Navier-Stokesove jednadžbe

Ivančić, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Ivančić

Navier–Stokesove jednadžbe

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu

1. ____________________________________, predsjednik
2. ____________________________________, član
3. ____________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom __________________.

Potpisi članova povjerenstva

1. ____________________________________
2. ____________________________________
3. ____________________________________

Za nastanak ovog rada zaslužno je više ljudi nego samo ja.

Prvo, veliko hvala mentoru doc. dr. sc. Borisu Muhi, koji me zainteresirao za matematičku dinamiku fluida i uputio u literaturu, za trud, strpljenje i vrijeme koje je uložio u nastanak ovog rada. Hvala mu što me poticao na samostalno istraživanje, a opet uvijek bio dostupan korisim savjetima i opaskama.

Zatim, hvala mojim roditeljima, braći, baki i djedu za podršku i razumijevanje koje su mi pružali tijekom cijelog školovanja. Svaki moj uspjeh smatram i njihovim. Nadam se da ću im jednog dana moći vratiti barem pola.

Na kraju, želim se zahvaliti nekolicini prijatelja; za podršku, nesebične savjete, motivaciju, običnu šetnju i razgovor, jer su me tjerali učiti i raditi kada je trebalo, ili jer su jednostavno bili dio mog života ovih par godina. Neću ih nabrajati poimenice – neke zato jer ne smijem, a neke da ostavim dozu misterioznosti. Siguran sam da će se prepoznati.

Sadržaj

POGLAVLJE 1

Uvod

Navier—Stokesove jednadžbe opisuju gibanje inkompresibilnog, Newtonovog fluida u okviru mehanike kontinuuma. Poznato je da se fluidi (primjerice voda, zrak, nafta itd.) sastoje od mnoštva molekula, no jasno je da je zbog broja tih molekula iznimno teško postaviti model koji simultano prati što se događa sa svim molekulama istovremeno. Također, zanima li nas ponašanje neke mase fluida na makroskopskom nivou, a ne interakcije među molekulama, mehanika kontinuuma je i prirodan izbor za modeliranje problema. Navier—Stokesove jednadžbe opisuju kontinuum u terminima polja brzine i tlaka. Na nekoj atomskoj razini ta polja uopće ne moraju imati smisla, primjerice tlak, ali na makroskopskoj skali iznimno dobro aproksimiraju fizikalan sistem.

Prvotno su predložene (neka verzija) od strane francuskog inženjera C.M.L.H. Naviera u okviru molekularnog modela 1822. godine, ali se model ubrzo pokazao inkonzistentim, s fizikalnog stajališta, za više različith materijala među kojima su bile i tekućine. Dvadesetak godina kasnije, do istih je jednadžbi došao i, tada dvadesetšetogodišnji, G.H. Stokes (1845.) u okviru teorije kontinuuma.

U slučaju kada na fluid djeluje neka vanjska sila $\mathbf{f}$, Navier—Stokesove jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} - \nu \Delta\, \boldsymbol{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \ \text{ na } \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega \times (0,T) \end{aligned} \tag{1.1}$$

uz pripadne početne i rubne uvjete

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}(\cdot, 0) = \boldsymbol{v}_0 \ \text{ na } \Omega \\ &\boldsymbol{v}(x,t) = 0 \text{ za } x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

U slučaju da Ω nije ograničen, potrebno je zadati i uvjete konvergencije na $\boldsymbol{v}(x,t)$ i/ili $p(x,t)$ kada $|x| \to \infty$.

Navier—Stokesove jednadžbe i same po sebi od velikog su interesa i u samo matematičkom smislu. Unatoč čestim primjenama i širokom proučavanju, još uvijek nije u potpunosti dokazana egzistencija globalna u vremenu glatkog rješenja u tri dimenzije i, ako postoji, je li ono regularno, iako se čini kao očita istina od strane inženjera. O težini problema govori i činjenica da je *The Clay Mathematics Institute* raspisao nagradu od $\$1,000,000$ za rješenje ili kontraprimjer (službeni opis problema može se naći u [13]). Naravno, u ovom radu ne bavimo se glavnim pitanjem nego "slabijim", takozvanim slabim rješenjima.

Od sada pa nadalje, kad govorimo o sustavu (1.1)—(1.2) pisat ćemo kratko N—S.

1.1 Izvod i interpretacija N—S

Navier–Stokesove jednadžbe izvode se iz zakona sačuvanja i jednadžbi kontinuiteta primjenjenih na svojstva fluida. Da bi se izvele, potrebno je izvesti jednadžbu kontinuiteta, primijeniti je na sačuvanje mase i momenta, i konačno sve to zajedno kombinirati sa zakonima sačuvanja. Ovdje dajemo izvod N–S više s inženjerske strane i na intuitivnom nivou, a bez formalnih dokaza – osnovni pojmovi i rezultati koje koristimo mogu se naći u [8].

Jednadžba kontinuiteta Neka je L neko intenzivno svojstvo – ne ovisi o količini materijala koji promatramo. Primjera radi, temperatura bi bila intenzivno svojstvo materijala, a toplina korespondirajuće ekstenzivno svojstvo. Jednadžba kontinuiteta opisuje promjenu intenzivnog svojstva L. Označimo volumen materijala od interesa sa Ω i s $\partial\Omega$ rub od Ω.

Reynoldsov trasportni teorem Prva pretpostavka je da smo u uvjetima Reynoldsovog transportnog teorema:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} L\,\mathrm{dx} = -\int_{\partial\Omega} L\,\boldsymbol{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{dS} - \int_{\Omega} Q\,\mathrm{dx}\,.$$

Lijeva strana gornje jednadžbe označava brzinu promjene veličine L sadržane u domeni Ω. Desna strana sastoji se od dva izraza:

- izraza za flux $\int_{\partial\Omega} L\,\boldsymbol{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{dS}$ koji govori koliko L napušta domenu Ω kroz tok preko ruba $\partial\Omega$,
- izraza za izvor/ponor $\int_{\Omega} Q\,\mathrm{dx}$ koji mjeri koliko se L stvara odnosno uništava kroz izvore i ponore unutar Ω.

Dakle, gornja jednadžba kaže da je ukupna promjena svojstva L jednaka razlici koliko veličine L uđe i izađe kroz rub domene i koliko se veličine L stvori ili uništi unutar domene kroz nekakve izvore i ponore.

Napomena. *U samom iskazu teorema prirodno je zahtijevati određenu glatkoću na funkciju L kao i na domenu Ω. Ovdje se ne zamaramo detaljima, nego za trenutak pretpostavljamo da su svi termini i sve veličine dovoljno glatke tako da gornje ima smisla.*

Primjerice, ako je intenzivno svojstvo koje promatramo temperatura, onda gornje govori da je ukupna promjena temperature u Ω jednaka fluxu temperature kroz rub plus temperatura koju generira neki izvor/ponor unutar domene.

Teorem o divergenciji Izraz za flux u gornjoj jednadžbi možemo izraziti preko volumnog integrala preko teorema o divergenciji:

$$\int_{\partial\Omega} L\,\boldsymbol{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{dS} = \int_{\Omega} \nabla\cdot(L\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx},$$

pa jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} L\,\mathrm{dx} = -\int_{\Omega}\{\nabla\cdot(L\,\boldsymbol{v}) + Q\}\,\mathrm{dx}\,.$$

Uz pretpostavku da Ω ne ovisi o vremenu t, znak derivacije može formalno "ući" pod znak integrala. Dobivamo

$$\int_{\Omega}\{\frac{d}{dt}L + \nabla\cdot(L\,\boldsymbol{v}) + Q\}\,\mathrm{dx} = 0,$$

što mora vrijediti za svaki kontrolni volumen Ω pa po teoremu o lokalizaciji mora vrijediti

$$\frac{d}{dt}L + \nabla\cdot(L\,\boldsymbol{v}) + Q = 0.$$

Sačuvanje mase Primijenimo gornje na gustoću ρ – intenzivno svojstvo mase – da dobijemo

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) + Q = 0,$$

odnosno, ako uvažimo da nema izvora ili ponora mase, tj. $Q = 0$, dobivamo jednadžbu sačuvanja mase

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.3}$$

Za inkompresibilne fluide, gustoća mase je konstanta. Uvažavajući to iz (1.3) konačno dobivamo

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{1.4}$$

Materijalna derivacija Neka $f(x,t)$ predstavlja neku veličinu od interesa u gibanju fluida, na primjer može predstavljati gustoću fluida ili pak komponentu brzine. Uočimo prvo da izraz $\frac{\partial f}{\partial t}$ predstavlja promjenu od f u fiksiranoj točki $x \in \Omega$. Nasuprot tome, promjena od f na "čestici fluida" tj. dok slijedimo gibanje fluida u oznaci $\frac{Df}{Dt}$ dana je s

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), t)$$

gdje se $x(t)$ mijenja s vremenom lokalnom brzinom fluida $\boldsymbol{v}$: $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{v}$. Jednostavnom primjenom lančanog pravila dobivamo (primjerice u dimenziji 3)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

tj.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

što kompaktnije možemo zapisati

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) f.$$

Primjenom gornjeg na komponente brzine v_i redom dobivamo akceleraciju fluida u x

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}\,.$$

Sačuvanje momenta Iskoristimo drugi Newtonov zakon $\vec{F} = m\vec{a}$. Kako operiramo na fiksiranom kontrolnom volumenu i infinitezimalnim parcelama fluida, možemo zamijeniti masu s gustoćom fluida. Stoga možemo pisati

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \vec{F} \text{ tj. } \rho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}) = \vec{F}. \tag{1.5}$$

Jednadžbe gibanja Gornje jednadžbe sačuvanja zajedno s nekolicinom pretpostavki na sile i fluid vode prema jednadžbama gibanja fluida. Pretpostavljamo da se volumna sila na parcele fluida sastoji od dvije komponente: vanjskih sila i naprezanja u fluidu tj.

$$\vec{F} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma.$$

$\mathbf{f}$ predstavlja vanjske sile (najčešće gravitaciju) a σ tenzor naprezanja. Intuitivno, naprezanje u fluidu je dano divergencijom tenzora naprezanja jer je to mjera kojom tenzor djeluje kao izvor ili ponor; drugim riječima, divergencija tenzora je sila.

Naprezanja Jednadžbe gibanja ovise o tenzoru naprezanja σ koji ima reprezentaciju

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Tenzor naprezanja σ najčešće razdvajamo na dvije komponente: volumni tenzor naprezanja koji "nastoji promijeniti volumen tijela" (tlakovi) i deviatorni tenzor naprezanja koji "nastoji promijeniti oblik tijela". Dakle, imamo

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p+\sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p+\sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Označimo deviatorni tenzor naprezanja s $\mathbb{T}$ pa konačno možemo pisati

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \mathbb{T}.$$

Sada sustitucijom ovog preciznijeg oblika sile u (1.5) dobivamo

$$\rho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}. \tag{1.6}$$

Fizička interpretacija gornje jednadžbe je sljedeća:

- $-\nabla p$: izraz s tlakom koji sprječava gibanja obzirom na normalno naprezanje; fluid se pritišće sam na sebe i tako sprječava skupljanje u volumenu.
- $\nabla \cdot \mathbb{T}$: uzrokuje gibanje uslijed horizontalnog trenja i smičnog naprezanja. *Shear stress* uzrokuje turbulenciju i viskozni tok (ako prijeđemo rukom po tekućini uočavamo da tekućina koja se giba uzrokuje gibanje preostale tekućine u njezinoj okolini).
- $\mathbf{f}$: sila koja djeluje na svaku "česticu" fluida (primjerice gravitacija).

Ovu općenitu formu N–S jednadžbi ne možemo efektivno primijeniti u praksi jer ima neodređenih elemenata koji su specifični za fluid na koji primjenjujemo N–S.

Newtonovski fluidi Zbog jednostavnosti, pretpostavljamo da je Newtonov fluid inkompresibilan. Osnovna je pretpostavka ona na prirodu tenzora naprezanja $\mathbb{T}$. Za Newtonov fluid, naprezanje je proporcionalno promjeni deformacije (promjena brzine). Drugim riječima, ako je τ_{ij} $ij-$a komponenta od $\mathbb{T}$, onda vrijedi sljedeća konstitutivna relacija (eng. *constitutive relation*)

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

tj.

$$\mathbb{T} = \mu(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T)$$

gdje je konstanta proporcionalnosti μ dinamička viskoznost fluida i ovisi o prirodi fluida. Direktnim računom onda dobivamo

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \mu \Delta \boldsymbol{v}$$

pa je konačan oblik N–S jednadžbi za Newtonov inkompresibilan fluid

$$\begin{aligned} &\rho \frac{D \boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{v} + \mathbf{f} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}$$

POGLAVLJE 2

Funkcijski prostori za dinamiku fluida

U ovom poglavlju dajemo pregled potrebnih rezultata iz funkcionalne analiza i teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi specifičnih za dinamiku inkompresibilnih fluida – tj. bavimo se prostorima solenoidalnih funkcija.

2.1 Notacija i prostori funkcija

DEFINICIJA. *Neka je $1 \leq q \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega) = \{\boldsymbol{\phi} \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = 0\}.$$

Definiramo prostore $H_{q,sol}(\Omega)$ i $H^1_{q,sol}(\Omega)$ kao upotpunjenja prostora $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ u $L^q(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ i $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ respektivno.

Napomena. *O prostorima L^q, $W^{m,q}$, $1 \leq q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, i osnovnim rezultatima na njima može se pročitati u dodatku.*

U slučaju $q = 2$ pišemo jednostavno $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}$ i $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}$ respektivno.

Napomena. *Pokazuje se da ako Ω ima ograničen rub koji je još i lokalno Lipschitzov ili je pak Ω poluprostor, za $1 < q < \infty$, vrijede sljedeće karakterizacije (detalji se mogu naći u [7]):*

$$\mathrm{H}_{\mathrm{q,sol}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \ , \ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \,|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{q,sol}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \ , \ \mathbf{u} \,|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{2.2}$$

gdje je $\boldsymbol{\nu}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$ a vrijednosti na rubu shvaćamo u smislu traga. Ako je Ω klase C^1, vrijedi i Helmholtz—Weylova dekompozicija:

$$L^q(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{H}_{\mathrm{q,sol}}(\Omega) \oplus G_q(\Omega), \tag{2.3}$$

gdje je

$$G_q(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^\mathrm{n}) \mid \mathbf{u} = \nabla p \text{ , } za\ neko\ p \in L^1_{loc}(\Omega)\ t.d.\ \nabla p \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^\mathrm{n})\}.$$

Za $q = 2$ pišemo $G = G_2$.

Projekciju od $L^q(\Omega; \mathbb{R}^\mathrm{n})$ na $\mathrm{H}_{\mathrm{q,sol}}(\Omega)$ označavamo sa P_q ($\equiv P$, ako je $q = 2$). U slučaju $q = 2$, $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}$ i G su **ortogonalni potprostori** *od L^2 i gornja dekompozicija vrijedi za sve otvorene skupove Ω.*

NOTACIJA. *Za $T \in (0, \infty]$ označimo*

$$\Omega_T = \Omega \times [0, T)$$

i definirajmo

$$\mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega) = \{\boldsymbol{\phi} \in C^\infty_c(\Omega_T; \mathbb{R}^\mathrm{n}) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(x,t) = 0 \ na\ \Omega_T\}.$$

Uočimo da za $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}$, $\boldsymbol{\phi}(x, 0)$ nije nužno nula, ali $\boldsymbol{\phi}(x, T) = 0$. Naime, to slijedi iz činjenice da je, primjerice, za $\sigma < T$, $[0, \sigma] \subset\subset [0, T)$.

NOTACIJA. *U daljnjem, skalarni produkt na L^2 skraćeno pišemo $(\cdot, \cdot)$ umjesto posebnog naglašavanja $(\cdot, \cdot)_{L^2}$. Skalarne produkte na nekim drugim unitarnim prostorima posebno naglašavamo indeksom. Sve norme posebno su naglašene indeksom.*

Kako će igrati esencijalnu ulogu u teoriji egzistencije slabih rješenja N–S, proučimo malo detaljnije pozadinu Helmholtz–Weylove dekompozicije u slučaju $q = 2$.

Ako je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jednostavno povezana domena i $\mathbf{u}$ neprekidno diferencijabilna i ortogonalna na $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$, onda je $\mathbf{u}$ konzervativno vektorsko polje, tj. $\mathbf{u}$ je gradijent neke skalarne funkcije: za $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^3)$ proizvoljnu uzmimo $\mathbf{w} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}$ i iskoristimo poznati identitet

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) - \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_2), \tag{2.4}$$

za $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dovoljno glatke, pa ortogonalnost od $\mathbf{u}$ na $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ i (2.4) povlače

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\varphi} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

zbog

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{u}) \cdot \vec{\nu}\, \mathrm{dS} = 0 \text{ jer } \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Dakle, $\int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^3)$ pa prema osnovnoj lemi varijacijskog računa slijedi $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, tj. $\mathbf{u}$ je bezvrtložno. Kako je Ω jednostavno povezano, po Stokesovom teoremu postoji $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ t.d. $\mathbf{u} = \nabla p$. Ovim načinom može se pokazati da se uvjeti na regularnost od $\boldsymbol{v}$ mogu oslabiti, ali ostaje krucijalno da je Ω jednostavno povezano. Ipak, rezultat ostaje vrijediti i za proizvoljan Ω:

LEMA 2.1.1 *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *proizvoljna domena i* $\mathbf{u} \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *t.d. je ortogonalna na* $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ *u* L^2*, tj.*

$$\forall\, \mathbf{w} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)\ ,\ \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Tada postoji skalarno polje $p \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *t.d.* $\mathbf{u} = \nabla p$.

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $\mathbf{u} \in C(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Tvrdnja će biti pokazana ako pokažemo da krivuljni integral diferencijalne forme $\mathbf{u} \cdot \mathrm{dx}$ jednak nuli duž svake zatvorene, poligonalne krivulje koja ne presijeca samu sebe, a leži[1] u Ω. Neka je Γ takva krivulja i $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ njezina parametrizacija. Jasno, $\gamma \in C^\infty_c([t_i, t_{i+1}]; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Stoga, za $\mathbf{w} \in C(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ vrijedi

$$\int_\Gamma \mathbf{w} \cdot \mathrm{dx} = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{w}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \, \mathrm{dt}\,.$$

Neka je $\varepsilon_0 = dist(\Gamma, \partial\Omega)$. Za $x \in \Omega$ stavimo

$$\Phi^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} j_\varepsilon(x - \gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \, \mathrm{dt}$$

(gdje je j_ε je jezgra izglađivača), $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, pa je $\Phi^\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ i

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Phi^\varepsilon(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \nabla_x j_\varepsilon(x - \gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \, \mathrm{dt} \\ &= -\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} j_\varepsilon(x - \gamma(t)) \, \mathrm{dt} \\ &= -j_\varepsilon(x - \gamma(1)) + j_\varepsilon(x - \gamma(0)) = 0, \end{aligned}$$

tj. $\nabla \cdot \Phi^\varepsilon(x) = 0$, odnosno $\Phi^\varepsilon \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Sada, prema (3.3) i definiciji izglađivača, imamo

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathrm{dx} &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \mathbf{u}(x) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} j_\varepsilon(x - \gamma(t)) \, \mathrm{dt} \right\} \mathrm{dx} \\ &= \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \Phi^\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

pa puštanjem $\varepsilon \to 0$ i korištenjem svojstva izglađivača dobivamo

$$\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathrm{dx} = 0 \text{ za sve } \Gamma \text{ tj. } u = \nabla p\ ,\ p \in C^1(\Omega).$$

[1]Kako je Ω otvoren i povezan, onda je i poligonalno povezan.

Time je lema u slučaju $\mathbf{u} \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ dokazana.

Neka je sada $\mathbf{u} \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ i za $\varepsilon > 0$ definirajmo

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Neka je $\mathbf{w} \in \mathcal{D}_{\text{sol}}(\Omega_\varepsilon)$ proizvoljna pa je i izglađivač $\mathbf{w}_\varepsilon$ iz prostora $\mathcal{D}_{\text{sol}}(\Omega)$. Zato po Fubinijevom teoremu slijedi

$$0 = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} j(\frac{x-y}{\varepsilon})\, \boldsymbol{v}(y)\, \mathrm{dy} \right\} \mathrm{dx} = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{w}$$

pa, jer je $\mathbf{u}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ i $\mathbf{w} \in \mathcal{D}_{\text{sol}}(\Omega)$ proizvoljna, iz prvog dijela dokaza je $\mathbf{u}_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon$ na Ω_ε za neku $p_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Stavimo $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega_m$, $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_m$, $p_\varepsilon = p_m$. Označimo sa $\{\Omega'_k\}_k$ rastući niz ograničenih domena t.d.

$$\overline{\Omega'_k} \subset \Omega \text{ i } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega'_k = \Omega.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Ω'_k lokalno Lipschitzov. Fiksirajmo Ω'_1 i odaberimo $\overline{m}$ t.d. $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_m$ za sve $m \geq \overline{m}$. Tada je $\{\nabla p_m\}_m$ Cauchyjev niz u $L^1(\Omega'_1)$ (slijedi iz svojstava izglađivača). Dodatno, možemo odabrati konstante $c_m^{(1)}$ t.d. je i $\{p_m + c_m^{(1)}\}_m$Cauchyjev niz u $L^1(\Omega'_1)$ (prema Poincareovoj nejednakosti) i označimo limes tog niza sa $p^{(1)}$ pa je $p^{(1)} \in L^1_{loc}(\Omega'_1)$ i po definiciji slabe derivacije je $\mathbf{u} = \nabla p^{(1)}$ na Ω'_1. Analognim postupkom izlazi egzistencija $p^{(2)} \in L^1(\Omega'_2)$ t.d. je $\mathbf{u} = \nabla p^{(2)}$ na Ω'_2 i jasno, $p^{(1)} = p^{(2)} + c$ na Ω'_1, i analognim postupkom dobivamo niz $p^{(m)}$. Zato postoji $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $p \in L^1_{loc}(\Omega)$ t.d. je $\mathbf{u} = \nabla p$:

$$\mathbf{u} = \nabla p^{(i)} \text{ s.s. na } \Omega'_i \text{ , } \forall i \in \mathbb{N}$$

a kako se $p^{(i)}$ i $p^{(j)}$ razlikuju najviše za konstantu na Ω'_i $(i < j)$, možemo redefinirati funkcije $p^{(k)}$ t.d. su jednake na zajedničkom dijelu područja definicije pa slijedi tvrdnja.

