a	b	c	broj kockica	V
1	1	1	1	1
1	1	3	3	3
1	2	2	4	4
1	3	3	9	9
2	2	2	8	8
2	2	3	12	12
3	2	1	6	6
3	2	3	18	18
3	3	3	27	27

Tablica 2.2: Ispunjena tablica: Volumen kvadra i kocke

Nakon ispunjavanja tablica (kao na tablici 2.2) nastavnik pita učenike uočavaju li u kavom je odnosu volumen kvadra s duljinama njegovih stranica. Oni primjećuju da je volumen kvadra jednak umnošku duljina bridova kvadra a, b i c, tj. da vrijedi $V = abc$.

Kako nazivamo kvadar kojemu su svi bridovi sukladnih duljina?

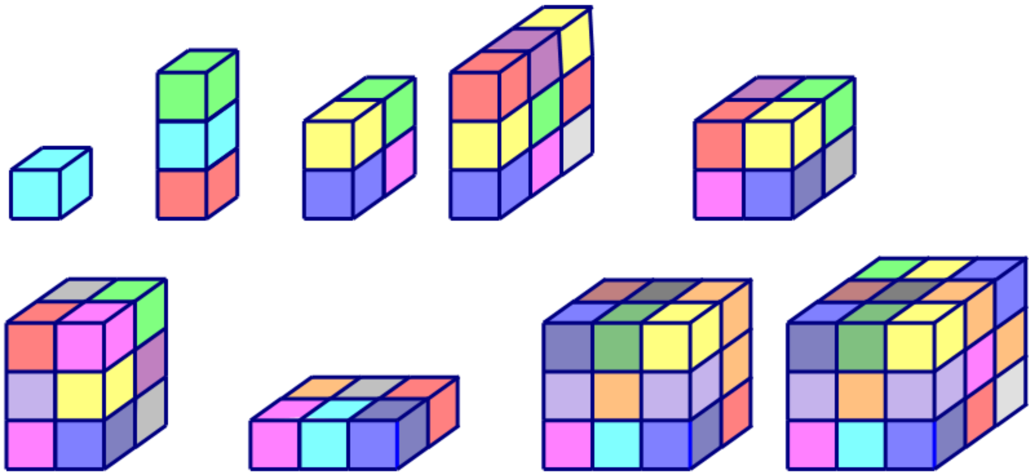
Takav kvadar zovemo kocka.

Očitajte iz tablice čemu je jednak volumen kocke s bridom duljine 1?

Čemu je jednak volumen kocke s bridom duljine 2?

Čemu je jednak volumen kocke s bridom duljine 3?

Učenici uočavaju da je volumen kocke s bridom duljine 1 jednak 1, kocke s bridom duljine 2 jednak 8, a kocke s bridom duljine 3 jednak 27. Tada ih nastavnik pita što misle čemu je jednak volumen kocke s bridom duljine a. Učenici analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije dolaze do zaključka da je volumen kocke s bridom duljine a jednak a^3, tj. da za volumen kocke vrijedi $V = a^3$ (slika 2.1).



Slika 2.1: Slaganje kocaka

Na kraju se vraćamo na motivacijski zadatak. Učenici sada znaju da je volumen kocke s bridom duljine 50 cm jednak 50^3 cm^3, odnosno 125 000 cm^3. Znaju da vrijedi 1 dm^3 = 1000 cm^3. Zbog toga vide da je volumen akvarija 125 dm^3. Kako je 1 dm^3 = 1 l, učenici zaključuju da je volumen akvarija 125 litara.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti formule za volumen kocke i kvadra
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezivati matematičke koncepte i pojmove

2.2 Eulerova formula za prizme

U drugom razredu srednje škole, učenici obogaćuju znanje što su ga stekli o geometrijskim tijelima u osnovnoj školi. Jedna od stvari s kojom se nisu sreli ranije, vezane uz geometrijska tijela je Eulerova formula. U nastavku je prikazana aktivnost uz koju učenici mogu otkriti Eulerovu formulu za prizme. *(Preuzeto iz [9, str.168-172])*

