Matematički model prometnog toka

Jusup, Lucija

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:756599

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Jusup

MATEMATIČKI MODEL PROMETNOG TOKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Igor Pažanin

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovni rezultati i pojmovi **2**
1.1 Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2
1.2 Gustoća prometa 3
1.3 Protok prometa 4

2 Osnovni model prometnog toka **6**
2.1 Formulacija pomoću brzine 7

3 Veza brzine i gustoće **9**
3.1 Konstantna brzina 10
3.2 Linearna ovisnost 10
3.3 Nelinearna ovisnost 11
3.4 Brzina i protok 13

4 Konstantna brzina **15**
4.1 Karakteristike 17

5 Nekonstantna brzina **22**
5.1 Aproksimacija male smetnje 22
5.2 Metoda karakteristika 25
5.3 Rankine-Hugoniotov uvjet 30
5.4 Lepeza ekspanzije 33
5.5 Udarni valovi 38
5.6 Zaključak 42

Bibliografija **43**

Uvod

Prometni tok definira se kao istodobno kretanje više prometnih entiteta (automobila, vlakova, pješaka,...) na prometnoj infrastrukturi (cesti, željezničkoj pruzi, pješačkim stazama,...) prema određenim zakonitostima. Teorija prometnog toka je relativno mlada znanstvena disciplina koja se bavi proučavanjem uvjeta kretanja motornih vozila u prometnim tokovima na mreži cestovnih prometnica. Kao početak razvoja teorije prometnog toka navodi se 1930. godina, a vezan je uz primjenu teorije vjerojatnosti u opisivanju određenih karakteristika prometnog toka te za usavršavanje prvih matematičkih modela za opisivanje relacija "tok-brzina". Među prve značajnije radove ubraja se publikacija Greenshields-a pod nazivom "A Study Of Highway Capacity" iz 1934. godine.

Matematičko modeliranje je postupak opisivanja realnog sustava matematičkim jednadžbama s ciljem razvoja i uporabe matematičkog modela za kasnije analize, projektiranja i optimizacije sustava za koji je model izrađen. Matematički model opisuje sustav pomoću skupova varijabli i jednadžbi, koje opisuju odnose među varijablama. Modeli se sastoje od varijabli, koeficijenata te matematičkih operatora.

U ovome radu pokušat ćemo izvesi matematički model za prometni tok. Osnovna literatura kojom se služimo jest [3].
Rad sadrži pet poglavlja. U Poglavlju 1 prezentiramo osnovne rezultate i pojmove vezane uz parcijalne diferencijalne jednadžbe, na kojima se baziraju svi modeli koje predstavljamo kroz rad te definiramo glavne varijable modela, gustoću i protok prometa. U Poglavlju 2 izvodimo osnovni matematički model i uvodimo još jednu bitnu varijablu, brzinu. Kroz Poglavlje 3 uspostavljamo vezu između definiranih varijabli prezentirajući razne mogućnosti ovisnosti brzine o gustoći prometa. U Poglavlju 4 model razvijamo za slučaj kada je brzina konstantna te kroz par primjera rješavamo problem koristeći metodu karakteristika. U Poglavlju 5 bavimo se slučajem nekonstantne brzine, koji nam donosi nove fenomene, kao što su udarni valovi te na kraju zaključkom rezimiramo sve rezultate iznesene u radu.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati i pojmovi

1.1 Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju široku primjenu. U ovom odjeljku ćemo uvesti neke osnovne definicije i rezultate vezane za parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ). Mi ćemo se kroz rad susretati s linearnim PDJ prvog reda.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *i neka je* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *neka funkcija. Tada se relacija*

$$F(\boldsymbol{x}, u, \partial_{x_1}, u, ..., \partial_{x_n}, u, ..., \partial^{\alpha}, u, ...) = 0,$$

gdje je F poznata funkcija od $\boldsymbol{x}$*, u i konačno mnogo parcijalnih derivacija funkcije u, zove parcijalna diferencijalna jednadžba. Funkcije F i u mogu biti vektorske i u tom slučaju govorimo o sustavu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.*

Definicija 1.1.2. *Linearna PDJ je jednadžba u kojoj se parcijalne derivacije nepoznate funkcije javljaju linearno uz koeficijente koji mogu ovisti o varijablama.*

Teorem 1.1.3. *Ako je* $c \in \mathbb{R}$*,* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ *onda postoji jedinstveno rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \text{ na } \mathbb{R}^2 \\ u(0, .) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

dano formulom $u(t, x) = u_0(x - ct)$.

Dokaz. Vidjeti npr. [1]. ■

Lančano pravilo

Pretpostavimo da funkcije

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega_0 \subset \mathbb{R}^m,$$
$$\varphi : \Omega_0 \to \mathbb{R}$$

neprekidne i da imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda na Ω i Ω_0 respektivno. Promotrimo kompoziciju:

$$(\varphi \circ u)(\boldsymbol{x}) = \varphi(u_1(\boldsymbol{x}), ..., u_m(\boldsymbol{x})) \ .$$

Tada je funkcija $\varphi \circ u$ neprekidna te ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda na Ω dane formulom:

$$\frac{\partial(\varphi \circ u)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi(u(\boldsymbol{x}))}{\partial u_j} \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \ .$$

1.2 Gustoća prometa

Pretpostavimo da objekata koje promatramo ima dovoljno mnogo tako da nema potrebe pratiti svakog zasebno i da možemo uzimati prosječne vrijednosti. U izvodu matematičkog modela objekti će biti automobili, a os će predstavljati cestu.

Varijabla koja će imati istaknutu ulogu jest gustoća prometa $\rho\,(x, t)$. To je broj automobila po jedinici dužine. Da bi izmjerili ρ u točki $x = x_0$ za $t = t_0$, uzmemo mali prostorni interval na cesti $x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$, i zatim izbrojimo automobile unutar tog intervala (v. Sliku 1.1). U ovom slučaju

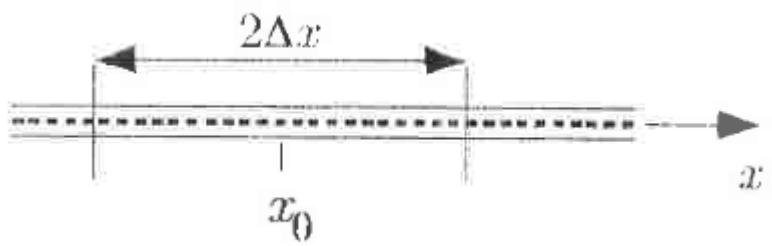
$$\rho\,(x_0, t_0) \approx \frac{\text{broj auta od } x_0 - \Delta x \text{ do } x_0 + \Delta x \text{ u } t = t_0}{2\Delta x} \ . \tag{1.2}$$

Osnovna pretpostavka ovdje jest da je Δx dovoljno malen da samo automobili u neposrednoj blizini x_0 određuju gustoću u ovoj točki. S druge strane, Δx ne smije biti toliko malen da je sličan dužini pojedinačnih automobila (i razmaku između njih). S neprekidnog stajališta automobili su glatko distribuirani duž cijele x-osi i vrijednost $\rho\,(x_0, t_0)$ je limes zdesna kada $\Delta x \to 0$.

Primjer 1.2.1. *Uniformna distribucija*
Da bi ilustrirali kako je određena gustoća, pretpostavimo da je duljina svih auta jednaka l, i da je razmak između svakog od njih jednak d. Uzmimo neki interval $2\Delta x$ duž ceste. Tada je broj auta unutar ovog intervala otprilike $2\Delta x/(l + d)$. Ako umetnemo ovo u (1.2) i pustimo $\Delta x \to 0$ imamo

$$\rho = \frac{1}{l+d}\,. \tag{1.3}$$

Zaključak koji proizlazi iz ove formule jest da postoji maksimalna gustoća. Zbog $0 \leq d < \infty$ je $0 < \rho \leq \rho_M$, gdje je $\rho_M = 1/l$. Na primjer ako je $l = 5$m i $d = 4$m, tada je $\rho = 111$ auta/km. Koristeći ove vrijednosti, maksimalna gustoća, koja se dobije kada je $d = 0$, jest $\rho_M = 200$ auta/km. Kada proučavamo prometni tok korisno je znati *maksimalno spojenu gustoću* ρ_{mg}, koja odgovara gustoći koja se dobiva kada je razmak između auta takav da između svaka dva auta stane točno jedan. Ovaj slučaj nastupa kada je $d = l$, i u našem primjeru je $\rho_{mg} = 100$ auta/km.



Slika 1.1: Interval duž ceste unutar kojega računamo gustoću $\rho(x_0, t_0)$.

1.3 Protok prometa

Druga varijabla koja nam treba je protok $J(x,t)$, čija mjerna jedinica je broj auta po jedinici vremena. Da bi izmjerili J u $x = x_0$, za $t = t_0$, izaberemo mali vremenski interval $t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$ i izbrojimo koliko auta auta prođe točku $x = x_0$ u tom vremenskom periodu. Dogovorno se uzima da se auti koji prođu zdesna broje kao +1, dok se oni koji prođu slijeva broje kao -1. U tom slučaju:

$$J(x_0, t_0) \approx \frac{\text{broj auta koji prođe } x_0 \text{ od } t = t_0 - \Delta t \text{ do } t = t_0 + \Delta t}{2\Delta t}\,. \tag{1.4}$$

Osnovna pretpostavka ovdje jest da je Δt dovoljno malen da samo automobili koji prolaze x_0 u, ili blizu $t = t_0$ određuju protok u t_0. S druge strane, Δt ne smije biti tako malen da nijedan automobil ne uspije proći x_0 tijekom tog vremenskog intervala. Neka su auti opet glatko distribuirani duž cijele t-osi i vrijednost $J(x_0, t_0)$ je limes zdesna od (1.4) kada $\Delta t \to 0$.

Primjer 1.3.1. *Uniformna distribucija (nastavak)*
Dodajmo prethodnom primjeru uniformno distribuiranih automobila još i pretpostavku da se kreću konstantnom pozitivnom brzinom v. U ovom slučaju auti koji kreću s udaljenosti $2v\Delta t$ od x_0 proći će x_0 u vremenskom intervalu od $t_0 - \Delta t$ do $t_0 + \Delta t$. Odgovarajući broj auta je, otprilike, $2v\Delta t/(l + d)$. Ako stavimo ovo u (1.4) i pustimo $\Delta t \to 0$, slijedi

$$J = \frac{v}{l + d} \,. \tag{1.5}$$

Primjera radi, neka je $l = 5$m, $d = 15$m i $v = 100$km/h. Tada je $J = 5000$ auta/h. Primjetimo da je $J = \rho v$, što je jedna od osnovnih formula prometnog toka.

Poglavlje 2

Osnovni model prometnog toka

Da bi izveli formulu za gustoću koristit ćemo tzv. argument kontrolnog volumena. U ovom slučaju kontrolni volumen je malo područje na cesti, od $x_0 - \Delta x$ do $x_0 + \Delta x$. Tijekom vremenskog perioda od $t = t_0 - \Delta t$ do $t = t_0 + \Delta t$ pretpostavljamo da se broj auta unutar ovog intervala može mijenjati samo ako auti ulaze ili izlaze iz lijevog odnosno desnog kraja intervala. Zbog toga pretpostavljamo da auti ne mogu nestati ili se samo pojaviti na cesti. Dakle, naš zakon ravnoteže za automobile unutar intervala na cesti glasi

$$\begin{aligned}
&\{\text{broj auta unutar intervala u } t = t_0 + \Delta t\} \\
&\qquad - \{\text{broj auta unutar intervala u } t = t_0 - \Delta t\} \\
&= \{\text{broj auta koji prođu } x_0 - \Delta x \text{ od } t_0 - \Delta t \text{ do } t_0 + \Delta t\} \\
&\qquad - \{\text{broj auta koji prođu } x_0 + \Delta x \text{ od } t_0 - \Delta t \text{ do } t_0 + \Delta t\}\,.
\end{aligned}$$

Koristeći (1.2) i (1.4) iz ove formule slijedi

$$\begin{aligned}
&2\Delta x\left[\rho(x_0, t_0 + \Delta t) - \rho(x_0, t_0 - \Delta t)\right] \\
&\qquad = 2\Delta t\left[J(x_0 - \Delta x, t_0) - J(x_0 + \Delta x, t_0)\right].
\end{aligned}$$

Važan rezultat kojeg ćemo koristiti u više navrata jest Taylorov teorem.

Teorem 2.0.1 (Taylor). *Neka je $f(x)$ takva da $f^{(n+1)}(x)$ postoji i da je neprekidna za $x_L < x < x_R$. Tada, ako su x i $x+h$ točke unutar intervala (x_L, x_R), vrijedi*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)} + R_{n+1}, \tag{2.1}$$

gdje je ostatak

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta), \tag{2.2}$$

gdje je η točka između x i x+h.

