

# Jednadžbe renormalizacijske grupe i amplitude na razini dvije petlje

---

**Fatović, Marta**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:414946>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Marta Fatović

JEDNADŽBE RENORMALIZACIJSKE GRUPE I  
AMPLITUDE NA RAZINI DVIJE PETLJE

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Marta Fatović**

Diplomski rad

**JEDNADŽBE RENORMALIZACIJSKE  
GRUPE I AMPLITUDE NA RAZINI  
DVIJE PETLJE**

Voditelj diplomskog rada: prof.dr.sc. Amon Ilakovac

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2019.

Zahvaljujem obitelji i prijateljima na velikoj podršci i vjernom navijanju.

Zahvaljujem prof. dr. sc. Amonu Ilakovcu, mag. phys. Mariji Mađor-Božinović i dr. sc. Hermesu Belusci na beskonačnom strpljenju, savjetima, prenesenom znanju i pomoći u izradi ovog diplomskog rada.

## Sažetak

Tema rada su renormalizacijske grupne jednačbe za kvantnu elektrodinamiku i kvantnu kromodinamiku na razini dvije petlje. Pokazano je da je za izračun istih potrebno iz računa amplituda dijagrama izdvajati samo divergentne članove uz  $1/\epsilon$  i da to vrijedi za svaki red računa smetnje. Izračun divergentnih doprinosa za obje teorije je napravljen koristeći dimezionalnu regularizaciju koja čuva baždarnu invarijantnost. Račun se za razinu jedne petlje proveo ručno, a kasnije je provjeren i računalno, dok se za razinu dvije petlje proveo računalno koristeći pakete Wolfram Mathematice: FeynArts, FeynCalc, FeynRules, PaX i TARCER. Pri računu korekcije vrha za kvantnu elektrodinamiku na razini jedne petlje su zadržani i konačni doprinosi te se izračunao i anomalni magnetski moment. Pri računu beta funkcije za kvantnu kromodinamiku je pokazano da je jednostavnije koristiti metodu pozadinskog polja. Dobivene su beta funkcije za obje teorije te je dobivena ovisnost konstanti vezanja o energiji.

Ključne riječi: renormalizacija, regularizacija, jednočestični ireducibini dijagrami, kvantna elektrodinamika, kvantna kromodinamika, Wardov identitet

# Renormalization group equations and amplitudes at two loop level

## Abstract

The subject of this thesis is calculation of renormalization group equations for quantum electrodynamics and quantum chromodynamics at two loop level. To obtain that, it was proven that it is necessary to extract only terms proportional to  $1/\epsilon$  from amplitude calculation and that it can be applied to any loop order. The calculation of divergent contributions was done using dimensional regularization which preserves gauge invariance. One loop corrections calculation was done by hand and later checked with Wolfram Mathematica packages: FeynArts, FeynCalc, FeynRules and PaX. For two loop level, the calculation was done with the same Wolfram Mathematica packages including another one: TARCER. While calculating the one loop vertex correction in quantum electrodynamics, the finite parts were also kept and the anomalous magnetic moment was calculated. It has been shown that it is much simpler to use the background field method for obtaining beta function in quantum chromodynamics. Beta functions for both theories were calculated and the coupling constant energy dependence was obtained.

Keywords: renormalization, regularization, one particle irreducible diagram, quantum electrodynamics, quantum chromodynamics, Ward identity

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Uvod u renormalizacijsku grupu</b>	<b>3</b>
2.1	Uvođenje klizne skale . . . . .	3
2.2	Regularizacija . . . . .	4
2.2.1	Dimenzionalna regularizacija . . . . .	5
2.3	Minimalna suptrakcija . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Kvantna elektrodinamika (QED)</b>	<b>8</b>
3.1	Lagranžijan QED-ja . . . . .	8
3.2	QED u okviru renormalizirane perturbacijske teorije . . . . .	9
3.3	Radijativne korekcije za QED na nivou jedne petlje . . . . .	13
3.3.1	Dijagram vakuumske polarizacije . . . . .	13
3.3.2	Dijagram vlastite energije elektrona . . . . .	15
3.3.3	Dijagram korekcije vrha . . . . .	16
3.3.4	Anomalni magnetski moment . . . . .	18
3.4	Renormalizacija u višim redovima računa smetnje . . . . .	20
3.4.1	Prividni stupanj divergencije . . . . .	20
3.4.2	Divergentni dijagrami . . . . .	22
3.5	Radijativne korekcije za QED na nivou dvije petlje . . . . .	24
3.5.1	Dijagrami vakuumske polarizacije . . . . .	24
3.5.2	Dijagrami vlastite energije elektrona . . . . .	27
3.5.3	Dijagrami korekcije vrha . . . . .	30
3.6	Renormalizacijske grupne jednačbe za QED na nivou dvije petlje . . .	33
<b>4</b>	<b>Kvantna kromodinamika (QCD)</b>	<b>35</b>
4.1	SU(3) boje . . . . .	35
4.2	Lagranžijan QCD-ja . . . . .	37
4.3	QCD u okviru renormalizirane perturbacijske teorije . . . . .	38
4.4	Radijativne korekcije za QCD na razini jedne petlje . . . . .	40
4.4.1	Dijagram vlastite energije kvarka . . . . .	40
4.4.2	Dijagrami vlastite energije gluona . . . . .	41
4.4.3	Dijagrami korekcije vrhova . . . . .	43

4.4.4	Renormalizacijski faktori na razini jedne petlje . . . . .	44
4.5	Radijativne korekcije za QCD na razini dvije petlje . . . . .	45
4.6	Metoda pozadinskog polja (BFM) . . . . .	53
4.6.1	Metoda funkcionala . . . . .	53
4.6.2	Metoda pozadinskog polja (BFM): ne-baždarne teorije . . . . .	55
4.6.3	Metoda pozadinskog polja (BFM): baždarne teorije . . . . .	57
4.6.4	Renormalizacija QCD koristeći BFM . . . . .	59
4.7	Radijativne korekcije za QCD koristeći BFM na razini jedne petlje . . .	60
4.8	Radijativne korekcije za QCD koristeći BFM na razini dvije petlje . . .	62
4.8.1	Izračun beta funkcije na razini dvije petlje za QCD . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>71</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>SU(N) algebra</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Izračun <math>\delta Z_{qq}, \delta Z_{ghgh}, \delta Z_{GG}, \delta Z_{qqGb}, \delta Z_{ghghGb}</math> i <math>\delta Z_{GGGb}</math></b>	<b>75</b>
	<b>Literatura</b>	<b>80</b>



# 1 Uvod

Metoda renormalizacijske grupe je uvedena kako bi se riješio problem ograničenosti perturbacijske teorije za visoke energije. Pri računima amplituda nekog procesa se javljaju divergencije (IR- infracrvene i UV- ultraljubičaste) koje se zatim moraju tretirati posebnim metodama. IR divergencije se javljaju kao posljedica emisije niskoenergetskih fotona koji se ne mogu opaziti detektorima. Usporedba eksperimenta i teorijski dobivenog izraza se ipak može napraviti ako se sve amplitude koje opisuju emisiju niskoenergetskog fotona dodaju osnovnoj drvastoj amplitudi [1]. Međutim, u ovom radu su od interesa bile UV divergencije koje nastaju pri velikim prijenosima impulsa. One se otklanjaju tako da se divergencije uključuju u redefiniciju fizikalnih veličina.

Svaka teorija je opisana svojim lagranžijanom iz kojeg se iščitavaju Feynmanova pravila. Od interesa je proučiti kako se konstante vezanja (koje se nalaze u svakom vrhu, npr. za QED je to električni naboj) ponašaju na različitim skalama energije. Takva veza ima i eksperimentalnu provjeru, no njena važnost se očituje u činjenici da daje rezultate za energije koje eksperimentalno još nisu postignute.

Problem koji je motivirao uvođenje renormalizacijske grupe je pojava divergentnih članova pri računima amplituda dijagrama. Tad se koristi takva perturbacijska teorija u kojoj su konstante vezanja zapravo funkcije klizne skale  $\mu$ .  $\mu$  ne ovisi o masama čestica i potpuno je proizvoljna. Ako se definira renormalizirana konstanta vezanja na skali  $\mu$ :  $g_\mu$ , parametri teorije se mogu prikazati kao funkcije od  $\mu$  i  $g_\mu$  [2]. Veza skale energije i parametara je opisana renormalizacijskom grupom.

Cilj ovog diplomskog rada je proučiti kako se pri promjeni skale energije promatranog procesa mijenjaju parametri dviju teorija: kvantne elektrodinamike (QED) i kvantne kromodinamike (QCD). Definicijom kontračlanova je uvedena veza između renormaliziranih i golih parametara. Koristeći minimalnu suptrakciju, odstranjeni su divergentni članovi u amplitudama procesa. Također, pokazano je da za svaki red računa smetnje vrijedi da je beta funkcija definirana polom prvog reda. To je uvelike olakšalo račun i izdvajani su članovi samo uz njih.

Prva proučavana i renormalizirana teorija u sklopu ovog rada je QED. Renormalizacijom fotonskog i fermionskog propagatora (odnosno vlastitih energija) te razdvajanjem lagranžijana na fizikalni i dio koji sadrži divergencije definirani su renormali-

zacijski faktori te je definiran fizikalni naboj. U računu je korišten Wardov identitet koji vrijedi u svakom redu računa smetnje. Ta činjenica je potvrđena na nivou jedne i dvije petlje. Nakon računa amplituda svih dijagrama koji se pojavljuju u prva dva reda računa smetnje u QED, izračunati su renormalizacijski faktori te je dobivena beta funkcija na razini dvije petlje. Integracijom iste se dobila ovisnost inverza konstante fine strukture o energiji.

Renormalizacija QCD je napravljena malo specifičnije. Prvi dio četvrtog poglavlja se bavi renormalizacijom QCD na jednoj petlji koja se provodi analogno kao i za QED. Međutim, QCD je teorija koja dozvoljava više različitih vezanja i vrhova pa posljedično, dobiveno je puno više dijagrama: na razini jedne petlje njih 7, na razini dvije petlje njih čak 66, a s umetcima kontračlanova 29. Kako bi se izbjegao račun velikog broja amplituda na nivou dvije petlje, u drugom dijelu četvrtog poglavlja je uvedena metoda pozadinskog polja uvođenjem kojeg se smanjio broj dijagrama kojih je bilo potrebno računati kako bi se dobila točna beta funkcija na razini dvije petlje za QCD.

## 2 Uvod u renormalizacijsku grupu

### 2.1 Uvođenje klizne skale

Kako bi se riješio problem pojave divergentnih članova pri računima amplituda dijagrama, koriste se tehnike renormalizacijske grupe. Naime, već u prvom redu računa smetnje se pojavljuju članovi koji u sebi sadrže UV divergencije (gornja granica integracije po impulsu nije ograničena, a impuls se javlja u brojniku). Tad se koristi takva perturbacijska teorija u kojoj su konstante vezanja zapravo funkcije klizne skale mase  $\mu$ :  $g_\mu$ . U tom slučaju se parametri teorije mogu prikazati kao funkcije od  $\mu$  i  $g_\mu$  [2]. Na primjer, infracrveno konačne funkcije (označene su s  $\Gamma$ ) imaju ponašanje:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right), \quad (2.1a)$$

$$[\Gamma] = [m]^D. \quad (2.1b)$$

Dakle,  $\Gamma$  je funkcija ukupne energije u sustavu centra mase  $E$ , bezdimenzionalnih veličina kao što su to prostorni kutevi  $x$ , konstante  $g_\mu$ , mase i klizne skale  $\mu$ . Dimenzionalnom analizom se dobije (2.1b). Obzirom da je  $\mu$  proizvoljna, bez smanjenja općenitosti se bira  $\mu = E$  i primjenom toga se dobije:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right). \quad (2.2)$$

$g_E$  više nije funkcija mase i na taj način su se izbjegle divergencije zbog malih masa.