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četveročlanim skupinama, otkriti Eulerovu formulu za prizme.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: heuristička metoda

Potrebni materijal: po jedna prizma za svaki tim učenika, nastavni listići s tablicama za svakog učenika

Detaljan tijek:

Na početku sata učenike rasporedimo u šest skupina. Svakoj skupini dajemo model prizme i nastavni listić s tablicom za svakog učenika. Prva skupina dobiva trostranu prizmu, druga skupina četverostranu i tako dalje do šeste koja dobiva osmerostranu prizmu. Učenici prebrojavaju bridove, vrhove i strane dobivenih prizmi te podatke za dobiveno tijelo upisuju u tablicu (tablica 2.3).

Prizma	Broj strana S	Broj vrhova V	Broj bridova B	$B+V$	$B+S$
trostrana	5	6	9	15	14
četverostrana	6	8	12	20	18
peterostrana	7	10	15	25	22
šesterostrana	8	12	18	30	26
sedmerostrana	9	14	21	35	30
osmerostrana	10	16	24	40	34

Tablica 2.3: Eulerova formula

Nakon što svaki tim unese u tablicu podatke za prizmu koje je dobio, svaki od timova čita rezultate koje je dobio, a nastavnik ih unosi u tablicu u Excelu koja je projicirana tako da je svi učenici vide. Učenici u svoje tablice unose i rezultate drugih grupa. Nakon toga se provodi razredna diskusija. Nastavnik pita učenike uočavaju li kakve pravilnosti u tablici. Učenici bi mogli uočiti različite pravilnosti u tablici. Jedna od njih je i da su vrijednosti u šestom stupcu svakog retka veće za 2 od vrijednosti u četvrtom stupcu toga retka. Nastavnik ih prvo pita kako bi tu pravilnost mogli simbolički zapisati, a oni uočavaju da vrijedi $V + S - B = 2$. Tada im govori da ova jednakost vrijedi za sve prizme te da se naziva Eulerova formula za prizme.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti Eulerovu formulu za prizme
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezivati matematičke koncepte i pojmove

2.3 Volumen prizme, valjka, stošca i piramide

U osmom razredu osnovne škole obrađuje se nastavna cjelina geometrijska tijela. Prvo se govori općenito o tijelima, o nekim njihovim elementima, svojstvima i mjerivim obilježjima kao što su oplošje i volumen. Pojmove oplošja i volumena nastavnik uvodi analogijom s opsegom i površinom geometrijskih likova. Objašnjava im da volumen tijela zapravo predstavlja količinu prostora koji zauzima neko tijelo, oplošje ukupnu površinu koja nam je potrebna da bismo prekrili neko tijelo. Što se tiče volumena, učenici će prvo otkriti formule za volumen kvadra i kocke, a pomoću tih formula polako će doći i do formula drugih geometrijskih tijela.

(Prema [2])

Aktivnost 1: Volumen prizme

Motivacija:

Ambalaža za čokoladicu Toblerone ima dimenzije kao na slici. Koliko bi bilo potrebno čokolade da ambalaža bude u potpunosti ispunjena njome (slika 2.2)?

Slika 2.2: Toblerone

Nastavnik vodi učenike postavljajući im pitanja.

Kojeg je oblika ambalaža za Toblerone?

Učenici uočavaju da ambalaža ima oblik pravilne trostrane prizme.

Možete li sada reći što mi zapravo u zadatku trebamo napraviti?

Mi trebamo izračunati koliko je čokolade potrebno da bi se popunila ambalažu, odnosno trebamo izračunati volumen pravilne trostrane prizme.

Znamo li računati volumen pravilne trostrane prizme?