Dokaz. Vidjeti npr. [2]. ■

Kada je f funkcija dvije varijable, (2.1) poprima oblik

$$f(x+h,t+k) = f(x,t) + hf_x(x,t) + kf_t(x,t) + \frac{1}{2}h^2 f_{xx}(x,t) + hkf_{xt}(x,t) + \frac{1}{2}k^2 f_{tt}(x,t) + ...$$

Sada iz Taylorovog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
&2\Delta x(\rho + \Delta t\rho_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \rho_{tt} + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \rho_{ttt} + ... \\
&\quad - \rho + \Delta t\rho_t - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \rho_{tt} + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \rho_{ttt} + ...) \\
&= 2\Delta t(J - \Delta x J_x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 J_{xx} - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 J_{xxx} + ... \\
&\quad - J - \Delta x J_x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 J_{xx} - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 J_{xxx} + ...),
\end{aligned}$$

pri čemu ρ i J razvijamo oko (x_0, t_0). Sređivanjem gornje jednadžbe dobivamo

$$\rho_t + O\left((\Delta t)^2\right) = -J_x + O\left((\Delta x)^2\right).$$

Uzmemo li $\Delta x \to 0$ i $\Delta t \to 0$ dolazimo do

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}\,. \tag{2.3}$$

Dobiveni zakon može se primijeniti na bilo koji neprekidni sustav u kojem objekti ne nastaju i ne nestaju.

2.1 Formulacija pomoću brzine

Prisjetimo se formule za protok koju smo dobili u prethodnom poglavlju, $J = \rho v$. Uvrštavanjem te formule u (2.3) dobivamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0\,. \tag{2.4}$$

Ovo ipak zahtjeva određeni oprez jer je brzina, kao i ostale neprekidne varijable, uprosječena veličina. Točnije, ako se unutar intervala nalazi n auta, s brzinama $v_1, v_2, ..., v_n$, tada je

$$v(x_0, t_0) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Kod rješavanja jednadžbe (2.4) pretpostavit ćemo da je početna gustoća poznata, odnosno

$$\rho(x, 0) = f(x). \tag{2.5}$$

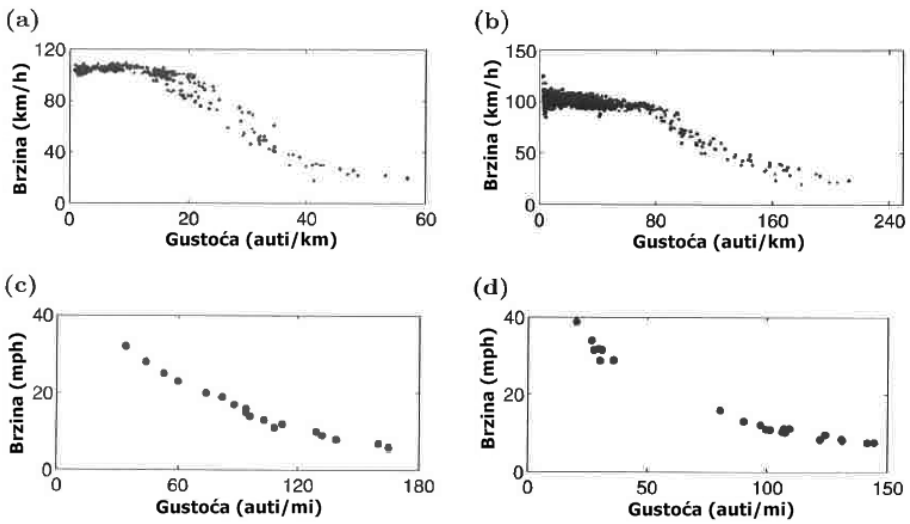
Jednadžba u (2.4) matematički je model prometnog toka kojim ćemo se baviti u prvom dijelu ovog rada i predstavlja hiperbolički zakon sačuvanja. Ovaj zakon izveli su Lighthill i Whitham 1955. u [5] te neovisno o njima i Richards 1956. u [7] pa se ovaj model naziva još i Lighthill-Whitham-Richardsovim (LWR) modelom. Više o LWR-modelu može se pronaći u [6].

Trebamo imati na umu da je, kao i većina matematičkih modela, (2.4) samo aproksimacija stva rnog sustava. Očekivano, postoje ograničenja za primjenu istog. Upitno je daje li model točan opis sustava pri malim gustoćama. Ako je broj objekata (auta) malen i razmak imeđu njih velik, tada pretpostavke kod definiranja protoka i gustoće ne vrijede. Ipak, u slučajevima gdje se primjenjuje, neprekidni model dokazano ima izvanrednu točnost.

Poglavlje 3

Veza brzine i gustoće

Očito, bez preciziranja veze brzine v i gustoće ρ, matematički model je nepotpun. Jedna mogućnost je bolje istražiti fiziku problema i vidjeti povezuje li neka druga jednadžba ove dvije varijable. Promotrimo podatke za nekoliko različitih cesta prikazane na Slici 3.1. Pitanje je koja funkcija najbolje opisuje podatke na ovoj slici. Odgovor djelomično ovisi o tome koji nas intervali gustoće i brzine zanimaju i koju smo primjenu imali na umu. Razradili smo nekoliko mogućih zakona.



Slika 3.1: Brzina kao funkcija gustoće izmjerena na različitim cestama, (a) Toronto, (b) Amsterdam, (c) Lincoln Tunnel i (d) Meritt Parkway.

3.1 Konstantna brzina

Najjednostavnija pretpostavka jest da je v konstantna u smislu njene ovisnosti o ρ, drugim riječima, $v = a$. U ovom slučaju dolazimo do

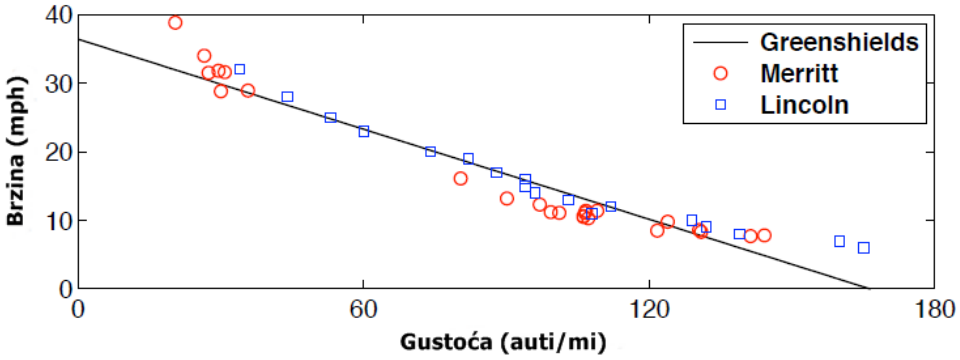
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{3.1}$$

3.2 Linearna ovisnost

Linearna ovisnost brzine o gustoći najpoznatija je i s najširom primjenom. Za naš problem pretpostavljamo da je veza brzine i gustoće dana sa $v = a - b\rho$, gdje su a, b konstante. Ovo je poznatije kao Greenshieldsov model i obično se zapisuje tako da je $a = v_M$ a $b = \frac{v_M}{\rho_M}$, dakle

$$v = v_M\left(1 - \frac{\rho}{\rho_M}\right), \tag{3.2}$$

pri čemu konstante v_M, ρ_M predstavljaju maksimalnu brzinu, odnosno maksimalnu gustoću. Vrijednosti ovih konstanti mogu se iščitati sa Slike 3.1. Međutim, bolji način za njihovo nalaženje jest korištenje metode najmanjih kvadrata pa koristeći podatke za Lincoln Tunnel i Merritt Parkway nalazimo da je $v_M = 36.821$ mph, $\rho_M = 166.4226$ auta/min, a konačna funkcija se nalazi na Slici 3.2 zajedno s originalnim podacima.



Slika 3.2: Krivulja dobivena Greenshieldsovim zakonom (3.2) za podatke Meritt Parkway i Lincoln Tunnel.

Uočimo da iako funkcija ne pogađa vrijednosti na rubovima, gdje je $\rho = 0$ ili $\rho = 180$, ona ipak dobro prikazuje ovisnost brzine o gustoći. Ovo se čini kao dobra aproksimacija te se jednadžba prometnog toka svodi na

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{3.3}$$

gdje je

$$c = v_M\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right). \tag{3.4}$$

3.3 Nelinearna ovisnost

Sa Slike 3.1 je jasno da veza između brzine i gustoće nije linearna. U nekim primjenama ova razlika je ključna, i potrebna je točnija funkcija. Općenita verzija tada ima oblik

$$v = F(\rho). \tag{3.5}$$

Sada je općenita formula za protok $J(\rho) = \rho F(\rho)$. Pretpostavimo da je F glatka funkcija od ρ. Tada iz lančanog pravila slijedi $\frac{\partial}{\partial x}J = J'(\rho)\frac{\partial}{\partial x}\rho$. Dakle, općenita formulacija zakona (2.3) glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{3.6}$$

gdje je

$$c(\rho) = J'(\rho), \tag{3.7}$$

ili ekvivalentno

$$c(\rho) = F(\rho) + \rho F'(\rho). \tag{3.8}$$

Funkcija $c(\rho)$ je poznata kao *val brzine* i igrat će ključnu ulogu u rješavanju jednadžbe. Konkretni primjer ove funkcije dan je u (3.4) gdje je val brzine povezan s Greenshieldsovim zakonom u (3.2).

Nije moguće koristiti bilo koju funkciju u (3.5). Moraju postojati neki zahtjevi za funkciju koji će garantirati da (3.6) ima rješenje. Za početak ćemo ovome pristupiti s fizikalnog stajališta, i postaviti uvjete za funkciju $F(\rho)$ koji će se bazirati na onome što znamo o prometnom toku. Pokazat će se da se pretpostavke temeljene na fizikalnim zakonima poklapaju s matematičkim zahtjevima koji osiguravaju egzistenciju rješenja za ovaj problem.

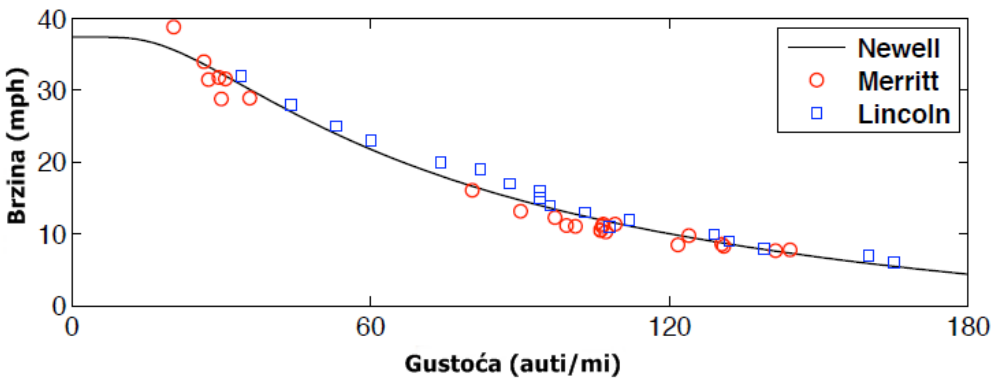
Već smo pretpostavili da je F glatka funkcija od ρ. Dodatno, oslanjajući se na podatke sa Slike 3.1, pretpostavimo još i sljedeće:

(i) $F'(\rho) \leq 0$ za $0 \leq \rho \leq \rho_M$.
Ova pretpostavka dolazi sa Slike 3.1 na kojoj vidmo da je v $(= F(\rho))$ monotono padajuća funkcija gustoće. Ovo je u skladu sa zapažanjem da većina vozača kako se brzina povećava ostavlja veći razmak između auta. Posljedica ovoga jest da je $F(0) = v_M$ maksimalna brzina, što odgovara zapažanju da na autocesti koja nije prometna vozači imaju običaj voziti maksimalno dozvoljenom brzinom.

(ii) $F(\rho_M) = 0$.
Ovo se temelji na pretpostavci da što gušći promet postaje, to je brzina bliža nuli.

Postoji beskonačno mnogo funkcija koje mogu zadovoljiti ove općenite uvjete. Zbog toga, kod odabira funkcije treba uzeti u obzir njenu jednostavnost. Problem je što je uvjet jednostavnosti teško izmjeriti. Međutim, gornji uvjeti zahtjevaju da funkcija ima barem dva parametra, v_M i ρ_M. Linearna veza u (3.2) je primjer jednostavne funkcije s dva parametra. Druga mogućnost je funkcija koju je predložio Newell 1961. dana sa

$$v = v_M \left(1 - e^{-\lambda(1/\rho - 1/\rho_M)}\right). \tag{3.9}$$



Slika 3.3: Krivulja dobivena Newellovim zakonom (3.2) za podatke Meritt Parkway i Lincoln Tunnel.