Dakle, u bilo kojem konačnom redu perturbacijske teorije,  $\Gamma$  ima asimptotsko ponašanje.

Za  $E \gg m$  vrijedi:

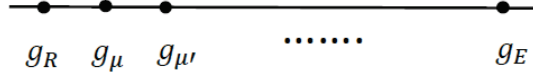
$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1). \quad (2.3)$$

Ono što preostaje je izračunati  $g_E$ . Račun se provodi u koracima koji su i shematski prikazani na slici 2.1.

a)  $g_\mu$  se može izračunati preko početne vrijednosti konstate veze  $g_R$  uz uvjet da je omjer skale klizanja i mase blizu jedinice:  $\mu/m \cong 1$ ,

b)  $g_{\mu'}$  se može izračunati preko  $g_\mu$  uz uvjet da je omjer skala klizanja :  $\mu'/\mu \cong 1, \dots$

Ovaj postupak se ponavlja sve do konačne vrijednosti  $g_E$ . Također, račun se može



Slika 2.1: Shematski prikaz diskretnih koraka u računu  $g_E$ .

obaviti kontinuirano tako da se diskretni koraci puste u nulu. Dimenzionalnom analizom se dobije odnos između  $g_\mu$  i  $g_{\mu'}$  kao:

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (2.4)$$

Gornji izraz za kliznu konstantu vezanja se u idućem koraku derivira po  $\mu'$ , a zatim i nameće uvjet  $\mu' = \mu$ . Tim se postupkom dobije:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right), \quad (2.5)$$

gdje je

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial \frac{\mu'}{\mu}} G\left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, m/\mu\right) \right]_{\frac{\mu'}{\mu}=1}. \quad (2.6)$$

Primjećuje se da za  $m = 0$  nema singulariteta pa je limes  $m \rightarrow 0$  moguć te jednačba poprima oblik [2]:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu). \quad (2.7)$$

Jednačba (2.7) dobivena u ovom limesu je karakteristična jednačba Callan - Symanzikovih jednačbi za Greenove funkcije koje ovise o konstanti veze  $g_\mu$ . Beta funkcija ovisi samo o  $g_\mu$ . U teorijama s više polja i konstanti vezanja, za svako vezanje postoji  $\beta(g)$  [3]. Jednačba (2.7) se integrira i dobije se:

$$\ln \frac{E}{M} = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)}. \quad (2.8)$$

## 2.2 Regularizacija

Regularizacija je postupak pretvaranja beskonačnog integrala u konačni. Postoje razni načini na koji se to može napraviti kao na primjer:

a) cutoff: integracija se "odreže" tako da se postavi konačna gornja granica, odnosno:

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i0} \rightarrow \frac{\theta(|k^2| < \Lambda^2)}{m^2 - k^2 - i0}, \quad (2.9)$$

gdje je fizikalna granica  $\Lambda \rightarrow \infty$  [4].

b) Pauli Villars regularizacija: doda se dodatni član

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (2.10)$$

gdje  $\Lambda$  predstavlja veliku masu. Obzirom da je  $\Lambda$  velik, integrand se ne mijenja ako je  $k$  malen, no teži k nuli za  $k \gtrsim \Lambda$ . Drugi član (dodani dio) se može interpretirati kao propagator fiktivnog masivnog fotona čiji se doprinos oduzme od doprinosa stvarnog fotona [3].

c) dimenzionalna regularizacija: ova vrsta regularizacije je korištena pri računima amplituda u ovom diplomskom radu obzirom da čuva baždarnu invarijantnost i daje alternativnu definiciju za kliznu skalu. [2].

### 2.2.1 Dimenzionalna regularizacija

Pri računima Feynmanovih dijagrama mjera integracije po impulsu,  $\frac{d}{d^D l}$  je D-dimenzionala (1 vremenska i  $D-1$  prostornih dimenzija). Konačan izraz nakon provedenog računa mora biti dobro definiran u limesu  $D \rightarrow 4$  [3]. Obzirom da je interval integracije paran  $\langle -\infty, \infty \rangle$ , za slučaj parne potencije i u nazivniku, preživljavaju samo oni integrali koji imaju parnu potenciju impulsa po kojem se integrira u brojniku. Vrijede relacije [5]:

$$\int d^D l l_\mu l_\nu = \int d^D l \frac{1}{D} l^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2}}, \quad (2.13)$$

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - 1 - \frac{D}{2}}. \quad (2.14)$$

Slovo  $E$  u indeksu impulsa znači da je prethodno provedena Wickova rotacija o kojoj je nešto više rečeno u trećem poglavlju.

### 2.3 Minimalna suptrakcija

Minimalna suptrakcija odstranjuje divergentne članove u amplitudama procesa na način da se u takozvane kontračlanove stave divergentni članovi amplituda pomnoženi s  $-1$ . Korištena je konvencija  $D = 4 - 2\epsilon$  preuzeta iz članka [6].

Amplitude imaju polove za  $D = 4$ . Problem se rješava na način da se ti polovi ponište s polovima koje gole (bare) konstante vezanja također moraju imati [2]. Gole konstante vezanja općenito imaju neku dimenziju  $\Delta_\ell(D)$  koja ovisi o dimenziji prostora-vremena  $D$ . Od koristi je proučavati bezdimenzionalnu veličinu  $g_B^\ell(D)\mu^{-\Delta_\ell(D)}$ , gdje je  $\mu$  klizna skala dimenzije mase. Nova bezdimenzionalna veličina je reskalirana konstanta vezanja i može se prikazati kao suma članova proporcionalnih potencijama  $\nu$  od divergentnih faktora  $\frac{1}{D-4}$  s koeficijentima  $b_\nu$  koji su fiksirani kraćenjem singulariteta za limes  $D \rightarrow 4$  i ostatka koji ostaje konačan za isti limes [2]:

$$g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_\nu^l(g(\mu, D)). \quad (2.15)$$

Gola konstanta može imati bilo kakvu ovisnost o  $D$  sve dok se singulariteti za  $D = 4$  u fizikalnoj amplitudi dokidaju. Ta proizvoljnost se narušava zahtjevom da  $g^l(\mu, D)$  bude analitička, ne samo u  $D = 4$ , već za svaki  $D$ . Da bi se izračunale renormalizacijske grupne jednačbe, na jednačbu (2.15) se djeluje operatorom  $\mu \frac{d}{d\mu}$  što vodi na jednačbu:

$$-\Delta^l(D) \left[ g^l + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_\nu^l(g) \right] = \beta^l(g, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{\nu m}^l(g) \beta^m(g, D) (D-4)^{-\nu}. \quad (2.16)$$

U dobivenom izrazu,  $\beta^l(g, D)$  ne ovisi o  $\mu$  jer su sve veličine osim  $\mu$  učinjene bezdimenzionalnima. Vrijede izrazi :

$$b_{\nu m}^l(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_\nu^l(g), \quad (2.17)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, D) = \beta^l(g(\mu, D), D). \quad (2.18)$$

Obzirom da su dimenzionalnosti  $\Delta_\ell(D)$  uvijek linearne funkcije dimenzije, mogu se zapisati kao:

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D - 4). \quad (2.19)$$

Pri razmatranju lijeve strane jednadžbe (2.16), dobije se:

$$-\rho_l g^l(D - 4) - [\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l] - \sum_{\nu=1}^{\infty} (D - 4)^{-\nu} [\rho_l b_{\nu+1}^l(g) + \Delta_l b_\nu^l(g)]. \quad (2.20)$$

Najveća potencija dimenzije D u analitičkom dijelu ovdje je jedan. To znači da isto mora vrijediti i s desne strane jednadžbe. Zbog toga  $\beta(g, D)$  mora biti linearna u D:

$$\beta^l(g, D) = \beta^l(g) + (D - 4)\alpha^l(g). \quad (2.21)$$

Koristeći to, mogu se samo iščitati relacije za nulti i prvi red iz (2.16):

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l, \quad (2.22)$$

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g) \rho_l + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^l(g) \rho_m g^m. \quad (2.23)$$

Jednakost (2.23) je od izuzetne važnosti jer pokazuje da beta funkcija ovisi samo o koeficijentima uz pol prvog reda u  $\epsilon$  u svim redovima računa smetnje [2]. Ta činjenica je uvelike olakšala račun kod dobivanja renormalizacijskih grupnih jednadžbi za QED i QCD gdje su promatrane beta funkcije dviju teorija na nivou dvije petlje.

## 3 Kvantna elektrodinamika (QED)

### 3.1 Lagranžijan QED-ja

Lagranžijan kvantne elektrodinamike je dan s:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{INT}} \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (3.1)$$

gdje je  $e = -|e|$  naboj elektrona, a  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  uvedena kovarijantna derivacija [1]. (3.1) je invarijantan na  $U(1)$  lokalnu baždarnu transformaciju polja:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (3.2a)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}, \quad (3.2b)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (3.2c)$$

To se može jednostavno dokazati polazeći od samog lagranžijana i promatrajući transformaciju svakog člana posebno:

$$\mathcal{L}'_{QED} = \bar{\psi}'(i\cancel{D} - m)\psi' - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu'} - e\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'A'_\mu, \quad (3.3)$$

$$1) \bar{\psi}'(x)(i\cancel{D} - m)\psi'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}(i\cancel{D} - m)e^{i\alpha(x)}\psi(x) = \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}&= \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}(ie^{i\alpha(x)}\cancel{D}\psi(x) - e^{i\alpha(x)}(\cancel{D}\alpha(x))\psi(x) - me^{i\alpha(x)}\psi(x)) = \\ &= \bar{\psi}(x)(i\cancel{D} - m)\psi(x) - \bar{\psi}(x)(\cancel{D}\alpha(x))\psi(x),\end{aligned}$$

$$2) F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}&= \partial_\mu \left( A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha(x) \right) - \partial_\nu \left( A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \right) = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) + \frac{1}{e}\partial_\nu\partial_\mu\alpha(x) = F_{\mu\nu},\end{aligned}$$

$$3) -e\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\psi'(x)A'_\mu = -e\bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}\psi(x) \left( A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \right) = \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}&= -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\alpha(x) = \\ &= -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu + \bar{\psi}(x)(\cancel{D}\alpha(x))\psi(x).\end{aligned}$$



Sumiranjem 1), 2) i 3) dijela, zaključuje se da lagranžijan QED-a zaista ostaje nepromjenjen pri danoj transformaciji polja:

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}_{QED}. \quad (3.7)$$

Posebno,  $\not{D}\psi$  se transformira isto kao i  $\psi$  na baždarne transformacije:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + ieA'_\mu) \psi' = \left( \partial_\mu + ieA_\mu - ie \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right) e^{-i\alpha(x)} \psi = \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi + i (\partial_\mu \alpha(x)) e^{i\alpha(x)} - i (\partial_\mu \alpha(x)) e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Koristeći (3.8) dokaz invarijantnosti lagranžijana (3.1) postaje još jednostavniji. Zanimljivo je primjetiti da Diracova teorija za slobodno polje nije baždarno simetrična (3.4). Taj se problem riješio tako da je dodano međudjelovanje s elektromagnetskim poljem  $A_\mu$ . Oblik člana međudjelovanja i transformacija polja (3.2c) su potpuno fiksirani zahtjevom simetrije. Dakle, Diracova čestica *mora* međudjelovati. Tenzor elektromagnetskog polja  $F_{\mu\nu}$  je baždarno invarijantan (3.5).