$\square$

Uočimo da iz gornjeg direktno slijedi i Helmholtz–Weylova dekompozicija (2.3) u slučaju $q = 2$.

POGLAVLJE 3

Slaba rješenja

U ovom poglavlju dajemo definiciju slabog rješenja u smislu Leray—Hopfa za Navier—Stokesove jednadžbe i rezultate vezane uz egzistenciju, jedinstvenost i svojstva rješenja – samim time je ovo poglavlje i centralno ovog rada. Pritom uglavnom slijedimo metode i ideje opisane u [7] i [6].

3.1 Svojstva slabih rješenja

3.1.1 Definicija slabog rješenja

Pretpostavimo za trenutak da su $\boldsymbol{v}(x,t)$ i $p(x,t)$ klasična rješenja sistema (1.1) uz inicijalno rubne uvjete (1.2). Množenjem (1.1) sa $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ i integriranjem po Ω_T dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} \right) - \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\phi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}) \right\} \mathrm{dt} \\ = - \int_0^T (f, \boldsymbol{\phi})\, \mathrm{dt} - \boldsymbol{v}_0\, \boldsymbol{\phi}(0) \ , \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Obratno, ako je $\boldsymbol{v}(x,t)$ vektorsko polje koje zadovoljava (3.1) i dovoljno je glatko da dopušta parcijalnu integraciju na Ω_T (primjerice, dovoljno je da je $\boldsymbol{v}$ diferencijabilno jednom po t i dva puta po x) parcijalnom integracijom "unatrag" i uzimanjem test funkcija $\boldsymbol{\phi}(x,t) = \boldsymbol{\psi}(x)h(t)$, $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$, $h \in C_c^\infty((0,T))$ ("testiramo po vremenu") dolazimo do

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\cdot) v - \nu \Delta\, \boldsymbol{v} - \mathbf{f}, h\, \boldsymbol{\psi} \right) \mathrm{dt} = 0 \tag{3.2}$$

pa, kako je $h = h(t)$ funkcija od samo vremena, h može "izaći" van $(\cdot,\cdot)$ i dolazimo da varijacijske formulacije

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\cdot)v - \nu\Delta\,\boldsymbol{v} - \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi} \right) h \,\mathrm{dt} = 0$$

Konačno je onda, po osnovnoj lemi varijacijskog računa, za sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$,

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} - \nu\Delta\,\boldsymbol{v} - f, \boldsymbol{\psi} \right) = 0 \text{ na } (0,T). \tag{3.3}$$

Napomena. *Sama varijacijska formulacija problema N—S zaslužuje par opaski.*

(i) Uočimo da se u varijacijskoj formulaciji ne spominje tlak. Lema 2.1.1 precizno govori o tome možemo li i, ako da, u kojem smislu sustavu (1.1 pridružiti skalarno polje tlaka $p(x,t)$ da vrijedi (3.3).

(ii) Jasno je i da ako je $\boldsymbol{v}(x,t)$ solenoidalno vektorsko polje koje zadovoljava (3.1), ali nije dovoljno glatko, onda se iz (3.1) ne možemo vratiti u okruženje N—S jer parcijalna integracija unazad nije opravdana. U tom smislu (3.1) i zovemo slabom formulacijom problema N—S). Zaista, uzmimo da je

$$\boldsymbol{v}(x,t) = a(t)\nabla\sigma(x) \ ,\ \Delta\,\boldsymbol{\sigma} = 0 \ \textit{na}\ \Omega \tag{3.4}$$

gdje je σ dovoljno glatko skalarno polje na Ω, a $a(t)$ samo lokalno integrabilna na $(0,T)$ i $a(0) < \infty$, ali takva da nema neku dodatnu regularnost. Kako je

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\nabla(\nabla\,\boldsymbol{v})^2$$

i

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = a(t)\Delta\sigma = 0,$$

$\boldsymbol{v}(x,t)$ zadovoljava (3.1) uz $\mathbf{f} = 0$ i $\boldsymbol{v}_0 = a(0)\nabla\sigma$, ali ne i N—S obzirom da $a(t)$ nije derivabilna.

Sada dajemo preciznu definiciju slabog rješenja N—S.

DEFINICIJA. *Neka je $\boldsymbol{v}_0 \in \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_T;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ i dimenzija prostora $n = 2,3$. Za izmjerivu funkciju $\boldsymbol{v}\colon \Omega_T \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ kažemo da je slabo rješenje N—S na Ω_T ako*

(i) $\boldsymbol{v} \in V_T \equiv L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)) \cup L^\infty(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega))$

(ii) $\boldsymbol{v}$ zadovoljava varijacijsku formulaciju (3.1).

Ako je $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_T;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ za sve $T > 0$, za $\boldsymbol{v}$ kažemo da je globalno slabo rješenje N—S ako je slabo rješenje na Ω_T za sve $T > 0$.

Napomena. *(i) Zahtjevom da je* $\boldsymbol{v}(\cdot,t) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ *za g.s.* $t \in [0,T]$ *dajemo značenje* $(1.1)_2$ *i* $(1.1)_4$ *u generaliziranom smislu, kao što ćemo vidjeti malo kasnije. Nadalje, zahtjevom da je* $\boldsymbol{v} \in L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}})$ *osigurali smo integrabilnost svih članova u (3.1).*

(ii) Iako se zahtjev da je $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}})$ *možda zasad čini nepotrebnim, taj uvjet osigurava da je kinetička energija slabog rješenja esencijalno ograničena na vremenskom intervalu* $[0,T]$*, što je vrlo prirodan zahtjev sa fizičkog stajališta. Više o tome reći ćemo kasnije.*

(iii) U definiciji slabog rješenja ne spominje se tlak, ali uskoro ćemo vidjeti da svakom slabom rješenju uvijek možemo pridružiti pripadno polje tlaka.

3.1.2 Svojstva slabog rješenja

Ovdje iznosimo neke rezultate vezane uz svojstva slabog rješenja koji onda, između ostalog, vode na ekvivalentnu, ali pogodniju za rad, definiciju slabih rješenja.

LEMA 3.1.1 *Neka je* $\boldsymbol{v}$ *slabo rješenje N—S na* Ω_T*. Tada* $\boldsymbol{v}$ *možemo redefinirati na skupu mjere nula tako da je* $\boldsymbol{v}(t) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *za sve* $t \in [0,T)$ *i da zadovoljava*

$$\begin{aligned}\int_s^t \left\{ \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} \right) - \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\phi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v, \boldsymbol{\phi}) \right\} \mathrm{d}\tau \\ = -\int_s^t (\mathbf{f}, \boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\phi}(t)) - (\boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{\phi}(s)),\end{aligned} \tag{3.5}$$

za sve $s \in [0,t]$*,* $t < T$*, i za sve* $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$*.*

Dokaz. Jasno je da je tvrdnju je dovoljno pokazati u slučaju $s = 0$. Neka je $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ nenegativna, monotona funkcija takva da

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \xi \le 1 \\ 0 & \text{ako } \xi \ge 2. \end{cases}$$

Za fiksirano $t \in [0,T)$ i $h > 0$ takvo da $t + h < T$ stavimo

$$\theta_h(\tau) = \theta\left(\frac{\tau - t + h}{h} \right).$$

Uočimo da je, jer je θ klase C^1,

$$\begin{aligned}\left| \frac{d\theta_h}{d\tau} \right| = \left| \frac{d\theta}{d\tau}\frac{1}{h} \right| \le Ch^{-1}\ , \ C > 0 \\ \int_t^{t+h} \frac{d\theta_h}{d\tau} d\tau = -1.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Uzmimo u varijacijskoj formulaciji (3.1) test funkciju oblika $\boldsymbol{\psi}(x,t) = \theta_h(t)\,\boldsymbol{\phi}(x,t)$ da dobijemo (uz $\dfrac{d}{d\tau}\,\boldsymbol{\psi}(x,\tau) = \dfrac{d\theta_h(\tau)}{d\tau}\,\boldsymbol{\phi}(x,\tau) + \theta_h(\tau)\dfrac{\partial\,\boldsymbol{\phi}(x,\tau)}{\partial\tau}$)

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h}\theta_h(\tau)\left\{\left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\right) - \nu(\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\boldsymbol{\phi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{\phi}) + (\mathbf{f},\boldsymbol{\phi})\right\}d\tau\\ = -\int_0^{t+h}\frac{d\theta_h(\tau)}{d\tau}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\phi})d\tau - (\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{\phi}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

jer je $\theta_h = 0$ za $\tau > t+h$. Sada puštanjem $h \to 0$ u relaciji (3.7) zbog

$$\theta_h(\tau) \to \begin{cases}1 & \text{ako } \tau \le t\\ 0 & \text{ako } \tau > t,\end{cases}$$

uzimajući u obzir da je $\boldsymbol{v} \in L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}})$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji integral s lijeve strane jednakosti prelazi u

$$\int_0^t\left\{\left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\right) - \nu(\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\boldsymbol{\phi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{\phi}) + (\mathbf{f},\boldsymbol{\phi})\right\}\mathrm{d}\tau\,.$$

Preostaje vidjeti što se događa s integralom na desnoj strani. U vidu (3.6) i jer je $\boldsymbol{v} \in V_T$ (po definiciji slabog rješenja), za svaki fiksirani t vrijedi

$$\begin{aligned}l(h,t) &\equiv \left|\int_0^{t+h}\left(\frac{d\theta_h(\tau)}{d\tau}(\boldsymbol{v}(\tau),\boldsymbol{\phi}(\tau))d\tau - (\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\phi}(t))\right)\mathrm{d}\tau\right|\\
&= \left|\int_0^{t+h}\frac{d\theta_h(\tau)}{d\tau}\{(\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\phi}(t)) + (\boldsymbol{v}(\tau),\boldsymbol{\phi}(\tau)-\boldsymbol{\phi}(t))\}\,\mathrm{d}\tau\right|\\
&\le C\|\,\boldsymbol{\phi}(t)\|_{L^2}\left(h^{-1}\int_t^{t+h}\|\,\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&+ \max_{\tau\in[t,t+h]}\|\,\boldsymbol{\phi}(t)-\boldsymbol{\phi}(\tau)\|_{L^2}\left(h^{-1}\int_t^{t+h}\|\,\boldsymbol{v}(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&\le C\|\,\boldsymbol{\phi}(t)\|_{L^2}\left(h^{-1}\int_t^{t+h}\|\,\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&+ M\max_{\tau\in[t,t+h]}\|\,\boldsymbol{\phi}(t)-\boldsymbol{\phi}(\tau)\|_{L^2}\end{aligned}$$

Označimo sa $\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ skup svih $t \in [0,T)$ takvih da

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_t^{t+h}\|\,\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2} = 0.$$

Tada je $[0,T)\setminus\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ skup mjere nula. Stoga, zbog

$$\lim_{h\to 0}\max_{\tau\in[t,t+h]}\|\,\boldsymbol{\phi}(t)-\boldsymbol{\phi}(\tau)\|_{L^2},$$

je

$$\lim_{h\to 0} l(h,t) = 0 \ , \ \forall t \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$$

pa (3.5) slijedi za $s = 0$ i za sve $t \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$.

Stavimo $E_1 = [0,T) \setminus \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$. Zbog $\boldsymbol{v} \in V_T$ postoji konstanta $M > 0$ i skup $E_2 \subset [0,T)$ mjere nula takvi da

$$\| \boldsymbol{v}(t)\|_{L^2} \leq M \ , \ \forall t \in [0,T) \setminus E_2. \tag{3.8}$$

Neka je $E = E_1 \cup E_2$ i fiksirajmo $\bar{t} \in E$. Tada postoji niz $\{t_k\} \subset [0,T) \setminus E$ koji konvergira prema $\bar{t}$. Prema ocjeni (3.8) $\| \boldsymbol{v}(t_k)\|_{L^2} \leq M$ pa zbog slabe kompaktnosti od $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}$ postoji $U_{\bar{t}} \in \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ takav da

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{v}(t_k) - U_{\bar{t}}, \boldsymbol{\psi}) = 0 \ , \ \forall\, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega).$$

Definirajmo

$$\boldsymbol{v}^*(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{v}(x,t) & \text{ako } t \in [0,T) \setminus E \\ U_t & \text{ako } t \in E. \end{cases}$$

Uočimo da je $v^*(x,0) = v_0(x)$. Jasno, $v^* \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ za sve $t \in [0,T)$. Sada, evaluiranjem (3.5) na $\{t_k\}$ pridruženom U_t i puštanjem $k \to \infty$ lako se vidi

1. $\boldsymbol{v}^*$ zadovoljava (3.5) za sve $t \in [0,T)$;

2. U_t ne ovisi o nizu $\{t_k\}$.

Time je lema dokazana.

□

Sljedeća je lema posljedica prethodne, a govori u kojem smislu slabo rješenje pretpostavlja inicijalne podatke.

LEMA 3.1.2 *Neka je $\boldsymbol{v}$ slabo rješenje N—S na Ω_T. Tada $\boldsymbol{v}$ možemo redefinirati na skupu mjere nula tako da zadovoljava*

$$\begin{aligned} &\int_0^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi})\}\, \mathrm{ds} \\ &= -\int_0^t (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})\, \mathrm{ds} + (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

za sve $t \in [0,T)$ i sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$. Nadalje, $\boldsymbol{v}$ je L^2 slabo neprekidna, tj.

$$\lim_{t\to t_0} (\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0), \mathbf{u}) = 0$$

za sve $t_0 \in [0,T)$ i sve $\mathbf{u} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$.

Dokaz. Stavimo u (3.5) $s = 0$ i odaberimo $\boldsymbol{\phi}(x,t) = \theta_h(t)\,\boldsymbol{\psi}(x)$ gdje je θ_h definirana kao u prethodnoj lemi, a $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\rm sol}(\Omega)$. Uočimo da je $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi}$ na $[0,t]$ pa odmah slijedi (3.9).

Pokažimo još L^2—neprekidnost. Za svako fiksirano $t_0 \in [0,T)$ iz (3.9) slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \text{ takav da } |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow\ |(\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0), \boldsymbol{\psi})| < \varepsilon$$

za sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\rm sol}(\Omega)$: oduzimanjem

$$\int_0^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi})\}\, \mathrm{ds} = -\int_0^t (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})\, \mathrm{ds} + (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi})$$

i

$$\int_0^{t_0} \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi})\}\, \mathrm{ds} = -\int_0^{t_0} (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})\, \mathrm{ds} + (\boldsymbol{v}(t_0), \boldsymbol{\psi}) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi})$$

slijedi

$$\left| \int_{t_0}^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})\}\, \mathrm{ds} \right| = |(\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0), \boldsymbol{\psi})|\,,$$

a lijeva strana u gornjoj jednakosti teži u 0 kada $t \to t_0$ jer $\boldsymbol{v} \in L^2(0,T; \mathrm{H}^1_{\rm sol})$ i $\mathbf{f} \in L^2$. Zbog gustoće gornje svojstvo ostaje vrijediti za sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{H}_{\rm sol}(\Omega)$. Neka je sada $\mathbf{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{\rm n})$. Po Helmholtz—Weylovoj dekompoziciji možemo pisati

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla q\ ,\ \ \mathbf{w} \in \mathrm{H}_{\rm sol}(\Omega)\ ,\ \nabla q \in G(\Omega).$$

Onda, jer je $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_{\rm sol}(\Omega)$, zbog ortogonalnosti $\mathrm{H}_{\rm sol}$ i G slijedi

$$(\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0), \mathbf{u}) = (\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0), \mathbf{w}),$$

pa slijedi tvrdnja. □

Napomena. *Prethodna lema govori u kojem smislu slabo rješenje N—S dozvoljava inicijalne podatke; u smislu slabe L^2 konvergencije.*

Zbog prethodna dva rezultata, od sada nadalje pretpostavljamo da je svako slabo rješenje modificirano na skupu mjere nula tako da zadovoljava Lemu 3.1.1 i Lemu 3.1.2.

Sada ćemo pokazati obrat Leme 3.1.2; svaka funkcija $\boldsymbol{v} \in V_T$ koja zadovoljava (3.9) za sve $t \in [0,T)$ i sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\rm sol}(\Omega)$ mora zadovoljavati i varijacijsku formulaciju (3.1) uz

$$\boldsymbol{\phi}(x,t) \equiv \boldsymbol{\phi}_N = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\, \boldsymbol{\psi}_k(x) \tag{3.10}$$

gdje su $\gamma_l \in C_0^1([0,T))$, $l = 1, 2, \ldots, N$. Po linearnosti od (3.9) dovoljno je tvrdnju pokazati u slučaju $N = 1$ i tada (3.1) i (3.9) poprimaju oblik

$$\int_0^T \gamma'(t)g(t)dt = -\int_0^T \gamma(t)G(t)dt - \gamma(0)g(0) \tag{3.11}$$

i

$$g(t) = \int_0^t G(s)ds + g(0)\ ,\ t \in [0,T) \tag{3.12}$$

gdje je

$$\begin{aligned} g(t) &= (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) \\ G(t) &= \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}) \ \in L^1(0,T). \end{aligned}$$

Iz Leme 3.1.2 znamo da (3.11) povlači (3.12).

Obratno, pomnožimo (3.12) sa $\gamma'(t)$ i integrirajmo od 0 do T po t. Parcijalnom integracijom dobivamo (3.11):

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t)\gamma'(t)\,\mathrm{dt} &= \int_0^T \gamma'(t) \int_0^t G(s)\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dt} + g(0)\int_0^T \gamma'(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \left(\gamma(t)\int_0^t G(s)\,\mathrm{ds}\right)\Big|_0^T - \int_0^T G(t)\gamma(t)\,\mathrm{dt} - g(0)\gamma(0) \\ &= -\int_0^T G(t)\gamma(t)\,\mathrm{dt} - g(0)\gamma(0). \end{aligned}$$

Konačno, ekvivalencija dvije formulacije bit će dokazana ako pokažemo da se svaka $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ zajedno sa prvom vremenskom i prve dvije prostorne derivacije može aproksimirati u Ω_T funkcijama oblika (3.10).

LEMA 3.1.3 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ proizvoljna domena, $n \geq 2$, i $T > 0$. Tada postoji niz funkcija $\{\boldsymbol{\psi}_r\} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ sa sljedećim svojstvom: za danu $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{T}}$ i $\varepsilon > 0$ postoji $N = N(\boldsymbol{\phi}, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ i funkcije $\gamma_k \in C_c^1([0,T))$, $k = 1, 2, \ldots, N$, takve da*

$$\max_{t\in[0,T]} \| \boldsymbol{\phi}_N(t) - \boldsymbol{\phi}\, t)\|_{C^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}_N(t)}{\partial t} - \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}(t)}{\partial t} \right\|_{C^0(\Omega)} < \varepsilon,$$

gdje je $\boldsymbol{\phi}_N$ definirana sa (3.10). Štoviše, $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$ se može izabrati da bude ortonormirana baza za $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$.

Dokaz. Označimo $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{m}} = \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{m}}(\Omega)$ upotpunjenje od $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ u normi $\| \cdot \|_{W^{m,2}(\Omega)}$ i neka je $\{\boldsymbol{\Phi}_r\}$ (topološka) baza od $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{m}}$ gdje je $\boldsymbol{\Phi}_r \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$, za sve r. Uočimo da je takvu bazu uvijek moguće odabrati (to slijedi iz separabilnosti od $W^{m,2}$), čak štoviše, može se odabrati da bude ortonormirana baza.