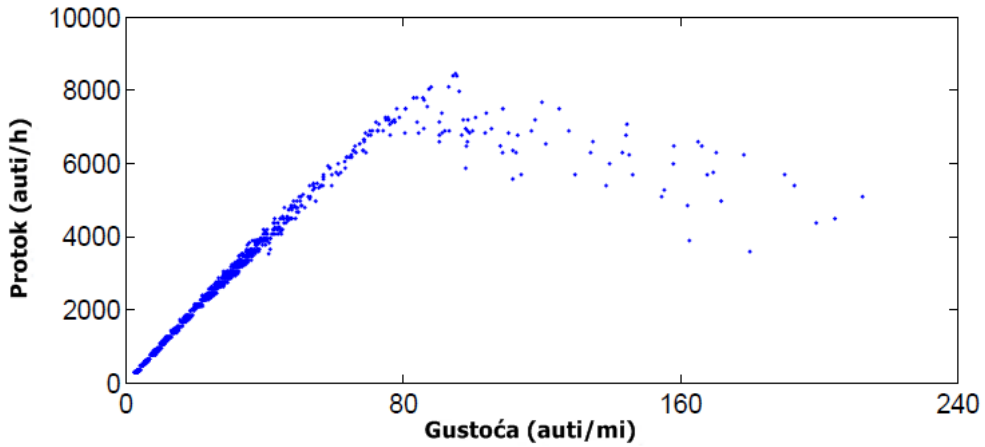
Ako pretpostavimo da je $\lambda \geq 0$, ovo je primjer troparametarskog zakona koji zadovoljava (i) i (ii). Ako ga primjenimo za Lincoln Tunnel i Merrit Parkway, dobivamo da je $v_M = 37.4$ mph, $\rho_M = 271$ auta/min i $\lambda = 67.4$ min/auto. Ovu funkciju možemo vidjeti na Slici 3.3 skupa s originalnim podacima. Jasno je da je bolja u prikazivanju podataka nego Greenshieldsova, i za razliku od linearnog zakona, ova funkcija sadrži zaravnjeno područje oko $\rho = 0$ koje možemo vidjeti na podacima za Toronto i Amsterdam na Slici 3.1. Penalizacija za ovo poboljšanje jest da je val brzine dan u (3.8) jednak

$$c = v_M \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda}{\rho} \right) e^{-\lambda(1/\rho - 1/\rho_M)} \right].$$

Upravo zbog toga moramo odlučiti je li ova dodatna složenost u jednadžbi prometnog toka vrijedna poboljšanja modela.

3.4 Brzina i protok

Naš model ima tri zavisne varijable, protok, gustoću i brzinu. Ako uzmemo u obzir da je osnovna jednadžba toka zapisana u terminima gustoće i brzine tada je uobičajen pristup predlaganje zakona koji povezuje ove dvije funkcije. Međutim katkad je od koristi promotriti i druga rješenja. Jedna mogućnost je povezati protok s gustoćom, i tada odrediti brzinu pomoću jednadžbe $J = \rho v$. Pomoću ovoga podaci sa Slike 3.1 za Amsterdam prikazani su na Slici 3.4, gdje je protok funkcija gustoće.



Slika 3.4: Protok kao funkcija gustoće za podatke sa Slike 3.1(b).

Ono što je ovdje upečatljivo jest da J ima dobro definiranu zavisnost o ρ do otprilike $\rho = 80$ a poslije toga su podaci znatno raspršeniji. Ovakvo širenje vrlo je tipično za prometni tok i otežava formulaciju zakona za protok. S druge strane, v, ρ na Slici 3.1 pokazuju bolje definiranu povezanost cijelom gustoćom i zbog toga je pogodniji za modeliranje.
Zaključak koji se može izvući sa Slike 3.4 jest da je protok konveksna funkcija. Iz ovoga dobivamo novo pravilo za zakon $v = F(\rho)$:

(iii) $J''(\rho) \leq 0$, ili ekvivalentno, $2F'(\rho) + \rho''(\rho) \leq 0$ za $0 \leq \rho \leq \rho_M$.

Sjetimo se da je glatka funkcija konkavna ako je njena derivacija monotono padajuća. Zbog toga ako je funkcija $c(\rho) = J'(\rho)$ monotono padajuća tada je gornji uvjet zadovoljen.

Važno je shvatiti da je i najkompliciraniji nelinearni izraz koji povezuje brzinu i gustoću i dalje na kraju aproksimacija. Određeni aspekti problema nisu uračunati i puno puta je to učinjeno namjerno jer je cilj modela uhvatiti osnovne mehanizme koji su odgovorni za pojave koje proučavamo. Na primjer, u problem nismo uključili raskrižja, vremenske nepogode, opasne uvjete na cesti ili mnoštvo drugih stvari koje utječu na prometni tok. Tu je također i problem da automobile voze ljudi, koji donose individualne odluke koje mogu imati znatan utjecaj na promet. Na primjer, neki vozači ubrzavaju ako je promet rjeđi. To implicira da brzina ovisi o gustoći, a to nije uračunato u naš model.
Također valja zapaziti da je jednadžba toka (2.4) općenita i da se u terminima prometnog toka može primjeniti na autocestu s više traka i na malenu seosku cestu. Ipak, nakon što uvedemo poseban zakon za brzinu, primjena modela postat će ograničenija. Na primjer, podaci sa Slike 3.1 mjere brzinu na jednoj strani ceste (npr. brzinu vozila koji idu od istoka prema zapadu). Ovo ima smisla jer kad bi bile uračunate obje strane, na način da izmjerene brzine mogu biti pozitivne ili negativne, možemo doći do zaključka da je prosječna brzina jednaka nuli za sve gustoće. Zapravo, kod primjena u prometu nije neuobičajeno da imamo zakone koji su ograničeni na posebnu traku u prometu. Na primjer, neke ceste ograničavaju kamionima pristup određenim trakama i ovo ima značajne posljedice na funkciju brzine. Dakle, jednadžba toka je općenita, ali u primjenama na neke probleme koji zahtjevaju specifikaciju dodatnog zakona, model postaje više ograničavajući.

Poglavlje 4

Konstantna brzina

Da bi istražili svojstva prometnog toka, krenut ćemo s pretpostavkom da je brzina konstantna. Tada problem poprima oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \text{ za } t > 0, \ -\infty < x < \infty, \tag{4.1}$$

gdje je $a = \text{const} > 0$ i vrijedi

$$\rho(x, 0) = f(x). \tag{4.2}$$

Rješenje se može naći ako zapazimo da se jednadžba može zapisati kao

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho = 0. \tag{4.3}$$

Ideja je transformirati x, t u nove varijable r, s na način da derivacije transformiramo kao

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{4.4}$$

Ako je to moguće tada (4.3) postaje $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$, što se lagano rješava. S ovime na umu neka je $x = x(r, s)$, $t = t(r, s)$, i u tom slučaju, primjenjujući lančano pravilo za derivaciju kompozicije, derivacija po r-u postaje

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{4.5}$$

Ako usporedimo ovo s (4.3), zahtjevamo da $\frac{\partial x}{\partial r} = a$ i $\frac{\partial t}{\partial r} = 1$. Integrirajući ove jednadžbe slijedi $x = ar + q(s)$ i $t = r + p(s)$. Da bi odredili s, sjetimo se da je početni uvjet zahtjevao rješenje duž x-osi. Da bi pojednostavili primjenu početnog uvjeta tražit ćemo da x-os

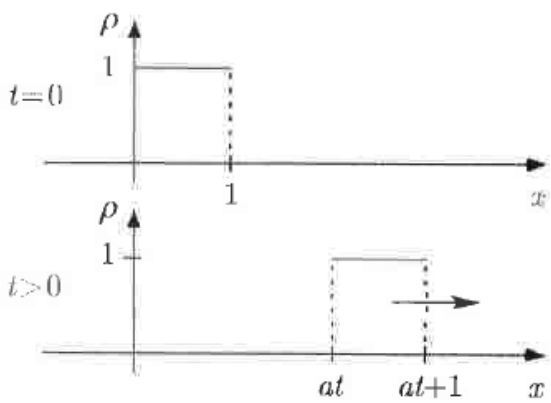
($t = 0$) upada u s-os ($r = 0$). Drugim riječima, $r = 0$ povlači da je $t = 0$ i $x = s$. Stavimo $r = 0$ i $t = 0$ i zaključujemo da je $q(s) = s$ i $p(s) = 0$, te je tražena promjena varijabli

$$x = ar + s, \quad t = r. \tag{4.6}$$

Iz ove transformacije vidimo da $r = t$ i $s = x - at$. Sada možemo (4.1) napisati kao $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$, što znači $\rho = \rho(s) = \rho(x - at)$. Skupa s početnim uvjetom zaključujemo da je rješenje problema

$$\rho(x, t) = f(x - at). \tag{4.7}$$

Prije nego donesemo zaključke o ovom problemu, promotrimo jedan primjer. Ovaj primjer obrađen je dva puta, prvo kao matematički problem, a zatim kao problem prometnog toka.



Slika 4.1: Rješenje vezano uz Primjer 4.0.1.

Primjer 4.0.1. *Matematička verzija*
Neka je početni uvjet dan kao na Slici 4.1, tj.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \tag{4.8}$$

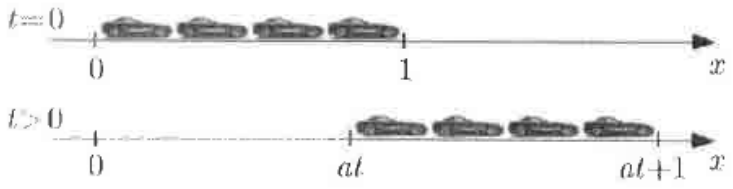
Iz (4.7) slijedi da je rješenje

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad 0 < x - at < 1, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

ili ekvivalentno,

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad at < x < 1 + at, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Ovo rješenje je dano na Slici 4.1 i očigledno je da je u bilo kojem trenutku t, rješenje jednostavno kvadratno izbočenje koje se pomaklo u interval $at \leq x \leq at + 1$. ■



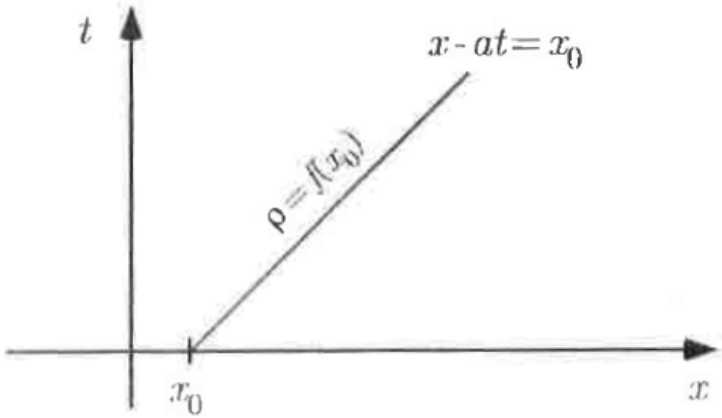
Slika 4.2: Grupa automobila koji su uniformno razmaknuti i kreću se konstantnom brzinom a duž x-osi.

Primjer 4.0.2. *Prometna verzija*
Prethodni primjer možemo drugačije izraziti u terminima fizike. Pretpostavimo da su u $t = 0$ auti uniformno razmaknuti na intervalu $0 < x < 1$, kao na Slici 4.2. U ovom slučaju gustoća je konstantna, pozitivna vrijednost za $0 < x < 1$, dok je gustoća izvan tog intervala nula. Također, pretpostavimo da svako auto vozi konstantnom brzinom a. Tada se oni kreću kao jedna cjelina. Dakle, u bilo kojem danom trenutku t, skupina automobila će zauzeti interval $at < x < at + 1$. Kako putuju istom brzinom, razmak imeđu njih je jednak kao u $t = 0$. Isti ovaj rezultat smo dobili u rješenju (4.9). ■

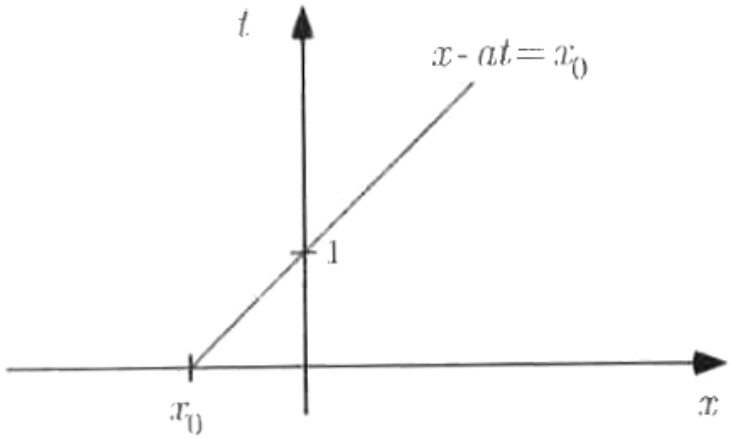
Iz gornjih primjera i formule u (4.7) zaključujemo da je rješenje putujući val. Val putuje samo u jednom smjeru i zbog toga se (4.1) ponekad naziva jednostrana valna jednadžba. U slučaju kada je $a > 0$ val se kreće udesno brzinom a. Ono što je bitno jest da se kreće jednakom brzinom kao vozila, koja je $v = a$.

4.1 Karakteristike

Postoji drugačiji način promatranja rješenja koji će se pokazati bitnim. Zasniva se na tome da je, ako u formuli $\rho(x,t) = f(x - at)$ fiksiramo $x - at$, rješenje konstantno. Drugim riječima, ako je $x - at = x_0$ tada je duž ovog pravca $\rho = f(x_0)$ (vidi Sliku 4.3). Ovi pravci nazivaju se karakteristike jednadžbe i metoda koju koristimo za pronalaženje rješenja zove se metoda karakteristika. Zapažanje da je rješenje duž karakteristika konstantno možemo iskoristiti za određivanje rješenja bilo gdje na x,t-ravnini. Sljedeći primjer to pokazuje.



Slika 4.3: Karakteristike za (4.1) su pravci $x - at = x_0$. Duž svakog pravca rješenje je konstantno.



Slika 4.4: Karakteristike koje smo koristili u primjeru da bi odredili vrijednost od $\rho(0, 1)$.