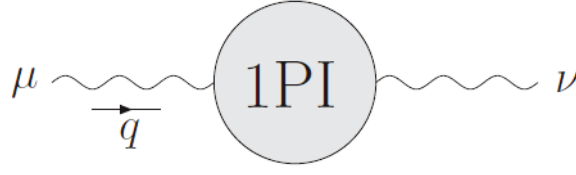
### 3.2 QED u okviru renormalizirane perturbacijske teorije

Pri računu amplitude procesa u višim redovima računa smetnje se javljaju divergencije. Naime, integracije po impulsu petlje nisu ograničene odozgo što znači da amplituda ima UV divergenciju. Renormalizirana perturbacijska teorija je takva reformulacija polazne teorije da su u njoj polja i parametri konačni. Polazi se od, još jednom napisanog, lagranžijana QED-a:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{D} - m_B) \psi - e_B \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (3.9)$$

gdje su  $m_B$  i  $e_B$  nerenormalizirana masa i naboj. Oni su neopservabilni parametri teorije. Cilj je razdvojiti lagranžijan na dva dijela: fizikalni dio i dio koji sadrži divergencije. To se može napraviti tako da se prvo renormaliziraju fotonski i fermionski propagator.

Jednočestični ireducibilni dijagrami (1PI) su dijagrami koji se prekidanjem jedne linije ne mogu razdijeliti na dva odvojena dijagrama. Na slici 3.1 je prikazan dijagram koji predstavlja sumu 1PI umetaka u fotonski propagator. Iz Wardovog identiteta



Slika 3.1: Opći dijagram koji predstavlja sumu svih 1PI umetaka u fotonski propagator. Preuzeto iz [1].

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0, \quad (3.10)$$

gdje  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  označava sumu svih 1PI umetaka u fotonski propagator, slijedi proporcionalnost:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2). \quad (3.11)$$

Uzme li se potpuni fotonski propagator i prikaže li ga se kao beskonačnu sumu



Slika 3.2: Prikaz ukupnog fotonskog propagatora kao beskonačne sume 1PI dijagrama. Preuzeto iz [1].

jednočestičnih ireducibilnih dijagrama kao na slici 3.2, dobiva se izraz [1]:

$$P_\gamma = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots \quad (3.12a)$$

$$\rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\Pi(q^2)}{1 - \Pi(q^2)} = \quad (3.12b)$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))} + \frac{iq_\mu q_\nu}{q^4} \frac{\Pi(q^2)}{1 - \Pi(q^2)}. \quad (3.12c)$$

U (3.12a) je prepoznat geometrijski red, u (3.12b) je (nakon kraćeg sređivanja izraza) dan izraz nakon sumacije, a u (3.12c) su grupirani članovi uz  $g_{\mu\nu}$  i  $q_\mu q_\nu$ . Zbog toga što se fotonski propagator veže na sačuvanu struju, zbog Wardovog identiteta se član uz  $q_\mu q_\nu$  može zanemariti. To vodi na izraz:

$$P_\gamma = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}. \quad (3.13)$$

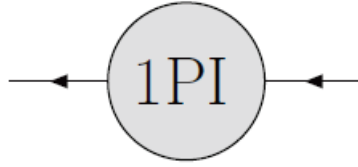
Promotri li se (3.13) može se uočiti da potpuni propagator uvijek ima pol u  $q^2 = 0$ . To

znači da je masa fotona jednaka nuli u svim redovima računa smetnje [1]. Reziduum pola  $q^2 = 0$  se definira kao:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}, \quad (3.14)$$

pa se fotonski propagator za niskoenergetski proces može napisati kao:

$$P_\gamma = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (3.15)$$



Slika 3.3: Opći dijagram koji predstavlja sumu svih 1PI umetaka u fermionski propagator. Preuzeto iz [1].



Slika 3.4: Prikaz ukupnog fermionskog propagatora kao beskonačne sume 1PI dijagrama. Preuzeto iz [1].

Sličnim postupkom se potpuni fermionski propagator prikazuje kao beskonačna suma 1PI dijagrama kao na slici 3.4, te se dobiva:

$$P_f = \frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2} + \frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2} + \dots \quad (3.16a)$$

$$\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_B - \Sigma(\not{p})}, \quad (3.16b)$$

gdje je  $\Sigma(\not{p})$  suma svih 1PI umetaka u fermionski propagator. U (3.16a) je zapis dijagramatskog prikaza slike 3.4 prepoznat kao geometrijski red, a u (3.16b) je dan sumiran izraz [1]. Položaj pola, odnosno fizikalna masa je definirana s :

$$[\not{p} - m_B - \Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=m} = 0. \quad (3.17)$$

U blizini pola, nazivnik izaza (3.16b) se razvije pa se  $P_f$  može zapisati kao:

$$P_f = \frac{i}{\not{p} - m} \left( 1 - \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right)^{-1}. \quad (3.18)$$

Uvede li se definicija renormalizacije:

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m}, \quad (3.19)$$

potpuni fermionski propagator se zapisuje kao:

$$P_f = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (3.20)$$

gdje je  $m$  sad fizikalna masa.

Iz (3.15) i (3.20) slijedi da se polja mogu izraziti preko renormaliziranih polja:

$$\psi = Z_2^{1/2} \psi_r, \quad (3.21)$$

$$A^\mu = Z_3^{1/2} A_r^\mu. \quad (3.22)$$

Zamjenama (3.21) i (3.22) u jednadžbi (3.9) dobije se novi lagranžijan:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\psi}_r (i\partial - m_B) \psi_r - e_B Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu. \quad (3.23)$$

Fizikalni električni naboj definira se kao:

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B, \quad (3.24)$$

gdje je  $Z_1$  renormalizacijski faktor koji poništava divergencije vrha opisane sa  $Z_1^{-1}$  koje se javljaju u višim redovima računa smetnje (vidi sliku 3.8). Sad se početni lagranžijan može razdvojiti u dva dijela- na opservabilni dio i na dio koji sadrži divergentne članove - *kontračlanove*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i\cancel{\partial} - m) \psi_r - e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu - \\ & -\frac{1}{4} \delta Z_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i\delta Z_2 \cancel{\partial} - \delta_m) \psi_r - e \delta Z_1 \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \end{aligned} \quad (3.25)$$

Renormalizacijske konstante se izraze kao:

$$\delta Z_1 = Z_1 - 1 \quad (3.26)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 \quad (3.27)$$

$$\delta Z_3 = Z_3 - 1 \quad (3.28)$$

$$\delta m = Z_2 m_B - m \quad (3.29)$$

Svaki kontračlan je određen svojim renormalizacijskim uvjetom [3]:

$$\Sigma(\not{p} = m) = 0 \quad (3.30)$$

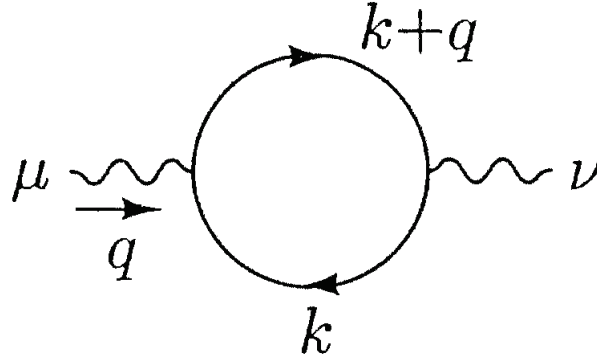
$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0 \quad (3.31)$$

$$\Pi(q^2 = 0) = 0 \quad (3.32)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu \quad (3.33)$$

### 3.3 Radijativne korekcije za QED na nivou jedne petlje

#### 3.3.1 Dijagram vakuumske polarizacije



Slika 3.5: Dijagram vakuumske polarizacije. Preuzeto iz [3].

Amplituda dijagrama sa slike 3.5 glasi:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right]. \quad (3.34)$$

S ciljem pojednostavljenja računa, korišteno je pravilo Feynmanove parametrizacije [5]:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1)! \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}. \quad (3.35)$$

Nakon primjene Feynmanove parametrizacije, u kojoj se uvela supstitucija  $l = k - qx$ , dobije se jednostavniji izraz za nazivnik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Za brojnik se još uzimala u obzir i činjenica da članovi linearni u  $l$  ne preživljavaju:

$$\text{Brojnik} = 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2). \quad (3.37)$$

Ono što je još bilo potrebno uvesti kako bi se integral izvrijedio je Wickova rotacija. Naime, zbog toga što podintegralni izraz u prostoru Minkowskog nema simetriju nulte i ostalih komponenti impulsa, integracija se provodi u euklidskom prostoru što vodi na zamjene [5]:

$$\begin{aligned} l^2 &= -l_E^2, \\ d^4 l &= id^4 l_E. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nakon Wickove rotacije amplituda izgleda ovako:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \cdot \\ &\cdot \frac{(1 - \frac{2}{D})g^{\mu\nu} \ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdje je  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ .

Zbog UV divergencija koje se javljaju, idući korak u računu je dimenzionalna regularizacija. Na gornji integral se primjene relacije (2.11) - (2.14) te se dobije integral:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = \frac{-i8e^2}{(4\pi)^{D/2}} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Delta^{2-D/2}}. \quad (3.40)$$

Ovaj integral je riješen dalje na način da je razvijena  $\Gamma(\epsilon)$  i zadržani su samo članovi

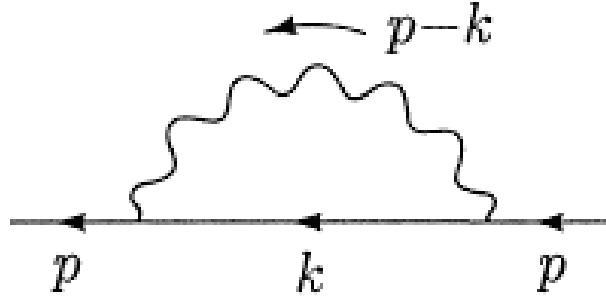
proporcionalni s  $\epsilon^{-1}$  zato što će jedino oni ulaziti u račun za RGE (renormalizacijske grupne jednačbe). Korištena je konvencija  $D = 4 - 2\epsilon$  [6] te je dobiven izraz:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \supseteq \frac{-ie^2}{12\pi^2\epsilon}(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu), \quad (3.41)$$

iz kojeg se može iščitati  $\delta Z_3^{1L} = -\frac{e^2}{12\epsilon\pi^2}$ , odnosno  $Z_3^{1L}$ :

$$Z_3^{1L} = 1 - \frac{e^2}{12\epsilon\pi^2}. \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Dijagram vlastite energije elektrona



Slika 3.6: Dijagram vlastite energije elektrona. Preuzeto iz [3].

Amplituda dijagrama sa slike 3.6 glasi:

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2}, \quad (3.43)$$

gdje je uvedena masa fotona  $\mu$  kao IR regulator. Feynmanova parametrizacija provedena je kao i za dijagram vakuumske polarizacije:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m^2]^2}. \quad (3.44)$$

Uvođenjem supstitucije  $l = k - px$  i sređivanjem brojnika dobije se integral:

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)x\not{p} + Dm}{[\ell^2 - \Delta]^2}. \quad (3.45)$$

Potpuno analognim postupkom kao i za dijagram vakuumske polarizacije koristeći tehnike Wickove rotacije, dimenzionalne regularizacije i razvoja  $\Gamma(\epsilon)$  te zadržavajući

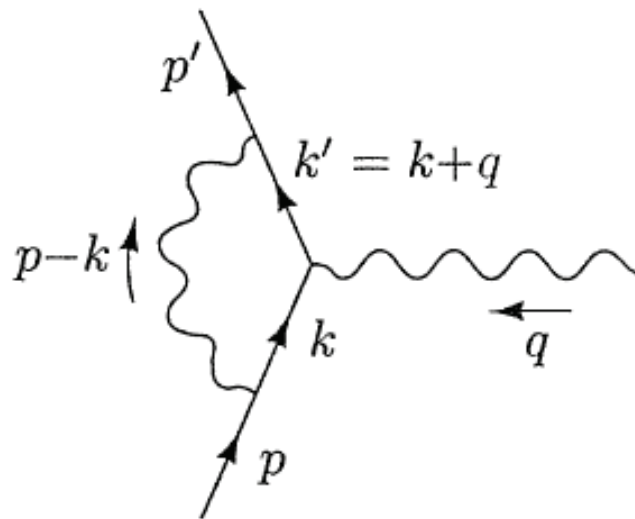
samo članove koji uz sebe imaju faktor  $\epsilon^{-1}$ , dobije se izraz:

$$-i\Sigma_2 \supseteq \frac{ie^2}{(4\pi)^2\epsilon}\not{p}, \quad (3.46)$$

iz kojeg se može iščitati  $\delta Z_2^{1L} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}$ , odnosno  $Z_2^{1L}$

$$Z_2^{1L} = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \quad (3.47)$$

### 3.3.3 Dijagram korekcije vrha



Slika 3.7: Dijagram korekcije vrha. Preuzeto iz [3].