Za $\eta > 0$ proizvoljan, ali fiksiran, neka je $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_p \equiv T$ particija od $[0,T]$ takva da

$$\| \boldsymbol{\phi}(t') - \boldsymbol{\phi}(t'')\|_{W^{m,2}} < \eta\ ,\ t', t'' \in [t_{k-1}, t_k]\ ,\ k = 1, 2, \ldots p. \tag{3.13}$$

Definirajmo

$$\boldsymbol{\phi}_l(x,t) = \sum_{r=1}^{l} (\boldsymbol{\phi}(t), \boldsymbol{\Phi}_r)_{W^{m,2}}\, \boldsymbol{\Phi}_r(x), \tag{3.14}$$

pa je, jer je $\{\boldsymbol{\Phi}_r\}$ baza za $\mathrm{H}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sol}}$,

$$\lim_{l\to\infty} \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t) - \boldsymbol{\phi}(t)\|_{W^{m,2}} = 0 \text{ , za sve } t \in [0,T], \tag{3.15}$$

tj. $\boldsymbol{\phi}_l \xrightarrow{W^{m,2}} \boldsymbol{\phi}$ po točkama (vremenskim). Po Besselovoj je nejednakosti pak, za sve $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, p$,

$$\begin{aligned} \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t) - \boldsymbol{\phi}_l(t_k)\|_{W^{m,2}} &= \|\sum_{r=1}^{l} (\boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\phi}(t_k), \boldsymbol{\Phi}_r)_{W^{m,2}}\, \boldsymbol{\Phi}_r\, \|_{W^{m,2}} \\ &\leq \|\, \boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\phi}(t_k)\|_{W^{m,2}} < \eta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dakle je, za $t \in [t_{k-1}, t_k]$ i dovoljno veliko l,

$$\begin{aligned} \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t) - \boldsymbol{\phi}(t)\|_{W^{m,2}} \leq \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t) - \boldsymbol{\phi}_l(t_k)\|_{W^{m,2}} + \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t_k) - \boldsymbol{\phi}(t_k)\|_{W^{m,2}} \\ + \|\, \boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\phi}(t_k)\|_{W^{m,2}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sada odabirom $m > n/2$, po teoremu o Soboljevljevom ulaganju, slijedi

$$\max_{t\in[0,T]} \|\, \boldsymbol{\phi}_l(t) - \boldsymbol{\phi}(t)\|_{C^2(\Omega)} < C\eta \text{ , } C = C(\Omega, m, n).$$

Štoviše,

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}_l(t)}{\partial t} - \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}(t)}{\partial t} \right\|_{W^{m,2}} = 0 \text{ , } \forall t \in [0,T],$$

pa je

$$\lim_{l\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}_l(t)}{\partial t} - \frac{\partial\, \boldsymbol{\phi}(t)}{\partial t} \right\|_{W^{m,2}} = 0.$$

Na skup $\{\boldsymbol{\Phi}_r\}$ možemo primjeniti Gramm—Schmidtov postupak ortogonalizacije u L^2 da dobijemo niz $\{\boldsymbol{\psi}_r\}$. Tada je, za svako r, $\boldsymbol{\psi}_r$ linearna kombinacija $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_r$, a kako je H^m gust u H, lako se vidi da $\{\boldsymbol{\psi}_r\}$ zadovoljava i preostale uvjete iz iskaza leme.

□

Time je konačno dokazan sljedeći rezultat:

LEMA 3.1.4 *Izmjeriva funkcija* $\boldsymbol{v}\colon \Omega_T \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *je slabo rješenje N—S na* Ω_T *ako i samo ako*

(i) $\boldsymbol{v} \in V_T$

(ii) $\boldsymbol{v}$ *zadovoljava (3.9), za sve* $t \in [0,T)$ *i sve* $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$.

Napomena. *Deriviranjem (3.9) po t i uzimajući u obzir $\boldsymbol{v} \in V_T$ dolazimo do*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) = -\nu(\nabla \boldsymbol{v}(t), \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}) \tag{3.18}$$

za g.s. $t \in [0, T)$ i sve $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$, gdje je jednakost u $\mathcal{D}'(0, T)$. Lako se vidi da desna strana definira linearan, ograničen funkcional na $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega)$. Označimo sa F taj funkcional pa po Schwartzovoj nejednakosti i Gagliardo–Nirenbergovoj interpolacijskoj nejednakosti (vidi dodatak A.3) dobivamo

$$\begin{aligned} |F(\boldsymbol{\psi})| &\leq (\nu \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2} + \| \boldsymbol{v} \|_{L^4}^2 + \| \mathbf{f} \|_{L^2}) \| \boldsymbol{\psi} \|_{W^{1,2}} \\ &\leq c \left(\| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2} + \| \boldsymbol{v} \|_{L^2}^{\alpha} \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2}^{\beta} + \| \mathbf{f} \|_{L^2} \right) \| \boldsymbol{\psi} \|_{W^{1,2}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje je

$$\begin{aligned} &\alpha = \beta = 1 \text{ ako } n = 2 \\ &\alpha = 1/2 \ , \ \beta = 3/2 \text{ ako } n = 3. \end{aligned}$$

Dakle, ako označimo sa $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ dual od $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$, za gotovo sve $t \in [0, T)$ postoji funkcional $\boldsymbol{v}_t \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ takav da

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{\psi} \rangle \ , \ \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega),$$

gdje smo sa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označili djelovanje funkcionala iz $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{sol}}$ na funkciju iz $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}$. Uočimo da $\boldsymbol{v}_t \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ nije nužno u $W^{-1,2}$; zbog

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}} \subset W^{1,2}$$

je

$$W^{-1,2} \subset \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{sol}}$$

(više od dualnim prostorima može se pročitati u dodatku A.2.6). Štoviše, prema (3.18), (3.19) pod pretpostvakom da je $\boldsymbol{v} \in V_T$ dolazimo do

$$\langle \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{\psi} \rangle = -\nu(\nabla \boldsymbol{v}(t), \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})$$

za $\boldsymbol{v}_t \in L^s(0, T; H^{-1}(\Omega))$, gdje je $s = \begin{cases} 2 & \text{ako } n = 2, \\ 4/3 & \text{ako } n = 3. \end{cases}$

Zbog Leme 3.1.3 u mogućnosti smo dati još neke rezultate o gustoći koje ćemo kasnije koristiti. Sjetimo se najprije da je za $\mathbf{w} \in L^q(0, T; X)$, $1 \leq q < \infty$, gdje je X Banachov prostor, i $0 < h < t$, izglađivač $\mathbf{w}^h$ od $\mathbf{w}$ (u smislu Friedrichsona) definiran sa

$$\mathbf{w}^h(t) = \int_0^T j_h(t - s) \, \mathbf{w}(s) ds \tag{3.20}$$

gdje je j_h standardni izglađivač (pozitivna, parna funkcija klase C^∞ sa nosačem unutar $(-h, h)$ i t.d. $\int_{-\infty}^{\infty} j_h(s) ds = 1$). Vrijedi i sljedeći rezultat kojeg navodimo bez dokaza:

LEMA 3.1.5 *Neka je* $\boldsymbol{v} \in L^q(0,T;X)$, $1 \le q < \infty$. *Tada je* $\mathbf{w}^h \in C^k([0,T];X)$ *za sve* $k \ge 0$. *Štoviše, vrijedi*

$$\lim_{h\to 0} \| \mathbf{w}^h - \mathbf{w} \|_{L^q(0,T;X)} = 0.$$

Ako je $\{\mathbf{w}_k\} \subset L^q(0,T;X)$ *t.d. konvergira prema* $\mathbf{w}$ *u* $L^q(0,T;X)$ *onda je*

$$\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{w}_k^h - \mathbf{w}^h \|_{L^q(0,T;X)} = 0.$$

LEMA 3.1.6 $\mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ *je gust u* $L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$.

Dokaz. Neka je $\{\boldsymbol{\Phi}_r\} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ baza za $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ i $\mathbf{w} \in L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$. Definirajmo

$$\mathbf{w}_l^h(x,t) = \sum_{r=1}^{l} (\mathbf{w}^h, \boldsymbol{\Phi}_r)_{W^{1,2}}\, \boldsymbol{\Phi}_r(x)$$

pa vrijedi

$$\lim_{l\to\infty} \| \mathbf{w}_l^h(t) - \mathbf{w}^h(t)\|_{W^{1,2}} = 0\ ,\ \forall t \in [0,T]\ ,\ h < T. \tag{3.21}$$

tj. $\mathbf{w}_l^h \to \mathbf{w}^h$ kada $l \to \infty$ za sve $t \in [0,T]$ (konvergencija po točkama).

Jasno je da je $\mathbf{w}^h \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ i prema prethodnoj lemi za $\varepsilon > 0$ postoji $h > 0$ t.d.

$$\int_0^T \| \mathbf{w}^h(t) - \mathbf{w}(t)\|^2_{W^{1,2}} dt < \varepsilon.$$

S druge strane, zbog konvergencije po točkama, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji za sve fiksne h je

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T \| \mathbf{w}_l^h(t) - \mathbf{w}^h(t)\|^2_{W^{1,2}} = 0.$$

Dakle, pokazali smo

$$\| \mathbf{w}_l^h - \mathbf{w} \|_{L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))} \le \| \mathbf{w}_l^h - \mathbf{w}^h \|_{L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))} + \| \mathbf{w}^h - \mathbf{w} \|_{L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))}$$

$$\xrightarrow{l\to\infty,h\searrow 0} 0.$$

$\square$

3.1.3 Polje tlaka

Vidjeli smo da u slaboj formulaciji funkcija tlaka iščezava iz formulacije. Razlog tome je priroda test funkcija, preciznije, svojstvo $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = 0$, za $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}$. Zanima nas možemo li i, ukoliko da, u kojem smislu, rekonstruirati polje tlaka iz slabog rješenja.

Pretpostavimo za trenutak da su $\boldsymbol{v}$ i p klasična rješenja N—S. Tada, množenjem $(1.1)_1$ sa $\boldsymbol{\chi} \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ i parcijalnom integracijom na Ω_T formalno dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^t \{\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\chi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\chi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\chi})\}\,\mathrm{ds} \\ = \int_0^t (p, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}) + (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\chi}) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\chi}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da svakom slabom rješenju $\boldsymbol{v}$ na Ω_T možemo pridružiti funkciju $P(t) \in L^2(\omega)$, $t \in [0,T)$, $\omega \subset\subset \Omega$, takvu da

$$\begin{aligned}\int_0^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\chi}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\chi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\chi})\}\,\mathrm{ds} \\ = (P(t), \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}) + (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\chi}) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\chi}),\end{aligned} \tag{3.23}$$

za sve $\boldsymbol{\chi} \in C_c^\infty(\Omega)$. Naglasimo da korištenjem samo (3.9) i svojstva lokalne regularnosti slabih rješenja ne možemo, općenito, pisati

$$P(\cdot, t) = \int_0^t p(\cdot, s)\,\mathrm{ds} \ \text{, za neku } p \in L^1_{loc}([0,T)), \tag{3.24}$$

zbog činjenice da slabo rješenje ima *a priori* samo umjeren stupanj regularnosti u vremenu. Da to vidimo, promotrimo vektorsko polje $\overline{\boldsymbol{v}}$ definirano sa (3.4) i odaberimo $a(t) \in C([0,T))$ takvo da $a'(t) \notin L^1_{loc}([0,T))$. Direktnim računom izlazi

$$\begin{aligned}\int_0^t \{\nu(\nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \nabla \boldsymbol{\chi}) - ((\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\, \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\chi})\}\,\mathrm{dx} - (\overline{\boldsymbol{v}}(t), \boldsymbol{\chi}) + (\overline{\boldsymbol{v}}_0, \boldsymbol{\chi}) \\ = \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)((\nabla\sigma)^2, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi})\,\mathrm{ds} + (a(t) - a(0))(\sigma, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi})\end{aligned}$$

pa je (3.23) zadovoljeno uz $\mathbf{f} = 0$ i

$$P = \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)(\nabla\sigma)^2)\,\mathrm{ds} + (a(t) - a(0))\sigma \ ,$$

ali, kako $a'(t) \notin L^1_{loc}([0,T))$, P ne zadovoljava (3.24).

TEOREM 3.1.7 *Neka je $\boldsymbol{v}$ slabo rješenje na Ω_T. Tada postoji skalarno polje $P\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$,*

$$P(t) \in L^2(\omega) \ \text{, za sve } t \in [0,T) \text{ i } \omega \subset\subset \Omega,$$

takvo da zadovoljava (3.23) za sve $\boldsymbol{\chi} \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ i sve $t \in [0,T)$. Štoviše, ako ω zadovoljava uvjet konusa[1], onda postoje konstante $C = C(t,\omega) \in \mathbb{R}$ i $C_1 = C_1(\omega) > 0$ takve da

$$\|P(t) - C\|_{L^2(\omega)} \le C_1 \left\{ \int_0^t \left(\|\nabla \boldsymbol{v}(s)\|_{L^2(\omega)} + M^\alpha \|\nabla \boldsymbol{v}(s)\|^\beta_{L^2(\omega)} + \|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\omega)} \right) \mathrm{ds} + M \right\}$$

[1] Ω zadovoljava uvjet konusa ako postoji konačan konus C t.d. je svaki $x \in \Omega$ vrh konačnog konusa C_x sadržanog u Ω i kongruentnog C (C_x mora biti dobiven iz C nekim krutim gibanjem). Može se pokazati da se svaka ograničena domena koja zadovoljava uvijet konusa može prikazati kao konačna unija domena koje su lokalno Lipschitzove.

za sve $t \in [0,T)$, gdje je

$$M = \operatorname{ess\,sup}_{s\in[0,t]} \| \boldsymbol{v}(s)\|_{L^2(\omega)},$$

a α i β dani s

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \textit{ako } n = 2, \\ 1/2 & \textit{ako } n = 3, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \textit{ako } n = 2, \\ 3/2 & \textit{ako } n = 3. \end{cases}$$

Dokaz. Promotrimo niz ograničenih "rastućih" domena $\{\Omega_k\}$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, takvih da iscrpljuju Ω, tj.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k,$$

i bez smanjenja općenitosti neka Ω_k zadovoljava uvjet konusa za sve k. Za fiksirano $t \in [0,T)$ promotrimo funkcional

$$F(\boldsymbol{\chi}) = \int_0^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\chi}) - ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\chi}) + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\chi})\} \,\mathrm{ds} - (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\chi}) + (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\chi})$$

za $\boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Jasno je da je F linearan funkcional na $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Pokažimo da je ograničen: vrijedi

$$\begin{aligned} |F(\boldsymbol{\chi})| \leq & \int_0^t \{\nu \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2} \|\nabla \boldsymbol{\chi}\|_{L^2} + \|(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}\|_{L^2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^2} + \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^2}\} ds \\ & + \|\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{v}_0\|_{L^2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^2} \end{aligned}$$

pa koristeći Schwartzovu, Poincaréovu i Gagliardo—Nirenbergove nejednakosti

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4} &\leq 2^{-1/4} \|u\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2}^{1/2} \text{ ako je } n = 2 \\ \|u\|_{L^4} &\leq \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^{3/4} \|u\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} \text{ ako je } n = 3, \end{aligned} \tag{3.25}$$

i

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^4} &\leq C \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^2}^{\alpha} \text{ ako je } n = 2 \\ \|\nabla u\|_{L^4} &\leq C \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^2}^{\alpha} \text{ ako je } n = 3, \end{aligned}$$

za sve $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, možemo ocijeniti

$$|F(\boldsymbol{\chi})| \leq C \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^2} \left\{ \int_0^t (\|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2}^{\beta} M_k^{\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \,\mathrm{ds} + M_k \right\} \tag{3.26}$$

gdje je $M_k = \operatorname{ess\,sup}_{s\in[0,T]} \| \boldsymbol{v}(s)\|_{L^2(\Omega_k;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})}$ dobro definirano jer $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}})$. Zato je F neprekidan linearan funkcional na $W_0^{1,2}(\Omega_k;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ za svako k, i koji, prema

Lemi 3.9 iščezava na $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega_k)$. Stoga, kako je Ω_k ograničen za svako k, prema Lemi 3.1.8 postoji $P_1 = P_1(t) \in L^2(\Omega_1)$ t.d.

$$F(\boldsymbol{\chi}) = (P_1, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi})\ ,\ \forall \boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Analogno, postoji $P_2 = P_2(t) \in L^2(\Omega_2)$ t.d.

$$F(\boldsymbol{\chi}) = (P_2, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi})\ ,\ \forall \boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_2, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Za sve $\boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ (pa je i $\boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ jer $\Omega_1 \subset \Omega_2$) onda vrijedi

$$\int_{\Omega_1} P_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = F(\boldsymbol{\chi}) = \int_{\Omega_2} P_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = \int_{\Omega_1} P_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}$$

pa je $P_2 = P_1$ na Ω_1 gotovo sigurno; zato možemo modificrati P_2 tako da je $P_2 \equiv P_1$ na Ω_1. Za $\boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_2)$ je pak

$$\int_{\Omega_2} P_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = \int_{\Omega_1} P_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} + \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} P_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}$$

pa zaključujemo da mora vrijediti $P_2(x,t) = P_1(x,t) + c(\Omega_1, \Omega_2, t)$. Induktivnim argumentom onda slijedi postojanje funkcije $P \colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ t.d. $P(t) \in L^2(\Omega_k)$, za sve k. Štoviše,

$$F(\boldsymbol{\chi}) = (P, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi})\ ,\ \forall \boldsymbol{\chi} \in W_0^{1,2}(\Omega_k, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}),$$

i prema (3.26) vrijedi

$$\|P(t)\|_{L^2(\Omega_k)} \leq C \left\{ \int_0^t (\|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega_k)} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|^{\beta}_{L^2(\Omega_k)} M_k^{\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_k)}) ds + M_k \right\}.$$

Štoviše, za svaki k možemo namjestiti konstantu (koja općenito ovisi o Ω_k) t.d. vrijedi

$$(P(t), 1)_{L^2(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} P(t)\, \mathrm{dt} = 0.$$

$\square$

LEMA 3.1.8 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ograničen, i neka je problem*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f\ ,\ \mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}),$$

rješiv za sve $f \in L^2(\Omega)$. Tada za svaki linearan funkcional F na $W_0^{1,2}$ koji iščezava na $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}$ postoji jedinstveni $p \in L^2(\Omega)$ t.d. F dopušta reprezentaciju

$$F(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u}\ ,\ \forall \mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dokaz. *Dokaz se može naći čak i u općenitijoj verziji u [6].* $\square$

3.2 Egzistencija slabog rješenja

Napokon smo u mogućnosti dokazati glavni rezultat—egzistenciju slabog rješenja. Prije samog teorema pokazujemo jednu tehničku lemu koju koristimo u dokazu teorema o egzistenciji, a govori o svojstvu nelinearnog člana sistema N—S na funkcijama iz prostora $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$:

LEMA 3.2.1 *Za $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ je $((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) = 0$.*

Dokaz. *Direktnim računom izlazi*

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}_i (D_i\, \boldsymbol{\psi}_j)\, \boldsymbol{\psi}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}_i\, D_i(\boldsymbol{\psi}_j^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}_i\, \boldsymbol{\psi}_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (D_i\, \boldsymbol{\varphi}_i)\, \boldsymbol{\psi}_j^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi}^2 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

TEOREM 3.2.2 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ domena i $T > 0$. Tada, za sve $\boldsymbol{v}_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, postoji barem jedno rješenje N—S na Ω_T i to rješenje zadovoljava*

(i) Energetsku nejednakost: za $t \in [0, T]$

$$\|\, \boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla\, \boldsymbol{v}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq 2 \int_0^t (\boldsymbol{v}(\tau), \mathbf{f}(\tau)) d\tau + \|\, \boldsymbol{v}_0\, \|_{L^2}^2 \tag{EI}$$

(ii) $\lim_{t \to 0} \|\, \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_0\, \|_{L^2} = 0$.

Dokaz. Dokaz provodimo Faedo—Galerkinovom metodom.

Neka je $\{\boldsymbol{\psi}_r\} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ baza od $H(\Omega)$ konstruirana u Lemi 3.1.3. Promotrimo niz aproksimativnih rješenja $\boldsymbol{v}_k$ oblika

$$\boldsymbol{v}_k(x, t) = \sum_{r=1}^{k} c_k r(t)\, \boldsymbol{\psi}_r(x)\ ,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Uvrstimo li $\boldsymbol{v}_k$ u slabu formulaciju (3.18) dobivamo

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_k(t), \boldsymbol{\psi}) + \nu(\nabla\, \boldsymbol{v}_k(t), \nabla\, \boldsymbol{\psi}) + ((\boldsymbol{v}_k(t))\, \boldsymbol{v}_k(t), \boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{\psi})$$

za $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}_{\text{sol}}(\Omega)$, odnosno, uzimajući u obzir formu funkcije $\boldsymbol{v}_k$,

$$\sum_{r=1}^{k} c'_{kr}(t)(\boldsymbol{\psi}_r, \boldsymbol{\psi}) + \nu \sum_{r=1}^{k} c_{kr}(t)(\nabla \boldsymbol{\psi}_r, \nabla \boldsymbol{\psi})$$
$$+ \left(\left(\left(\sum_{r=1}^{k} c_{kr}(t)\, \boldsymbol{\psi}_r \right) \cdot \nabla \right) \sum_{s=1}^{k} c_{ks}\, \boldsymbol{\psi}_s, \boldsymbol{\psi} \right) = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{\psi}).$$

Sada uvrštavanjem funkcija $\boldsymbol{\psi}_r$, $r = 1, \dots k$, dobivamo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koje moraju zadovoljavati koeficijenti c_{kr} za sve r:

$$\frac{dc_{kr}}{dt} + \sum_{i=1}^{k} a_{ir} c_{ki} + \sum_{i=1}^{k} a_{ir} c_{ki} + \sum_{i,s=1}^{k} a_{isr} c_{ki} c_{ks} = f_r \tag{3.28}$$

uz inicijalne uvjete

$$c_{kr}(0) = C_{0r}, \tag{3.29}$$

gdje je

$$a_{ir} = \nu(\nabla \boldsymbol{\psi}_i, \nabla \boldsymbol{\psi}_r)\ ,\ a_{isr} = ((\boldsymbol{\psi}_i \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\psi}_s, \nabla \boldsymbol{\psi}_r)\ ,\ f_r = (f\, \boldsymbol{\psi}_r)\ ,\ C_{0r} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi}_r).$$

Kako je $f_r \in L^2(0, T)$ za sve $r = 1, \dots, k$, iz Picardovog teorema slijedi da gornji sustav običnih diferencijalnih jednadžbi ima jedinstveno rješenje $c_{kr} \in W^{1,2}(0, T_k)$ za $r = 1, \dots, k$ i $T_k \le T$. Pomnožimo (3.28) sa c_{kr}, prosumirajmo sve po r, $r = 1, \dots, k$ i prointegrijamo sve od 0 do t za $t \in [0, T]$, pa (3.28), uz korištenje Leme 3.2.1, prelazi u

$$\| \boldsymbol{v}_k(t) \|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \| \nabla \boldsymbol{v}_k(\tau) \|_{L^2}^2 d\tau = 2 \int_0^t (\boldsymbol{v}_k(\tau), \mathbf{f}(\tau)) d\tau + \| \boldsymbol{v}_{0k} \|_{L^2}^2 \tag{3.30}$$

gdje je $\boldsymbol{v}_{0k} = \boldsymbol{v}_k(0)$.