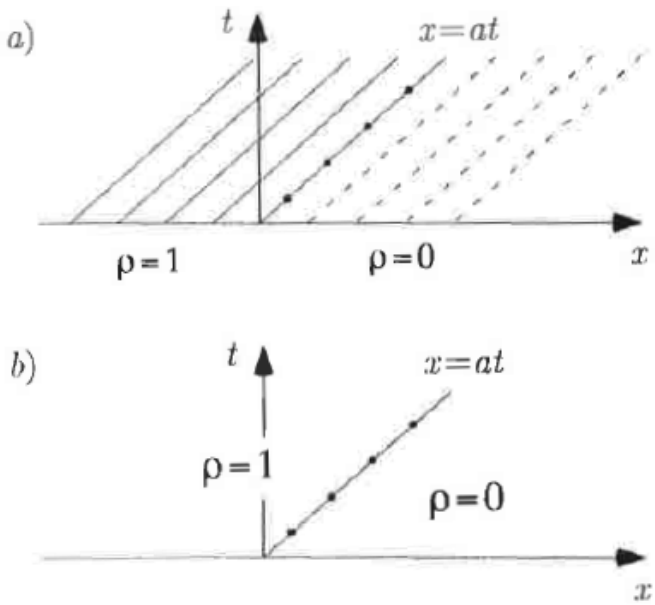
Primjer 4.1.1. Recimo da želimo odrediti $\rho(0, 1)$. Da bi iskoristili karakteristike za nalaženje ove vrijednosti, trebamo odrediti pravac $x - at = x_0$ koji prolazi kroz $(x, t) = (0, 1)$ (vidi Sliku 4.4). Ako u jednadžbu $x - at = x_0$ uvrstimo $x = 0$ i $t = 1$ dobivamo $x_0 = -a$. Stoga, $\rho(0, 1) = f(x_0) = f(-a)$. Ovaj rezultat se poklapa s onim što smo dobili iz formule u (4.7).

■

Općenito, da bi koristeći karakteristike odredili $\rho(x_1, t_1)$, najprije nađemo karakteristike koje prolaze kroz (x_1, t_1). Jednadžba za ovaj pravac je $x - at = x_1 - at_1$. Rješenje je konstanta duž ovog pravca, i jer je presjek s x-osi $x_0 = x_1 - at_1$, slijedi $\rho(x_1, t_1) = f(x_0)$.

Primjer 4.1.2. *Crveno svjetlo - Zeleno svjetlo*
Kao drugi primjer kako se karakteristike mogu iskoristiti u nalaženju rješenja, promotrimo situaciju čekanja auta na semaforu. Pretpostavimo da se u trenutku $t = 0$ ugasi crveno i upali zeleno svjetlo. Neka je položaj svjetla u $x = 0$ i prepostavimo da u početku auti imaju konstantnu gustoću lijevo od svjetla. Početni uvjet koji opisuje ovu situaciju jest

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad x \leq 0, \\ 0 & \text{ako} \quad x > 0. \end{cases} \tag{4.10}$$



Slika 4.5: (a) Karakteristike za problem u Primjeru 4.1.2 s početnim uvjetom (4.10) i (b) konačno rješenje problema

Također smo pretpostavili da je $a > 0$. Karakteristike za ovaj problem prikazane su na Slici 4.5(a). Zbog položaja na kojem karakteristike sijeku x-os, rješenje u području prekrivenom punim linijama je $\rho = 1$, dok je ono u području isprekidanih linija jednako $\rho = 0$. Karakteristika koja odvaja ova dva područja je ona koja počinje u skoku početnog uvjeta (4.10). Naime, to je pravac $x = at$, i prikazan je točkasto na Slici 4.5(a). Konačno rješenje je prikazano na Slici 4.5(b) i njegova formula glasi

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad x \leq at, \\ 0 & \text{ako} \quad x > at. \end{cases} \tag{4.11}$$

■

Prethodna dva primjera koriste se da bi pokazali kako se karakteristike mogu koristiti u pronalaženju rješenja, ali u oba slučaja rješenje se može odrediti direktno iz formule u (4.7). Ovo ne vrijedi za sljedeći primjer.

Primjer 4.1.3. *Ceste konačne dužine*
Do sada je naša cesta bila beskonačno duga. U stvarnom svijetu ovo je rijetkost i u ovom ćemo primjeru promatrati što se događa kada cesta zauzima interval $0 \leq x \leq l$. Ovo postavlja pitanje kakvi bi trebali biti rubni uvjeti u $x = 0, l$. Matematički ispravan izbor bio bi odrediti rubni uvjet u $x = 0$ i ne odrediti onaj u $x = l$. Razlog ovomu jest taj da se ovaj problem kreće slijeva na desno. Rješit ćemo jednadžbu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \text{za} \quad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{4.12}$$

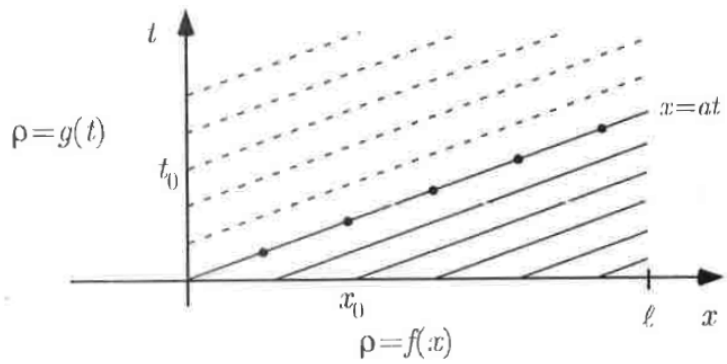
skupa s početnim uvjetom

$$\rho(x, 0) = f(x),$$

i rubnim uvjetom

$$\rho(0, t) = g(t).$$

Ovo nije teško riješiti koristeći karakteristike. Znamo da je rješenje od (4.12) konstanta duž bilo kojeg pravca oblika $x - at = \text{const}$ koje vidimo na Slici 4.6.



Slika 4.6: Karakteristike za problem prometnog toka gdje je cesta konačan interval.

Pune linije: Na području koje sadrži pune linije rješenje je određeno početnim uvjetom. Kako su pravci na ovom području oblika $x - at = x_0$, gdje je x_0 presjek s x-osi, slijedi da je rješenje na ovom području $\rho(x, t) = f(x_0) = f(x - at)$.

Isprekidane linije: Da bi našli rješenje na ovom području gdje su karakteristike isprekidane linije, promotrimo karakteristike na Slici 4.6 koje imaju presjek t_0 s t-osi. Općenita jednadžba ovog pravca je $x - at = const$. Kako pravac mora prolaziti kroz točku $(x, t) = (0, t_0)$, slijedi da je jednadžba $x - at = -at_0$. Jer je rješenje konstantno duž ovog pravca i $\rho(0, t_0) = g(t_0)$, slijedi da je duž ove karakteristike $\rho(x, t) = g(t_0) = g(t - x/a)$.

Iz svega ovoga slijedi da je rješenje dano sa:

$$\rho(x,t) = \begin{cases} f(x - at) & \text{ako} \quad 0 \leq t < x/a, \\ g(t - x/a) & \text{ako} \quad x/a < t. \end{cases}$$

Vrijednost $x = at$ ovisi o tome koja je vrijednost funkcije u $(x, t) = (0, 0)$. Ako je $\rho(0, 0) = f(0)$ tada $\rho = f(0)$ za $x = at$, a ako je $\rho(0, 0) = g(0)$ tada $\rho = g(0)$ za $x = at$.

■

Vratimo se na pitanje je li moguće postaviti rubni uvjet u $x = l$ ako je $f(x) = 1$. Na Slici 4.6 na području prekrivenom punim linijama rješenje je $\rho = 1$. Bilo koji rubni uvjet u $x = l$, osim $\rho = 1$ bi bio kontradikcija s već poznatim rješenjem. Zbog toga je za $a > 0$ prirodnije staviti rubni uvjet na lijevom rubu intervala. Ako baš želimo postaviti rubni uvjet u $x = l$ tada je potrebno maknuti početni uvjet ili rubni uvjet u $x = 0$.

Poglavlje 5

Nekonstantna brzina

Linearna valna jednadžba koju smo promatrali u prethodnom poglavlju sadrži neke vrijedne informacije o osnovnim svojstvima rješenja. Činjenica jest, da je pretpostavka prema kojoj je brzina neovisna o gustoći, netočna za prometni tok. Ovo se vidi na Slici 3.1. Za sada ćemo pretpostaviti $v = F(\rho)$, gdje je F glatka. Kao što smo vidjeli u odjeljku 3.3, jednadžba prometnog toka poprima oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{5.1}$$

gdje je

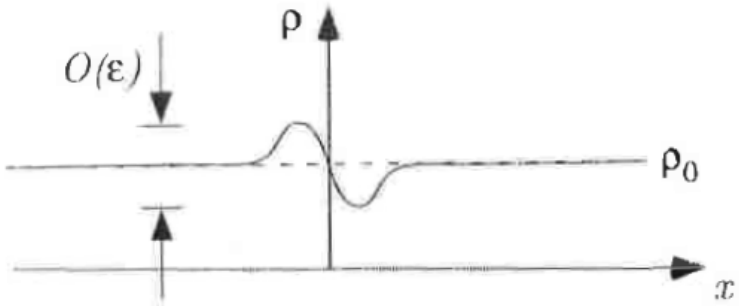
$$c(\rho) = F + \rho F'. \tag{5.2}$$

Ovako formulirana, jednadžba nalikuje na verziju s konstantnom brzinom u (4.1). Jedina bitnija razlika jest da val brzine c nije konstanta i može ovisiti o nepoznatom ρ te je ako se to dogodi, (5.1) nelinearno. Općenite nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe vrlo je teško riješiti. Jedna mogućnost, koja se može primijeniti na veliku većinu problema, jest uvođenje aproksimacije smetnje.
Iako je nelinearna jednadžba prometnog toka dosta općenita, potrebna su neka ograničenja koja će nam osigurati postojanje rješenja. Jedno je to da je c glatka funkcija od ρ. Drugi uvjet povezan je s razmatranjem u odjeljku 3.4 da je protok konkavna funkcija. Ovo je ekvivalentno tome da je $c(\rho)$ monotono padajuća funkcija od ρ. Dakle, $c(\rho)$ treba biti monotona, rastuća ili padajuća.

5.1 Aproksimacija male smetnje

Jedna metoda proučavanja nelinearnog valnog problema temelji se na aproksimaciji male smetnje. Osnovna ideja jest da je partikularno rješenje određeno. Ovo rješenje je najčešće

konstanta. Da bi objasnili što ovo podrazumijeva, napomenimo da je konstantna funkcija $\rho = \rho_0$ rješenje jednadžbe prometnog toka (5.1). Dakle, pretpostavimo da promet teče glatko s uniformnom gustoćom $\rho = \rho_0$ i tada jedan ili više auta polako promijeni brzinu i uzrokuje malu smetnju u gustoći. Na primjer ako netko zakoči tada će neposredni utjecaj toga biti smanjenje gustoće ispred auta i povećanje gustoće iza njega. Funkcija koja oponaša ovu promjenu gustoće je prikazana na Slici 5.1.



Slika 5.1: Mala smetnja koja se nameće kod rješenja s konstantnom gustoćom u $t = 0$. Početni uvjet koji proizlazi iz toga je dan u (5.3).

Da bi analizirali ovu situaciju pretpostavimo da se smetnja javi u $t = 0$. Početni uvjet koji odgovara ovome je

$$\rho(x, 0) = \rho_0 + \epsilon g(x). \tag{5.3}$$

Poseban oblik funkcije $g(x)$ nije bitan. Zbog početnog uvjeta prikladno proširenje rješenja je $\rho \sim \rho_0 + \epsilon\rho_1(x, t) + ...$ Sada, koristeći Taylorov teorem,

$$\begin{aligned} c(\rho) &\sim c(\rho_0 + \epsilon\rho_1 + ...) \\ &\sim c(\rho_0) + (\epsilon\rho_1 + ...)c'(\rho_0) + \frac{1}{2}(\epsilon\rho_1 + ...)^2 c''(\rho_0) + ... \\ &\sim c(\rho_0) + \epsilon\rho_1 c'(\rho_0) + ... \end{aligned}$$

Jednadžba (5.1) poprima oblik

$$\epsilon\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + ... + [c(\rho_0) + \epsilon\rho_1 c'(\rho_0) + ...]\left(\epsilon\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + ...\right) = 0, \tag{5.4}$$

gdje iz (5.3) slijedi

$$\rho_0 + \epsilon\rho_1(x, 0) + ... = \rho_0 + \epsilon g(x). \tag{5.5}$$

Ako stavimo $c_0 = c(\rho_0)$ tada je $O(\epsilon)$ problem

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0, \tag{5.6}$$

gdje je $\rho_1(x, 0) = g(x)$. Ovo je poznatije kao *jednadžba male smetnje* i u ovom slučaju to je linearna valna jednadžba. Koristeći (4.7), rješenje je $\rho_1(x, t) = g(x - c_0 t)$. Stoga je dvočlana aproksimacija male smetnje rješenja jednaka

$$\rho(x, t) \sim \rho_0 + \epsilon g(x - c_0 t). \tag{5.7}$$

Iz ovoga je jasno da se početna smetnja širi kao putujući val, brzinom c_0. Neke posljedice ovoga istražit ćemo u sljedećem primjeru.