Račun amplitude ovog dijagrama je proveden zadržavajući i divergentne i konačne članove zato što se izračunavao i anomalni magnetski moment. Amplituda dijagrama prikazanog na slici 3.7 je:

$$\begin{aligned} & -ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = \\ & = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{ig_{\nu\rho}\bar{u}(p')(ie\gamma^\nu)i(\not{k}'+m)(ie\gamma^\mu)i(\not{k}+m)(ie\gamma^\rho)u(p)}{(k-p)^2+i\epsilon} \frac{1}{k'^2-m^2+i\epsilon} \frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

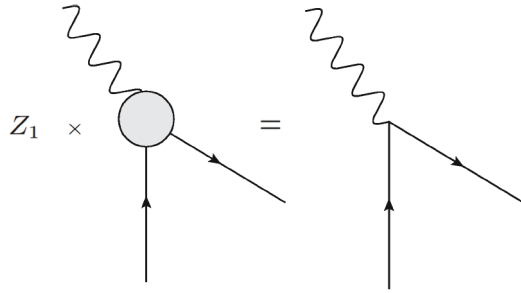
Potpuno analognim postupkom, no s nešto više računa (zato što sad u nazivniku postoje tri faktora koja se uređuju Feynmanovom parametrizacijom) te zadržavanjem



članova samo uz  $\epsilon^{-1}$ , dobije se rezultat:

$$-i\Sigma_1 \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^3}{(4\pi)^2} \gamma^\mu. \quad (3.49)$$

Iz njega se iščitava  $(Z_1^{1L})^{-1}$  (vidi sliku 3.8) kao koeficijent strukture  $-ie\gamma^\mu$ :



Slika 3.8: Renormalizacija QED vrha koja vrijedi u limesu kad  $q \rightarrow 0$ . Preuzeto iz [5].

$$(Z_1^{1L})^{-1} = 1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.50)$$

Dobiveni rezultat je jako važan jer se njime potvrđuje Wardov identitet [3]:

$$Z_1^{-1} Z_2 = 1. \quad (3.51)$$

Wardov identitet vrijedi u svakom redu računa smetnje. Ta činjenica je kasnije korištena pri računanju RGE na nivou dvije petlje. Svi rezultati na nivou jedne petlje dobiveni ručno su također izračunati i time provjereni programskim sustavom Wolfram Mathematica, odnosno paketima FeynArts, FeynCalc, FeynRules i PaX.

### 3.3.4 Anomalni magnetski moment

Pri računu ukupnog doprinosa vrhu na nivou jedne petlje dobiven je sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
& -ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = \\
& \int dx dy dz \delta(1-x-y-z) (-e^3) \cdot \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \left[ \frac{(2-D)^2}{D} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} + \right. \right. \\
& + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta} (q^2(-(D-2)(1-x)(1-y) - z(4-D)) + \\
& + m^2((D-2)z^2 + (12-2D)z + (10-3D))) + \\
& \left. \left. + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{((p'+p)^\mu m [z^2(2-D) + z(-6+2D) - (4-D)])}{\Delta} \right] \right].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Primjenom Gordonovog identiteta:

$$(p'+p)^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \tag{3.53}$$

na izraz (3.52) i definicije  $\delta\Gamma^\mu$  preko form faktora:

$$-ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = -ie\bar{u}(p')[\gamma^\mu\delta F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)]u(p), \tag{3.54}$$

mogu se iščitati form faktori  $\delta F_1(q^2)$  i  $F_2(q^2)$  na nivou jedne petlje. Oni sadrže kompletnu informaciju kako elektromagnetsko polje utječe na elektron, a to znači da sadrže cjelokupna električna i magnetska vezanja elektrona. U najnižem redu računa smetnje dobije se  $\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu$ . Iz toga se može iščitati da su ukupni form faktori u najnižem - nultom redu računa smetnje, obzirom na izraz u uglatoj zagradi, jednaki:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 0. \tag{3.55}$$

Zbog toga što postoji relacija koja ga povezuje s anomalnim magnetskim momentom, od interesa je izračunati  $F_2(q^2)$ . Do spomenute relacije se dolazi analizom izraza za statični vektorski potencijal [3], [1]:

$$A^{cl}(x) = \left(0, \vec{A}^{cl}(\vec{x})\right), \tag{3.56}$$

odnosno:

$$\tilde{A}^{cl}(\vec{q}) = (2\pi)\delta(p^0 - p^0) \left(0, \tilde{A}^{cl}(\vec{q})\right). \quad (3.57)$$

Nakon određenih aproksimacija nad izrazom:

$$i\mathcal{M} = ie \left[ \bar{u}(p') \left( \gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m} F_2 \right) u(p) \right] \tilde{A}^{cl}(\vec{q}), \quad (3.58)$$

i upotrebom Fourierovog transformata klasičnog statičnog vektorskog polja te pri-  
padnih izraza za magnetsko polje u  $x$  i  $p$  prostoru:

$$\begin{aligned} \vec{A}^{cl}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \tilde{A}^{cl}(\vec{q}), \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^{cl}(\vec{x}), \\ \vec{\tilde{B}} &= i\vec{q} \times \tilde{A}^{cl}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

dobije se amplituda izražena preko magnetskog polja:

$$i\mathcal{M} = -i(2m)e\xi^{\prime\dagger} \left( \frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \tilde{B}^k(\vec{q}). \quad (3.60)$$

Izlučivanjem faktora  $-i2m$  i Fourierovom transformacijom  $q$  zavisnih dijelova, dolazi se do amplitudi pridružene potencijalne energije:

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi^{\prime\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi \cdot \vec{B}(\vec{x}) \\ &= -\langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Usporedbom s klasičnim izrazom za potencijal međudjelovanja magnetskog polja s magnetskim momentom  $\vec{\mu}$  i uvođenjem izraza za spin  $\vec{S} = \xi^{\prime\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi$  dobije se izraz za očekivanu vrijednost operatora magnetskog momenta:

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \vec{S}, \quad (3.62)$$

kojeg se može napisati u standardnom obliku za magnetski moment:

$$\vec{\mu} = g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S}, \quad (3.63)$$

gdje je giromagnetski faktor dan s:

$$g = 2 [F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (3.64)$$

Na taj se način dobila tražena veza između form faktora i magnetskog momenta. U drugoj jednakosti u relaciji (3.64) upotrebljena je činjenica da je  $F_1(0) = 1$  u svakom redu računa smetnje, što slijedi iz Wardovog identiteta i iz definicije  $\Gamma_\mu$  u limesu kada  $q \rightarrow 0$ . U nultom redu računa smetnje vrijedi:

$$g = 2 + \mathcal{O}(\alpha), \quad (3.65)$$

a doprinosi višeg reda su mali i tvore anomalni magnetski moment.  $F_2(q^2)$  se iščitava iz izraza (3.53) i (3.54). Može se primjetiti da je izraz za taj form faktor konačan pa nema potrebe ni za UV ni za IR regularizacijom, već se samo izračuna integral. Ono što je od interesa je slučaj  $q^2 = 0$ . Integral je vrlo lako rješiv i dobiva se:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e = \frac{g - 2}{2}. \quad (3.66)$$

Za sad se magnetski moment elektrona izračunao na nivou 5 petlji i veličina je koja se jako dobro slaže s eksperimentalnim provjerama.

### 3.4 Renormalizacija u višim redovima računa smetnje

#### 3.4.1 Prividni stupanj divergencije

Divergencije dijagama se mogu naći na osnovi prebrojavanja potencija impulsa u petljama. Na primjeru QED-a se za prebrojavanje koristi notacija [3], [1] :

$$\begin{aligned} N_e &= \text{broj vanjskih } e^- \text{ linija ,} \\ N_\gamma &= \text{broj vanjskih } \gamma \text{ linija ,} \\ P_e &= \text{broj } e^- \text{ propagatora ,} \\ P_\gamma &= \text{broj } \gamma \text{ propagatora ,} \\ V &= \text{broj vrhova ,} \\ L &= \text{broj petlji .} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Logika ove metode je sljedeća: svaka petlja ima 4-dimenzionalnu integraciju po bilo kojem impulsu petlji  $p$  i zato uvećava divergenciju dijagrama za 4. Svaki bozonski propagator smanjuje divergenciju unutar petlje za 2 jer se pojavljuje s kvadratom impulsa u nazivniku, dok je fermionski, iz istih razloga, smanjuje za 1. Definicija prividne divergencije dijagrama:

$$\begin{aligned} d &= (\text{potencija } p \text{ u brojniku}) - (\text{potencija } p \text{ u nazivniku}) \\ &= 4L - P_e - 2P_\gamma. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Tri su slučaja na koja se može naići primjenjujući ovu metodu:  $d > 0$  i postoji divergencija,  $d = 0$  i divergencija dijagrama je logaritamskog oblika,  $d < 0$  i nema divergencije. Takvo predviđanje divergencija je najpesimističnije. U ovakvoj analizi su zanemarene simetrije teorije i činjenica da su u definiciji  $d$  uključeni 4-impulsi koji nisu u petljama, činjenica da drvasti dijagrami nisu divergentni te činjenica da divergencije mogu doći od poddijagrama danog dijagrama. Za promatranje divergencija preko vanjskih linija je potrebno uzeti u obzir to da je broj petlji definiran brojem propagatora i vrhova. Za svaki propagator vrijedi da je potencijalno dio petlje (sadrži  $d^4 p$ ), no svaki vrh ima jednu  $\delta^{(4)}(p)$ , ali jedna odlazi na sačuvanje impulsa. Uzimajući sve ovo u obzir, relacija glasi

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1. \quad (3.69)$$

Za QED vrijedi da svaki vrh čine dva fermiona i jedan bozon pa je izraz za vrh dan kao

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e). \quad (3.70)$$

Kombinirajući dobiveno, dobija se rezultat takav da  $d$  ne ovisi o propagatorima i broju vrhova, nego ovisi samo o broju vanjskih linija

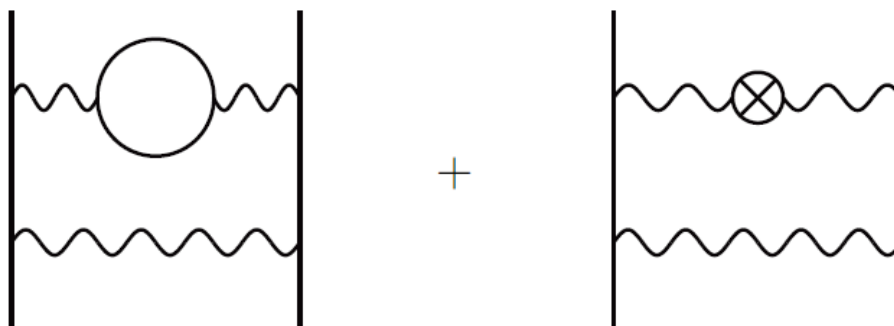
$$d = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e. \quad (3.71)$$

Poopćenje na  $D$  dimenzija glasi

$$d = DL - P_e - 2P_\gamma = D(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma. \quad (3.72)$$

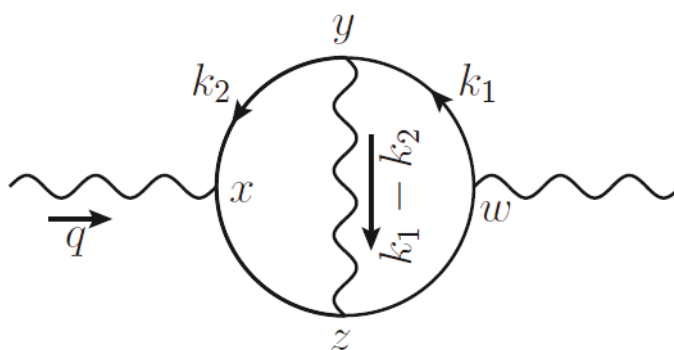
### 3.4.2 Divergentni dijagrami

U višim redovima računa smetnje se javljaju i divergentni poddijagrami koji se moraju uzeti u obzir. Primjerice, kod prividne divergencije je to bio jedan od nedostataka metode prebrojavanja divergencija u dijagramu. Divergentni poddijagrami se mogu javiti u nekim konačnim dijagramima. Na slici 3.9 je prikazan jedan takav primjer. Takvu divergenciju nije teško tretirati jer je suma ovakva dva dijagrama konačna.