Uočimo najprije da je $\| \boldsymbol{v}_{0k} \|_{L^2} \le \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}$; zaista, jer je $\{\boldsymbol{\psi}_r\}$ ortonormirana baza za $\mathrm{H}_{\text{sol}}(\Omega)$ slijedi

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{v}_{0k} \|_{L^2}^2 = \| \boldsymbol{v}_k(0) \|_{L^2}^2 &= \| \sum_{r=1}^{k} c_{kr}(0)\, \boldsymbol{\psi}_r \|_{L^2}^2 = \| \sum_{r=1}^{k} C_{0r}\, \boldsymbol{\psi}_r \|_{L^2}^2 \\
&= \| \sum_{r=1}^{k} (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi}_r)\, \boldsymbol{\psi}_r \|_{L^2}^2 = \{ \text{ jer je } (\boldsymbol{\psi}_r)_r \text{ ONB} \} \\
&= \sum_{r=1}^{k} |(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\psi}_r)|^2 \le \{ \text{Besselova nejednakost} \} \le \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Sada uz korištenje Schwartzove nejednakosti i Gronwallove leme, (3.30) možemo ocijeniti sa

$$\| \boldsymbol{v}_k \|_{L^2}^2 + \int_0^t \| \nabla \boldsymbol{v}_k(\tau) \|_{L^2}^2 d\tau \le M\ ,\ \forall t \in [0, T), \tag{3.31}$$

gdje M ne ovisi o k i t. Iz nejednakosti (3.31) posebno slijedi i

$$|c_{kr}(t)| \leq M^{1/2} \ , \ r = 1, \ldots, k$$

što povlači $T_k = T$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Uočimo, time smo zapravo pokazali da je $\boldsymbol{v}_k$ uniformno ograničena u $L^\infty(0, T; \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)) \cap L^2(0, 2; \mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)) \equiv V_T(\Omega)$.

Sada dokazujemo uniformnost po t. Proučimo svojstva konvergencije niza $\{\boldsymbol{v}_k\}_k$ kada $k \to \infty$. Pokazat ćemo da je za $r \in \mathbb{N}$ fiksirano, niz

$$\{G_k^{(r)}(t) = (\boldsymbol{v}_k(t), \boldsymbol{\psi}_r)\}$$

uniformno ograničen i uniformno neprekidan po $t \in [0, T]$. Uniformna ograničenost automatski slijedi iz (3.31) uz korištenje Schwartzove nejednakosti :

$$|G_k^{(r)}(t)| \leq \| \boldsymbol{v}_k(t) \|_{L^2} \| \boldsymbol{\psi}_r \|_{L^2} \leq M^{1/2} \ , \ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T].$$

Po Schwartzovoj nejednakosti iz (3.31) pak slijedi uniformna neprekidnost:

$$\begin{aligned} |G_k^{(r)}(t) - G_k^{(r)}(s)| \leq & S_1 \int_s^t (\|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2} + \| \mathbf{f}(\tau)\|_{L^2})\, \mathrm{d}\tau \\ & + S_2 M^{1/2} \int_s^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{3.32}$$

gdje je

$$S_1 = \| \boldsymbol{\psi}_r \|_{L^2} \ , \ S_2 = \max_{x \in \Omega} | \boldsymbol{\psi}_r(x)|.$$

Pokažimo još ekvineprekidnost familije $\{G_k^{(r)}\}k$: iz (3.32) slijedi

$$\begin{aligned} |G_k^{(r)}(t) - G_k^{(r)}(s)| \leq & S_1 \int_s^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau + S_1 \int_s^t \| \mathbf{f}(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau \\ & + S_2 M^{1/2} \int_s^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau \\ \leq & S_1 (t-s) \left(\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}^2\, \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} + S_1 (t-s) \left(\int_0^t \| \mathbf{f}(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} \\ & + S_2 M^{1/2} (t-s) \left(\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}\, \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} \\ \leq & \left\{ \text{prema (3.31) je } \int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}^2\, \mathrm{d}\tau \text{ ograničeno neovisno o } k \right\} \\ \leq & (t-s) C. \end{aligned}$$

Sada smo u uvjetima Arzela–Ascoli teorema (može se naći u A.3.2): postoji podniz $\{G_k^{(r)}(t)\}_k$ koji uniformno konvergira prema neprekidnoj funkciji $G^{(r)}(t)$ (podniz možda ovisi o r, ali onda naprosto Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo pronaći podniz $\{G_k^{(r)}(t)\}_k$ koji konvergira prema $G^{(r)}(t)$ neovisno o $r \in \mathbb{N}$, uniformno po $t \in [0,T]$).

Kako je $\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}$ slabo kompaktan, prethodno onda implicira egzistenciju funkcije $\boldsymbol{v}(t) \in \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ t.d.

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}_r) = 0 \text{ uniformno po } t \in [0,T] \text{ i } \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

Pokažimo da $\{\boldsymbol{v}_k(t)\}$ konvergira slabo u L^2 prema $\boldsymbol{v}(t)$ i to uniformno po t, tj.

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \mathbf{u}) = 0 \text{ uniformno po } t \in [0,T]\ \forall\, \mathbf{u} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}}). \tag{3.34}$$

Prema Helmholtz–Weylovoj dekompoziciji, (3.34) je dovoljno pokazati za $\mathbf{u} \in \mathrm{H}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$. Zapišimo

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} u_r\, \boldsymbol{\psi}_r = \sum_{r=1}^{N} u_r\, \boldsymbol{\psi}_r + \mathbf{u}^{(N)}$$

pa je

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \mathbf{u})| &\leq \sum_{k=1}^{N} |(\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), u_r\, \boldsymbol{\psi}_r)| + |(\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \mathbf{u}^{(N)})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \|\, \mathbf{u}_r \,\|_{L^2} |(\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}_r)| + M^{1/2} \|\, \mathbf{u}^{(N)})\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i odaberimo N dovoljno velik tako da je

$$\|\, \mathbf{u}^{(N)})\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Prema (3.32) možemo odabrati $k = k(\mathbf{u}, \varepsilon)$ t.d.

$$\sum_{k=1}^{N} \|\, \mathbf{u}_r \,\|_{L^2} |(\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}_r)| < \varepsilon$$

pa (3.34) slijedi iz (3.33) i prethodne dvije nejednakosti. Sada je po (3.31) jasno da je $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}})$. Ponovno, prema (3.31) i slabe kompaktnosti od $L^2(\Omega_T)$ postoji funkcija $\tilde{\boldsymbol{v}} \in L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$ t.d. za $m = 1,\ldots,n$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (\boldsymbol{v}_k - \tilde{\boldsymbol{v}}, \mathbf{w})\,\mathrm{ds} = \lim_{k\to\infty} \int_0^T (\partial_m(\boldsymbol{v}_k - \tilde{\boldsymbol{v}}), \mathbf{w})\,\mathrm{ds} = 0,$$

$\forall\, \mathbf{w} \in L^2(\Omega^T)$. Odabirom $\mathbf{w} \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ zbog (3.34) slijedi $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}}$ pa posebno i

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (\partial_m(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}), \mathbf{w})\,\mathrm{ds} = 0\ ,\ \forall\, \mathbf{w} \in L^2(\Omega_T;\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\ ,\ m = 1,\ldots,n \tag{3.35}$$

tj. $\boldsymbol{v}_k \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $L^2(0,T,\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$ (slaba konvergencija).

Sada ćemo pokazati da (3.34) i (3.35) impliciraju jaku konvergenciju niza $\{\boldsymbol{v}_k\}_k$ prema $\boldsymbol{v}$ u $L^2(\omega \times [0,T])$, $\omega \subset\subset \Omega$. Primjenimo Friedrichsonovu nejednakost[2] na $\mathbf{w} - \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}$ pa uz (3.31) i (3.33) slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \| \boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)} \,\mathrm{dt} = 0 \ , \ C \subset \mathbb{R}^n \text{ kocka} \tag{3.36}$$

tj. $\boldsymbol{v}_k \to \boldsymbol{v}$ jako u $L^2(0,T;L^2(C;\mathbb{R}^n))$, za sve kocke $C \subset \mathbb{R}^n$.

Pokažimo da je ovako konstruirano $\boldsymbol{v}$ uistinu slabo rješenje sistema N–S. Kako smo pokazali da je $\boldsymbol{v} \in V_T$, prema Lemi 3.1.4 preostaje još pokazati da ono zadovoljava varijacijsku formulaciju (3.9). Uvrštavanjem $\boldsymbol{v}_k$ u slabu formulaciju (3.18), uzimanjem $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_r$ i integriranjem od 0 do $t \le T$ dolazimo do

$$\begin{aligned} \int_0^t \{-\nu(\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau), \nabla \boldsymbol{\psi}) - ((\boldsymbol{v}_k(\tau)\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}_k(\tau), \boldsymbol{\psi})\}\, \mathrm{d}\tau \\ = \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \boldsymbol{\psi}_r)\, \mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{v}_k(t), \boldsymbol{\psi}_r) - (\boldsymbol{v}_{0k}, \boldsymbol{\psi}_r). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Prema (3.34) i (3.35) je pak

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{v}_k(t) - \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}_r) = 0 \text{ i } \lim_{k\to\infty} \int_0^t (\nabla \boldsymbol{v}_k(s) - \nabla \boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{\psi}_r)\, \mathrm{ds} = 0. \tag{3.38}$$

Nadalje, označimo sa C kocku sadržanu u $\operatorname{supp} \boldsymbol{\psi}_r$ pa imamo

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \{((\boldsymbol{v}_k \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\psi}_r) - ((\boldsymbol{v}\,\cdot)\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}_r)\}\, \mathrm{ds} \right| \\ &\le \left| \int_0^t (((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_k)\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right| + \left| \int_0^t ((\boldsymbol{v})\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right|. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Uz oznaku $S = \max_C |\, \boldsymbol{\psi}_r(x)|$, prema (3.31) vrijedi još i

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t (((\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right| \\ &\quad \le S \left(\int_0^t \| \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v} \|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k \|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right)^{1/2} \\ &\qquad \le S M^{1/2} \left(\int_0^t \| \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v} \|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{ds} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

---

[2] Friedrichsonova nejednakost (dokaz se može naći u [6]): Neka je C kocka u $\mathbb{R}^n$. Tada $\forall \eta > 0$ $\exists K(\eta, C) \in \mathbb{N}$ i funkcije $w_i \in L^\infty(C;\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, K$ t.d. za $w \in W^{1,2}(C;\mathbb{R}^n)$ i $T > 0$

$$\int_0^T \|w(t)\|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{dt} \le \sum_{i=1}^k \int_0^T (w(t), w_i)^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{dt} + \eta \int_0^T \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{dt}\,.$$

pa prema (3.36)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_0^t (((\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v})\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{\psi}_r)\,\mathrm{ds}\right|=0. \tag{3.40}$$

Dalje je

$$\left|\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{ds}\right|\le\sum_{m=1}^n\left|\int_0^t (\partial_m(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}),\upsilon_m\,\boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{ds}\right|$$

a zbog

$$\int_0^T \|\,\upsilon_m\,\boldsymbol{\psi}_r\,\|_{L^2}\,\mathrm{ds}\le S\int_0^T \|\,\upsilon_m\,\|_{L^2}\,\mathrm{ds}<\infty \text{ tj. } \upsilon_m\,\boldsymbol{\psi}_r\in L^2(\Omega_T)$$

je prema (3.35)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\psi}_r)_{L^2(C;\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{ds}\right|=0. \tag{3.41}$$

Zato, puštanjem na limes u (3.37) iz (3.38)-(3.41) slijedi

$$\begin{aligned}\int_0^t \{-\nu(\nabla\,\boldsymbol{v}(\tau),\nabla\,\boldsymbol{\psi})-((\boldsymbol{v}(\tau)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}(\tau),\boldsymbol{\psi})\}\,\mathrm{d}\tau\\ =\int_0^t(\mathbf{f}(\tau),\boldsymbol{\psi}_r)\,\mathrm{d}\tau+(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\psi}_r)-(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{\psi}_r).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Iz Leme 3.1.3 znamo da svaku $\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ možemo uniformno aproksimirati u $C^2(\overline{\Omega})$ funkcijama oblika

$$\boldsymbol{\psi}_N(x)=\sum_{r=1}^N\gamma_r\,\boldsymbol{\psi}_r(x)\ ,\ n\in\mathbb{N}\ ,\ \gamma_r\in\mathbb{R}$$

pa uzimanjem $\boldsymbol{\psi}_N$ umjesto $\boldsymbol{\psi}$ u (3.42) i puštanjem na limes $N\to\infty$ u novoj relaciji, uz $\boldsymbol{v}\in V_T$, vidimo da (3.9) vrijedi za sve $\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$. Time je egzistencija rješenja pokazana.

Pokažimo jos energetsku nejednakost (EI). Najprije dokazujemo lemu koja igra ključnu ulogu:

LEMA 3.2.3 *Neka je* $\{\mathbf{u}_m\}_m,\mathbf{u}\subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *t.d.* $\mathbf{u}_m\rightharpoonup\mathbf{u}$ *u* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *(slabo),* $1\le p\le\infty$. *Tada vrijedi (slaba poluneprekidnost norme odozdo)*

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^p}\le\liminf_m\|\,\mathbf{u}_m\,\|L^p.$$

Ako je $1<p<\infty$ *i* $\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^p}\ge\limsup\|\,\mathbf{u}_m\,\|_{L^p}$ *onda čak*

$$\mathbf{u}_m\to\mathbf{u}\ \textit{jako u}\ L^p.$$

Dokaz. Tvrdnje pokazujemo samo u slučaju $p = 2$ koji nam je potreban za završetak dokaza teorema. Zbog $\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$ u $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall\, \mathbf{w} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } |(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq \varepsilon \text{ čim je } m \geq m_0.$$

Uzmimo $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ i $\varepsilon = \eta \| \mathbf{u} \|_{L^2}$ pa

$$|(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{u})| = |(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}) - \| \mathbf{u} \|_{L^2}^2| < \eta \| \mathbf{u} \|_{L^2}$$

i

$$\| \mathbf{u} \|_{L^2}^2 < \eta \| \mathbf{u} \|_{L^2} + |(\mathbf{u}_m, \mathbf{u})| < \eta \| \mathbf{u} \|_{L^2} + \| \mathbf{u}_m \|_{L^2} \| \mathbf{u} \|_{L^2}$$

pa množenjem prethodne nejednakosti sa $1/\| \mathbf{u} \|_{L^2}$ slijedi prva tvrdnja.

Zbog $\| \mathbf{u} \|_{L^p} \geq \limsup \| \mathbf{u}_m \|_{L^p}$ je onda

$$\| \mathbf{u}_m - \mathbf{u} \|_{L^2}^2 = (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}) = \| \mathbf{u}_m \|_{L^2} + \| \mathbf{u} \|_{L^2} - 2(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}) \to 0.$$

□

Uzmimo u (3.30) $\liminf\limits_{k \to \infty}$ pa dobivamo

$$\liminf_k \left\{ \| \boldsymbol{v}_k \|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \| \nabla \boldsymbol{v}(\tau) \|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \right\} \geq \| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \| \boldsymbol{v}(\tau) \|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \quad (3.43)$$

i

$$\lim_{k \to \infty} \left\{ 2 \int_0^t (\boldsymbol{v}_k(\tau), \mathbf{f}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau + \| \boldsymbol{v}_{0k} \|_{L^2}^2 \right\} = \int_0^t (\boldsymbol{v}(\tau), \mathbf{f}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau + \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}^2$$

što onda povlači (EI).

Sada iz (EI) automatski izlazi $\limsup\limits_{t \to 0} \| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^2}^2 \leq \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}^2$, a, kako je $\boldsymbol{v}(t)$ slabo neprekidna u L^2, onda je

$$\liminf_{t \to 0} \| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^2} \geq \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}$$

tj. zajedno

$$\lim_{t \to 0} \| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^2} = \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}.$$

Sada gornja relacija zajedno sa L^2 slabom neprekidnošću od $\boldsymbol{v}$ povlači

$$\lim_{t \to 0} \| \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2} = 0.$$

□

Napomena. *U literaturi se mogu naći različite definicije i konstrukcije slabog rješenja za N—S. Kako u slučaju kada je $n = 3$ (dimenzija prostora) nemamo zagarantiranu jedinstvenost rješenja, što je tema sljedećeg odjeljka, razumno je za očekivati da različite konstrukcije vode i do različitih slabih rješenja.*

3.3 Jedinstvenost slabog rješenja

3.3.1 Energetska jednakost

Općenito, slaba rješenja poštuju samo energetsku nejednakost (EI) iako bismo, s fizikalnog stajališta, očekivali da zadovoljavaju i energetsku jednakost:

uzmimo, jednostavnosti radi, da je $\mathbf{f} = 0$. Onda za svako fizički razumno rješenje očekujemo da mu je pripadna kinetička energija $E(t) = \frac{1}{2}\| \boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}^2$ u trenutku t jednaka $E(\sigma) - \nu \int_\sigma^t \|\nabla \boldsymbol{v}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau$ za $\sigma < t$ (kinetička energija u nekom treutku $\sigma < t$ minus disipacija energije zbog viskoznosti na $[\sigma, t]$). Ipak, prema (EI), za kinetičku energiju slabog rješenja čak je moguće da poraste na određenim vremenskim intervalima—s fizičkog stajališta, to nema smisla jer kinetička energija ne može rasti. Zato tražimo slaba rješenja čija je kinetička energija padajuća funkcija od vremena i čini se da je dovoljno tražiti

$$\| \boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_\sigma^t \|\nabla \boldsymbol{v}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \le \| \boldsymbol{v}(\sigma)\|_{L^2}^2 \tag{SEI}$$

za g.s. $\sigma > 0$, $t \in [\sigma, T)$, i posljednju nejednakost zovemo *jaka energetska nejednakost* (*strong energy inequality*).

Ako je $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ograničena domena, onda slabo rješenje konstruirano u Teoremu 3.2.2 zadovoljava (SEI): uzmimo u (3.36) $C \supset \Omega$ pa je

$$\lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{v}_k(\sigma) - \boldsymbol{v}(\sigma)\|_{L^2} = 0 \text{ za g.s. } \sigma \in [0, T). \tag{3.44}$$

S druge strane, iz (3.30) uz $f \equiv 0$ slijedi

$$\| \boldsymbol{v}_k(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}_k(\tau)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\tau = \| \boldsymbol{v}_k(\sigma)\|_{L^2}^2 \ , \forall \sigma \in [0, T) \ , \forall t \in [\sigma, T]$$

pa puštanjem $k \to \infty$ u gornjoj relaciji uz (3.43) i (3.44) ponovno dobivamo (SEI).

Napomena. *Nije poznato vrijedi li (SEI) za proizvoljne domene Ω, bez obzira na glatkoću. Ipak, u slučaju da je $\Omega \equiv \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ili vanjska domena ili poluprostor, može se pokazati egzistencija slabog rješenja koje poštuje (SEI) i svi dokazi zasnivaju se na određenoj ocjeni za polje tlaka koja posebno implicira i $p \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$ – napomenimo da ovo daje više od regularnosti iz teorema 3.1.7.*

Iako se čini prirodnija od (EI), (SEI) i dalje predstavlja nepoželjno svojstvo na intervalima gdje vrijedi stroga nejednakost. Naime, na svim takvim intervalima, kinetička energija se smanji za neki iznos, ali ne zbog disipacije koja dolazi od viskoznosti. Sada proučavamo dovoljne uvjete na slaba rješenja tako da ona zadovoljavaju *energetsku jednakost*, što je jači zahtjev od *energetske nejednakosti.* Napomenimo da su oba ta zahtjeva zadovoljena u dimenziji 2, ali ne i 3, stoga pitanje egzistencije rješenja u dimeziji 3 takvog da ono zadovoljava energetsku jednakost i da je jedinstveno, ostaje otvoreno.