Primjer 5.1.1. *Bezrazložne prometne gužve*
Da bi istražili svojstva (5.7) koristit ćemo Greenshieldsov zakon i pretpostavljamo

$$v = v_M \left(1 - \frac{\rho}{\rho_M}\right). \tag{5.8}$$

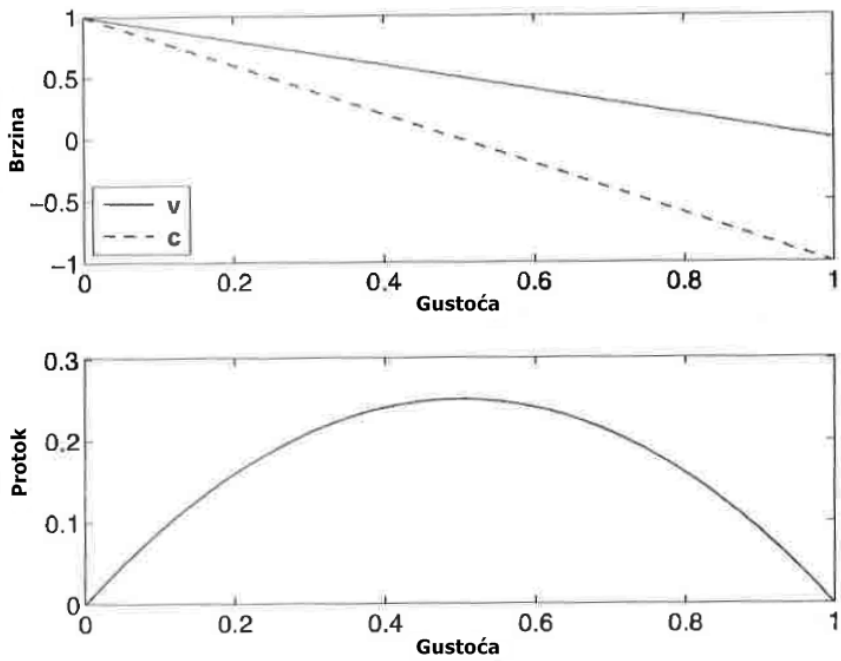
U ovom slučaju iz (5.2) slijedi

$$c = v_M \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right), \tag{5.9}$$

i tada je protok

$$J = v_M \left(1 - \frac{\rho}{\rho_M}\right)\rho. \tag{5.10}$$

Ove funkcije prikazane su na Slici 5.2. Primjetimo da za danu vrijednost protoka postoje dvije moguće vrijednosti gustoće. One koje zadovoljavaju $0 < \rho < \frac{1}{2}\rho_M$ se često nazivaju lagani promet, dok se one zadovoljavaju $\frac{1}{2}\rho_M < \rho < \rho_M$ nazivaju teški promet. Također primjetimo da je $c = J'$, drugim riječima, c je jednak nagibu funkcije protoka. Ovo znači da je c negativan za teški promet i pozitivan za lagani promet.
Na temelju gornje diskusije možemo zaključiti da se u laganom prometu gdje je $c > 0$, smetnja kreće prema naprijed, dok se u teškom prometu, gdje je $c < 0$, kreće unazad. S obzirom na to da je $c \leq v$, smetnja se ne kreće brže od protoka prometa. Drugim riječima, tko god je odgovoran za prouzrokovanje ove smetnje vidjet će kako se smetnja kreće unazad u teškom prometu. Jedna iznimka ovoga je kada je gustoća prometa $\rho_M/2$, i u tom slučaju smetnja će ostati u području u kojem je prouzrokovana. Također valja primjetiti da se val širi brzinom koja je drugačija od brzine vozila koji tvore sustav.
Rješenje dobiveno koristeći aproksimaciju male smetnje nam objašnjava misteriju pojave zvane *fantomska prometna gužva*. Ovo se događa kada se promet počne usporavati bez



Slika 5.2: Brzine (5.8), (5.9) i protok (5.10) koristeći Greenhieldov zakon.

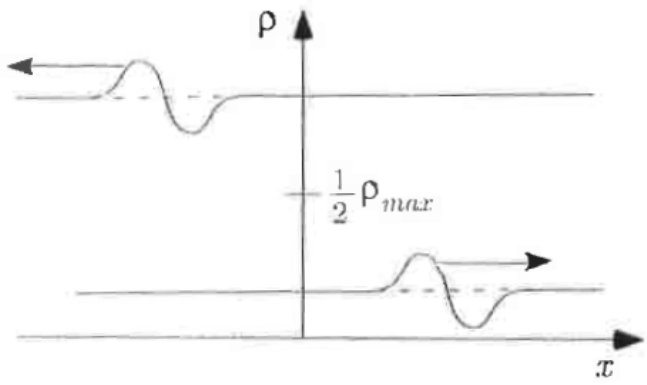
nekog razloga kao npr. nesreća, radovi na cesti itd. Kao što vidimo na Slici 5.3 neke ranije smetnje u prometu mogu rezultirati time da se val gustoće širi unazad duž ceste. Vozač koji uđe u ovo područje neće opaziti neki vidljivi razlog za ovo i kada prođe smetnju vratit će se uniformnom toku koji je imao prije. U težem prometu vozači koji često mijenjaju trake uzrokuju to da vozači iza njih usporavaju ili koče da bi ostavili prostora između. Ovo uzrokuje male smetnje i širi se duž ceste iza pokretača ove situacije.

■

5.2 Metoda karakteristika

Pokazuje se da se metoda karakteristika koju smo razvili za rješavanje problem konstantne brzine može prilagoditi tako da vrijedi i za nelinearnu jednadžbu (5.1). U slučaju konstantne brzine vidjeli smo da je rješenje konstantno duž krivulja koje imaju oblik $x = x_0 + at$. Dakle, na sličan način istražit ćemo je li moguće naći krivulje $x = X(t)$ na kojima je rješenje od (5.1) konstantno. Tražimo krivulje koje imaju svojstvo $\frac{d}{dt}\rho(X(t), t) = 0$. Ako proširimo ovo koristeći pravilo o derivaciji kompozicije, slijedi da trebamo odabrati $X(t)$ takav da je

$$\rho_t + X'(t)\rho_x = 0. \tag{5.11}$$



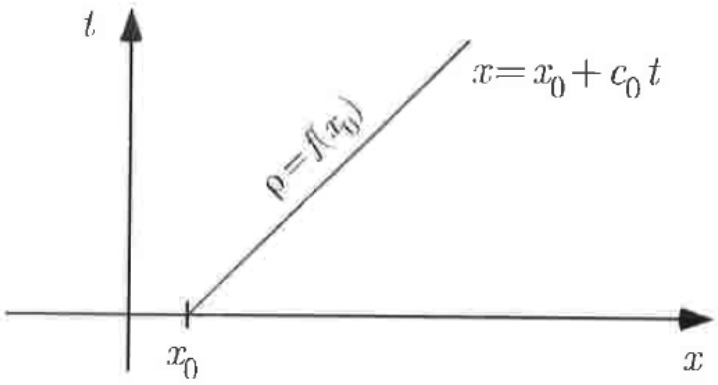
Slika 5.3: Smetnja se kreće prema desno ako je $\rho_0 < \frac{1}{2}\rho_M$, a prema lijevo ako je $\rho_0 > \frac{1}{2}\rho_M$.

Da bi našli funkciju $X(t)$ koja zadovoljava ovu jednadžbu, sjetimo se da ρ zadovoljava jednadžbu prometnog toka

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0. \tag{5.12}$$

Ako usporedimo ovo s (5.12), jasno je da $X(t)$ treba biti odabran tako da je

$$X'(t) = c(\rho). \tag{5.13}$$



Slika 5.4: Metoda karakteristika za određivanje krivulja $x = X(t)$ duž kojih je rješenje od (5.1) konstantno.

Prije nego ovo integriramo da bi našli funkciju $X(t)$, sjetimo se da je ρ konstanta duž krivulje. Zbog toga, ako krivulja počinje u $x = x_0$ tada u bilo kojoj točki krivulje imamo

$\rho = \rho_0$ gdje je $\rho_0 = f(x_0)$ (vidi Sliku 5.4). Ako ovo uvrstimo u (5.13) i integriramo, slijedi $X = x_0 + c(\rho_0)t$. Dakle, karakteristika koja počinje u $x = x_0$ je

$$x = x_0 + c(\rho_0)t, \tag{5.14}$$

i duž ove karakteristike rješenje je

$$\rho = \rho_0, \tag{5.15}$$

pri čemu je $\rho_0 = f(x_0)$.

Dva izraza (5.14) i (5.15) tvore rješenje problema. Da bi objasnili kako se koriste, pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost od ρ u određenoj točki, recimo u (x_1, t_1). U nekim slučajevima, vrijednost od $\rho(x_1, t_1)$ je lako odrediti i to ćemo napraviti u sljedećem primjeru kada je $\rho = \rho_L$ i kada je $\rho = \rho_R$. Ako vrijednost nije očita, tada je potrebno izračunati razultat i to uključuje sljedeće korake.

1. Korak Naći karakteristike koje prolaze kroz (x_1, t_1).
S obzirom na to da je općeniti oblik karakteristike $x - c_0 t = x_0$, tada zahtjevamo da je $x_1 - c_0 t_1 = x_0$.
2. Korak Naći c_0 u ovisnosti o x_0.
Iz početnog uvjeta imamo da je $c_0 = c(f(x_0))$. Na primjer, koristeći Greenshieldsov zakon

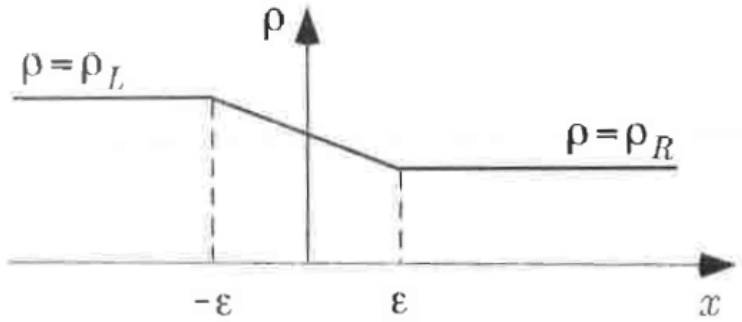
$$c(\rho_0) = v_M \left(1 - 2\frac{f(x_0)}{\rho_M}\right).$$

3. Korak Riješiti $x_1 = x_0 + c_0 t_1$ za x_0.
U slučaju kada se koristi Greenshieldsov zakon, jednadžba koju treba riješiti jest

$$x_1 = x_0 + v_M t_1 \left(1 - 2\frac{f(x_0)}{\rho_M}\right).$$

O $f(x_0)$ ovisi koliko je teško riješiti ovu jednadžbu po x_0. Mi ćemo koristiti po dijelovima linearne funkcije, tako da je ovu jednadžbu moguće riješiti relativno lagano.
Kada dobijemo x_0, rješenje će biti $\rho(x_1, t_1) = f(x_0)$. Ovaj postupak nije osobito težak ali ipak moramo biti na oprezu. Na primjer, pretpostavlja se da postoji karakteristika koja prolazi kroz (x_1, t_1), što ne mora uvijek biti slučaj.

Primjer 5.2.1. *Crveno svjetlo - Zeleno svjetlo (modificirano)*
Da bi iskoristili gornje rješenje u prometnom toku, promatrat ćemo modificiranu verziju primjera Crveno svjetlo - Zeleno svjetlo. Pretpostavili smo da je promet u početku konstantan na lijevo od $x = -\epsilon$ i na desno od $x = \epsilon$. Također, tu je i prijelazno područje, širine



Slika 5.5: Početna gustoća $\rho(x, 0)$ modificirani primjer Crvenog svjetla - Zelenog svjetla

2ϵ, gdje se gustoća mijenja linearno između lijevih i desnih vrijednosti. Ova situacija prikazana je na Slici 5.5. Pretpostavljeno je da su brži auti naprijed, dakle, $\rho_L = \rho_R$. Funkcija koja se koristi u početnom uvjetu je

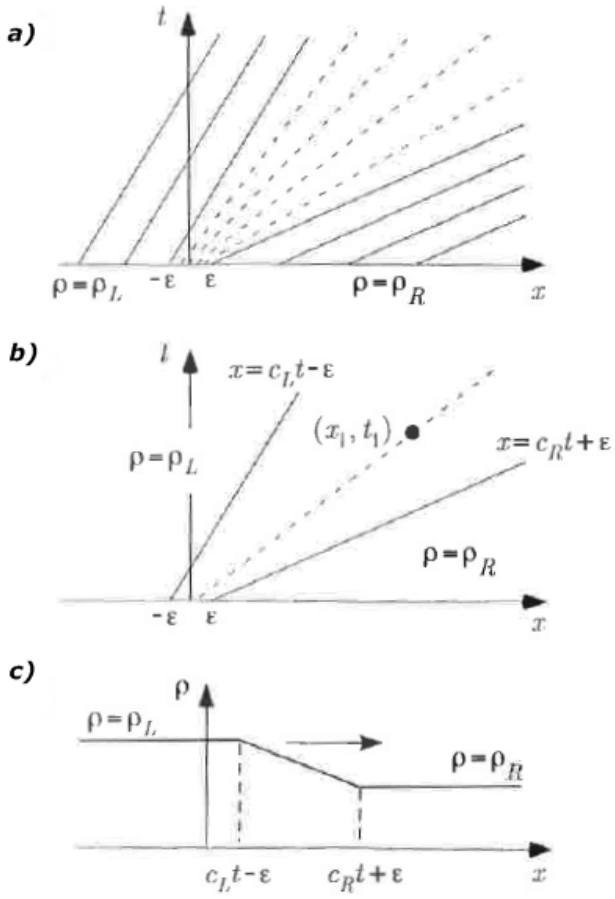
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq -\epsilon, \\ \rho_L + \frac{\rho_R - \rho_L}{2\epsilon}(x+\epsilon) & \text{ako} \quad -\epsilon < x < \epsilon, \\ \rho_R & \text{ako} \quad \epsilon \leq x. \end{cases} \tag{5.16}$$

Još trebamo specificirati koji zakon koristiti za brzinu, i u ovom primjeru koristimo Greenshieldsov zakon. Stoga je $v = v_M(1 - \rho/\rho_M)$, a val gustoće je

$$c(\rho) = v_M\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right). \tag{5.17}$$

Da bi skicirali karakteristike, uzimamo u obzir različite početne pozicije x_0.