Ne znamo.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četiri skupine, otkriti formulu za volumen prizme

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: metoda uočavanja pravilnosti

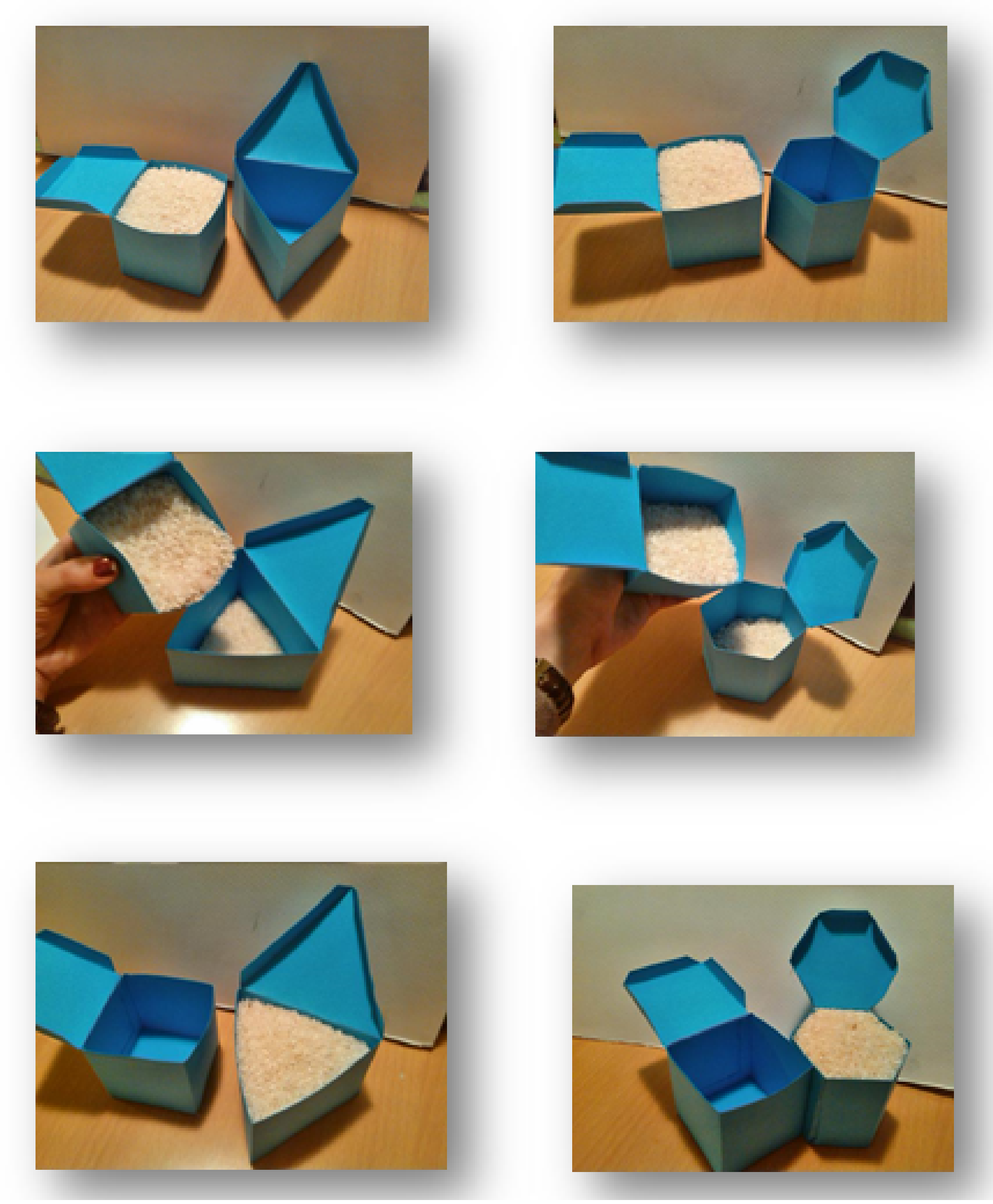
Potreban materijal: 4 modela kocke, 2 trostrane prizme i 2 šesterostrane prizme od papira takvih da svaka od 4 kocke ima brid različite duljine, te da za svaku postoji prizma koja ima bazu jednake površine kao ta kocka i jednake je visine, riža, nastavni listići, trokut i ravnalo

Detaljan tijek:

Učenike podijelimo u četiri tima. Dva tima dobivaju modele kocke i trostrane prizme, a druga dva tima model kocke i šesterostrane prizme. Svaki tim dobiva i rižu i nastavni listić s uputstvima za rad.