TEOREM 3.3.1 *Neka je $\boldsymbol{v}$ slabo rješenje N—S na Ω_T takvo da je*

$$\boldsymbol{v} \in L^4(0,T;L^4(\Omega)). \tag{3.45}$$

Tada $\boldsymbol{v}$ zadovoljava energetsku jednakost

$$\|\,\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla\,\boldsymbol{v}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = 2\int_0^t (\boldsymbol{v}(\tau),\mathbf{f}(\tau))d\tau + \|\,\boldsymbol{v}_0\,\|_{L^2}^2 \tag{EE}$$

za sve $t \in [0,T)$.

Dokaz. Neka je $\{\boldsymbol{v}_k\}_k \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{T}}(\Omega)$ niz koji konvergira prema $\boldsymbol{v}$ u $L^2(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^1(\Omega))$ (uočimo da ovakav niz postoji zbog Leme 3.1.6). Odaberimo u (3.5), uz $s=0$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{v}_k^h$ i uočimo da je

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^T \left\{((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}_k^h,\boldsymbol{v}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v})\right\}\mathrm{dt}\right| \\ &\qquad\le \int_0^T \|\,\boldsymbol{v}\,\|_{L^4}\|\nabla(\boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v}^h)\|_{L^2}\,\mathrm{dt} \\ &\qquad\le \|\,\boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v}_h\,\|_{L^2(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^1)}\left(\int_0^T \|\,\boldsymbol{v}(t)\|_{L^4}^2\,\mathrm{dt}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.46}$$

pa prelaskom na limes $k\to\infty$ uz korištenje svojstava izglađivača (Lema 3.1.5)

$$\|\,\boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v}^h\,\|_{L^2(0,T;\mathrm{H}_{\mathrm{sol}}^1(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

je u (3.5)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\{\left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\boldsymbol{v}^h}{\partial s}\right) - \nu(\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\boldsymbol{v}^h) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v})\right\}\mathrm{ds} \\ &\qquad = -\int_0^t (\mathbf{f},\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{ds} + (\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}^h(t)) - (\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_0^h). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Kako je jezgra izglađivača parna na $(-h,h)$, direktnim raspisivanjem izlazi

$$\int_0^t \left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\boldsymbol{v}^h}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}\tau = \int_0^t\int_0^t \frac{dj_h(\tau-s)}{d\tau}(\boldsymbol{v}(\tau),\boldsymbol{v}(s))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{ds} = 0.$$

Prema Lemi 3.1.5 i (3.46) uz $\boldsymbol{v}^h$ umjesto $\boldsymbol{v}_k^h$ i $\boldsymbol{v}$ umjesto $\boldsymbol{v}^h$ je

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{ds} = \int_0^t (\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds},$$

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (\mathbf{f},\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{ds} = \int_0^t (\mathbf{f},\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds},$$

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t ((\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = \int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds}\,.$$

Označimo sa $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_k \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ niz koji konvergira prema $\boldsymbol{v}$ u $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}$ (sjetimo se, $\boldsymbol{v}(t)\in \mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ za g.s. $t\in[0,T)$) pa vrijedi

$$\begin{aligned}|((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\psi}_k,\boldsymbol{\psi}_k)| &\le |((\boldsymbol{v}\cdot\nabla),\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\psi}_k)| + |((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\psi}_k),\boldsymbol{v})|\\ &\le \|\,\boldsymbol{v}\,\|_{L^4}\|\nabla\,\boldsymbol{v}\,\|_{L^2}\|\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\psi}_k\,\|_{L^4} + \|\,\boldsymbol{v}\,\|^2_{L^4}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\psi}_k)\|_{L^2}\end{aligned}$$

pa po teoremu o Soboljevljevom ulaganju za $n=2,3$ slijedi

$$\lim_{k\to\infty}((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\psi}_k,\boldsymbol{\psi}_k) = ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}).$$

Kako je $\boldsymbol{v}(t)\in \mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ za g.s. $t\in[0,T)$ to je i

$$((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\psi}_k,\boldsymbol{\psi}_k) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v},\nabla(\boldsymbol{\psi}_k)^2) = 0\ ,\ \forall k,$$

a onda zbog gustoće i

$$\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = 0.$$

Konačno je onda zbog L^2 slabe neprekidnosti i $\int_0^t h_h(s)\,\mathrm{ds} = 1/2$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}^h(t)) &= \int_0^h j_h(s)(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t+s))\,\mathrm{ds}\\ &= \int_0^h j_h(s)\left(\|\,\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2} + (\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t+s)-\boldsymbol{v}(t))\right)\mathrm{ds}\\ &= \frac{1}{2}\|\,\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2} + O(h)\end{aligned}$$

pa puštanjem $h\to 0$ u (3.47) slijedi tvrdnja.

$\square$

Napomena. *Prodiskutirajmo sada razliku u slučajevim $n=2$ i $n=3$. Iz Gagliardo—Nirenbergove nejednakosti, za slabo rješenje $\boldsymbol{v}$, u slučaju $n=2$ vrijedi*

$$\int_0^T \|\,\boldsymbol{v}(t)\|^4_{L^4}dt \le c\int_0^T \|\,\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2}\|\nabla\,\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2}$$

pa je

$$\boldsymbol{v}\in L^4(0,T;L^4(\Omega))$$

i u duhu prethodnog teorema ono onda zadovoljava energetsku jednakost (EE).

Sjetimo se da je svako slabo rješenje L^2 slabo neprekidno u vremenu (o tome govori Lema 3.1.2) pa sva rješenja koja zadovoljavaju (EE)—pa i sva rješenja u dimenziji 2—pripadaju prostoru $C^0([0,T);L^2(\Omega))$.

S druge strane, u slučaju $n=3$ Gagliardo—Nirenbergova nejednakost nam daje samo

$$\boldsymbol{v}\in L^{8/3}(0,T;L^4(\Omega))$$

pa pitanje zadovoljava li slabo rješenje (EE) ostaje otvoreno.

3.3.2 Jedinstvenost

Sljedeći cilj nam je dati dovoljne uvjete pod kojima je slabo rješenje jedinstveno. Kao što ćemo vidjeti i kao što je u jednu ruku i očekivano, glavni problem za jedinstvenost rješenja je u nelinearnom članu sistema N—S. Sljedeće dvije leme igraju fundamentalnu ulogu u ocjeni nelinearnog člana.

LEMA 3.3.2 *Neka r, s zadovoljavaju*

$$\frac{n}{s}+\frac{2}{r}=1\ ,\ s\in[n,\infty],$$

i neka su $\boldsymbol{v},\mathbf{w}\in V_T$, $\mathbf{u}\in L^r(0,T;L^s(\Omega))$. Tada vrijedi

$$\left|\int_0^T((\boldsymbol{v}\cdot\nabla\,\mathbf{w}),\mathbf{u})dt\right|\leq c\left(\int_0^T\|\nabla\,\mathbf{w}\,\|_{L^2}^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\|\nabla\,\boldsymbol{v}\,\|_{L^2}^2dt\right)^{n/2s}\left(\int_0^T\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^s}^rdt\right)^{1/r},$$

osim u slučaju $s=n=2$.

Dokaz. Direktna posljedica Hölderove nejednakosti i Soboljevljevih ulaganja.

□

LEMA 3.3.3 *Neka su $\mathbf{w}\in L^2(\tau,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$, $\boldsymbol{v}\in L^\infty(\tau,T;L^n(\Omega;\mathbb{R}^n))$ i pretpostavimo još da je*

$$\int_\tau^t\|\nabla\,\mathbf{w}\,\|_{L^2}^2ds>0\ ,\ \forall t\in(\tau,T)$$

i da je $\boldsymbol{v}$ desno neprekidna u $t=\tau$ u $\|\cdot\|_{L^n}$. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji $M=M(\mathbf{w},\boldsymbol{v},\varepsilon)>0$ takvo da

$$\left|\int_\tau^t((\mathbf{w}\cdot\nabla\,\mathbf{w}),\boldsymbol{v})ds\right|\leq\varepsilon\int_\tau^t\|\nabla\,\mathbf{w}\,\|_{L^2}^2+M\int_\tau^t\|\,\mathbf{w}\,\|_{L^2}^2ds\ ,\ \forall t\in(\tau,T).$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [12], a baziran je na Dinijevom teoremu[3] o uniformnoj konvergenciji monotono padajućih funkcija. □

LEMA 3.3.4 *Neka je $\boldsymbol{v}\in V_T$. Tada postoji niz funkcija $\{\boldsymbol{v}_k\}\subset L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$ takvih da*

(i) $\boldsymbol{v}_k$ konvergira prema $\boldsymbol{v}$ u $L^2(0,T;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$,

[3]Dinijev teorem: Neka je K kompaktan metrički prostor, $f\colon K\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $f_k\colon K\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija. Ako $\{f_k\}_k$ konvergira prema f po točkama i

$$f_k(x)\geq f_{k+1}(x)\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}\text{ i }\forall x\in K,$$

onda $\{f_k\}_k$ konvergira uniformno prema f.

(ii) $\boldsymbol{v}_k(t) \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ *za g.s.* $t \in [0,T)$.

Štoviše, pripadni izglađivači, $\boldsymbol{v}_k^h \in \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}^{\mathrm{T}}(\Omega)$, *zadovoljavaju*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}, \boldsymbol{v}_k^h) ds = \int_0^t ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}, \boldsymbol{v}^h) ds$$

za sve $\mathbf{u} \in V_T$.

Dokaz. Neka je $\{\boldsymbol{\psi}_r\}_r \subset \mathcal{D}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ ortonormirana baza za $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ i definirajmo

$$\boldsymbol{v}_k(t) = \sum_{r=1}^{k} (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}_r)_{W^{1,2}}\, \boldsymbol{\psi}_r \;\text{ za } t \in [0,T).$$

Jasno je da vrijedi (ii), a (i) slijedi primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Dalje imamo

$$\boldsymbol{v}_k^h(t) = \sum_{r=1}^{k} (\boldsymbol{v}^h(t), \boldsymbol{\psi}_r)_{W^{1,2}}\, \boldsymbol{\psi}_r \;\text{ za } t \in [0,T),$$

pa je

$$\lim_{k\to\infty} \|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}_k(t)\|_{W^{1,2}} = 0 \text{ za } t \in [0,T).$$

Zato, po teoremu o Soboljevljevom ulaganju i svojstvima izglađivača, vrijedi

$$\begin{aligned} \|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{L^4} &\le C\|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{W^{1,2}} \le C \max_{t\in[0,T]} \|\, \boldsymbol{v}^h(t)\|_{W^{1,2}} \\ \|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{L^3} &\le C\|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{W^{1,2}} \le C \max_{t\in[0,T]} \|\, \boldsymbol{v}^h(t)\|_{W^{1,2}} \end{aligned} \tag{3.48}$$

za $n = 2, 3$ respektivno. Zato je za sve $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{L^4} = 0 \;,\; n = 2, \\ \lim_{k\to\infty} \|\, \boldsymbol{v}_k^h(t) - \boldsymbol{v}^h(t)\|_{L^3} = 0 \;,\; n = 3. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Promotrimo svaki slučaj $(n = 2, 3)$ zasebno.

$n = 2$ Kako je $\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^4} \le C\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla\,\mathbf{u}\,\|_{L^2}^{1/2}$ za $\mathbf{u} \in V_T(\Omega)$ i jer je svako slabo rješenje L^2 slabo neprekidno u vremenu tj. iz $C^0([0,T); L^2(\Omega))$, slijedi

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^4}^2 \le C\|\nabla\,\mathbf{u}\,\|_{L^2}$$

pa je po (generaliziranoj) Hölderovoj nejednakosti

$$\int_0^t |((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}, \boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v})|\,\mathrm{ds} \le \int_0^t \|\nabla\,\mathbf{u}\,\|_{L^2}\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^4}\|\, \boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v}^h\,\|_{L^4}\,\mathrm{ds} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji.

n=3 Po Soboljevljevoj nejednakosti je $\| \mathbf{u} \|_{L^6} \leq C\|\nabla \mathbf{u} \|_{L^2}$ pa je opet

$$\int_0^t |((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}, \boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v})|\,\mathrm{ds} \leq \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^6}\|\,\boldsymbol{v}_k^h - \boldsymbol{v}^h\,\|_{L^3}\,\mathrm{ds} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

$\square$

Sada smo u poziciji dokazati teorem o jedinstvenosti slabog rješenja:

TEOREM 3.3.5 *Neka su $\mathbf{u}, \boldsymbol{v}$ dva slaba rješenja N—S na Ω_T uz iste podatke $\mathbf{f}$ i $\boldsymbol{v}_0$. Pretpostavimo da $\mathbf{u}$ zadovoljava energetsku nejednakost (EI), a $\boldsymbol{v}$ barem jedan od sljedeća dva uvijeta:*

(i) $\boldsymbol{v} \in L^r(0,T; L^s(\Omega;\mathbb{R}^n))$ za neke r, s takve da $\dfrac{n}{s} + \dfrac{2}{r} = 1$, $s \in (n,\infty]$,

(ii) $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T; L^n(\Omega;\mathbb{R}^n))$ i $\boldsymbol{v}(t)$ je desno neprekidna za $t \in [0,T)$ u $\|\cdot\|_{L^n}$.

Tada je $\mathbf{u} = \boldsymbol{v}$ g.s. na Ω_T.

Dokaz. Neka je $\{\mathbf{u}_k\}_k \subset \mathcal{D}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{sol}}(\Omega)$ niz koji konvergira prema $\mathbf{u}$ u $L^2(0,t;\mathrm{H}^1_{\mathrm{sol}}(\Omega))$ i $\{\mathbf{u}_k^h\}_k$ pripadni izglađeni niz i neka je $\{\boldsymbol{v}_k^h\}$ kao u Lemi 3.3.4. Uzmimo u (3.5) $s = 0$, i redom $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{u}_k^h$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{v}_k^h$ za pripadna slaba rješenja $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{v}$ respektivno pa dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\{ \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial\,\mathbf{u}_k^h}{\partial\tau}\right) - \nu(\nabla\,\boldsymbol{v}, \nabla\,\mathbf{u}_k^h) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}, \mathbf{u}_k^h)\right\} \mathrm{d}\tau \\ = -\int_0^t (\mathbf{f}, \mathbf{u}_k^h)\,\mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{v}(t), \mathbf{u}_k^h(t)) - (\boldsymbol{v}_0, (\boldsymbol{v}_0)_k^h)\end{aligned} \tag{3.50}$$

i

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\{ \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\,\boldsymbol{v}_k^h}{\partial\tau}\right) - \nu(\nabla\,\mathbf{u}, \nabla\,\boldsymbol{v}_k^h) - ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}, \boldsymbol{v}_k^h)\right\} \mathrm{d}\tau \\ = -\int_0^t (\mathbf{f}, \boldsymbol{v}_k^h)\,\mathrm{d}\tau + (\mathbf{u}(t), \boldsymbol{v}_k^h(t)) - (\boldsymbol{v}_0, (\boldsymbol{v}_0)_k^h).\end{aligned} \tag{3.51}$$

Zanima nas što se događa kada pustimo limes $k \to \infty$. Jedini ˇizrazi koji su problematični su eventualno oni koji sadrže nelinearni član. Iz Leme 3.3.2 i pretpostavki na $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{v}$ slijedi

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}, \mathbf{u}_k^h - \mathbf{u}^h)\,\mathrm{d}\tau\right| &= \left|\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\mathbf{u}_k^h - \mathbf{u}^h), \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leq C\left(\int_0^t \|\nabla(\mathbf{u}_k^h - \mathbf{u}^h)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}, \ C = C(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

Iz Leme 3.1.5 onda izlazi

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\mathbf{u}_k^h)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\mathbf{u}^h)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}^h,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Iz Leme 3.3.4 pak dobivamo

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u},\boldsymbol{v}_k^h)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u},\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.53}$$

Zato, puštanjem na limes $k\to\infty$ u (3.50), (3.51), prema prethodnom i Lemi 3.1.5 dobivamo

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\{\left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\mathbf{u}^h}{\partial\tau}\right) - \nu(\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\mathbf{u}^h) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\mathbf{u}^h)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = -\int_0^t (\mathbf{f},\mathbf{u}^h)\,\mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{v}(t),\mathbf{u}^h(t)) - (\boldsymbol{v}_0,(\boldsymbol{v}_0)^h)\end{aligned} \tag{3.54}$$

i

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\{\left(\mathbf{u},\frac{\partial\,\boldsymbol{v}^h}{\partial\tau}\right) - \nu(\nabla\,\mathbf{u},\nabla\,\boldsymbol{v}^h) - ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u},\boldsymbol{v}^h)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = -\int_0^t (\mathbf{f},\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{d}\tau + (\mathbf{u}(t),\boldsymbol{v}^h(t)) - (\boldsymbol{v}_0,(\boldsymbol{v}_0)^h).\end{aligned} \tag{3.55}$$

Po Fubinijevom teoremu i svojstvima izglađivača direktnim računom izlazi

$$\int_0^t \left(\boldsymbol{v},\frac{\partial\,\mathbf{u}^h}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}\tau = -\int_0^t \left(\mathbf{u},\frac{\partial\,\boldsymbol{v}^h}{\partial s}\right)\mathrm{ds}$$

pa zbrajanjem gornjih formulacija dobivamo

$$\begin{aligned}&-\int_0^t \left\{\nu(\nabla\,\boldsymbol{v},\nabla\,\mathbf{u}^h) + \nu(\nabla\,\mathbf{u},\nabla\,\boldsymbol{v}^h) - ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}^h) - ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u},\boldsymbol{v}^h)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = \int_0^t (\mathbf{f},\mathbf{u}^h+\boldsymbol{v}^h)\,\mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{v}(t),\mathbf{u}^h(t)) + (\mathbf{u}(t),\boldsymbol{v}^h(t)) - 2(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_0^h).\end{aligned} \tag{3.56}$$

U ovoj relaciji želimo pustiti $h\to 0$ i ponovno, jedino su problematični nelinearni članovi. Sličnim razmatranjem kao za (3.52) izlazi

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla),\mathbf{u}^h,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t ((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.57}$$

Za preostale članove razmatramo tri slučaja: $s>n$, $s=n$ i $s=\infty$.

Ako je $s > n$, onda, kako je $\mathbf{u} \in V_T$, iz leme 3.3.2 izlazi

$$\int_0^t |((\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{v})| \,\mathrm{d}\tau \leq C \| \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{v} \|_{L^r(0,T;L^s(\Omega))} \ , \, C = C(\mathbf{u}),$$

pa po lemi 3.1.5 slijedi

$$\lim_{h \to 0} \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}, \boldsymbol{v}^h) \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}, \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{3.58}$$

Neka je sada $s = n = 3$. Kako je $\mathbf{u} \in V_T$, po Hölderovoj nejednakosti i Soboljevljevom ulaganju je

$$\int_0^t \|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} \|_{L^{3/2}} \,\mathrm{d}\tau \leq \int_0^t \| \mathbf{u} \|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u} \|_{L^2} \,\mathrm{d}\tau \leq C \int_0^t \|\nabla \mathbf{u} \|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \leq C, \tag{3.59}$$

pa, uz oznaku $\mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$, korištenjem svojstava izglađivača dobivamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\mathbf{w}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau \right| &= \left| \int_0^t (\mathbf{w} - \mathbf{w}^h, \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau \right| \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^3} \int_0^t \| \mathbf{w} - \mathbf{w}^h \|_{L^{3/2}} \,\mathrm{d}\tau \,. \end{aligned}$$

Prema (3.59) je $\mathbf{w} \in L^1(0,T; L^{3/2}(\Omega))$ pa prema lemi 3.1.5 slijedi (3.58). Analogno se vidi i u slučaju $n = 2$.

Neka je sada $s = \infty$. Po Schwartzovoj nejednakosti i zbog $\mathbf{u} \in V_T$ lako se vidi da je $\mathbf{w} \in L^2(0,T; L^1(\Omega))$. Još je (uz korištenje svojstva izglađivača)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\mathbf{w}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_0^t (\mathbf{w} - \mathbf{w}^h, \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau \right| &\leq \int_0^t \| \mathbf{w} - \mathbf{w}^h \|_{L^1} \| \boldsymbol{v} \|_{L^\infty} \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \max_{\tau \in [0,T]} \| \boldsymbol{v}(\tau) \|_{L^\infty} \int_0^t \| \mathbf{w} - \mathbf{w}^h \|_{L^1} \,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

pa ponovno dobivamo (3.58).