- Ako je x_0 na lijevoj strani, tako da je $x_0 < -\epsilon$, tada ρ_0 ima konstantnu vrijednost ρ_L. Ovo znači da sve karakteristike na ovom području imaju isti nagib, što se vidi na Slici 5.6(a). Uzimajući u obzir da je rješenje konstana duž svakog od ovih pravaca, slijedi da je $\rho = \rho_L$ na području x, t-ravnine lijevo od karakteristike $x = -\epsilon + c_L t$, gdje je $c_L = c(\rho_L)$. Ovo se vidi na Slici 5.6(b).
- Koristeći sličan argument, sve karakteristike koje kreću zdesna, gdje je $x_0 > \epsilon$, imaju isti nagib. Jer je $\rho_L > \rho_R$, karatkteristike slijeva imaju strmiji nagib nego one zdesna, i to vidimo na Slici 5.6(a). Rješenje je konstanta duž svakog od ovih pravaca i slijedi da je $\rho = \rho_R$ na području x, t-ravnine desno od karakteristike $x = \epsilon + c_R t$, gdje je $c_R = c(\rho_R)$. Ovo je prikazano na Slici 5.6(b).
- Da bi odredili što se događa kada je $-\epsilon < x_0 < \epsilon$, na Slici 5.5 uočimo da je početna gustoća neprekidna na ovom intervalu. To znači da $c(\rho_0)$ neprekidno varira od c_L



Slika 5.6: Rješenje modificiranog primjera Crveno svjetlo - Zeleno svjetlo.

u $x_0 = -\epsilon$ do c_R u $x_0 = \epsilon$. Dobivene karakteristike su prikazane na Slici 5.6(a) isprekidanim linijama. Da bi našli rješenje u točki (x_1, t_1) na ovom području, kao na Slici 5.6(b), trebamo naći karakteristiku koja prolazi kroz ovu točku. Ovo zahtjeva nalaženje x_0. Jer je gustoća konstantna na karakteristici, jednom kada je poznat x_0, tada je $\rho(x_1, t_1) = \rho(x_0, 0)$. Sada općenita formula za karakteristiku glasi $x = x_0 + c_0 t$, i treba vrijediti $x_1 = x_0 + c_0 t_1$. Iz (5.17) i (5.16) imamo da je

$$\begin{aligned} c_0 &= v_M \left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho_M}\right) \\ &= v_M \left[1 - \frac{2}{\rho_M}\left(\rho_L + \frac{\rho_R - \rho_L}{2\epsilon}(x_0 + \epsilon)\right)\right]. \end{aligned}$$

Ako uvrstimo ovo u jednadžbu $x_1 = x_0 + c_0 t_1$ i riješimo po x_0, nalazimo

$$x_0 = \frac{x_1 - t_1(c_L + c_R)/2}{1 + t_1(c_R - c_L)/(2\epsilon)}.$$

Skupa s ovim i s početnim uvjetom u (5.16), gustoća je jednaka

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_0, 0) = \rho_L + (\rho_R - \rho_L)\frac{x_1 + \epsilon - c_L t_1}{2\epsilon + (c_R - c_L)t_1}. \tag{5.18}$$

Dakle, formula za rješenje je

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \le c_L - \epsilon, \\ \rho_L + (\rho_R - \rho_L)\frac{x+\epsilon-c_L t}{2\epsilon+(c_R-c_L)t} & \text{ako} \quad c_L t - \epsilon < x < c_R t + \epsilon, \\ \rho_R & \text{ako} \quad c_R t + \epsilon \le x. \end{cases} \tag{5.19}$$

Prema tome, između dva konstantna stanja, gustoća se mijenja linearno, baš kao i u početnom uvjetu. Ovo je prikazano na Slici 5.6(c).

5.3 Rankine-Hugoniotov uvjet

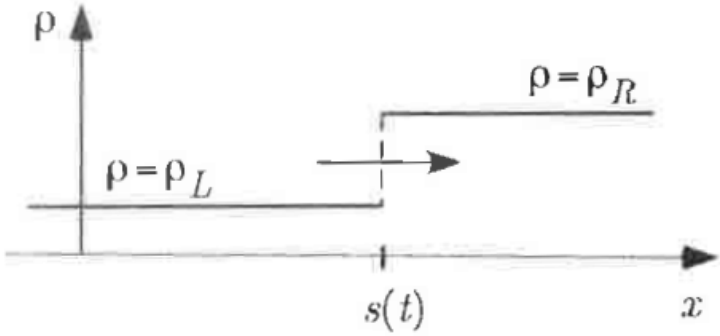
Kada budemo proučavali nelinearnu jednadžbu prometnog toka u Poglavlju 5.5, postat će očito da rješenje ima sklonost da se razvije u funkciju s jednim ili više skokova koji se kreću duž x-osi. Promatrali smo takvo rješenje za linearne jednadžbe u Primjeru 4.1.2. Kod nelinearne funkcije stvari su ipak drugačije i morat ćemo biti pažljivi svaki put kad se skok pojavi. Da bi istražili što se događa, pretpostavimo da imamo situaciju prikazanu na Slici 5.7, koja se sastoji od skokova u $x = s(t)$.
Kako derivacije po x nisu definirane u takvim točkama, moramo preformulirati problem integrirajući po malim prostornim intervalima oko skoka, $s - \epsilon \le x \le s + \epsilon$. Dakle, ako integriramo $\rho_t + J_x = 0$ i sjetimo se da je gustoća konstanta na obje strane skoka, dobivamo

$$\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho_t dx + J(\rho_R) - J(\rho_L) = 0. \tag{5.20}$$

Fundamentalni teorem integralnog računa daje nam

$$\frac{d}{dt}\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho dx = \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho_t dx + s'(t)\rho\,|_{x=s+\epsilon} - s'(t)\rho\,|_{x=s-\epsilon}\,.$$

Iz ovoga i (5.20) slijedi



Slika 5.7: Skok u $x = s(t)$.

$$\frac{d}{dt}\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho dx - \rho_R s'(t) + \rho_L s'(t) + J(\rho_R) - J(\rho_L) = 0. \tag{5.21}$$

Sada iskoristimo to da je gustoća po dijelovima konstantna

$$\begin{aligned}\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho dx &= \int_{s-\epsilon}^{s} \rho dx + \int_{s}^{s+\epsilon} \rho dx \\ &= \epsilon(\rho_L + \rho_R),\end{aligned}$$

pa je dakle

$$\frac{d}{dt}\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \rho dx = \frac{d}{dt}\epsilon(\rho_L + \rho_R) = 0.$$

Iz (5.21) slijedi da

$$s'(t) = \frac{J(\rho_R) - J(\rho_L)}{\rho_R - \rho_L}. \tag{5.22}$$

Ova jednadžba je poznata kao *Rankine-Hugoniotov uvjet* i određuje brzinu skoka (diskontinuiteta) u rješenju.
Korisno je izraziti (5.22) u terminima funkcije c. Prisjetimo se da je $c = J'(\rho)$, i $J(0) = 0$, pa je tada

$$J(\rho) = \int_0^{\rho} c(\bar{\rho}) d\bar{\rho}. \tag{5.23}$$

Sada Rankine-Hugoniotov uvjet poprima oblik

$$s'(t) = \frac{1}{\rho_R - \rho_L} \int_{\rho_L}^{\rho_R} c(\rho) d\rho. \tag{5.24}$$

Ovo pokazuje da svaki skok u rješenju putuje prosječnom brzinom vala brzine u danom intervalu gustoće.

Postoje dva tipa skoka, i oni su određeni po tome što se dogodi s brzinom v u skoku. Ako ρ ima skok u $x = s(t)$, ali v je neprekidna u $x = s(t)$, tada se skok zove *kontakt diskontinuiteta*. Primjetimo da se zbog $v = a$ i $J = \rho v$ Rankine-Hugoniotov uvjet (5.22) svodi na $s' = a$. Drugim riječima, skok se kreće danom konstantnom brzinom.

Ako v nije neprekidna u $x = s(t)$ tada se skok zove udar, i tok koji ovaj skok proizvede je *valni udar*.

Primjeri

1. *Greenshieldsov zakon*. Koristeći linearni zakon u (3.2) i činjenicu da je $J = \rho v$, Rankine-Hugoniotov uvjet (5.22) se svodi na

$$s'(t) = \frac{1}{\rho_R - \rho_L} \left[\rho_R v_M \left(1 - \frac{\rho_R}{\rho_M}\right) - \rho_L v_M \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_M}\right) \right] \tag{5.25}$$

$$= v_M \left(1 - \frac{1}{\rho_M}(\rho_R + \rho_L)\right) \tag{5.26}$$

$$= \frac{1}{2}(c_R + c_L). \tag{5.27}$$

   Drugim riječima, kada koristimo Greenshieldsov zakon, udar se kreće brzinom koja je određena prosjekom skoka u valu brzine kroz udar. ■

2. *Newellov zakon*. Koristeći (3.9), Rankine-Hugoniotov uvjet (5.22) postaje

$$s'(t) = \frac{1}{\rho_R - \rho_L} \left[\rho_R v_M (1 - e_R) - \rho_L v_M (1 - e_L) \right] \tag{5.28}$$

$$= v_M \left(1 - \frac{\rho_R e_R - \rho_L e_L}{\rho_R - \rho_L}\right), \tag{5.29}$$

   gdje je

$$e_L = e^{-\lambda(1/\rho_L - 1/\rho_M)}$$
$$e_R = e^{-\lambda(1/\rho_R - 1/\rho_M)}.$$

■

Kada smo tek počeli proučavati prometni tok imali smo samo jednu varijablu koja ima dimenziju brzine. Sada ih imamo tri i to su:

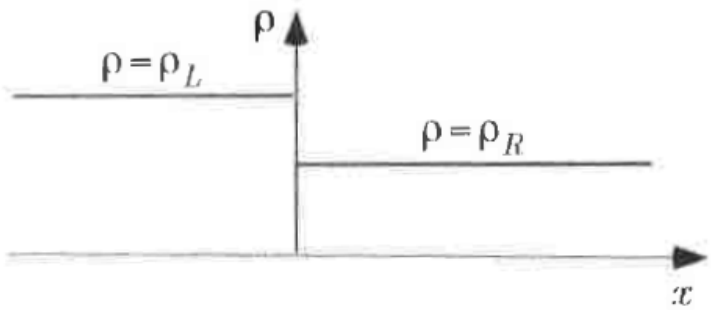
1. $v(x,t)$: brzina auta koji se nalazi u x u trenutku t.
2. $c(\rho)$: val brzine i definiran je u (5.2), određuje skokove krivulji karakteristika.
3. $s'(t)$: brzina skokova u rješenju i definirana je u (5.22).

5.4 Lepeza ekspanzije

Sada kada imamo ideju što se događa kada se skok pojavi u rješenju, proučit ćemo problem koji počinje sa skokom. Početni uvjet prikazan je na Slici 5.8 i dan je s

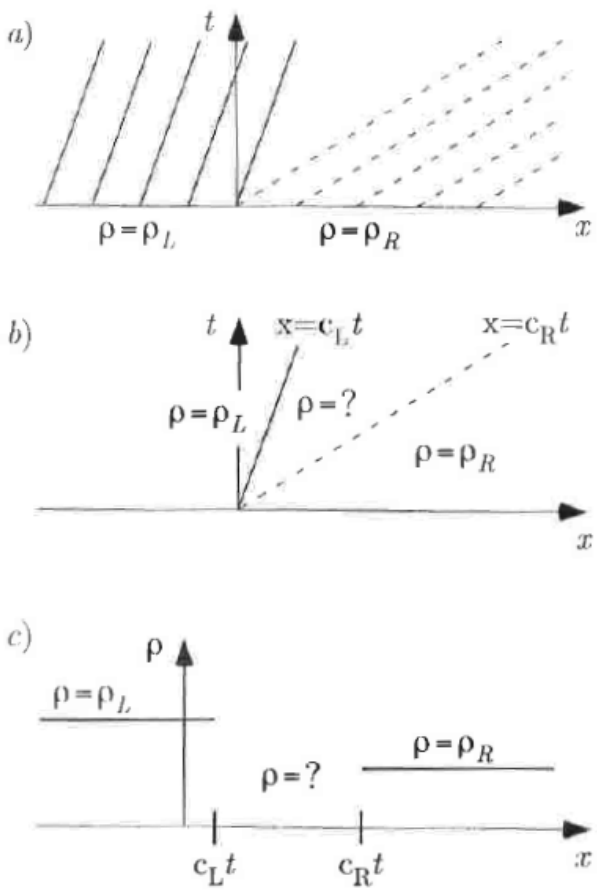
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq 0, \\ \rho_R & \text{ako} \quad 0 < x, \end{cases} \tag{5.30}$$

gdje je $0 < \rho_R < \rho_L$.