Slika 3.9: Prikaz tretiranja divergencije konačnog dijagrama s divergentnim poddijagramom. Preuzeto iz [3].

Međutim komplikacija se javlja kad se pojave preklopne divergencije: kad dvije divergentne petlje dijele propagator. Primjerice u QED je jedna od takvih prikazana na slici 3.10.

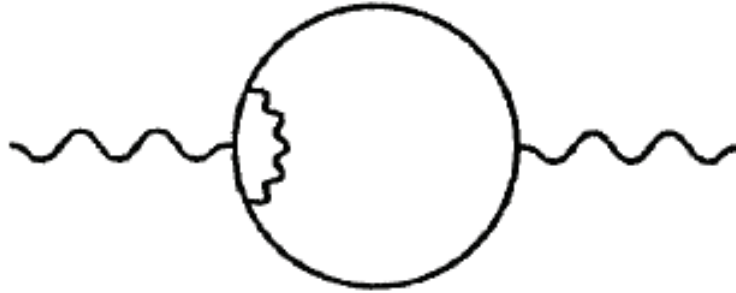


Slika 3.10: Jedan od dijagrama polarizacije vakuuma na nivou dvije petlje. Preuzeto iz [1].

Jedan doprinos ovom dijagramu je u slučaju kad je  $k_2$  jako velik. Prostorno to znači da su  $x, y$  i  $z$  blizu dok je točka  $w$  dalje. Područje u kojem su  $x, y$  i  $z$  blizu se može razmotriti kao običnu korekciju vrha u točki  $x$ . Međutim, korekcija vrha na nivou

jedne petlje je logaritamski divergentna, odnosno ima divergenciju oblika  $-ie\gamma^\mu \cdot \alpha \ln \Lambda^2$  za  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Taj izraz se zatim umetne u ostatak dijagrama i integrira se po manjem impulsu koji je u ovom konkretnom slučaju  $k_1$ . Takav dijagram bi izgledao kao na slici 3.11 i bio bi proporcionalan s:

$$\sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_2(q^2) (\ln \Lambda^2 + \ln q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2. \quad (3.73)$$



Slika 3.11: Jedan od dijagrama polarizacije vakuuma na nivou dvije petlje u slučaju kad je jedan impuls veći od drugog. Preuzeto iz [3].

Član  $(\ln \Lambda)^2$  se pojavljuje kad su oba impulsa (i  $k_1$  i  $k_2$ ) veliki. Član  $\ln q^2 \ln \Lambda^2$  se javlja kad je  $k_2$  velik i  $k_1$  malen. Drugi takav član bi se dobio kad je  $k_1$  velik i  $k_2$  malen. Tu se virtualni foton koji se izmjenjuje između y i z može uzeti kao korekcija vrha u w. Na ovom primjeru se vidi kako je metoda prividne divergencije ograničena. Naime, pokazano je da divergentni članovi Feynmanovih dijagrama nisu uvijek jednostavni polinomi u  $q^2$ . Takve divergencije koje se javljaju uz funkcije koje nisu polinomi u  $q^2$  ( $\Pi_2(q^2) \ln \Lambda^2$ ) se zovu nelokalne divergencije. One divergencije koje stoje uz polinome u  $q^2$  se nazivaju lokalne [3]. Ono što se vidi iz ove diskusije jest da nelokalne divergencije u fizikalnom smislu imaju značenje lokalnih divergencija okruženih s nedivergentnim procesima u QED. Nelokalne divergencije bi se trebale poništiti u računu s dijagramima s kontračlanovima prikazanim kao a) dio slike 3.12, dok b) dio na istoj slici prikazuje član kojim se rješavaju preostale lokalne divergencije. Bogoliubov, Parasiuk, Hepp i Zimmermann (BPHZ teorem) su pokazali da se na taj način otklanjaju sve nelokalne divergencije, a preostale lokalne se otklanjaju kontračlanovima polinomijalnog oblika. Time se postiže konačnost sveukupnih amplituda. BPHZ teorem daje važnu tvrdnju: za svaku renormalizabilnu teoriju po-



(a) Kontračlanovi koji dokidaju nelokalne divergencije.



(b) Kontračlanovi koji dokidaju lokalne divergencije.

Slika 3.12: Kontračlanovi. Preuzeto iz [3].

lja divergencije se uklanjaju za svaki red perturbacijskog računa vrhovima- kontračlanovima koji odgovaraju "prividno" divergentnim amplitudama. Dakle, svaka prividno divergentna teorija se može napraviti konačnom s konačnim skupom kontračlanova [1].

### 3.5 Radijativne korekcije za QED na nivou dvije petlje

Računi amplituda na dvije petlje su obavljani pomoću programskog sustava Wolfram Mathematica, odnosno pomoću paketa FeynArts, FeynCalc, FeynRules i TARCER.

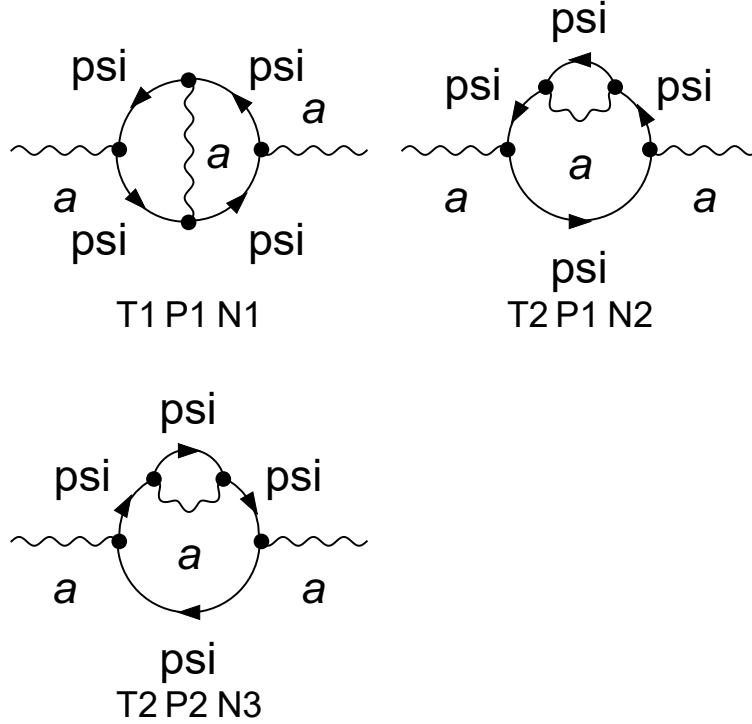
#### 3.5.1 Dijagrami vakuumske polarizacije

Na nivou dvije petlje se javljaju tri dijagrama vakuumske polarizacije dana na slici 3.13.

Drugi i treći dijagram na slici 3.13 jednako doprinose ukupnoj amplitudi, a amplituda



$a \rightarrow a$



Slika 3.13: Svi dijagrami vakuumske polarizacije na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

prvog dijagrama se razlikuje. Amplitude su redom:

$$i\Pi_1^{\mu\nu} = -\frac{i(D-2)(D^2-7D+16)e^4(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\left(B_{[1,0][1,0]}^D\right)^2}{128\pi^8(D-4)(D-1)} \quad (3.74)$$

$$-\frac{i(D-2)e^4(3D^3k^2g^{\mu\nu} - 2D^3k^\mu k^\nu - 19D^2k^2g^{\mu\nu} + 10D^2k^\mu k^\nu + 68Dk^2g^{\mu\nu} - 44Dk^\mu k^\nu - 112k^2g^{\mu\nu} + 96k^\mu k^\nu)}{192\pi^8(D-4)^2(D-1)k^2},$$

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = \frac{i(D-2)e^4((8-3D)k^2g^{\mu\nu} + 4(D-3)k^\mu k^\nu)J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{384\pi^8(D-4)k^2}, \quad (3.75)$$

$$i\Pi_3^{\mu\nu} = \frac{i(D-2)e^4((8-3D)k^2g^{\mu\nu} + 4(D-3)k^\mu k^\nu)J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{384\pi^8(D-4)k^2}. \quad (3.76)$$

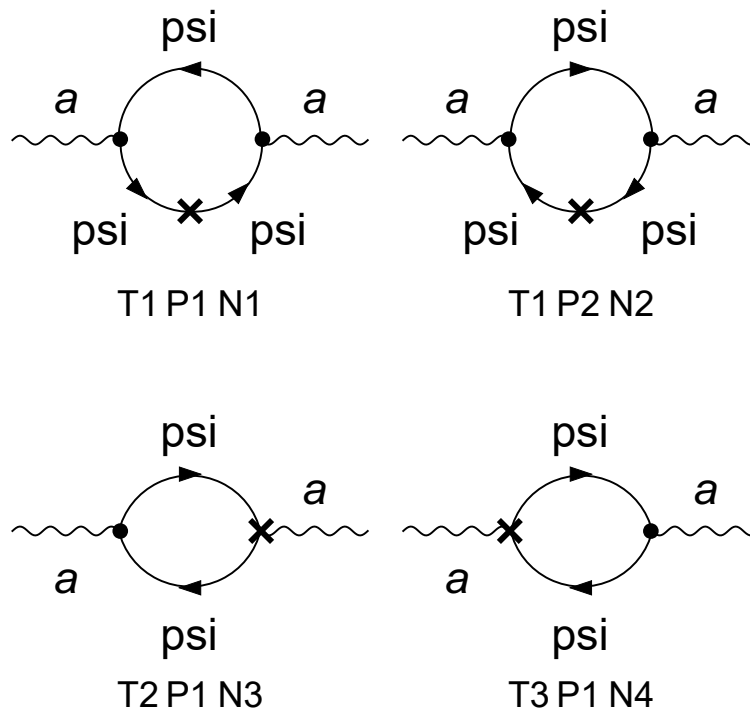
Oznake  $\Pi_{1-3}^{\mu\nu}$  u ovom slučaju označavaju redni broj dijagrama sa slike 3.13.  $B_{[1,0][1,0]}^D$  predstavlja integral tipa vlastite energije na jednoj petlji koji ima dvije vanjske linije u D dimenzija dok  $J_{[1,0][1,0][1,0]}^D$  predstavlja integral na dvije petlje s tri vanjske linije u D dimenzija.