Puštanjem $h \to 0$ u (3.56) uz korištenje (3.57), (3.58) i oznaku $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \boldsymbol{v}$, dobivamo

$$\begin{aligned} &- \int_0^t \{ 2\nu (\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \mathbf{u}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}, \boldsymbol{v}) \} \,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = - \int_0^t (\mathbf{f}, \mathbf{u} + \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau + 2 \{ (\boldsymbol{v}(t), \mathbf{u}(t)) - (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_0) \}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Sjetimo se, za $s \in [3, \infty]$, $\frac{3}{s} + \frac{2}{r} = 1$, $\boldsymbol{v} \in L^r(0,T; L^s(\Omega))$, $\boldsymbol{v}$ zadovoljava (EE)

$$\| \boldsymbol{v}(t) \|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau = 2 \int_0^t (\boldsymbol{v}, \mathbf{f}) \,\mathrm{d}\tau + \| \boldsymbol{v}_0 \|_{L^2}^2, \tag{3.61}$$

a $\mathbf{u}$ pak zadovoljava (EI) po pretpostavci:

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \le 2\int_0^t (\mathbf{u},\mathbf{f})\,\mathrm{d}\tau + \|\boldsymbol{v}_0\|_{L^2}^2. \tag{3.62}$$

Zbrajanjem 2×(3.60), (3.61) i (3.62), uz korištenje

$$\int_0^t ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

dobivamo

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\tau \le 2\int_0^t ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{w},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.63}$$

Ponovno razmatramo slučajeve ovisno o s:

ako je $s > n$ onda primjenom leme 3.3.2 na desnu stranu (3.63) uz pomoć Youngove nejednakosti[4] dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^t ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{w},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau &\le C\left(\int_0^t \|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{n/2s}\left(\int_0^t \|\boldsymbol{v}\|)_{L^s}^r\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2\right)^{1/r}\\
&\le C\left(\int_0^t \|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\int_0^t \|\boldsymbol{v}\|_{L^s}^r\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/r}\\
&\le \{\text{ prema Youngovoj nejednakosti uz } p=\frac{r}{r-1} \text{ i } q=\frac{1}{r}\}\\
&\le 2\nu\int_0^t \|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau + C\int_0^t \|\boldsymbol{v}\|_{L^s}^r\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

pa (3.63) prelazi u

$$\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 \le C\int_0^t \|\boldsymbol{v}\|_{L^s}^r\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2.$$

Grönwallova lema onda povlači $\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 = 0$ tj. $\mathbf{u} = \boldsymbol{v}$ g.s. na Ω_T.

Ako je $s = n$ označimo

$$\mathcal{T} = \{\tau\in[0,T] \mid \|\mathbf{w}(s)\|_{L^2} = 0\ ,\ \forall s\in[0,T]\}.$$

Onda je $\mathcal{T}\neq\emptyset$ ($0\in\mathcal{T}$) i $\mathcal{T}$ je zatvoren u smislu L^2 slabe neprekidnosti

$$\mathcal{T} = (\|\mathbf{w}\|_{L^2})^{-1}(\{0\}).$$

Neka je $\tau_0 = \max\mathcal{T}$ i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $\tau_0 < T$ (u suprotnom, nemamo što dokazivati). Uočimo da je onda nužno

$$\int_{\tau_0}^t \|\nabla\mathbf{w}\|_{L^2}^2\,\mathrm{ds} > 0\ ,\ \forall t\in(\tau_0,T)$$

[4]Youngova nejednakost: neka su $a,b\in\mathbb{R}$ nenegativni i $p,q>0$ konjugirani eksponenti. Tada vrjiedi

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

jer u suprotnom bi iz (3.63) slijedilo $\| \mathbf{w} \|_{L^2} = 0$. Prema lemi 3.3.3 je

$$\left| \int_{\tau_0}^{t} ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{ds} \right| \leq \varepsilon \int_{\tau_0}^{t} \| \nabla \mathbf{w} \|_{L^2}^2 \, \mathrm{ds} + M \int_{\tau_0}^{t} \| \mathbf{w} \|_{L^2}^2 \, \mathrm{ds} \ , \ \forall t \in (\tau_0, T)$$

pa korištenjem gornje nejednakosti u (3.63) uz $\mathbf{w}(s) = 0$ za $s \leq \tau_0$ slijedi

$$\| \mathbf{w} \|_{L^2}^2 \leq M \int_0^t \| \mathbf{w} \|_{L^2}^2 \, \mathrm{ds}$$

pa konačno Grönwallova lema povlači $\boldsymbol{v} = \mathbf{u}$ g.s. na Ω_T.

$\square$

Napomena. *Ako je Ω ograničena ili eksteriorna (komplement ograničene) domena s dovoljno glatkim rubom, ili pak poluprostor, može se pokazati generalizacija jedinstvenosti iz prethodnog teorema. Takva generalizacija zahtjeva samo*

$$\boldsymbol{v} \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$$

umjesto pretpostavke (ii).

Napomena. *Kako u dimenziji 2 svako slabo rješenje pripada klasi $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, po teoremu 3.3.5 slijedi da je svako takvo rješenje jedinstveno u klasi slabih rješenja uz iste podatke.*

U dimenziji 3 po Soboljevljevoj nejednakosti imamo

$$\| \boldsymbol{v} \|_{L^s} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{L^2}^{(6-s)/2s} \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2}^{3(s-2)/2s} \ , \ s \in [2, 6],$$

pa za $\boldsymbol{v} \in V_T$ je

$$\boldsymbol{v} \in L^r(0, T; L^s(\Omega)) \ , \ \frac{3}{s} + \frac{2}{r} = 1.$$

Stoga uvjet u teoremu 3.3.5 nije zadovoljen. Pitanje jedinstvenosti slabog rješenja u dimenziji 3 koje zadovoljava (EI) i dalje ostaje otvoreno.

POGLAVLJE 4

Primjene u realnim fizikalnim problemima

Promatranjem toka realnog (tj. viskoznog) fluida uočeno je da normalne i tangencijalne komponente brzine na krutoj nepropusnoj granici moraju biti jednake brzini same granice. Zato, ako je granica nepomična, brzina fluida mora zadovoljavati $\boldsymbol{v} = 0$ na samoj granici. Uvjet tangencijalne komponente brzine poznat pod nazivom "*no slip*" rubni uvjet vrijedi za svaki fluid za koji je $\nu \neq 0$ (kinematička viskoznost), tj. za svaki viskozni fluid. Tu se prirodno nameće pojam tzv. Reynoldsovog broja.

Reynoldsov broj

Uzmimo u obzir gibanje nekog viskoznog fluida i označimo sa $\mathbf{u}$ tipičnu brzinu toka i s l karakerističnu dužinu toka – jasno je da je ovo u neku ruku subjektivno, ali ako, primjerice, promatramo gibanje čaja u šalici onda se brzina od $5cm/s$ i skala od $4cm$ čine razumnim dok brzina od $100m/s$ i skala od $10m$ ne. Odabirom l i $\mathbf{u}$ definirajmo veličinu

$$R = \frac{\mathbf{u}\, l}{\nu}$$

što je bezdimenzionalna veličina koju zovemo Reynoldsov broj. Da bismo vidjeli zašto bi Reynoldsov broj trebao biti važan u nekom smislu, uočimo da su derivacije komponenti brzine, npr. $\partial\, v_i\, / \partial x_i$ tipično reda $\mathbf{u}\, / l$ – uz pretpostavku da se komponente brzine $\boldsymbol{v}$ mijenjaju za red $\mathbf{u}$ po udaljenosti reda od l. Tipično, te derivacije će se mijenjati za red $\mathbf{u}\, / l$ po udaljenosti reda l, pa će druge derivacije biti reda $\mathbf{u}\, / l^2$. Na ovaj način dobivamo sljedeći red veličina ocjena za izraze u sustavu N–S:

- inertivni član: $|(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}\,| = \mathcal{O}(\mathbf{u}^2\, / l)$
- viskozni član: $|\nu \Delta\, \boldsymbol{v}\,| = \mathcal{O}(\nu\, \mathbf{u}\, / l^2)$

pa, uz pretpostavku da je gornja rasprava dobra, dobivamo

$$\frac{|\text{inertivni član}|}{|\text{viskozni član}|} = \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{u}^2\,/l}{\nu\,\mathbf{u}\,/l^2}\right) = \mathcal{O}(R). \tag{4.1}$$

Dakle, Reynoldsov broj je važan jer daje grubu naznaku o relativnim veličinama dva ključna izraza u jednadžbama gibanja fluida. Zato ne iznenađuje činjenica da se tokovi karakterizirani velikim i malim Reynoldsovim brojevima bitno razlikuju.

Tok karakteriziran velikim Reynoldsovim brojem Ako je $R >> 1$ imamo tok fluida male viskoznosti i (4.1) na neki način sugerira da bi se viskozni efekti mogli zanemariti. Ipak, i u tom slučaju viskozni efekti postaju važni na tankom rubnom sloju gdje se pojavlju veliki gradijenti brzine koji viskozni član u sistemu N–S naprave puno većim nego što sugerira red veličine koji smo uveli maloprije. Može se pokazati da je tipična debljina δ takvog rubnog sloja dana sa

$$\delta/l = \mathcal{O}(R^{-1/2}).$$

Dakle, što je veći Reynoldsov broj, to je tanji rubni sloj.

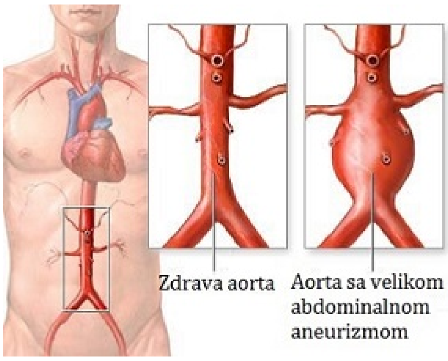
Tokovi karakterizirani velikim Reynoldsovim brojevima često su nestabilni na male poremećaje što rezultira turbulencijom.

Tok karakteriziran malim Reynoldsovim brojem U ovom je slučaju tok vrlo uređen i nema pojave turbulencije.

4.1 Biomedicina - modeliranje rasta arterije i aneurizmi

Aneurizma je lokalna deformacija stijenke krvne žile. Može se pojaviti u bilo kojoj krvnoj žili, a od posebnog su interesa one u moždanim žilama i arterijama. Kako aneurizma raste, povećava se rizik od rupture koja u većini slučajeva znači smrt. U ovom radu proučavamo aneurizme na aorti koje se najčešće javljaju u abdominalnom (trbušnom) dijelu (AAA), netom ispod srca.

Samim time u slučaju rupture smrt je gotovo neizbježna (prema statističkim podatcima 11% oboljelih preživi rupturu) te zbog toga aneurizma na aorti vrlo značajna s medicinskog stajališta. Razlog javljanja aneurizme je oslabljena stijenka krvne žile čiji uzroci mogu biti raznoliki —bolesti, pušenje i sl.. Ovdje se bavimo modeliranjem strujanja krvi i njegovog učinka na stijenku žile. Naime, pokazuje se da povećano smično naprezanje ('shear stress') aktivira određene stanice glatkog mišićnog tkiva koje proizvode dušikov oksid—inhibitor sinteze kolagena (protein odgovoran za "elastičnost" tkiva) i proliferacije glatkih mišićnih stanica, dok smanjeno smično naprezanje potiče proizvodnju endotelina-1—promotora sinteze kolagena i



Slika 4.1: Primjer zdrave i oboljele aorte.

proliferacije glatkih mišićnih stanica. Aorta može biti promjera do 3 cm što je dovoljno da u njoj vrijede zakoni mehanike kontinuuma pa strujanje krvi (fluid) modeliramo u okviru dinamike fluida—krv modeliramo kao **inkompresibilni homogen Newtonov fluid**. Uočimo da isti model ne prolazi primjerice u kapilarama jer krv više ne možemo modelirati kao homogen fluid—krvna zrnca su vrlo velika u odnosu na promjer kapilare. Deformirana stijenka krvne žile (očekivano) utječe na strujanje krvi i ponaša se kao elastično tijelo.

Uvod i motivacija

U ([18, 11]) predložen je numerički model rasta i restrukturiranja (G&R —'Growth and remodeling') aneurizme. Rast aneurizme se simulira opisivanjem vremenski promjenjive raspodjele proteaza (enzima koji razgrađuju proteine stijenke aorte, kolagen i elastin) u radijalnom smjeru kroz tromb i stijenku aorte. Također, modelirano je stvaranje enzima koji utječu na rast AAA, mijenjaju mehanička svojstva i smanjuju čvrstoću stijenke.

Jednostavnosti radi, pretpostavljeno je da se stijenka aorte sastoji od tri osnovne i zasebne jedinice; elastina, četiri vrste vlaknastih kolagena i glatkog mišićnog tkiva. Neka je ukupna masa jedinice k u trenutku $\tau \in [0, s]$, gdje je s trenutno vrijeme, označena sa $M^k(\tau)$. Tada je promjena mase jedinice k dana sa ([11])

$$M^k(s) = M^k(0)Q^k(s) + \int_0^s m^k(\tau)q^k(s-\tau)d\tau,$$

gdje je m^k neto promjena proizvodnje i razgradnje jedinice k (tj. $\frac{dM^k}{d\tau} = m^k$), $M^k(s)$ ukupna masa jedinice k, $Q^k \in [0,1]$ predstavlja frakciju materijala proizvedenu do trenutka $\tau = 0$ koja preživi (ne razgradi se) do $\tau = s$ (uz $Q^k(0) = 1$), a $q^k \in [0,1]$ predstavlja frakciju materijala proizvedenu u trenutku $\tau \in [0, s)$ koja preživi do trenutka $\tau = s$, a oblika je

$$q^k(s-\tau) = \exp\left(-\int_\tau^s K^k(\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right),$$

a pritom je K^k parametar koji modelira razgradnju mase i jedinice je dan^{-1}. Dobro je uočiti još da je $Q^k(s) = q^k(s-0)$. Stvaranje ili razgradnja mase ovisi o razlici normalnih (homeostatskih) vrijednosti naprezanja stijenke žile i koncentraciji molekula koje stimuliraju na njezino stvaranje odnosno razgradnju:

$$m^k(\tau) = m_B^k \left[1 + K_\sigma^k \Delta\sigma(\tau) + K_C^k \Delta C(\tau)\right]$$

gdje je m_B^k osnovna brzina (biološka), K_σ^k parametar koji modelira promjene uzrokovane naprezanjem (povećano naprezanje na glatko mišićno tkivo promiče stvaranje kolagena i proliferaciju stanica), a K_C^k parametar koji je odgovoran za promjene uzrokovane sužavanjem žile (povećano smično naprezanje promiče stvaranje dušikovog oksida u endotelnim stanicama—inhibitora sinteze kolagena i proliferacije glatkog mišićnog tkiva, a smanjeno smično naprezanje promiče stvaranje endotelina-1 u endotelnim stanicama—promotara sinteze kolagena i proliferacije glatkog mišićnog tkiva). Parametar C modelira omjer koncentracija molekula konstriktora i dilatora pa je razlika tih koncentracija u odnosu na baznu (biološku) vrijednost C_B dana sa $\Delta C(\tau) = C(\tau) - C_B$, gdje $C(\tau)$ ovisi o promjenama u smičnom naprezanju na stijeku žile uzrokovanu 'deformiranim' tokom krvi (pojačano smično naprezanje promiče dilataciju, a smanjeno konstrikciju); stoga je (indeks h znači *homeostatska razina* - normalna u nekom smislu)

$$C(\tau) = C_B - C_S \left[\frac{\tau_w(\tau) - \tau_w^h}{\tau_w^h}\right].$$

Ovdje je C_S faktor skaliranja, a τ_w i τ_w^h smična naprezanja koja osjećaju endotelne stanice u G&R vremenu $\tau \in [0, s]$, a gdje je srednja vrijednost smičnog naprezanja na stijenku dana sa $\tau_w^h = \dfrac{4\mu Q_h}{\pi(r_i^h)^3}$. Pritom je r_i unutarnji radijus žile, $Q = \varepsilon Q_h$ perturbacija u protoku krvi (ε je skalirajući parametar određen modelom). Očekivanje je da će G&R uzrokovano naprezanjem uzrokovati promjenu u geometriji: $r_i = \varepsilon^{1/3} r_i^h$. Arterije obično pokazuju nelinearno, anisotropno, gotovo elastično ponašanje u pasivnim uvjetima, ali generiraju i naprezanje uzrokovano kontrakcijom glatkog mišićnog tkiva koja uglavnom djeluje u cirkumferentnom smjeru u aktivnim uvjetima. Dakle, neprekidne promjene u toku krvi mogu rezultirati povećanjem ili smanjivanjem promjera aorte zajedno s promjenom u debljini stijenke žile. Vazoaktivni (utječe na dijametar žile) odgovor na promjenu u toku se može pojaviti unutar nekoliko minuta—promjene u proizvodnji dušikovog oksida i ET-1 koje reguliraju kontrakciju mišićnog tkiva; ako je ta promjena dovoljna da vrati vrijednost smičnog naprezanja na homeostatsku razinu, onda G&R određuje novu veličinu aorte. Ako pak promjena ne vrati smično naprezanje na homeostatsku razinu, G&R nastoji vratiti sva naprezanja u ona homestatska kroz duži vremenski period. Za više detalja vidjeti [11].

Dosadašnje simulacije G&R provedene su u *FEAP-u* (paket za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom konačnih elemenata) i nisu uzimale u obzir promjenu smičnog naprezanja, već se ono uzimalo konstantnim kroz vrijeme, i time, možda, nije punom snagom utjecalo na sam proces.

Iz gornjih jednadžbi vidimo da je *shear stress* 'utkan' u jednadžbe kojima je opisan proces G&R i za očekivati je da možda znatnije utječe na proces.

Smično naprezanje određeno je gradijentom brzine krvi (fluid), pa moramo riješiti problem gibanja fluida u krvnoj žili.

Matematički model

Označimo sa Ω^η unutrašnjost dijela krvne žile od interesa (dijela gdje se počinje javljati deformacija koja prerasta u aneurizmu). Pritom $\eta = \eta(t)$ označava pomak od nekog prirodnog, referentnog stanja (primjerice $\Omega^{\eta(0)}$ je zdrava žila i $\eta(0) = 0$—prirodno stanje). Nadalje, označimo sa Γ^η_{in} dio granice od Ω^η kroz koji fluid (krv) ulazi u Ω^η, a Γ^η_{out} dio kroz koji fluid napušta Ω^η. Sa Γ^η_0 označimo stijeku krvne žile. Protok na ulazu (ili izlazu) iz Ω^η označimo sa $Q = Q(t)$. Ikompresibilnost krvi predstavlja dobar model za krv (iako krv jest kompresibilna, ali dovoljno malo da zasad zanemarujemo tu činjenicu radi jednostavnosti modela). Zanemarujemo i utjecaj gravitacije čime dodatno pojednostavljujemo model. Problem sada glasi: naći brzinu $\boldsymbol{v}$ i tlak p t.d.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} - \nu \Delta\, \boldsymbol{v} + \nabla p &= 0 \text{ na } \Omega^\eta \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega^\eta \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_\eta \ \text{ na } \Gamma^\eta_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

uz prikladne rubne uvjete na Γ^η_{in}, Γ^η_{out} i inicijalni uvjet na $\Omega^{\eta(0)}$ i gdje je $\boldsymbol{v}_\eta = \frac{d\eta}{dt}$ brzina stijenke, a ν kinematička viskoznost (svojstvo fluida).

Kako se rast aneurizme odvija kroz (relativno) dugi vremenski period (više godina), možemo uvesti određena pojednostavljenja na model. Prvo, pretpostavljamo da je stijenka krvne žile nepomična granica, tj. $\Gamma^{\eta(t)}_0 = \Gamma^{\eta(0)}_0 = \Gamma_0$ (brzinu gibanja možemo zanemariti) te rubni uvjet $(4.2)_3$ prelazi u tzv. '*no-slip*' rubni uvjet: $\boldsymbol{v} = 0$ na $\Gamma^{\eta(t)}_0$.

Drugo pojednostavljenje odnosi se na rubne uvijete na Γ_{in} i Γ_{out}.

Na Γ_{in} zadajemo parabolički profil brzine $\boldsymbol{v}_{in}$ što je standardna inženjerska tehnika kojom je (donekle) riješen problem zadavanja rubnog uvjeta na ulaznoj granici. Parabolički profil brzine lako se izvede na cilindričnoj domeni uz poznat protok ili pad tlaka za stacionarni tok (detalji se mogu naći u [8]). Kako su protok i pad tlaka nešto što možemo mjeriti u krvnoj žili, a domena približno cilindrična (barem na dijelu prije pojave deformacije), ovo se čini kao dobar aproksimirajući pristup za ulaznu granicu.

Na Γ_{out} zadajemo takozvani *do nothing* ili *free outflow* rubni uvjet (za više detalja vidjeti [10], [2]),

$$(-p\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{T})\vec{n} = (-p\mathbb{I} + \frac{\mu}{2}(\nabla\, \boldsymbol{v} + \nabla\, \boldsymbol{v}^T))\vec{n} = 0,$$

čime smo zapravo zadali da je naprezanje na izlaznoj granici nula, a prirodno izlazi iz varijacijske formulacije.

Zbog spore evolucije geometrije možemo pretpostaviti i stacionarnost toka (iako, uočimo da je i dalje $\Omega = \Omega(t)$, samo što je ta evolucija izrazito spora i ne utječe bitno na model – značajnija razlika između $\Omega(0)$ i $\Omega(t)$ primjećuje se tek kada je t znatno veće od 0).

Konačno, uvažavajući prethodno, naš pojednostavljeni model sada glasi: naći brzinu $\boldsymbol{v}$ i tlak p t.d.