Učenici prvo trebaju izračunati kolike su površine baze kocke i dane prizme. Pomoću geometrijskog pribora oni mjere duljine bridova baze te računaju njihove površine. Tada trebaju odgovoriti na pitanje što uočavaju. Uočit će da baze danih tijela imaju jednake površine. Nakon toga će odrediti kolika je visina svakog tijela i opet odgovoriti na pitanje što uočavaju. Uočit će da su visine danih tijela sukladne. Tada učenici trebaju kocku napuniti rižom, te njen sadržaj (ukoliko je to moguće) presipati u drugo tijelo koje su dobili. Učenici će uočiti da su rižom iz kocke u potpunosti napunili prizmu. Uočavaju da su to mogli napraviti svi timovi mada su imali kocke različitih bridova. Zaključuju da ako imaju kocku i prizmu sukladnih visina i baza jednakih površina da se tada i njihovi volumeni podudaraju. Kako računamo volumen kocke? Volumen kocke računamo po formuli $V = a^3$ gdje je a duljina brida kocke. Koja je veza između brida a kocke i odgovarajuće prizme? Visina prizme jednaka je a. Koja je veza između veličine a^2 i odgovarajuće prizme? Površinu baze kocke računamo po formuli $P = a^2$. Kako kocka ima bazu jednake površine kao prizma, vrijedi da je površina baze prizme jednaka a^2. Dobili smo da je volumen prizme s visinom a i površinom baze a^2 jednak a^3. Na kakav zaključak vas to navodi? To nas navodi na zaključak da volumen prizme računamo po formuli $V = Bv$.

Za koje prizme smo uočili da vrijedi ova formula? Uočili smo da formula vrijedi za pravilnu trostranu i pravilnu šesetrostranu prizmu. Razmislite još jednom. Jesmo li računali i volumen nekih drugih prizmi? Da, računali smo volumen kocke i kvadra, a oni pripadaju u skupinu četverostranih prizmi. Na kakav nas zaključak to navodi? Učenici analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije dolaze do zaključka da bi moglo vrijediti da uočena formula vrijedi za svaku prizmu. Nastavnik potvrđuje njihove pretpostavke. Zaključuju da se volumen prizme s bazom B i visinom v računa po formuli $V = Bv$ (slika 2.3).



Slika 2.3: Volumen prizme

Sada učenici mogu odgovoriti na pitanje s početka. Uočavaju da zapravo trebaju izračunati volumen prizme kojoj je baza jednakostranični trokut sa stranicom duljine 3 cm, a visina 20 cm. Uvrštavajući broj 3 u formulu za površinu jednakostraničnog trokuta $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, učenici dobivaju rezultat $B = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2. Primjenom formule $V = Bv$ za volumen prizme učenici dobivaju rezultat $V = 15\sqrt{3}$ cm^3, odnosno $V \approx 25,98$ cm^3.

Na analogan način učenici dolaze do zaključka i da volumen valjka računamo po formuli $V = Bv$. Potrebno je izraditi, tj. nabaviti modele valjka i prizme koji imaju visine jednakih duljina, te baze jednakih površina. Presipavajući rižu, šećer, vodu ili neki drugi materijal, učenici će, uz diskusiju, doći do zaključka da je formula za volumen valjka s bazom B i visinom v $V = Bv$ (slika 2.4). (Prema [2])

Slika 2.4: Volumen valjka

Aktivnost 2: Volumen stošca

Motivacija

Slastičarne proizvode domaće kornete u obliku stošca različitih dimenzija. U koji kornet stane najviše sladoleda uz pretpostavku da sladoled u potpunosti ispunjava kornet i ne prelazi van ruba? Poznate su visine korneta i opseg gornjeg ruba:

- Slastičarna „Slastica”: $v = 12$ cm, $O = 28$ cm
- Slastičarna „Kremšnita”: $v = 14$ cm, $O = 20$ cm
- Slastičarna „Zlatni san”: $v = 13$ cm, $O = 24$ cm

Učenici uočavaju da zapravo trebaju odrediti volumene stošca. Na taj način mogu odrediti u koji kornet stane najviše sladoleda. Primjećuju da ne znaju kako to izračunati.