Suma doprinosa tri amplitude se razvije (isto kao i u slučaju jedne petlje) do člana uz  $\epsilon^{-1}$  i dobije se:

$$\frac{ie^4 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{128\pi^4 \epsilon}. \quad (3.77)$$

Može se primjetiti da se pojavila struktura  $(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})$  što ukazuje na to da je zadovoljen Wardov identitet. No, primjećuje se još jedna zanimljivost: nisu se pojavili članovi koji sadrže logaritme - nelokalne divergencije. Je li se dobio točan rezultat se može provjeriti ako se pogledaju amplitude koje u sebi imaju kontračlanove. Njih je za slučaj vakuumske polarizacije na nivou 2 petlje četiri i prikazani su na slici 3.14.

$$a \rightarrow a$$



Slika 3.14: Svi dijagrami vakuumske polarizacije s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Amplitude dijagrama vakuumske polarizacije s umetnutim kontračlanovima su redom:

$$i\Pi_{CT,1}^{\mu\nu} = -\frac{(D-2)\delta Z_2 e^2 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{8\pi^2(D-1)}, \quad (3.78)$$

$$i\Pi_{CT,2}^{\mu\nu} = -\frac{(D-2)\delta Z_2 e^2 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{8\pi^2(D-1)}, \quad (3.79)$$

$$i\Pi_{CT,3}^{\mu\nu} = \frac{(D-2)\delta Z_1 e^2 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{8\pi^2(D-1)}, \quad (3.80)$$

$$i\Pi_{CT,4}^{\mu\nu} = \frac{(D-2)\delta Z_1 e^2 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{8\pi^2(D-1)}. \quad (3.81)$$

Nakon ubacivanja kontračlanova i sumiranja te četiri amplitude se kao rezultat dobije 0. To sugerira da je dobiveni izraz (3.75) točan i da zbilja nema nelokalnih divergencija. Preostaje iščitati  $\delta Z_3^{2L}$ :

$$\delta Z_3^{2L} = -\frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \quad (3.82)$$

koji će se kasnije koristiti pri računu beta funkcije.

### 3.5.2 Dijagrami vlastite energije elektrona

Na nivou dvije petlje se javljaju tri dijagrama vlastite energije elektrona koji su prikazani na slici 3.15.

Napravljen račun za svaku amplitudu koje su zatim zbrojene. Amplitude prije razvoja su za ova tri dijagrama redom:

$$-i\Sigma_1 = -\frac{i(D-3)e^4\gamma \cdot k \cdot J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{32\pi^8(D-4)k^2}, \quad (3.83)$$

$$-i\Sigma_2 = \frac{iDe^4\gamma \cdot k \cdot J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{32\pi^8(D-6)k^2} - \frac{ie^4\gamma \cdot k \cdot J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{16\pi^8(D-6)k^2}, \quad (3.84)$$

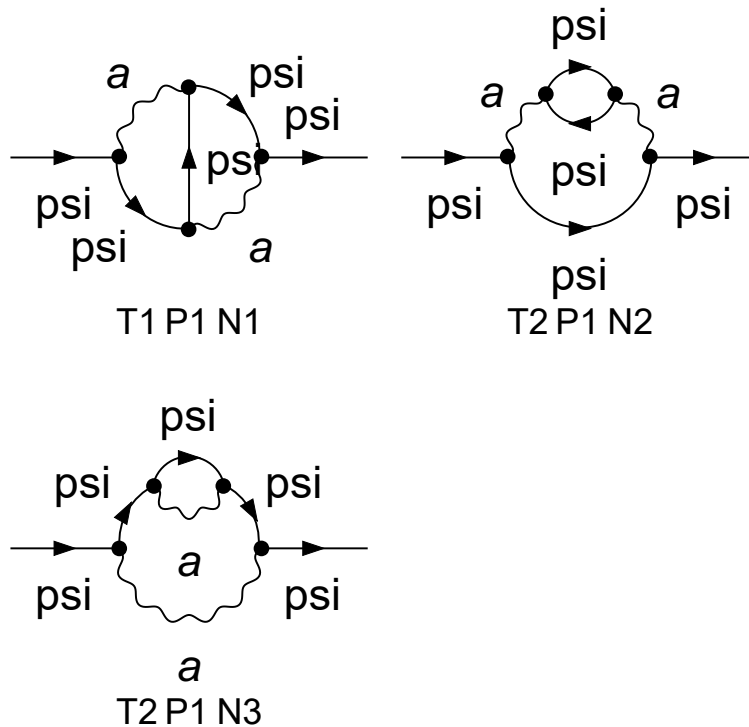
$$-i\Sigma_3 = \frac{i(D-3)e^4\gamma \cdot k \cdot J_{[1,0][1,0][1,0]}^D}{64\pi^8(D-4)k^2}. \quad (3.85)$$

Amplitude su zbrojene, napravljen je razvoj i kao rezultat se uzeo član uz  $\epsilon^{-1}$  te se dobio rezultat:

$$-i\Sigma \supseteq -\frac{ie^4\gamma \cdot k (4 \log(-k^2) + (4\gamma - 1))}{1024\pi^4\epsilon}. \quad (3.86)$$

Može se primjetiti da se u rezultatu ukupnog doprinosa vlastitoj energiji fermiona na

$\psi \rightarrow \psi$



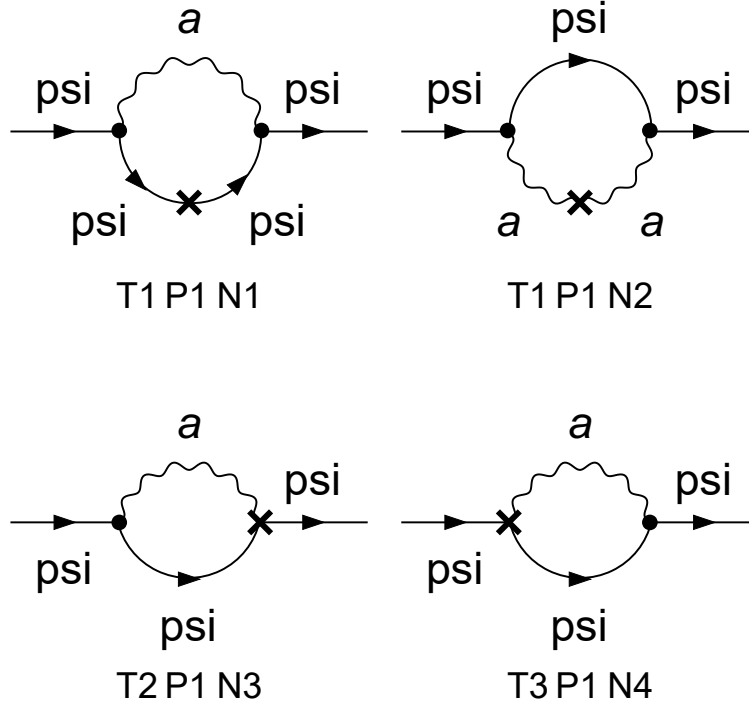
Slika 3.15: Svi dijagrami vlastite energije elektrona na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

dvije petlje pojavio član:

$$-\frac{ie^4 \log(-k^2)}{\pi^4 256\epsilon}. \quad (3.87)$$

Ako se unutar amplitude pojavi nelokalni član proporcionalan  $\log(-k^2)$ , očekuje se da suma amplituda s kontračlanovima u neće iščezavati, odnosno da će imati do na predznak isti član proporcionalan logaritmu. Dijagrami s umetnutim kontračlanovima su dani na slici 3.16, a rezultat potvrđuje gornje predviđanje i nelokalni članovi se dokidaju.

psi  $\rightarrow$  psi



Slika 3.16: Svi dijagrami vlastite energije elektrona s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Amplitude dijagrama s umetnutim kontračlanovima su redom:

$$-i\Sigma_1^{CT} = -\frac{\delta Z_2 e^2 \gamma \cdot k \cdot B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{16\pi^2}, \quad (3.88)$$

$$-i\Sigma_2^{CT} = 0, \quad (3.89)$$

$$-i\Sigma_3^{CT} = \frac{\delta Z_1 e \gamma \cdot k \cdot B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{16\pi^2}, \quad (3.90)$$

$$-i\Sigma_4^{CT} = \frac{\delta Z_1 e \gamma \cdot k \cdot B_{[1,0][1,0]}^D}{16\pi^2}. \quad (3.91)$$

U ovom slučaju indeksi  $\Sigma_{1-4}$  označavaju redni broj dijagrama na slici 3.16. Nakon umetanja  $\delta Z_1, \delta Z_2$ , rješavanja, razvoja i zadržavanja članova proporcionalnih samo uz  $\epsilon^{-1}$ , kao suma se dobije:

$$-i\Sigma^{CT} = \frac{ie^4 (\log(-k^2) + \gamma - 2) \gamma \cdot k}{256\pi^4 \epsilon}. \quad (3.92)$$

Suma amplituda sa i bez kontračlanova daje:

$$\frac{-7ie^4k}{1024\pi^4\varepsilon}, \quad (3.93)$$

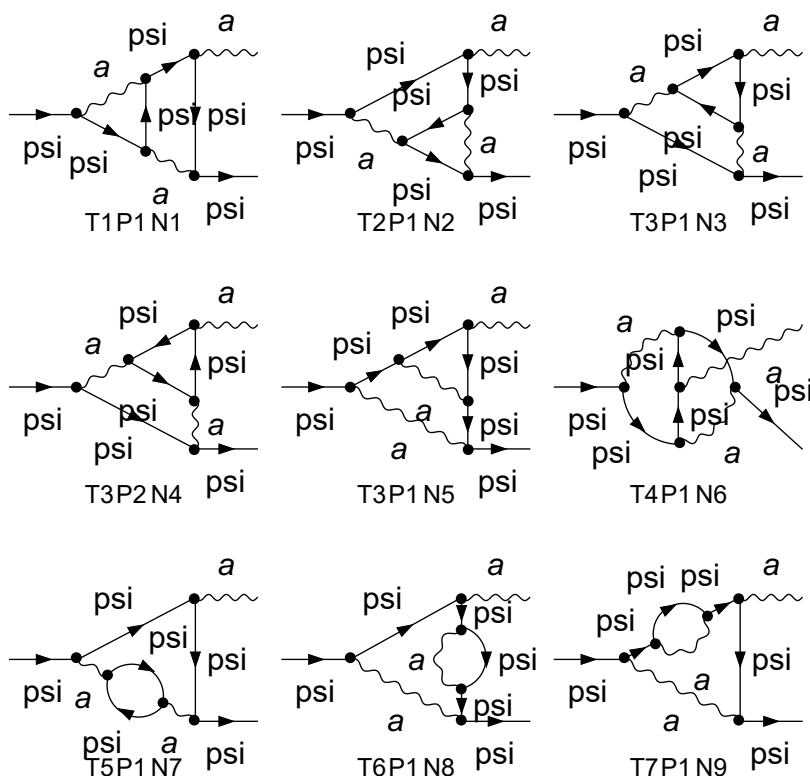
iz čega se iščitava

$$\delta Z_2^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4\varepsilon}. \quad (3.94)$$