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} + \nabla p - \nu \Delta \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega \\ \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Gamma_0 \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_{in} \text{ na } \Gamma_{in} \\ (-p\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{T})\vec{n} &= 0 \text{ na } \Gamma_{out}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pripadna varijacijska formulacija glasi: naći $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{v}_{in} + V$ i $p \in L^2(\Omega)$, gdje je $V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{u} = 0 \text{ na } \Gamma_0, \Gamma_{in}\}$, takve da je zadovoljeno

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\{ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{2}\, \mathbb{T}(\boldsymbol{v}) : \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right\} \mathrm{dx} = 0 \ , \forall \mathbf{u} \in V, \\ \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, q \,\mathrm{dx} = 0 \ , \forall q \in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{4.4}$$

što se lako vidi polazeći od ekvivalentne jednadžbe (jer je $\operatorname{div} \nabla \boldsymbol{v}^T = \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ zbog drugog uvjeta)

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} + \nabla p - \frac{1}{\rho}\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbb{T} = 0$$

skalarnim množenjem sa $\mathbf{u} \in V$ i integriranjem po Ω.

Neka je $(\boldsymbol{v}, p) \in (\boldsymbol{v}_{in} + V(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ rješenje problema (4.4). Pripadni tenzor naprezanja dan je sa

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \mathbb{T} \tag{4.5}$$

gdje je μ koeficijent dinamičke viskoznosti, i opisuje djelovanje vanjskog svijeta (krvne žile) na fluid. Zato, prema zakonu akcije i reakcije, $-\sigma = p\mathbb{I} - \mathbb{T}$ je tenzor koji opisuje djelovanje krvi na stijenku žile. Nas je zanimalo smično naprezanje, tj. $(-\mathbb{T}\,\vec{n} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}$, gdje je $\vec{n}$ vanjska jedinična normala, a $\vec{\tau}$ jedinična tangenta na Γ_0, što je jedinstveno određeno gradijentom brzine.

Alternativni model

Uočimo da smo u (4.3) kao rubni uvijet propisali parabolički profil brzine na ulaznoj granici, što je standardna inženjerska tehnika kojom je riješen problem rubnog uvijeta. Ipak, jasno je da *a priori* u realnoj situaciji to nije opravdano obzirom da imamo samo ograničen broj podataka. Primjerice, za tok u aorti mjerenjima obično možemo odrediti samo srednju brzinu i protok ili pak pad tlaka. Stoga želimo pronaći pristup kojim bi izbjegli pretpostavku na parabolički profil brzine na ulazu. Pretpostavimo da imamo propisan protok na izlaznoj granici Γ_{out}, Q_{out}, čime je, zbog pretpostavke inkompresibilnosti, implicitno zadan i protok na ulazu: $Q_{in} = -Q_{out}$.

Uvedimo funkcionale iz duala prostora u kojem tražimo rješenje $\boldsymbol{v}$, ϕ_{in}, ϕ_{out}, kojima želimo zamijeniti uvjete koji pretpostavljaju parabolički profil brzine na ulaznoj granici takozvanim *flow rate* rubnim uvjetima:

$$\langle \phi_{out}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Gamma_{out}} \boldsymbol{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{dS},$$

$$\langle \phi_{in}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{dS}\,.$$

Time dolazimo do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} + \nabla p = 0 \text{ na } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ na } \Omega, \\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

uz pripadne Dirichletove (*no slip*) i Neumannove (*do nothing*) uvjete

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = 0 \text{ na } \Gamma_0, \\ (p\mathbb{I} - \nu \nabla \boldsymbol{v})\vec{n} = 0 \text{ na } \Gamma_{in}, \\ \langle \phi_{out}, \boldsymbol{v} \rangle = Q_{out}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Kako *flow rate* uvjeti ne daju informaciju po točkama na izlaznoj granici, problem (4.6)–(4.7) nije dobro postavljen. Zapišimo problem u drugačijem obliku. Uvedimo najprije funkcional

$$F(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v} \right) + \frac{1}{2}\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}((\nabla \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

Minimizacijom tog funkcionala na prostoru

$$V^\star = \{\mathbf{u} \in V \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

gdje je $V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = 0 \text{ na } \Gamma_0\}$, dobivamo varijacijsku formulaciju problema (4.6) uz uvjete $(4.7)_{1,2}$ zajedno sa *do nothing* uvjetima na izlaznoj granici

$$(p\mathbb{I} - \nu \nabla \boldsymbol{v})\vec{n} = 0 \text{ na } \Gamma_{out}.$$

Ovo odgovara slobodnoj minimizaciji funkcionala F. S druge strane, ako uzmemo u obzir informaciju koju daju *flow rate* uvjeti, možemo o gornjem problemu razmišljati kao o minimizaciji funkcionala F, ali uz ograničenja koja dirigiraju ti isti uvjeti. Formulirajmo službeno gornja razmatranja:

Zadaća 1: naći $\boldsymbol{v} \in V^\star$ takvu da

$$F(\boldsymbol{v}) = \min_{\substack{\mathbf{w}\in V^\star \\ \langle \phi_{out}, \mathbf{w}\rangle = Q_{out}}} F(\mathbf{w}). \tag{4.8}$$

Da bismo riješili gornju zadaću, okrećemo se Lagrangeovim multiplikatorima, tj. minimiziramo Lagrangeov funkcional tako da funkcionalu F dodamo uvjet $(4.7)_3$ prethodno pomnožen Lagrangeovim multiplikatorom. Na ovaj način Lagrangeov funkcional pridružen zadaći 1 postaje

$$L(\mathbf{w}, \xi) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v}\right) + \frac{1}{2}\nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}((\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \xi(\langle \phi_{out}, \mathbf{w}\rangle - Q_{out}).$$

Onda, kao što je uobičajeno za probleme uvjetne minimizacije, okrećemo se formulaciji traženja sedlaste točke:

Zadaća 2: naći $\boldsymbol{v} \in V^\star$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ takve da

$$L(\boldsymbol{v}, \lambda) = \min_{\mathbf{w}\in V^\star} \max_{\xi\in\mathbb{R}} L(\mathbf{w}, \xi).$$

Na ovaj smo način problem (4.2) sveli na uvjetnu minimizaciju određenog funkcionala i tako maknuli neželjenu pretpostavku na parabolički profil brzine.

4.1.1 Numeričke simulacije

Numeričke simulacije provodimo u paketu *FreeFem++* metodom konačnih elemenata. Sve o paketu *FreeFem++* može se naći na njegovoj službenoj web stranici i [9] (službena dokumentacija dostupna online). O metodi konačnih elemenata može se naći u [14].

Potrebno je naći brzinu $\boldsymbol{v}$ i tlak p koji zadovoljavaju

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} + \nabla p - \nu \Delta \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \text{ na } \Omega \end{aligned} \tag{4.9}$$

zajedno sa prikladnim rubnim uvjetima.

Uzmimo da su primjerice zadani rubni uvjeti na ulaznoj granici Dirichletovi (parabolički profil brzine) i *do nothing* na izlaznoj granici koji su implicitno zadovoljeni varijacijskom formulacijom. Umjesto uvjeta

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ na } \Omega$$

stavimo uvjet

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \varepsilon p = 0 \text{ na } \Omega,$$

pa dobivamo takozvane *pseudokompresibilne* N–S jednadžbe koje predstavljaju dobru aproksimaciju N–S jednadžbi za malo ε, a pogodnije su za numeričku metodu konačnih elemenata (MKE). Slaba formulacija glasi ($V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \mid \mathbf{u} = 0$ na $\Gamma_0, \Gamma_{in}\}$)

$$\begin{cases} \text{naći } (\boldsymbol{v}, p) \in (\boldsymbol{v}_{in} + V) \times L^2(\Omega) \text{ t.d.} \\ \int_\Omega \left\{ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{2}\, \mathbb{T}(\boldsymbol{v}) : \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, q \right\} \mathrm{dx} = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

za sve $\mathbf{u} \in V$ i sve $q \in L^2(\Omega)$. Pritom prostore u kojima tražimo rješenje zamjenjujemo njihovim konačnodimenzionalnim aproksimacijama $V_h \subset V$ i $Q_h \subset L^2(\Omega)$. Detaljan opis MKE za rješavanje N–S jednadžbi može se naći u [15]. Ovdje dajemo još tehnički opis koda. Koristimo Newtonovu metodu kojom rješavamo nelinearni problem:
naći $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{v}_{in} + V$ t.d. $F(\boldsymbol{v}) = 0$, gdje je

$$F(\boldsymbol{v}, p) = \int_\Omega \left\{ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{2}\, \mathbb{T}(\boldsymbol{v}) : \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, q \right\} \mathrm{dx}\,.$$

Algoritam glasi:

1. odabrati početnu aproksimaciju $\boldsymbol{v}_0$
2. za $i = 1$, $i \leq$ iter (broj iteracija)
   (2a) riješiti $DF(\boldsymbol{v}_i)\,\mathbf{w}_i = F(ui)$
   (2b) $\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i - \mathbf{w}_i$
3. ako je $\| \mathbf{w}_i \| < \varepsilon$, gdje je $\varepsilon > 0$ željena točnost, **break**

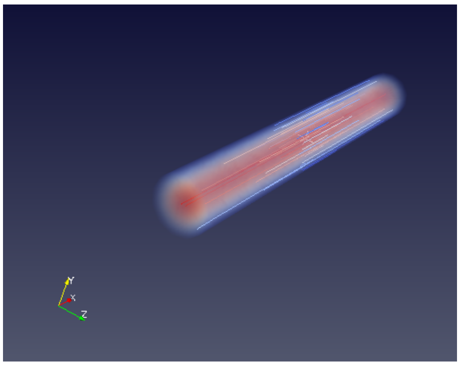
Pritom je $DF(\boldsymbol{v})$ diferencijal od F u točki $\boldsymbol{v}$ tj. operator t.d.

$$F(\boldsymbol{v} + \delta) = F(\boldsymbol{v}) + DF(\boldsymbol{v})\delta + o(\delta),$$

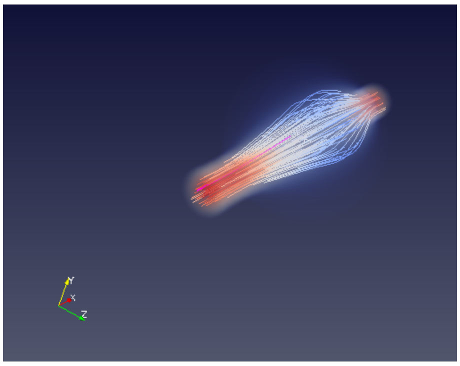
a dan je s

$$DF(\boldsymbol{v}, p)(\delta\, \boldsymbol{v}, \delta p) = \int_\Omega ((\delta\, \boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}) : \mathbf{u} + ((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\delta\, \boldsymbol{v}) : \mathbf{u} + \nu \nabla \delta\, \boldsymbol{v} : \nabla\, \mathbf{u} - \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} - q \nabla \cdot \delta\, \boldsymbol{v}\,.$$

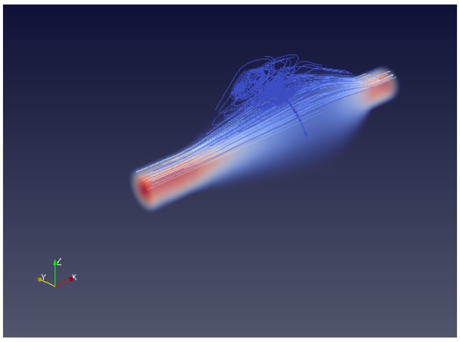
Uočimo da sam model možemo još malo pojednostaviti. Uzmemo li u obzir vremensku skalu na kojoj se odvija rast aneurizme (više godina), možemo zanemariti inercijski član $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}$ pa dobivamo linearnu zadaću koju onda rješavamo standardnim metodama.



Slika 4.2: Strujnice brzine na cilindričnoj domeni – aproksimacija žile prije pojave aneurizme.



Slika 4.3: Strujnice brzine u deformiranoj žili – aproksimacija žile s velikom aneurizmom.



Slika 4.4: Pojava vrtloga u deformiranom dijelu žile.

DODATAK A

Funkcionalna analiza

Ovdje dajemo pregled funkcijskih prostora (i nekih rezultata na njima) koji śu nam radno okruženje u analizi Navier-Stokesovih jednadžbi. Rezultati i dokazi mogu se naći u [3, 4].

A.0.2 Notacija

Neka je X normiran i H unitaran prostor. Normu na X označavamo sa $\|\cdot\|_X$, a skalarni produkt na H sa $(\cdot,\cdot)_H$.

Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren.

(1) Za $u\colon U \to \mathbb{R}$ skalarnu funkciju koristimo multiindeksnu notaciju: za $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ pišemo

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n}} u(x).$$

Gradijent, Hessian i Laplacian od u klasično označavamo sa

$$\nabla u(x) = Du(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u \end{bmatrix}$$

$$Hu(x) = D^2 u(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} u(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} u(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} u(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} u(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u(x) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u(x) = \nabla^2 u(x) = \nabla \cdot \nabla u(x) = \operatorname{tr}(Hu(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i} u(x)$$

(2) Za vektorsku funkciju $\mathbf{u}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, $\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{bmatrix}$, $u_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $x \in U$, definiramo: za $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha \mathbf{u} = \begin{bmatrix} D^\alpha u_1 \\ \vdots \\ D^\alpha u_m \end{bmatrix}$$

Posebno, ako je $\mathbf{u}$ vektorsko polje, tj. $m = n$, onda definiramo divergenciju od $\mathbf{u}$ sa

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr} \nabla \vec{u}(x) = \nabla \cdot \mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i(x).$$

A.1 Prostori funkcija

A.1.1 Prostori glatkih funkcija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ domena. Tada je skup

$$C(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ neprekidna } \}$$

linearan prostor u odnosu na uobičajene operacije zbrajanja funkcija i množenja skalarom. Definiramo

$$C^k(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ za } |\alpha| \leq k\}$$

gdje je $k \in \mathbb{N}$, i u skladu stim možemo pisati $C(\Omega) = C^0(\Omega)$. Posebno, definiramo

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Funkcije iz $C^k(\Omega)$ opć enito su neograničene i nisu dobro definirane na $\partial\Omega$ pa uvodimo potprostore tih funkcija koji se sastoje od funkcija koje se mogu neprekidno proširiti na neki otvoren skup koji sadrži $\overline{\Omega}$ i za takve funkcije kažemo da su neprekidne na $\overline{\Omega}$:

$$C(\overline{\Omega}) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists g \in C(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \text{ t.d. } g\big|_{\partial\Omega} = u\},$$

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}) \text{ za } |\alpha| \leq k\},$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Ako je Ω ograničen, onda je $\overline{\Omega}$ kompaktan pa je za $\mathbf{u} \in C(\overline{\Omega})$ dobro definirana norma

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

odnosno za $u \in C^k(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha \leq k|} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

TEOREM A.1.1 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup. Za sve $k \geq 0$ je $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})})$ Banachov prostor.*

DEFINICIJA. *Za $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo nosač od u sa*

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Uvodimo prostor funkcija koje se poništavaju na $\partial\Omega$ zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama do reda k:

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid u\big|_{\partial\Omega} = 0\},$$

odnosno, ako se poništavaju već na nekoj pozitivnoj udaljenosti od ruba

$$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\} \leq C^k(\overline{\Omega}).$$

Od posebnog nam je značaja tzv. prostor test funkcija

$$C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(\Omega).$$

A.1.2 L^p prostori

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ prostor mjere i $1 \leq p \leq \infty$ realan broj. Definiramo L^p prostore funkcija pri čemu razlikujemo dva slučaja; kada je $p < \infty$ i $p = \infty$.

DEFINICIJA. *Za $1 \leq p < \infty$ definiramo*

$$L^p(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ izmjeriva, } \int_\Omega |f|^p d\lambda < \infty\}$$

i za $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$L^\infty(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ izmjeriva, } \exists C > 0 \text{ t.d. } |f(x)| \leq C \text{ g.s. na } \Omega\}$$

i za $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \text{ g.s. na } \Omega\}$$

Pokazuje da su za $1 \leq p \leq \infty$ s $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definirane norme na Ł$^p(\Omega)$.

Funkcije iz $L^p(\Omega)$ prostora poistovjećujemo s klasama gotovo svugdje jednakih funkcija: kažemo da su f i g jednake gotovo svuda ako postoji skup $E \subset \Omega$ mjere nula t.d. $f(x) = g(x)\ \forall x \in \Omega \backslash E$ i pišemo $f = g$ g.s..

Napomena. *Za $1 \leq p < \infty$ definiramo p' sa*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Za $p = 1$ je $p' = \infty$.

TEOREM A.1.2 (Hölderova nejednakost) *Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^{p'}(\Omega)$. Tada je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

TEOREM A.1.3 (Fischer-Riesz) *$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ je Banachov prostor za $1 \leq p \leq \infty$.*

U slučaju $p = 2$, L^2 je Hilberov prostor uz skalarni produkt $(f, g)_{L^2} = \int_\Omega fg$.

LEMA A.1.4 (nejednakost Minkowskog) *Za sve $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$ vrijedi*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

DEFINICIJA. *Neka je $(f_k)_k$ niz u $L^p(\Omega)$. Kažemo da $(f_k)_k$ konvergira prema $f \in L^p(\Omega)$*

- *u L^p ako $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0$,*
- *g.s. ako $f_k(x) \to f(x)$ za g.s. $x \in \Omega$.*

TEOREM A.1.5 (Lebesgueov o dominiranoj konvergenciji) *Neka je $(f_k)_k$ niz u $L^1(\Omega)$ t.d. $f_k \to f$ g.s., $g \in L^1(\Omega)$ nenegativna i integrabilna funkcija t.d. $|f| \leq g$ g.s.. Tada je $f \in L^1(\Omega)$ i*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x) d\lambda = \int_\Omega f(x) d\lambda,$$

tj. $\|f_k - f\|_{L^2} \to 0$.

Napomena. *Ako $f_k \xrightarrow{L^p} f$ (jaka konvergencija), onda postoji podniz $(f_k)_k$ t.d. $f_k \xrightarrow{g.s.} f$.*

DEFINICIJA. *Neka su $(f_k)_k, f \in L^p(\Omega)$. Ako za sve $g \in L^{p'}(\Omega)$*

$$\int_\Omega f_k g \to \int_\Omega fg$$

onda kažemo da $(f_k)_k$ konvergira slabo prema f u L^p i pišemo $f_k \xrightharpoonup{L^p} f$.

Može se pokazati da jaka konvergencija povlači slabu.

Sa $(L^p(\Omega))'$ označavamo topološki dual od $L^p(\Omega)$. Vrijedi

TEOREM A.1.6 (Rieszov o reprezentaciji funkcionala) *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $\Phi \in (L^p(\Omega))'$. Tada postoji jedinstveni $\phi \in L^{p'}(\Omega)$ t.d.*

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_\Omega f\phi \ , \forall f \in L^p(\Omega).$$

Za $1 \leq p < \infty$ je dakle $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$, ali pokazuje se da u slučaju $p = \infty$, $(L^\infty(\Omega))' \supsetneqq L^1(\Omega)$.

A.2 Prostori Soboljeva

Soboljevljevi prostori pokazuju se kao vrlo pogodan ambijent za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Razlog tome je što zadrže funkcije koje imaju određenu glatkoću, ali opet u nekom smislu oslabljenu u odnosu na onu u klasičnom smislu.

A.2.1 Slaba derivacija

Započinjemo oslabljivanjem pojma parcijalne derivacije.

DEFINICIJA. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Kažemo da u ima slabu parcijalnu derivaciju reda α ako postoji funkcija $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx \ , \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{A.1}$$

i pišemo $v = D^\alpha u$.

Drugim riječima, ako za danu funkciju u postoji funkcija v koja zadovoljava (A.1) za sve glatke ϕ, kažemo da je $v = D^\alpha u$ u slabom smislu. Ako takva funkcija v ne postoji, kažemo da u nema slabu parcijalnu derivaciju reda α. Bez dokaza navodimo sljedeći rezultat:

LEMA A.2.1 (Jedinstvenost slabe derivacije) *Slaba parcijalna derivacija reda α od u, ako postoji, je jedinstveno definirana do na skup mjere nula.*

A.2.2 Definicija prostori Soboljeva

Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definiramo prostore koji sadrže funkcije čije su slabe derivacije ražličitih redova u različitim L^p prostorima.

DEFINICIJA. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren. Soboljevljev prostor*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

sastoji se od svih lokalno sumabilnih funkcija $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ takvih da za svaki multiindeks α, $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ postoji u slabom smislu i nalazi se u $L^p(\Omega)$.

Napomena. *(i) Ako je $p = 2$ obično ćemo pisati*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \ , \ k = 1, 2, \ldots$$

Slovo H koristimo jer—kao što ćemo vidjeti kasnije—$H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor. Uočimo da je $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

(ii) Kao i u L^p prostorima, identificiramo funkcije koje su jednake skoro svuda—dakle, zapravo govorimo o klasama funkcija, odnosno reprezentantu klase.

DEFINICIJA. *Neka je $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definiramo normu na $W^{k,p}(\Omega)$ sa: za $u \in W^{k,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

DEFINICIJA. *(i) Neka je $\{u_m\}_{m=1}^\infty, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Kažemo da niz $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ konvergira (jako) prema u u $W^{k,p}(\Omega)$, i pišemo*

$$u_m \to u \ \ u \ \ W^{k,p}(\Omega)$$

(ili skraćeno $u_m \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$) ako vrijedi

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

(ii) Pišemo

$$u_m \to u \ \ u \ \ W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

ili skraćeno $u_m \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u$ ako

$$u_m \to u \ \ u \ \ W^{k,p}(V) \ , \ za \ svaki \ V \subset\subset \Omega.$$

DEFINICIJA. *Definiramo*

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

kao zatvarač od $C_c^\infty(\Omega)$ u $W^{k,p}(\Omega)$, tj.