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četiri skupine, otkriti formulu za volumen stošca

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: heuristička metoda

Potreban materijal: 4 modela valjka i 4 modela stošca takvih da za svaki valjak postoji stožac sa sukladnom bazom i visinom, riža, nastavni listići

Detaljan tijek:

Učenike podijelimo u četiri tima. Svaki tim dobiva modele valjka i stošca te rižu i nastavni listić s uputama za rad.

Učenici prvo trebaju usporediti baze dobivenog stošca i valjka te njihove visine. Tada trebaju odgovoriti na pitanje što uočavaju. Uočit će da baze danih tijela imaju jednake površine te da su visine danih tijela sukladne. Tada učenici trebaju stožac napuniti rižom, te njegov sadržaj presipati u valjak koji su dobili. Taj postupak trebaju ponavljati dok u potpunosti ne ispune valjak. Učenici će uočiti da su rižom u potpunosti ispunili valjak kada su sadržaj stošca u valjak isipali tri puta. Uočavaju da su to mogli napraviti svi timovi mada su imali modele različitih dimenzija. Što nam o nekom tijelu govori količina riže koja stane u njega? Ta količina riže nam govori koliki je volumen tijela. Što onda možemo zaključiti o volumenima tijela s kojima ste radili? Možemo zaključiti da je volumen valjka tri puta veći od volumena stošca.

Zaključak: Ako imamo valjak i stožac sukladnih visina i baza, onda je volumen valjka tri puta veći od volumena stošca. Kako računamo volumen valjka s bazom B i visinom v? Volumen valjka računamo po formuli $V = Bv$. Ustanovili smo da je volumen stošca s bazom B i visinom v tri puta manji od volumena valjka s istom bazom i visinom. Kako onda možemo izračunati volumen stošca? $V = \frac{1}{3}Bv$ gdje je B baza stošca, a v njegova visina.

Što je baza stošca?

Baza stošca je krug.

Kako računamo površinu kruga?

Površinu kruga radijusa r računamo po sljedećoj formuli $P = r^2\pi$.

Kako onda drukčije možemo zapisati formulu po kojoj računamo volumen stošca?

Možemo pisati $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$ (slika 2.5).

Slika 2.5: Volumen stošca

Analogno, presipavajući rižu, vodu, šećer ili neki drugi materijal iz piramide u prizmu, učenici mogu otkriti i da volumen piramide računamo po formuli $V = \frac{1}{3}Bv$. Za tu aktivnost bi nastavnik trebao pripremiti modele prizme i piramide baza jednakih površina i sukladnih visina. Nakon što bi to konstatirali, učenici bi presipavali te uočili da su svi, bez obzira na dimenzije svojih modela, točno 3puta isipali sadržaj piramide u prizmu kako bi je napunili. To ih vodi do zaključka da je volumen piramide 3 pita manji od volumena prizme. Tako će zaključiti da vrijedi gore navedena formula. (Prema [2])

Vratimo se na motivacijski zadatak. Učenici će uočiti da prvo trebaju odrediti duljinu polumjera baze svakog stošca (korneta). Uvrštavajući dane vrijednosti O u formulu $O = 2r\pi$, učenici dobivaju tražene vrijednosti.