Slika 5.8: Početna gustoća $\rho(x,0)$. Sporiji auti kreću iza onih bržih ($\rho_L > \rho_R$).

Ova po dijelovima konstantna funkcija dovodi nas do problema koji je poznatiji kao *Riemannov problem*. Problem je zanimljiv jer rješenje nije očito. Zapravo, moguće je naći vjerodostojno opravdanje za barem tri različita rješenja. Prije nego navedemo koja su to rješenja napomenimo da smo sigurni u pravo rješenje. Ono dolazi iz karakteristika koje su prikazane na Slici 5.9(a). Sa Slika 5.9(b) i 5.9(c) možemo zaključiti da je $\rho = \rho_L$ za $x < c_L t$ i $\rho = \rho_R$ za $x > c_R t$. Ovo nam ostavlja nerazrješenim koje je rješenje za $c_L t < x < c_R t$, jer na ovom području ne postoje karakteristike. Zato se na ovom području stvaraju tri moguća rješenja.



Slika 5.9: Rješenje koje se dobije metodom karakteristika kada je početna gustoća dana na Slici 5.8. Na Slikama (a) i (b) vidimo da za područje $c_L < x < c_R$ nema karakteristika pa je rješenje za to područje nejasno.

1. Auti koji kreću slijeva gdje je $x < 0$ putuju brzinom v_L, dok oni koji kreću zdesna imaju brzinu v_R. Jer je $v_L < v_R$, dade se zaključiti da je područje ovdje ništa više nego razmak između sporih auta slijeva i onih brzih zdesna. Drugim riječima, za točke u ovom području gustoća je jednaka nuli i očito rješenje je

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq v_L t, \\ 0 & \text{ako} \quad v_L t < x < v_R t, \\ \rho_R & \text{ako} \quad v_R t \leq x. \end{cases} \tag{5.31}$$

Prva pomisao jest da nešto nije u redu s ovim izrazom i da je područje određeno

brzinom auta, a ne valom brzine. Ovo je problem jer je $c(\rho_R) < v(\rho_R)$ i $c(\rho_L) < v(\rho_L)$, pa je područje u (5.31) drugačije od onoga prikazanog na Slici 5.9. Drugim riječima, gornji izraz proturječi onome u što smo sigurni, a to je rješenje na Slici 5.9(c). Dakle, (5.31) nije rješenje.

2. Kao drugi pokušaj nalaženja rješenja i otkrivanja što se događa na području možemo reći da je rješenje linearne jednadžbe prometnog toka (4.1), koristeći početni uvjet u (5.30), putujući val s jednim skokom koji se kreće brzinom a. Ako pretpostavimo da nelinearna jednadžba također proizvede jedan skok, tada je očito rješenje

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq s(t), \\ \rho_R & \text{ako} \quad s(t) < x. \end{cases} \tag{5.32}$$

Funkcija $s(t)$ određena je Rankine-Hugoniotovim uvjetom (5.24). Nije teško pokazati da se pravac $x = s(t)$ nalazi između $x = c_L t$ i $x = c_R t$. Ovo znači da je (5.32) u skladu s onime što smo saznali koristeći karakteristike, za razliku od (5.31). Štoviše, u posebnom slučaju kada je c konstanta, (5.32) se svodi na rješenje linearnog problema. Ipak, ovo nam ne garantira da je (5.32) rješenje Riemannovog problema (5.30).

3. Treći pokušaj nalaženja rješenja koristi Primjer 5.2.1 prikazan je na Slici 5.6. Rješenje tog problema bi trebalo konvergirati rješenju našeg Riemannovog problema kada $\epsilon \to 0$. Ovo, zapravo, uzima isprekidane karakteristike sa Slike 5.6 i skupi ih zajedno s rezultatom prikazanom na Slici 5.9. Zrakaste karakteristike tvore, kako to nazivamo, ekspanziju, ili razrijeđeni val, i spaja konstantna stanja slijeva i zdesna. Formula ovog rješenja koje je dobiveno iz (5.19) je

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq c_L t, \\ \rho_L + (\rho_R - \rho_L)\frac{x - c_L t}{(c_R - c_L)t} & \text{ako} \quad c_L t < x < c_R t, \\ \rho_R & \text{ako} \quad c_R \leq x. \end{cases} \tag{5.33}$$

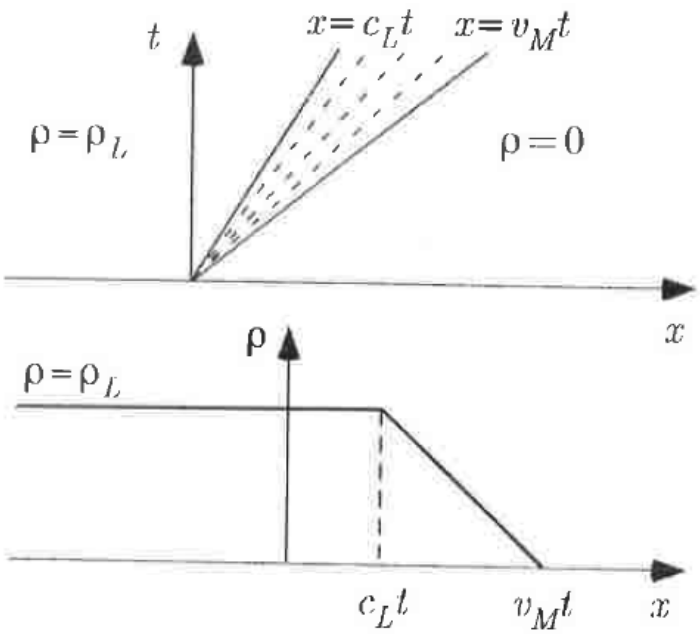
Ovo rješenje podsjeća na ono sa Slike 5.6(c) u smislu da je lepeza ekspanzije odgovorna za linearni prijelaz između konstantnih rješenja slijeva i zdesna.

Iz gornje diskusije zaključujemo da imamo dva kandidata za rješenje, (5.32) i (5.33). Više mogućih rješenja imamo zbog toga što je nelinearni problem prometnog toka loše postavljen, tj. problem je nepotpun. Ono što je potrebno jest dodatna informacija koja će nam omogućiti jedinstveno određivanje rješenja.
Pretpostavka ovdje je neprekidnost. Naime, skok koji se pojavljuje u početnom uvjetu je skoro nemoguće fizički proizvesti i u većini eksperimenata ne postoji on, već mali interval

gdje se gutoća brzo i neprekidno mijenja od ρ_L do ρ_R. U tom smislu, početni uvjet u kojem se pojavljuje skok je jednostavno matematička idealizacija stvarne situacije. Ako uzmemo u obzir da je rješenje s neprekidnim ali brzim prijelazom poznato i dano na Slici 5.6, uvjet koji tražimo nam mora pokazati da je (5.33) rješenje ovog problema.
Postoje dva načina za napisati traženi uvjet i mi ćemo koristiti onaj koji je predstavio Lax u [4]. Tvrdnja je da ako rješenje sadrži skok u $x = s(t)$, tada je brzina vala iza njega veća nego brzina ispred njega. Drugim riječima, zahtjevamo:

$$c(\rho_R) < s' < c(\rho_L). \tag{5.34}$$

Neposredna posljedica uvjeta (5.34) jest da će rješenje sadržavati skok samo ako je $c_L > c_R$. Za početni uvjet u (5.30) pretpostavka je da je $c_L < c_R$. Dakle, rješenje sa skokom nije moguće, i rješenje u promatranom području jest "lepeza" ekspanzije. Drugim riječima, (5.33) je rješenje navedenog Riemannovog problema. Dokaz ove tvrdnje može se naći u [4].



Slika 5.10: Gornja slika prikazuje lijevo i desno rješenje, kao i lepezu ekspanzije. Donja slika je rješenje jednadžbe kada se upali zeleno svjetlo.

Primjer 5.4.1. *Crveno svjetlo - Zeleno svjetlo*
Pretpostavimo da se crveno signalno svjetlo nalazi u $x = 0$, i da se zeleno upali u $t = 0$.

Također, pretpostavimo da je svjetlo bilo crveno toliko dugo da s desne strane nema auta. Drugim riječima, početni uvjet je

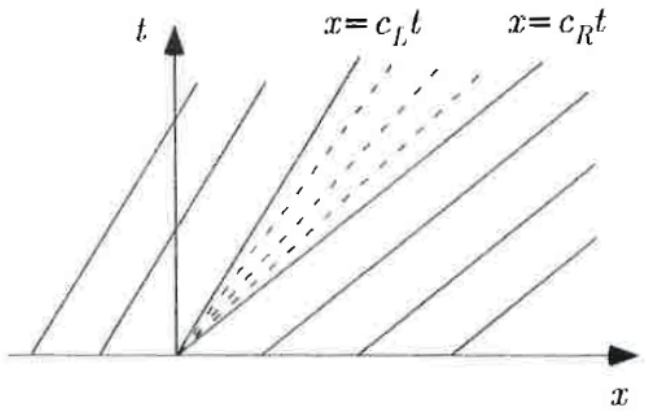
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq 0, \\ 0 & \text{ako} \quad 0 < x. \end{cases} \tag{5.35}$$

Iz (5.33), rješenje jednadžbe prometnog toka je

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq c_L t, \\ \rho_L \frac{v_M t - x}{(v_M - c_L)t} & \text{ako} \quad c_L t < x < v_M t, \\ 0 & \text{ako} \quad v_M t \leq x. \end{cases} \tag{5.36}$$

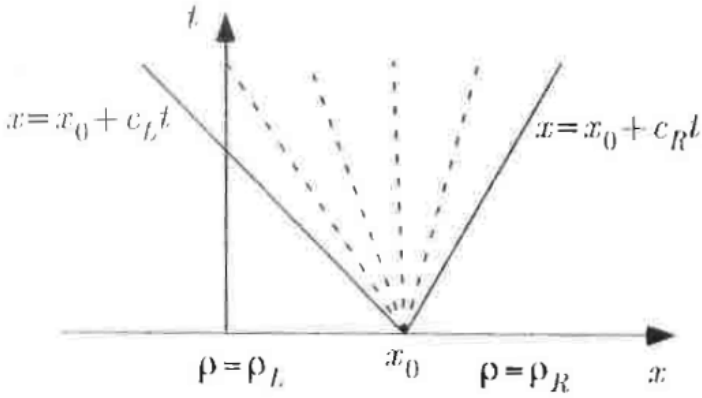
Rješenje je prikazano na Slici 5.10 skupa s pripadnim karakteristikama.

■



Slika 5.11: Kada pustimo $\epsilon \to 0$ isprekidane karakteristike sa Slike 5.6 tvore "lepezu" ekspanzije između $x = c_L t$ i $x = c_R t$.

Točan oblik lepeze ekspanzije (5.33) oslanja se na posebnu formulu za val brzine $c(\rho)$. Općenito, lepeza se pojavljuje kada je prostor između karakteristika kao na Slici 5.11. Ovo se događa kada $f(x)$ ima skok u točki $x = x_0$, za $c_R > c_L$ (v. Sliku 5.12). Jednadžba za svaki od isprekidanih pravaca koji tvore lepezu ima oblik $x = x_0 + c(\rho)t$, gdje $c(\rho)$ zadovoljava $c_L < c < c_R$. Da bi odredili gustoću u točki (x,t) unutar lepeze, potrebno je riješiti jednadžbu $c(\rho) = (x - x_0)/t$ po ρ. Ovdje na rješenje utječe oblik od c, i kada koristimo Greenshieldsov zakon dobijemo (5.33). Također, u formuliranju nelinearne jednadžbe prometnog toka pretpostavili smo da je $c(\rho)$ monotona. Ovo je jedna od situacija gdje trebamo tu pretpostavku jer nam garantira da $c(\rho) = (x - x_0)/t$ ima jedinstveno rješenje.



Slika 5.12: Lepeza ekspanzije je generirana u točki x_0 gdje početna funkcija $f(x)$ ima skok.

Nakon ove diskusije možemo zaključiti da je najbolje izbjegavati korištenje početnog uvjeta koji sadrži skok. Naposlijetku, kada smo u (5.16) koristili neprekidnu funkciju, nije bilo komplikacija s karakteristikama i nije bilo sumnje u rješenje.

5.5 Udarni valovi

Kao što smo ranije ustvrdili, brzina i gustoća imaju prekid u udarnom valu. Da bi odredili kada je udarni val prisutan u rješenju, koriste se karakteristike. Za razliku od lepeze ekspanzije, udar se pojavljuje kada se karakteristike preklapaju a vrijednosti na karakteristikama nisu jednake. Ovo se najlakše može objasniti tako da prođemo kroz par primjera.