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Dakle, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ako i samo ako postoji niz funkcija $(u_m)_m \subset C_c^\infty(\Omega)$ takav da $u_m \to u$ u $W^{k,p}(\Omega)$. $W_0^{k,p}(\Omega)$ interpretiramo kao skup onih funkcija $u \in W^{k,p}(\Omega)$ za koje je

$$\text{"}D^\alpha u = 0 \text{ na } \partial\Omega\text{" za sve } |\alpha| \le k - 1.$$

Nravno, obzirom da poistovjećujemo funkcije koje se podudaraju na skupu mjere nula i da je $\partial\Omega$ skup mjere nula u $\mathbb{R}^n$ ova interpretacija za sad nema previ se smisla, no opravdat ćemo je kasnije kod diskutiranja tragova.

Napomena. *Uobičajeno je pisati*

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega).$$

Može pokazati da u slučaju $n = 1$ i Ω otvoren interval u $\mathbb{R}$ je $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako je u jednaka nekoj apsolutno neprekidnoj funkciji skoro svuda čija je klasična derivacija (koja postoji s.s.) u $L^p(\Omega)$, pa u tom slučaju možemo raditi s tim neprekidnim reprezentantom od u. Napomenimo da ovo svojstvo vrijedi samo za $n = 1$.

A.2.3 Elementarna svojstva

Bez dokaza navodimo neka svojstva slabih derivacija. Dokazi se mogu naći u [3] i [4].

TEOREM A.2.2 (Svojstva slabih derivacija) *Neka su $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ i $|\alpha| \leq k$. Tada*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *i* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ *za sve multiindekse* α, β *takve da* $\alpha + \beta \leq k$.

(ii) *Za sve* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *je* $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *i* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(iii) *Ako je* $V \subset \Omega$ *otvoren onda je* $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) *Ako je* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *onda je* $\phi u \in W^{k,p}(\Omega)$ *i vrijedi Leibnitzova formula*

$$D^\alpha(\phi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi D^{\alpha-\beta} u.$$

TEOREM A.2.3 *Za svaki* $k = 1, 2, \dots$ *i* $1 \leq p \leq \infty$ *je* $W^{k,p}(\Omega)$ *Banachov prostor.*

A.2.4 Aproksimacija glatkim funkcijama

Za $\varepsilon > 0$ definiramo $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega > \varepsilon)\}$.

TEOREM A.2.4 (Lokalna aproksimacija glatkim funkcijama) *Neka je* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *gdje je* $1 \leq p < \infty$ *i* η *standardni izglađivač. Definirajmo*

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ na } \Omega_\varepsilon.$$

Tada vrijedi

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *za svako* $\varepsilon > 0$,

(ii) $U^\varepsilon \to u$ *u* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *kada* $\varepsilon \to 0$.

TEOREM A.2.5 (Globalna aproksimacija glatkim funkcijama) *Neka je Ω ograničen i $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Tada postoji niz $(u_m)_m \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ takav da*

$$u_m \to u \text{ u } W^{k,p}(\Omega).$$

Napomena. *Uočimo da u gornjem teorem uzimamo niz iz $C^\infty(\Omega)$, tj. funkcije u_m nisu nužno ograničene na Ω. Može se pokazati da ako još dodatno pretpostavimo da je $\partial\Omega$ klase C^1 onda postoji niz $(u_m)_m \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ takav da $u_m \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$.*

A.2.5 Proširenja

Sljdeći cilj nam je proširiti funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$ na $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Egzistencija ovakvog proširenja nije *apriori* jasna. Uočimo da, na primjer, ako proširimo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ nulom na $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ to više neće općenito biti funkcija iz $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ jer duž ruba $\partial\Omega$ može doći do diskontinuiteta takvog da proširenje od u više nema slabe derivacije na rubu.

TEOREM A.2.6 (o proširenju) *Neka je Ω ograničen i $\partial\Omega$ klase C^1. Tada za svaki $V \subset\subset \Omega$ postoji ograničeni linearan operator*

$$E\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{A.2}$$

takav da za svako $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(i) $Eu = u$ *s.s. na* Ω

(ii) $\operatorname{supp} Eu \subset V$

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Eu\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *gdje konstanta C ovisis samo o p, Ω i V.*

Eu zovemo proširenjem od u na $\mathbb{R}^n$.

Napomena. *Ako je $\partial\Omega$ klase C^2 onda operator E iz gornjeg teorema je ograničeni linearan operator sa $W^{2,p}(\Omega)$ u $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.*

A.2.6 Prostor H^{-1}

Od posebnog nam je interesa prostor $H_0^1(\Omega)$ pa ćemo ga stoga pobliže proučiti.

DEFINICIJA. *Sa $H^{-1}(\Omega)$ označavat ćemo dual prostora $H_0^1(\Omega)$.*

Dakle, f je iz prostora $H^{-1}(\Omega)$ ako je f ograničeni linearan funkcional na $H_0^1(\Omega)$. Prisjetimo se, u slučaju $L^p(\Omega)$ za $1 \le p < \infty$ vrijedi da $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ gdje je p' konjugirani eksponent od p. Uočimo da u ovom slučaju nismo identificirali H_0^1 s njegovim dualom. Konkretnije, vrijedi

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \tag{A.3}$$

pri čemu su injekcije neprekidne i guste.

NOTACIJA. *Sa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označavamo djelovanje linearnog funkcionala iz $H^{-1}(\Omega)$ na funkciju iz $H_0^1(\Omega)$.*

DEFINICIJA. *Za $f \in H^{-1}(\Omega)$ definiramo normu na uobičajeni način sa*

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}. \tag{A.4}$$

TEOREM A.2.7 (karakterizacija $\boldsymbol{H^{-1}}$) *Neka je $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

(i) Postoje funkcije $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\Omega)$ takve da

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega (f_0 u + \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial u}{\partial x_k}) dx \ , \ \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{A.5}$$

(ii) Štoviše, vrijedi

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_\Omega \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 dx \right)^{1/2} \mid f \text{ zadovoljava (A.5) za } f_0, \ldots, f_n \in L^2(\Omega) \right\}. \tag{A.6}$$

(iii) Posebno, za sve $u \in H_0^1(\Omega)$ i $v \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ vrijedi

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \langle u, v\rangle. \tag{A.7}$$

A.2.7 Trag

Ovdje ćemo iznijeti rezultate koji će dati smisao zadavanju vrijednosti na $\partial\Omega$ funkcija iz $W^{k,p}(\Omega)$ prostora. Ako je $u \in C(\Omega)$ zadavanje na $\partial\Omega$ je jedistveno i smisleno. S druge strane, za $u \in W^{k,p}(\Omega)$ nije jasno što točno znači "vrijednost od u na $\partial\Omega$" jer, za početak, u i nije funkcija nego cijela klasa funkcija koje su jednake s.s.. Nadalje je $\partial\Omega$ skup mjere nula a fukcije iz $W^{k,p}(\Omega)$ koje su jednake s.s. poistovjećujemo. Ipak, moguće je jednoznačno definirati vrijednosti funkcija iz $W^{k,p}(\Omega)$ na rubu pomoću operatora traga.

TEOREM A.2.8 (o tragu) *Neka je Ω ograničen takav da je $\partial\Omega$ klase C^1 i neka je $1 \leq p < \infty$. Tada postoji ograničen linearan operator*

$$T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

takav da

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ ako je $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ gdje konstanta C ovisi samo o p i Ω.

Tu zovemo tragom od u na $\partial\Omega$.

Napomenimo da se uvijet na glatkoću od Ω može i oslabiti.

TEOREM A.2.9 (funkcije traga nula) *Neka je Ω ograničen takav da je $\partial\Omega$ klase C^1, $1 \leq p < \infty$ i $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tada je*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ ako i samo ako } Tu = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Označimo $\Gamma = \partial\Omega$. Navodimo još sljedeća važna svojstva traga:

(i) Neka je $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tada je $Tu = u|_\Gamma \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ i vrijedi

$$\|Tu\|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{A.8}$$

i operator traga $u \mapsto u_\Gamma$ je surjektivan sa $W^{1,p}(\Omega)$ na $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$. Posebno, za $p = 2$ imamo

$$\|Tu\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{A.9}$$

i slika od $H^1(\Omega)$, $T(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma)$, je gusta u $L^2(\Gamma)$. Na prostor $H^{1/2}(\Omega)$ možemo prenijeti normu iz $H^1(\Gamma)$ po operatoru T.

(ii) Jezgra operatora traga T je $W_0^{1,p}(\Omega)$ tj.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0\}. \tag{A.10}$$

To je upravo i tvrdnja prethodnog teorema.

A.3 Soboljevljeva ulaganja

Cilj ovog odjeljaka je iznjeti neke rezultate o ulaganju prostora $W^{k,p}(\Omega)$ za "dovoljno dobar" $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ koji igraju esencijalnu ulogu teoriji egzistencije rješenja diferencijalnih jednadžbi.

Neka je u daljnjem $n \in \mathbb{N}$ fiksiran.

A.3.1 Gagliardo—Nirenberg—Soboljevljeva nejednakost

DEFINICIJA. *Neka je $1 \leq p < n$. Definiramo Soboljevljev konjugat p^* od p sa*

$$p^* = \frac{np}{n-p}. \tag{A.11}$$

Uočimo da p^* zadovoljava jednakost

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

pa je, zbog $n > p$, $p^* > p$.

TEOREM A.3.1 (Gagliardo—Nirenberg—Soboljevljeva nejednakost) *Neka je $1 \leq p < n$. Tada postoji konstanta C koja ovisi samo o p i n takva da*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{A.12}$$

za sve $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Napomena. *U gornjem je teoremu zaista nužno da u ima kompaktan nosač, kao što se lako vidi iz primjera $u \equiv 1$. No zanimljivo je da konstanta C pak ne ovisi o veličini nosača od u.*

TEOREM A.3.2 (Gagliardo–Nirenbergova interpolacijska nejednakost) *Neka su $q \geq 1$, $r \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da su $j \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ t.d.*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}\ ,\ \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

Tada svaka funkcija $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ kojoj se derivacije m-tog reda nalaze u $L^r(\mathbb{R}^n)$ ima derivacije j-og reda u $L^p(\mathbb{R}^n)$ i vrijedi ocjena

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C\|D^m u\|_{L^r}^{\alpha}\|u\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

gdje je $C = C(m, n, j, q, r, \alpha)$ osim u slučaju

(1) ako je $j = 0$, $mr < n$ i $q\infty$ nužno je još pretpostaviti da u teži u 0 u beskonačnosti ili da pripada L^s za neko $s > 0$

(2) ako je $1 < r < \infty$ i $m-j-n/r$ nenegativan cijeli broj onda je nužno pretpostaviti i $\alpha \neq 1$).

TEOREM A.3.3 (ocjene za $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen takav da je $\partial\Omega$ klase C^1, neka je $1 \leq p < n$ i $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Tada je $u \in L^{p^*}(\Omega)$ i vrijedi ocjena*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{A.13}$$

gdje konstanta C ovisi samo o p, n i Ω.

TEOREM A.3.4 (ocjene za $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen, neka je $1 \leq p < n$ i $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tada vrijedi ocjena*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \tag{A.14}$$

za sve $q \in [1, p^*]$ gdje konstanta C ovisi samo o p, q, n i Ω.

Posebno, za sve $1 \leq p \leq \infty$ vrijedi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.15}$$

Napomena. *Ocjena (A.15) zove se Poincareova nejednakost.*

TEOREM A.3.5 (opća Soboljevljeva nejednakost) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen sa C^1 rubom i neka je $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Ako je*

$$k < \frac{n}{p}$$

onda je $u \in L^q(\Omega)$ gdje je

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Dodatno, vrijedi ocjena

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{W^{k,p}(\Omega)} \tag{A.16}$$

gdje C ovisi samo o k, p, n i Ω.

A.3.2 Kompaktnost

U prethodnom odjeljku Gagliardo—Nirenberg—Soboljevljeva nejednakost implicirala je ulaganje prostora $W^{1,p}(\Omega)$ u prostor $L^{p^*}(\Omega)$ za $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{pn}{n-p}$. U ovom odjeljku pokazat ćemo da je $W^{1,p}(\Omega)$ kompaktno uložen u $L^q(\Omega)$ za $1 \leq q < p^*$. Ta kompakatnost igra fundamentalnu ulogu u dokazu egzistencije slabog rješenja N—S jednadžbi.

DEFINICIJA. *Neka su X i Y Banachovi prostori, $X \subset Y$. Kažemo da je X kompaktno uložen u Y u oznaci*

$$X \subset\subset Y$$

ako

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ za neku konstantu C i za sve $u \in X$

(ii) svaki ograničen niz u X je relativno kompaktan u Y.

Uvijet (ii) u gornjem teoremu znači da za svaki niz $(u_m)_m \subset X$ takav da $\sup_m \|u_m\|_X < \infty$ postoji podniz $(u_{m_k})_k \subset (u_m)_m$ koji konvergira u Y:

$$\exists u \in Y \text{ t.d. } \lim_{k\to\infty} \|u_{m_k} - u\|_Y = 0.$$

TEOREM A.3.6 (Arzela–Ascoli) *Neka je (K, d) kompaktan metrički prostor i $\mathcal{H}$ ograničen podskup od $C(K)$. Pretpostavimo da je $\mathcal{H}$ uniformno ekvineprekidan, tj.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ t.d. \ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ , \ \forall f \in \mathcal{H}. \tag{A.17}$$

Tada je zatvarač od $\mathcal{H}$ u $C(K)$ kompaktan.

TEOREM A.3.7 (Rellich—Kondrachov teorem o kompaktnosti) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren te neka je $\partial\Omega$ klase C^1. Pretpostavimo da je $1 \leq p < n$. Tada je*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

za sve $1 \leq q < p^*$.

A.4 Prostori funkcija ovisnih o vremenu

U ovom poglavlju proučavamo prostore funkcija od prostora i vremena. Te funkcije prirodno je promatrati kao funkcije od vremena koje poprimaju vrijednosti u nekom Banachovom prostoru. Takvi prostori esencijalni su za konstrukciju slabih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Udaljnjem je X realan Banachov prostor.

DEFINICIJA. *Prostor*

$$L^p(0,T;X)$$

sastoji se od svih jako izmjerivih fukcija $\mathbf{u}\colon [0,T] \to X$. *Pripadna norma dana je sa*

(i) Za $1 \le p < \infty$

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|\,\mathbf{u}(t)\|_X^p dt\right)^{1/p},$$

(ii) odnosno, za $p = \infty$

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^p(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{[0,T]} \|\,\mathbf{u}(t)\|_X.$$

DEFINICIJA. *Prostor*

$$C([0,T];X)$$

sastoji se od svih neprekidnih funkcija $\mathbf{u}\colon [0,T] \to X$ *uz normu*

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{C([0,T];X)} = \max_{[0,T]} \|\,\mathbf{u}(t)\|_X.$$

DEFINICIJA. *Neka je* $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X)$. *Kažemo da je* $\boldsymbol{v} \in L^1(0,T;X)$ *slaba derivacija od* $\mathbf{u}$ *i pišemo*

$$\mathbf{u}' = v,$$

ako

$$\int_0^T \phi'(t)\,\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \phi(t)\,\boldsymbol{v}(t)dt$$

za sve skalarne test funkcije $\phi \in C_c^\infty(0,T)$.

DEFINICIJA. *(i) Soboljevljev prostor*

$$W^{1,p}(0,T;X)$$

sadrži sve funkcije $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$ *takve da* $\mathbf{u}'$ *postoji u slabom smislu i nalazi se u* $L^p(0,T;X)$. *Nadalje,*

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|\,\mathbf{u}(t)\|_X^p + \|\,\mathbf{u}'(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{[0,T]}(\|\,\mathbf{u}(t)\|_X + \|\,\mathbf{u}'(t)\|_X) & (p = \infty). \end{cases}$$

(ii) $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

TEOREM A.4.1 *Neka je* $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0,T;X)$ *za* $1 \le p \le \infty$. *Tada*

(i) $\mathbf{u} \in C(0,T;X)$ *(nakon eventualnog redefiniranja na skupu mjere nula)*

(ii) $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau)d\tau$ *za sve* $0 \le s \le t \le T$

(iii) *Vrijedi ocjena*

$$\max_{[0,T]} \| \mathbf{u}(t) \|_X \le C \| \mathbf{u} \|_{W^{1,p}(0,T;X)} \tag{A.18}$$

gdje konstanta C *ovisi samo o* T.

TEOREM A.4.2 *Neka je* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *takva da je* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

(i) *Tada je*

$$\mathbf{u} \in C(0,T;L^2(\Omega))$$

nakon eventualnog redefiniranja na skupu mjere nula.

(ii) *Preslikavanje*

$$t \mapsto \| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)}$$

je absolutno neprekidno uz

$$\frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle$$

za s.s $t \in [0,T]$.

(iii) *Vrijedi ocjena*

$$\max_{[0,T]} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)} \le C(\| \mathbf{u} \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \| \mathbf{u}' \|_{L^2(0,T;h^{-1}(\Omega))}) \tag{A.19}$$

gdje konstanta C *ovisi samo o* T.

Bibliografija

[1] D.J.Acheson: *Elementary Fluid Dynamics*, CLARENDON PRESS, Oxford, 1990.

[2] M.Braack, P.B.Mucha: *Directional do-nothing Condition for the Navier–Stokes Equations*, Journal of Computational Mathematics, Vol.32, No.5, (2014), 507–521.

[3] H.Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[4] L.C.Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[5] L.Formaggia, J.-F.Gerbeau, F.Nobile, A.Quarteroni: *Numerical Treatment of Defective Boundary Conditions for the Navier–Stokes Equations.* HAL, 2006.

[6] G.P.Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of Navier–Stokes Equations, Volume I*, Springer, 1994.

[7] G.P.Galdi: *Introduction to the Navier—Stokes Initial–Boundary Value Problem*, Springer, 2000.

[8] M.E.Gurtin: *An Introduction to Continuum Mechanics*, ACADEMIC PRESS, 1981.

[9] F.Hecht: FreeFem++, Third Edition, Version 3.48, dostupno na *http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf* (2015.).

[10] J.G.Heywood, R.Rannacher, S.Turek: *Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier–Stokes Equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 22, (1996), 325–352.

[11] I. Karšaj, J. Sorić, J. D. Humphrey: *A 3-D framework for arterial growth and remodeling in response to altered hemodynamics.* International Journal of Engineering Science, 2010 Elsevier Ltd.

[12] K.Masuda: *Weak solutions of Navier–Stokes equations*, Tôhoku Math. Journ. 36, (1984), 623-646.

[13] Navier–Stokes equation, dostupno na *www.claymath.org/millennium-problems/navier–stokes-equation*

[14] A.Quarteroni, A.Valli: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23, Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 1997.

[15] R.Temam: *Navier—Stokes equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holland, 1977.

[16] A.Veneziani, C.Vergara: *Flow Rate Boundary Condition in Fluid-Dynamics.* Proc. Appl. Mech. 6, (2006), 35-38.

[17] A.Veneziani, C.Vergara: *Flow Rate Defective Boundary Conditions in Haemodynamics Simulations* Int. J. Numer. Meth. Fluids 47, (2005), 803-816.

[18] L. Virag, J. S. Wilson, J. D. Humphrey, I. Karšaj: *A Computational Model of Biochemomechanical Effects of Intraluminal Thrombus on the Enlargement of Abdominal Aortic Aneurysms.* Annals of Biomedical Engineering, Vol.43 (December 2015), No. 12.

Sažetak

Navier–Stokesove jednadžbe opisuju gibanje inkompresibilnog Newtonovog fluida. Unatoč detaljnom proučavanju kroz godine (problem je postavljen pred gotovo 200 godina), egzistencija i jedinstvenost glatkog rješenja i dalje su otvoreno pitanje i spadaju u jedan od milenijskih problema. Cilj ovog rada je pokazati egzistenciju i jedinstvenost slabog rješenja u dvije i tri dimenzije pod određenim uvijetima, diskutirati problematiku vezanu uz sama rješenja i konačno dati neke primjere primjena Navier–Stokesovih jednadžbi u realnim fizikalnim problemima.

Summary

Navier–Stokes equations describe motion of incompressible Newtonian fluid. Although heavily studied over the years (problem was set almost 200 years ago), it is still unsolved problem in classical sense – existence and uniqueness of smooth solutions – and is one of the millennium problems. Objective of this work is to show existence and uniqueness of weak solutions in two and three dimensions under certain conditions, discuss on the major problems, and give some examples of applications together with numerical simulations of real world problems.

Životopis

Filip Ivančić rođen je 7. lipnja 1992. godine u Novom Mestu (Slovenija), a odrastao je u malom selu Reštovu nedaleko od Karlovca. Osnovnu školu pohađao je u Kamanju (OŠ Žakanje, PŠ Kamanje), a srednju u Karlovcu – Gimnaziju Karlovac, prirodoslovno–matematički smjer. Školovanje je nastavio u Zagrebu na Preddiplomskom sveučilišnom studiju matematike na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu (2011. – 2014.). Na istom fakultetu 2014. upisao je Diplomski sveučilišni studij Primjenjene matematike.