- Slastičarna „Slastica": $v = 12$ cm, $r = \frac{14}{\pi}$ cm
- Slastičarna „Kremšnita": $v = 14$ cm, $r = \frac{10}{\pi}$ cm
- Slastičarna „Zlatni san": $v = 13$ cm, $r = \frac{12}{\pi}$ cm

Uvrštavanjem vrijednosti v i r u formulu $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$ za svaku slastičarnu, učenici dobivaju sljedeće rezultate:

- Slastičarna „Slastica”: $V \approx 250\ \text{cm}^3$
- Slastičarna „Kremšnita”: $V \approx 150\ \text{cm}^3$
- Slastičarna „Zlatni san”: $V \approx 199\ \text{cm}^3$

Učenici uspoređuju dobivene rezultate te zaključuju da najviše sladoleda stane u kornet slastičarne „Slastica”.

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti formule za volumen prizme, valjka, stošca, piramide
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezivati matematičke koncepte i pojmove

2.4 Oplošje kugle

Aktivnost 1: Naranče

Jedno od tijela o kojemu učenici uče u osmom razredu je i kugla. Ovo tijelo je učenicima veoma blisko iz svakodnevnog života. Ipak, imaju problema s pamćenjem formula vezanih uz kuglu. Da bi lakše zapamtili formulu za oplošje, zgodno je provesti aktivnost s narančama. (Prema [6])

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u četveročlanim skupinama, otkriti formulu za oplošje kugle

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku timskog rada

Nastavna metoda: metoda uočavanja pravilnosti, metoda dijaloga

Potrebni materijal: po jedna naranča za svaku skupinu učenika, jedan papir A4 formata za svaku skupinu učenika, nož za rezanje naranče, olovka

Detaljan tijek:

Na početku sata nastavnik podijeli razred u skupine. Svakoj skupini daje papir, naranču i nož za rezanje te nastavni listić na kojemu su zapisane upute za učenike.

1. Prerežite naranču duž glavnog presjeka kugle tako da polumjer tog presjeka bude jednak polumjeru kugle.
2. Na dobivenom papiru napravite nekoliko otisaka naranče (barem 5).
3. Ogulite naranču.
4. Obrubite dobivene otiske olovkom (slika 2.6).
5. Koru naranče iskidajte na manje dijelove te njima po redu, pazeći na preciznost, popunjavajte otiske tako da narančasta strana kore bude s gornje strane (slika 2.7).

Dok učenici rade u grupama, nastavnik obilazi razred te prati njihov rad i daje im dodatna uputstva ako je to potrebno. Kada skupine završe s radom provodi se razredna diskusija.

Nastavnik ih pita koliko su otisaka uspjeli prekriti korom naranče, a oni uočavaju da su sve grupe korom prekrile približno četiri otiska.

Kolika je površina jednog otiska?

Svaki otisak je krug radijusa r, te je površina svakog od njih jednaka $r^2\pi$.

Kolika je onda ukupna prekrivena površina?

Ukupna prekrivena površina jednaka je približno $4r^2\pi$.

Na koje geometrijsko tijelo vas podsjeća naranča?

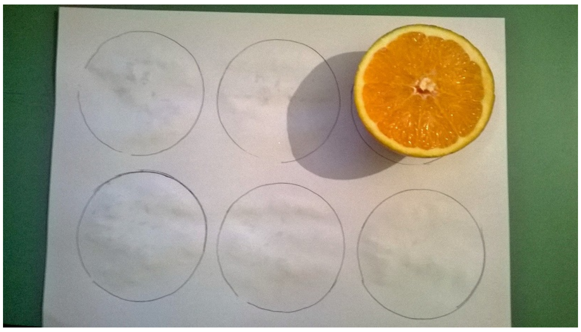
Na kuglu.

Ako bismo naranču promatrali kao kuglu, čemu bi odgovarala njena kora?

Kora naranče odgovarala bi oplošju kugle.

Maloprije smo došli do rezultata je je ukupna površina kore koja prekriva naranču približno jednaka $4r^2\pi$. Na koji zaključak vas to navodi?

Mogli bismo zaključiti da oplošje kugle s radijusom r računamo po formuli $O = 4r^2\pi$.