Primjer 5.5.1. *Prometna gužva*
Prvi primjer koji ćemo promatrati uključuje prometnu gužvu. Pretpostavimo da je gustoća na početku, za $x \geq 0$, ρ_M. Ovo je maksimalna gustoća i znači da se auti ne mogu micati. Za interval $x < 0$ pretpostavit ćemo da auti imaju gustoću ρ_L, gdje je $0 < \rho_L < \rho_M$. Ovo znači da auti s lijeve strane kreću udesno konstantnom brzinom, u smjeru prometne gužve. Jednom kada dostignu gužvu, auti staju, i rezultat je taj da se prometna gužva širi prema lijevo duž negativne strane x-osi. Da bi izmjerili ove tvrdnje, karakteristike su prikazane na Slici 5.13. Na gornjem grafu, duž pune linije, gustoća je $\rho = \rho_M$, dok je duž isprekidane linije $\rho = \rho_L$. Očigledno, postoji problem na području gdje se karakteristike preklapaju. Zaključak je da na području preklapanja postoji krivulja $x = s(t)$ gdje rješenje skoči iz ρ_L u ρ_M. Karakteristika koja proizlazi, i krivulja udara, prikazane su na donjem grafu Slike 5.13. Mjesto udara se, prema (5.24), kreće brzinom određenom prosječnom vrijednosti

brzine vala. Koristeći Greenshieldsov zakon, formula za brzinu dana je u (5.28). Ako uzmemo u obzir da je $c_L = v_M(1 - 2\rho_L/\rho_M)$ i $c_R = -v_M$, tada je

$$s'(t) = -v_M \frac{\rho_L}{\rho_M}. \tag{5.37}$$

Ako ovo integriramo i iskoristimo činjenicu da udar počinje u $(x, t) = (0, 0)$, dobivamo da je mjesto udara dano sa

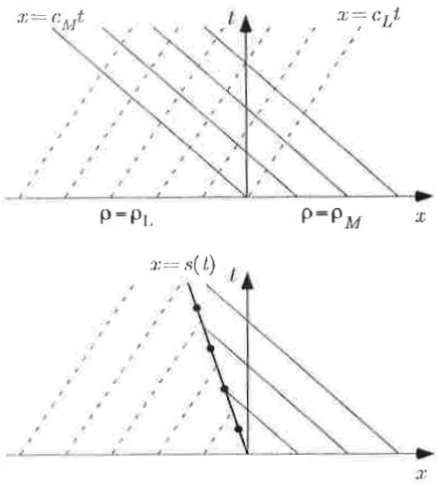
$$s(t) = -v_M \frac{\rho_L}{\rho_M} t. \tag{5.38}$$

Sada je rješenje dano sa

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x < s(t), \\ \rho_M & \text{ako} \quad s(t) \leq x. \end{cases} \tag{5.39}$$

Na kraju, važno je istaknuti da ovo rješenje, zbog $c_L = v_M(1 - 2\rho_L/\rho_M)$, $c_R = -v_M$, i $\rho_L < \rho_M$, zadovoljava uvjet (5.34).

■



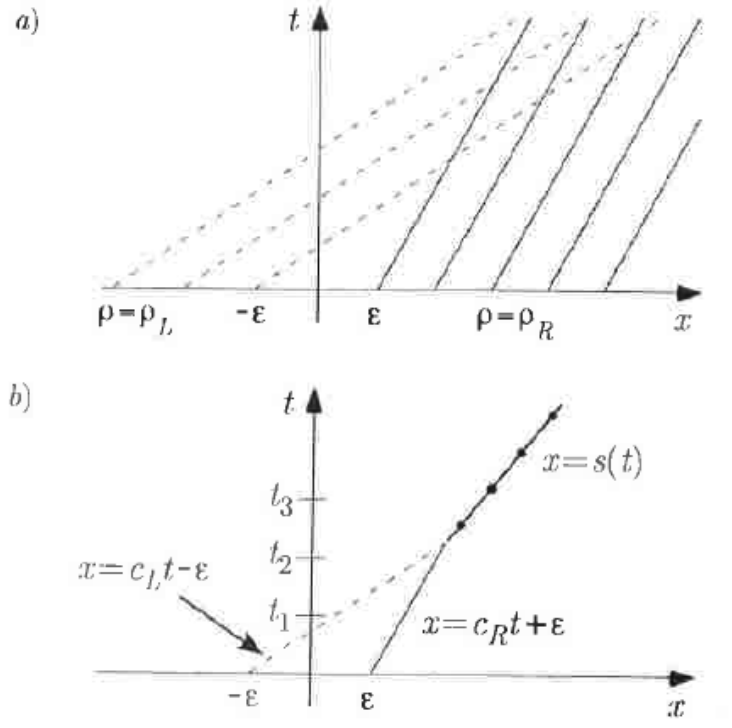
Slika 5.13: Problem prometne gužve. Gornja slika prikazuje karakteristike povezane s početnim problemom. Donja slika pokazuje konačno mjesto udara.

Primjer 5.5.2. *Bez početnih skokova*
Za drugi primjer pretpostavimo da gustoća ne počinje sa skokovima, ali je neprekidna i ima oblik (5.19). Sada ćemo brže aute staviti na lijevu stranu pa je $\rho_L < \rho_R$. Kao i inače,

koristit ćemo Greenshieldsov zakon. Karakteristike koje su proizvele ove dvije konstante su prikazane na Slici 5.14(a). Na području s isprekidanim linijama rješenje je $\rho = \rho_L$, dok je na području s punim linijama $\rho = \rho_R$. Iznimka ovoga nalazi se tamo gdje se preklapaju isprekidane i pune linije. Na ovom području nalazi se udarni val, koji počinje gdje karakteristika $x = -\epsilon + c_L t$ siječe karakteristiku $x = \epsilon + c_R t$. Točka presjeka je (x_s, t_s), gdje je $t_s = 2\epsilon/(c_L - c_R)$ i $x_s = c_R t_s + \epsilon$, i udarni val prikazan je na Slici 5.14(b). Iz (5.28) slijedi da je $s' = \frac{1}{2}(c_L + c_R)$. Integriranjem ove jednadžbe slijedi

$$s(t) = c_s(t - t_s) + x_s, \tag{5.40}$$

gdje je $c_s = \frac{1}{2}(c_L + c_R)$.



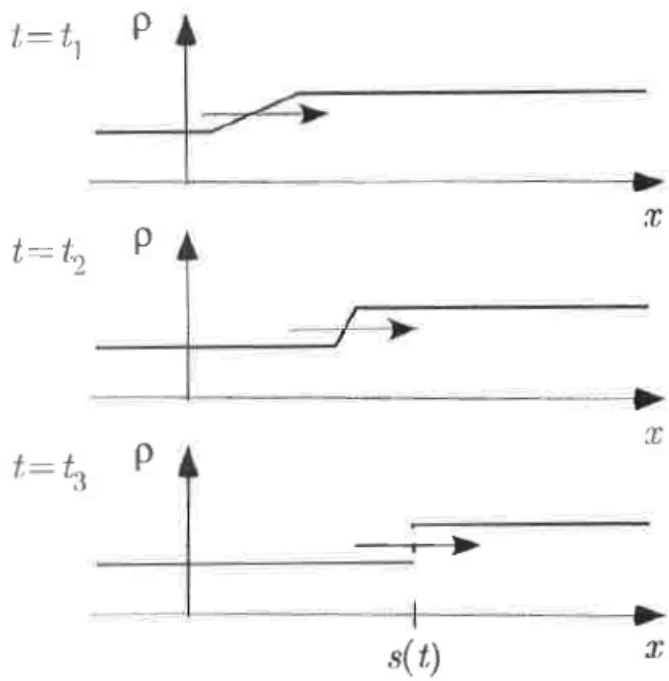
Slika 5.14: Preklapajuće karakteristike su prikazane pod (a), što upućuje na postojanje udarnog vala na ovom području. Mjesto udara je prikazano u (b), skupa s dvije karakteristike koje se sijeku i pokreću formiranje udara u $t = t_s$.

Ostaje nam još odrediti rješenje trokutastog područja sa Slike 5.14(b), koje je omeđeno karakteristikama $x = -\epsilon + c_L t$ i $x = \epsilon + c_R t$. Ovo je jednako problemu nalaženja rješenja u (x_1, t_1) na Slici 5.6(b), i rješenje je dano u (5.18). Kada sakupimo sve ove informacije nalazimo da je rješenje za $t < t_s$

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x \leq c_L t - \epsilon, \\ \rho_L + \frac{\rho_R - \rho_L}{2\epsilon}(x+\epsilon) & \text{ako} \quad c_L t - \epsilon < x < c_R t + \epsilon, \\ \rho_R & \text{ako} \quad c_R t + \epsilon \leq x, \end{cases} \tag{5.41}$$

a za $t \geq t_S$

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{ako} \quad x < s(t), \\ \rho_R & \text{ako} \quad s(t) < x. \end{cases} \tag{5.42}$$



Slika 5.15: Rješenje problema prometnog toka u trenucima prikazanima na Slici 5.6(b). Vrijeme prijelaza između lijevog i desnog dijela se s vremenom smanjuje do trenutka kada lijeva grupa automobila „uhvati” onu desnu, i tada se pojavi valni udar.

Rješenje je prikazano na Slici 5.15. U $t = t_1$ rješenje se sastoji od dvije konstantne gustoće koje su povezane linearnom funkcijom. Jer su auti na lijevoj strani brži od onih na desnoj, kasnije, u trenutku $t = t_2$ linearna povezanost dvije gustoće bitno opada. Posljedica smanjivanja prijelaznog područja je ta da val postaje strmiji kako se kreće. Brži auti uhvate one sporije na početku, u $t = t_s$, i u tom trenutku se formira udar. Ovo se vidi u trenutku $t = t_3$, što prikazuje rješenje nakon formiranja udara.

5.6 Zaključak

Rezultate koje smo dobili za problem prometnog toka za kraj ćemo skupiti zajedno. Problem se sastoji od parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{5.43}$$

s početnim uvjetom

$$\rho(x, 0) = f(x). \tag{5.44}$$

Ako pretpostavimo da je $c(\rho)$ glatka funkcija, s $c'(\rho) \neq 0$, za $0 \leq \rho \leq \rho_M$, tada je rješenje konstruirano koristeći sljedeće informacije:

(a) Rješenje je konstantno duž karakteristične krivulje $x = x_0 + c_0 t$ (vidi Sliku 5.4).

(b) Karakteristike se preklapaju. U područjima koji sadrže karakteristike koje se preklapaju rješenje sadrži udarni val u $x = s(t)$. Brzina ovog vala je

$$s'(t) = \frac{\rho_R v_R - \rho_L v_L}{\rho_R - \rho_L}. \tag{5.45}$$

S druge strane udara pripadajuća karakteristika određuje rješenje (kao što je prikazano na Slici 5.13). Na primjer, ako je $f(x)$ po dijelovima konstantna sa skokovima u x_0, za $c_R < c_L$, tada rješenje počinje s udarnim valom oblika $x = x_0 + s_0' t$, gdje je s_0' određen iz (5.45).

(c) Karakteristike se razdvajaju. U području bez karakteristika rješenje je lepeza ekspanzije. Primjer je prikazan na Slici 5.12, gdje $f(x)$ ima prekid odnosno skok u x_0, sa $c_R > c_L$. U ovom slučaju, na području $c_L t < x < c_R t$ rješenje se nalazi rješavanjem $c(\rho) = (x - x_0)/t$.

Gornji se zaključci općenito primjenjuju na prometni tok, gdje je $c' < 0$, ali i za slučaj $c' > 0$.

Bibliografija

[1] I. Aganović, K. Veselić, *Linearne diferencijalne jednadžbe*, Element, Zagreb (1997).

[2] B. Guljaš, *Matematička analiza 1&2,* skripta, PMF MO
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf`

[3] M.H. Holmes, *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York (2009).

[4] P.D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM (1973), 11-16.

[5] M. J. Lighthill, J. B. Whitham, *On kinematic waves*. II: A theory of traffic flow on long crowded roads, Proceedings of the Royal Society A 229 (1955), 281-345.

[6] S. Marušić, *A Note on Boundary Conditions for the LWR Model*, Promet – Traffic&Transportation, Vol. 21 (2009), 379-386.

[7] P. I. Richards: *Shock waves on the highway,* Operations Research 4 (1956), 42-51.

Sažetak

U ovom radu prezentirali smo matematički model prometnog toka na cesti. Promatrali smo gibanje objekata (automobila) duž jednodimenzionalne osi (ceste), te smo pretpostavili da je to gibanje neprekidno. Zatim smo istom gibanju pridružili prostorne i vremenske varijable te pomoću njih definirali gustoću i protok prometa. Izvodimo i prvi matematički model koji se svodi na rješavanje jednostavne parcijalne diferencijalne jednadžbe. Nakon toga uvodimo i pojam brzine pa model postaje kompleksniji. Posebno smo promatrali slučaj konstantne i slučaj nekonstantne brzine te za oba razvili matematički model i kroz primjere pokušali bolje objasniti svaki od njih. Na kraju rad zaključujemo skupljanjem svih rezultata i završnim komentarom.

Summary

In this work we have developed a mathematical model describing traffic flow. We have investigated the movement of the objects (cars) along a one-dimensional path (highway), assuming that the motion is continuous. Then we have assigned the spatial and temporal variables to the motion and defined density and traffic flux. We have derived a mathematical model for it given by a simple partial differential equation. After that we have introduced a notion of the velocity so our model became more complex. We have developed mathematical models separately for the case of constant and nonconstant velocity and through some examples tried to explain them a bit further. At the end, we have concluded the work by collecting all the results and writing a final comment.

Životopis

Dana 8. prosinca 1992. rođena sam u Zadru. Tamo sam pohađala osnovnu i srednju školu, Gimnaziju Jurja Barakovića. 2012. godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, a 2015. završila sam preddiplomski studij matematike. Nakon toga upisala sam diplomski studij, smjer Matematička statistika. Od listopada 2017. godine do travnja 2018. bila sam na stručnoj praksi u inozemstvu, u tvrtci *Toyota Motor Europe*, u Bruxellesu.