### 3.5.3 Dijagrami korekcije vrha

Zbog činjenice da Wardov identitet vrijedi uvijek i za sve redove računa smetnje, jednom kad se dobije izraz za  $\delta Z_2^{2L}$ , odmah se zna rezultat i za  $\delta Z_1^{2L}$ . Zbog toga račun korekcija vrha ni nije potreban, no ipak je napravljen zbog potpunosti i provjere. Amplitude su dane na slici 3.17 i ima ih devet. Međutim, pri računu ovih

psi → a psi



Slika 3.17: Svi dijagrami korekcije vrha na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

amplituda su se javile komplikacije zbog ograničenosti programskog paketa. Morale su se napraviti neke pretpostavke kojima su se one uspjele zaobići. Pretpostavka koja

je odabrana je ta da se jedan od izlaznih impulsa izjednači s nulom. Amplitude za slučaj iščezavajućeg impulsa izlaznog fotona su redom:

$$-i\Sigma_1 = -i\Sigma_2 = \frac{i(D-2)e^5}{512\pi^8(D-6)(D-4)^2(D-1)k^4}. \quad (3.95)$$

$$\cdot \left( k^2 \gamma^\mu \left( (3D^4 - 48D^3 + 280D^2 - 712D + 672) k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(D^5 - 21D^4 + 172D^3 - 662D^2 + 1196D - 816) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right) + \right. \\ \left. + k^\mu \gamma \cdot k \left( (D^6 - 22D^5 + 194D^4 - 864D^3 + 1984D^2 - 2064D + 576) k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2D(D^5 - 15D^4 + 96D^3 - 340D^2 + 656D - 528) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right) \right),$$

$$-i\Sigma_3 = -i\Sigma_4 = \frac{-i(D-2)^2 e^5}{128\pi^8(D-8)(D-6)(D-4)(D-1)k^4}. \quad (3.96)$$

$$\cdot \left( (D^3 - 9D^2 - 8D + 64) k^2 \gamma^\mu + 2D(D^3 - 13D^2 + 52D - 64) k^\mu \gamma \cdot k \right) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}$$

$$-i\Sigma_5 = -\frac{i(D-2)^2 e^5}{256\pi^8(D-6)(D-4)k^4}. \quad (3.97)$$

$$\cdot \left( (-2D^2 + 15D - 26) k^2 \gamma^\mu + 2(D^3 - 9D^2 + 26D - 24) k^\mu \gamma \cdot k \right) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}$$

$$-i\Sigma_6 = \frac{i(D-2)e^5}{512\pi^8(D-6)(D-4)^2(D-1)k^4}. \quad (3.98)$$

$$\cdot \left( (D-3) k^2 \gamma^\mu \left( (D^4 - 22D^3 + 168D^2 - 528D + 576) k^2 \left( B_{(1,0)(1,0)}^{(D)} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(D^4 - 20D^3 + 140D^2 - 376D + 320) \mathbf{J}_{(1,0)(1,0)(1,0)}^{(D)} \right) - \right. \\ \left. - 2k^\mu \gamma \cdot k \left( (D^5 - 20D^4 + 160D^3 - 640D^2 + 1264D - 960) k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(D^6 - 11D^5 + 24D^4 + 152D^3 - 920D^2 + 1776D - 1152) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right) \right),$$

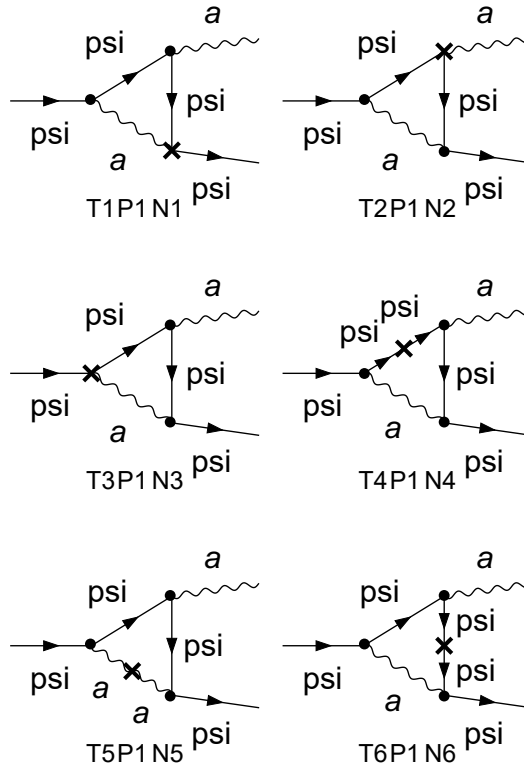
$$-i\Sigma_7 = -\frac{i(D-2)^2 e^5 (2(D-4)k^\mu \gamma \cdot k + k^2 \gamma^\mu) \mathbf{J}_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{128\pi^8(D-6)k^4}, \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
& -i\Sigma_8 = -i\Sigma_9 = \tag{3.100} \\
& = \frac{i(D-2)^2 e^5 ((-3D^2 + 24D - 44) k^2 \gamma^\mu + 8(D^2 - 7D + 12) k^\mu \gamma \cdot k) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{512\pi^8 (D-6)(D-4)k^4}.
\end{aligned}$$

Nakon sumacije i razvoja, u sumi amplituda ponovno se pojavio nelokalan član:

$$\frac{12ie^5 \gamma^\mu \log(-k^2)}{3072\pi^4 \epsilon}. \tag{3.101}$$

psi → a psi



Slika 3.18: Svi dijagrami korekcije vrha s kontračlanovima na nivou dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Račun za amplitude s kontračlanovima danim na slici 3.18 je ponovljen s istom pretpostavkom. Amplitude su redom:

$$-i\Sigma_1^{CT} = -i\Sigma_2^{CT} = -i\Sigma_3^{CT} = -\frac{\delta Z_1 e^2 ((D-4)k^\mu \gamma \cdot k + k^2 \gamma^\mu) B_{(1,0)(1,0)}^{(D)}}{16\pi^2 k^2}, \tag{3.102}$$

$$-i\Sigma_4^{CT} = -i\Sigma_6^{CT} = \frac{\delta Z_2 e^3 ((D-4)k^\mu \gamma \cdot k + k^2 \gamma^\mu) B_{(1,0)(1,0)}^{(D)}}{16\pi^2 k^2}, \tag{3.103}$$

$$-i\Sigma_5^{CT} = 0. \tag{3.104}$$



Amplitude su zbrojene i napravljen je razvoj te je dobiven do na predznak isti član koji poništava nelokalni član u sumi amplituda na razini dvije petlje bez umetanja kontaklanova.

Sume amplituda sa i bez kontračlanova su zbrojene što je dalo rezultat:

$$\frac{7ie^5 k}{1024\pi^4 \epsilon}, \quad (3.105)$$

iz čega se iščitava

$$\delta Z_1^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4} \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.106)$$

Rezultat dobiven za  $\delta Z_1^{2L}$  je isti kao  $\delta Z_2^{2L}$  što je u skladu s Wardovim identitetom. To je indicacija da je račun proveden za korekciju vrha na dvije petlje s uvedenim pretpostavkama koje olakšavaju račun, točan. Također, proveden je i račun s pretpostavkom da je impuls druge izlazne čestice (fermiona) jednak nuli te je dobiven isti rezultat.

### 3.6 Renormalizacijske grupne jednačbe za QED na nivou dvije petlje

Korigira li se izraz (3.25) dimenzionalnom analizom u  $D = 4 - 2\epsilon$  [6], dobije se:

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}, \quad (3.107)$$

odnosno primjenom Wardovog identiteta se gore dani izraz svodi na:

$$e = Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}. \quad (3.108)$$

$Z_3$  je izračunat na nivou dvije petlje i glasi:

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.109)$$

Uvrštavanjem u (3.84) se dobije:

$$\begin{aligned} e_B \mu^{-\epsilon} &= e \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx e \left( 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{e^4}{256\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Da bi se dobila beta funkcija, izračunati izraz je potrebno derivirati po  $\mu$  i pomnožiti s  $\mu$ . Relacije koje će biti od koristi u tom računu su:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu} &= \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\partial e}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial e}, \\ \mu \frac{de}{d\mu} &= \beta - \varepsilon e.\end{aligned}\tag{3.111}$$

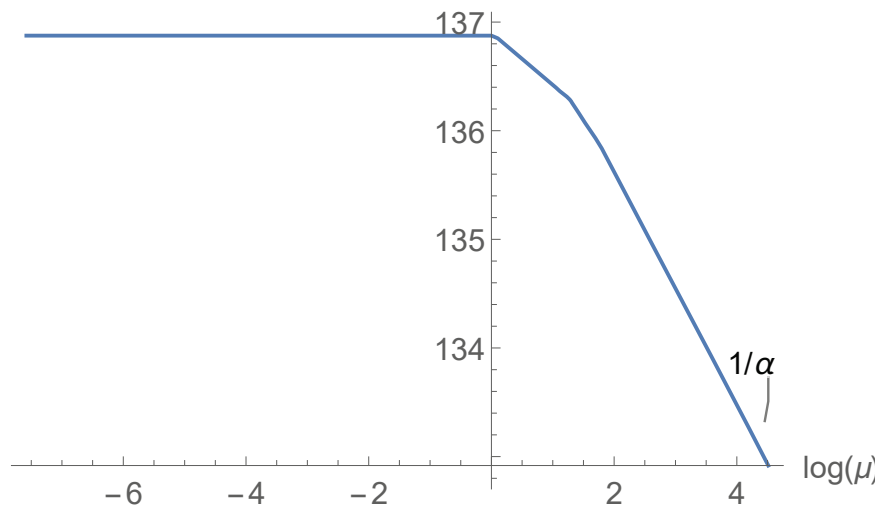
Derivacijom i množenjem s  $\mu$  se dobije:

$$\beta = -\varepsilon e \left( -\frac{2e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{4e^4}{256\pi^4} \frac{1}{\varepsilon} \right).\tag{3.112}$$

Konačno, izraz za beta funkciju za QED na nivou dvije petlje glasi:

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2}.\tag{3.113}$$

Dobiveni izraz se slaže s literaturom [2]. Da bi se dobila ovisnost konstante vezanja (električnog naboja) o energiji, potrebno je integrirati beta funkciju. Obzirom da je dobivena samosuglasna jednačba, integracija je provedena numerički i dobila se ovisnost koja je dana na slici 3.19. Uzete su energije od mase elektrona do mase



Slika 3.19: Ovisnost  $\alpha^{-1}$  o energiji. Dobiveno pomoću koda napravljenog u sklopu diplomskog rada.

Z bozona, a uključene su sve čestice koje se javljaju u teoriji. Uključivanjem svake čestice pojedinačno se mijenja nagib pravca- na svakom energijskom pragu se graf "lomi". Zbog toga što je skala logaritamska, promjene nagiba pravca su više ili manje uočljive u ovisnosti koliko su različite mase dvije "susjedne" čestice.

## 4 Kvantna kromodinamika (QCD)

### 4.1 $SU(3)$ boje

Kvarkovi su elementarne čestice koje nisu nikad opažene u slobodnom, već se uvijek nalaze u vezanim stanjima: hadronima (npr. protoni i neutroni). Teorija koja opisuje međudjelovanje kojim se kvarkovi vežu u hadrone se zove kvantna kromodinamika (QCD). Podjela među kvarkovima se vrši obzirom na generacije i obzirom na naboj. Na slici 3.1 je dan popis gdje prva dva retka predstavljaju prvu generaciju, treći i četvrti predstavljaju drugu te peti i šesti predstavljaju treću generaciju kvarkova. Obzirom na naboj, dijele se na gornje tipove ( $Q = +2/3$ ) i donje tipove ( $Q = -1/3$ ). Također, kvarkovi nose dodatni kvantni broj - boju: crvena (r), zelena (g), plava

Čestica	Naboj	Masa (GeV)
Down (d)	-1/3	0.003
Up (u)	+2/3	0.005
Strange (s)	-1/3	0.1
Charm (c)	+2/3	1.3
Bottom (b)	-1/3	4.5
Top (t)	+2/3	174

Slika 4.1: Tablica svih kvarkova. Podaci su preuzeti iz [7].

(b). Boja u QCD je kao i električni naboj u QED što vodi na uvođenje bezmasenog polja analognom fotonu: gluona. Kao što elektron i elektron međudjeluju izmjenom fotona, tako kvarkovi međudjeluju izmjenom gluona. Razlika između ta dva slučaja je u tome što su fotoni nenabijeni bojom, a gluoni nose boju. Grupa kojom je opisan QCD je  $SU(3)$ .