Slika 2.6: Oplošje 1

Slika 2.7: Oplošje 2

Ishodi učenja:

Učenici će:

- otkriti formulu za oplošje kugle
- izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom
- razmjenjivati ideje i objašnjenja u skupinama
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka
- povezivati matematičke koncepte i pojmove

Poglavlje 3

Zaključak

U školama u Hrvatskoj prevladava tradicionalna nastava matematike. Ona se često svodi na frontalnu nastavu, individualizirani rad i rješavanje tipiziranih zadataka s unaprijed zadanom tehnikom rješavanja i samo jednim točnim rješenjem. Rezultati istraživanja pokazuju da naši učenici često nisu u stanju primijeniti znanje iz matematike pri rješavanju problema iz svakodnevnog života. Činjenica da im je primjena znanja veliki problem, navodi nas na zaključak da nešto radimo krivo. Čini se da je potreban odmak od "'serviranja znanja"'. Da bi se to postiglo, potrebno je motivirati učenike za rad i pružiti im priliku da sami otkriju neke matematičke zakonitosti.

U ovom radu dan je pregled nekoliko aktivnosti u kojima učenici imaju priliku samostalno ili uz navođenje nastavnika doći do vrijednih zaključaka. Jedna od aktivnosti koja je opisana vezana je uz broj mjera unutrašnjih kutova trokuta. U toj aktivnosti učenici razrezuju trokute od papira, te slijedeći upute slažu tako dobivene dijelove. Raspravljaju o tome što su dobili te uočavaju da kakve god trokute imali svi dolaze do istog zaključka: Zbroj mjera unutrašnjih kutova trokuta jednak je $180°$. Do istog zaključka učenici mogu doći pomoću alata dinamične geometrije. Također, mogu crtati trokute, mjeriti veličine njihovih unutrašnjih kutova, a potom ih zbrajati. Svi ovi eksperimenti navest će učenike na zaključak da je zbroj mjera unutrašnjih kutova trokuta jednak $180°$. Tu tvrdnju mogu i dokazati. Jedna od metoda koje se mogu primijeniti u nastavi je i uočavanje pravilnosti. Ovu metodu moguće je primijeniti u eksperimentima u kojima učenici otkrivaju formula za površinu kvadrata i pravokutnika. Učenicima možemo dati milimetarski papir sa slikama pravokutnika i kvadrata . Oni tada mogu prebrojati od koliko se jediničnih kvadrata sastoji koji lik te na osnovu toga odrediti njegovu površinu. Kada zapišu duljine stranica likova i njihove površine u tablicu, učenicima treba dati vremena da promotre tablicu, a tada ih pitati što uočavaju. Oni će uočiti vezu među podatcima u tablici te na taj način otkriti formule. Prednost aktivnosti je i što učenici imaju priliku da komentiraju svoje zaključke te da se matematički izražavaju. Osim toga, slušajući njihove zaključke, nastavnik može dobiti uvid u miskoncepcije i eventualne ”rupe” u njihovom znanju. Da bi učenici zapamtili formule vezane uz geometrijska tijela, ali i uočili odnose među njima, dobro je u nastavu uvesti fizičke modele. Tako učenici mogu otkriti formulu za volumen kvadra ili kocke sastavljajući ih od jediničnih kockica te prebrojavajući koliko je kockica potrebno da se sastavi tijelo zadanih dimenzija. Kada otkriju volumen kvadra i kocke, lako mogu doći i do volumena prizmi, valjka, stošca i piramide. Npr. da bi učenici otkrili kako računamo volumen prizme dovoljni su nam modeli prizme, kocke i riža, te pripremljena pitanja za diskusiju. Na sličan način mogu doći i do volumena ostalih navedenih tijela.

Formula za oplošje kugle mnogim je učenicima zadala glavobolje. Kako bi je učenici otkrili i lako zapamtili mogu nam pomoći naranče. Kako je to moguće i kako učenici mogu otkriti neke druge matematičke zakonitosti možete saznati u ovom radu.

Bibliografija

[1] *TIMSS*, (ožujak, 2014.), `http://goo.gl/9ZMcL7`.

[2] Laštro I., Bahun M., Liker L., Nađ I., Pavleković A.M., *Seminarski rad iz kolegija Metodika nastave matematike 4 - Geometrijska tijela*, (lipanj, 2014.).

[3] Bombardelli M., Ilišević D., *Elementarna geometrija - skripta*, (listopad, 2007.), `http://goo.gl/9ZMcL7`.

[4] Svedrec R., Radović N., Soucie T., Kokić I., *Tajni zadatak 007, udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[5] Čičak M., Bojmić D., Đukić M., Kralj T., Vrančić K., *Seminarski rad iz kolegija Metodika nastave matematike 4 - Četverokuti. Mnogokuti. Vektori*, (lipanj, 2014.).

[6] A. Čižmešija, *Krug, kugla i njihove mjere*, (2008.), `http://goo.gl/BHr780`.

[7] ______, *Matematičke kompetencije*, (2008.), `http://goo.gl/Vt0jzj`.

[8] ______, *Projektna nastava*, (2009.), `http://goo.gl/6cbBxg`.

[9] Kurepa S., Kurepa A., Hrnčević J., *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[10] Borić M., Capan A., Čmarec A., Tkalec K., Poturica T., *Seminarski rad iz kolegija Metodika nastave matematike 4 - Kut i mjera kuta. Trigonometrijski omjeri u pravokutnom trokutu.*, (prosinac, 2013.).

[11] Paić G., Bošnjak Ž., Čulina B., *Matematički izazovi 8, udzbenik iz matematike za 8. razred, drugo polugodište*, Alfa, Zagreb, 2008.

[12] Kralj L., Ćurković Z., Glasnović Garcin D., Banić S., *Petica 6, udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole*, SysPrynt, Zagreb, 2006.

Sažetak

Da bi učenici mogli razviti matematičke kompetencije, bitno je da budu aktivni sudionici u svom poučavanju. Oni trebaju na nastavi matematike imati priliku da sami otkriju neke zakonitosti, da komuniciraju svoje ideje i zapažanja s drugim učenicima i nastavnikom. Također, trebaju moći povezati matematiku s realnim svijetom, trebaju razviti sposobnost logičkog zaključivanja, rješavanja problema i ništa manje bitno, razviti pozitivan stav prema matematici.

Kako bi se učenicima omogućilo sve to, potreban je odmak od tradicionalne nastave matematike, odnosno potrebna je nastava orijentirana učenicima. Ona se najbolje realizira kroz raznolike učeničke aktivnosti pomoću kojih oni samostalno ili uz navođenje nastavnika otkrivaju matematičke zakonitosti.

U ovom radu dan je pregled četrnaest aktivnosti kojima učenici otkrivaju neke matematičke pravilnosti iz područja geometrije. Možda bi baš one mogle pomoći da učenici promijene svoj pogled na matematiku.

Summary

In order to develop mathematical competences it is very important for the pupils to be active participants in education. They should have an opportunity to reveal validity and their own ideas and annotations together with the other colleagues and the teacher during the math lessons. Moreover, they should be capable of connecting math with the real world and developing their logical conclusion, as well as the solving the problem. They should also develop positive attitude toward math.

To provide all these ideas, it is necessary to make a distance from the traditional math lessons. More precisely, the lessons should be directed toward the pupils. The pupil-oriented teaching is best accomplished by different activities of pupils that can help in discovering the validity of mathematics on their own or with the help of the teacher.

This paper deals with the fourteen activities which help pupils in discovering some math regularities from the area of geometry. Maybe these activities could help the pupils to change their opinion about math.

Životopis

Rođena sam 11. listopada 1989. godine u Rezovačkim Krčevinama, mjestu nedaleko Virovitice. Pohađala sam osnovnu školu "Ivana Brlić-Mažuranić" u Virovitici i završila je 2004. godine. Od 2004. do 2008. godine pohađala sam prirodoslovno matematički program u Gimnaziji Petra Preradovića u Virovitici. Sljedeće godine sam upisala preddiplomski studij Matematika nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2012. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.