Dakle, riječ je o simetrijskoj transformaciji u 3D prostoru razapetom s:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

SU(3) grupa ima 8 generatora - 3x3 hermitskih matrica traga nula. Općeniti grupni element je dan kao:

$$U = e^{i \sum_{A=1}^8 \alpha_A T_A}, \quad (4.2)$$

gdje su  $\alpha_A$  realni parametri, a  $T_A = \lambda_A/2$  generatori zapisani preko Gell-Mannovih matrica danih u (4.3) [8].

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Koeficijenti koji množe matrice su dani tako da vrijedi [8]:

$$\text{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}. \quad (4.4)$$

Algebra grupe je:

$$[T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C, \quad (4.5)$$

gdje su  $f_{ABC}$  (potpuno antisimetrične) strukturne konstante grupe.

Obzirom da je grupna operacija množenje matrica, za razliku od U(1) kojom je opisan QED, SU(3) je ne-Abelova grupa.

U ovom diplomskom radu je korištena poopćena SU(N) grupa koja je detaljnije opisana u Dodatku A.

## 4.2 Lagranžijan QCD-ja

Lagranžijan QCD-ja se može konstruirati prilagođavajući lagranžijan QED-ja [5]. Kovarijantna derivacija u QCD-ju tako postaje:

$$\{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} \rightarrow \{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\}, \quad (4.6)$$

a gluonsko polje se dobije zamjenom:

$$\{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} \rightarrow \{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\}. \quad (4.7)$$

Zbog toga što se u lagranžijanu pojavljuje umnožak

$$F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c) \cdot (\partial^\mu A^{\nu,a} - \partial^\nu A^{\mu,a} - gf^{abc}A^{\mu,b} A^{\nu,c}), \quad (4.8)$$

javljaju se članovi proporcionalni s  $A^2$  odgovorni za gluonski propagator, no javljaju se i oni proporcionalni s  $A^3$  i  $A^4$  koji označavaju pojavu trogluonskog i četvergluonskog vrha u teoriji. Upravo zbog toga se javljaju dodatne "komplikacije" u odnosu na QED gdje su nefizikalni stupnjevi slobode unutar petlje bili poništeni Wardovim identitetom. Da bi se poništili nefizikalni stupnjevi slobode za gluonsku petlju u dijagramu vlastite energije gluona (primjer u kojem se javlja trogluonski vrh) se uvodi novi dijagram u kojem petlju čine nefizikalne čestice "duhovi".

U QED-ju je infinitezimalna baždarna transformacija izgledala kao (3.2c):

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x),$$

no u QCD-ju ona sadrži još jedan, ne-Abelovski doprinos [5], [3]:

$$(A^\alpha)_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f^{abc}A_\mu^b\alpha^c. \quad (4.9)$$

Uvede li se

$$D_\mu^{ac} = \partial_\mu\delta^{ac} - gf^{abc}A_\mu^b, \quad (4.10)$$

dobije se:

$$(A^\alpha)_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g}D_\mu^{ac}\alpha^c. \quad (4.11)$$

Potpuni lagranžijan QCD-ja s uvedenim poljima koja predstavljaju duhove izgleda [9], [5]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a (-\delta^{ab}\square) c^b - gf^{abc}\bar{c}^a \partial^\mu (A_\mu^c c^b) + \bar{q}(i\not{D} - m)q. \quad (4.12)$$

$c^a(x)$  i  $\bar{c}^a(x)$  su Grassmanovi brojevi sa svojstvima:

a) antikomutirajuće su strukture: poštuju Fermi-Diracovu statistiku -  $\{c_i, c_j\} = \{\bar{c}_i, c_j\} = \{\bar{c}_i, \bar{c}_j\} = 0$

b) zadovoljavaju Klein-Gordonovu jednačbu kao i skalarna polja (bozoni)

c) vrijedi  $\int dc_i c_i = 1, \quad \int dc_i = 0$

Ta uvedena antikomutirajuća kompleksna skalarna polja se zovu *Faddeev Popov duhovi*. Zbog toga što istovremeno vrijedi i a) i b) se ta polja javljaju samo kao unutarnje linije u Feynmanovim dijagramima, tj. virtualne su čestice.

### 4.3 QCD u okviru renormalizirane perturbacijske teorije

Kreće se, još jednom, od lagranžijana (4.12), razdvoji ga se na dva dijela: opservabilni dio te dio koji sadrži divergencije. Definiiraju se odnosi između renormaliziranih i nerormaliziranih polja:

$$c = (Z_2^c)^{1/2} c_R, \quad (4.13)$$

$$q = Z_2^{1/2} q_R, \quad (4.14)$$

$$A^{\mu,a} = Z_3^{1/2} A_R^{\mu,a}. \quad (4.15)$$

a) Prvi član lagranžijana predstavlja jakost gluonskog polja:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} = \quad (4.16) \\ & = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_B f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)(\partial^\mu A^{\nu,a} - \partial^\nu A^{\mu,a} - g_B f^{ade} A^{\mu,d} A^{\nu,e}) = \\ & = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{4}[-g_B f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A^{\mu,b}A^{\nu,c} - \\ & - g_B f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A^{\nu,a} - \partial^\nu A^{\mu,a}) + g_B^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d}A^{\nu,e}] = \\ & = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{4}g_B[f^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{\mu,b}A^{\nu,c} - f^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{\nu,b}A^{\mu,c} + \\ & + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu,a} - f^{abc}A_\nu^b A_\mu^c \partial^\mu A^{\nu,a}] - \frac{1}{4}g_B^2 f^{abc}f^{acd}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d}A^{\nu,e} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + g_B f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu,b} A^{\nu,c} - \frac{1}{4} f^{abc} f^{ade} g_B^2 A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d} A^{\nu,e}.$$

Uvrste li se sad veze s renormaliziranim poljima dane s (4.15) i dobije se:

$$\begin{aligned} \rightarrow & -\frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu A_{\nu,R}^a - \partial_\nu A_{\mu,R}^a)^2 + g_B Z_3^{3/2} f^{abc} \partial_\mu A_{\nu,R}^a A_R^{\mu,b} A_R^{\nu,c} - \\ & - \frac{1}{4} Z_3^2 g_B^2 f^{abc} f^{ade} A_{\mu,R}^b A_{\nu,R}^c A_R^{\mu,d} A_R^{\nu,e}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Drugi član predstavlja renormalizaciju trogluonskog vrha, a treći renormalizaciju četverogluonskog vrha.

b) Drugi član lagranžijana je baždarni član i za njega vrijedi:

$$-\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \rightarrow -\frac{1}{2\xi} Z_3 (\partial^\mu A_{\mu,R}^a)^2. \quad (4.18)$$

c) Za treći i četvrti član lagranžijana - dio s duhovima vrijedi:

$$\begin{aligned} \bar{c}^a (-\delta^{ab} \square) c^b - g f^{abc} \bar{c}^a \partial^\mu (A_\mu^c c^b) \rightarrow \\ \rightarrow Z_2 \bar{c}_R^a (-\delta^{ab} \square) c_R^b - Z_2 Z_3^{1/2} g_B \bar{c}_R^a f^{abc} \partial^\mu (A_{\mu,R}^c c_R^b). \end{aligned} \quad (4.19)$$

d) Zadnji član lagranžijana je kvarkovski i za njega se dobije:

$$\bar{q}(i\not{D} - m)q = \{D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a\} \rightarrow Z_2 \bar{q}_R(i\not{\partial} - m)q_R - Z_3^{1/2} Z_2 g_B \bar{q}_R A_R^a T^a q_R. \quad (4.20)$$

Kao što je već napomenuto, a i vidljivo iz gornje analize lagranžijana, u QCD postoji više vrhova nego u QED zbog postojanja duhova i zbog činjenice da su dozvoljeni trogluonski i četverogluonski vrhovi. Obzirom da se konstanta vezanja nalazi u svakom vrhu, iz ovakve analize se mogu dobiti odnosi između renormalizirane i gole konstante vezanja :

a) trogluonski i četverogluonski vrh:

$$ggg : Z_3^{3/2} g_B = Z_1^{3g} g, \quad (4.21)$$

$$gggg : Z_3^2 g_B^2 = Z_1^{4g} g^2, \quad (4.22)$$

c) antiduh-gluon-duh vezanje:

$$\bar{c}gc : Z_2^c Z_3^{1/2} g_B = Z_1^c g, \quad (4.23)$$

d) antikvark-gluon-kvark vezanje:

$$\bar{q}gq : Z_2 Z_3^{1/2} g_B = Z_1 g. \quad (4.24)$$

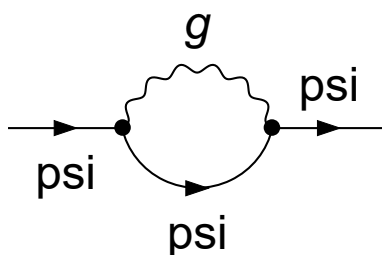
Da bi se dobile renormalizacijske grupne jednačbe, trebaju se pronaći renormalizacijski faktori  $Z_1$ ,  $Z_2$  i  $Z_3$ . Za to je potrebno računati divergentne doprinose amplituda dijagrama, analogno kao za QED.

#### 4.4 Radijativne korekcije za QCD na razini jedne petlje

Svi rezultati su dobiveni ručnim računom, a zatim i računalno provjereni koristeći pakete Wolfram Mathematice: FeynCalc, FeynArts, FeynRules, PaX, a za račun na dvije petlje je korišten i TARCER.

##### 4.4.1 Dijagram vlastite energije kvarka

psi  $\rightarrow$  psi



T1 P1 N1

Slika 4.2: Dijagram vlastite energije kvarka. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.



Amplituda dijagrama na slici 4.2 je:

$$-i\Sigma = \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{-g^2 \gamma_\mu T_a (\not{k} + m) \gamma^\mu T_a}{(k^2 - m^2) ((k-p)^2 - m_g^2)}, \quad (4.25)$$

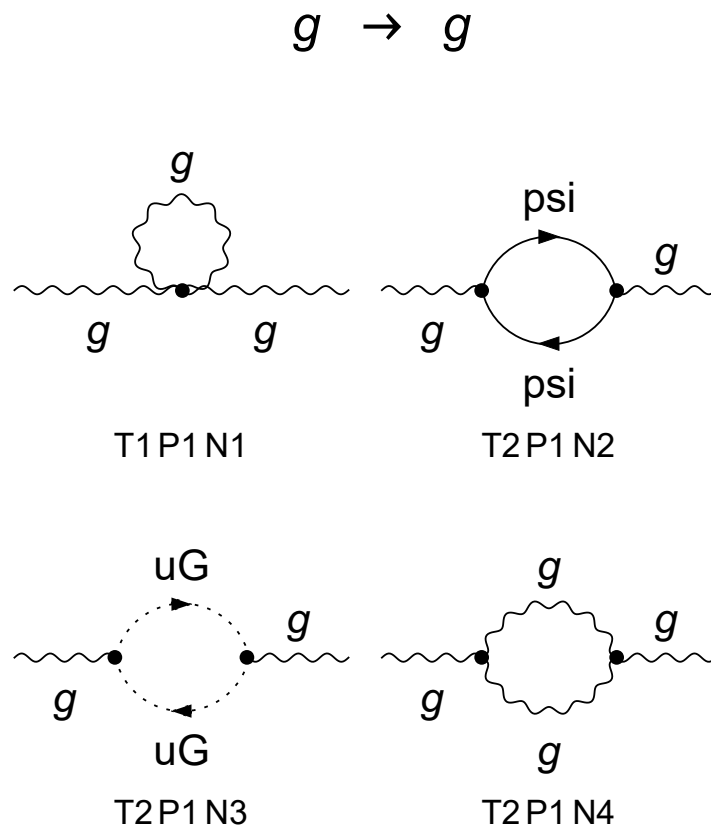
gdje je  $k$  impuls petlje.

Provodeći istu proceduru kao i za QED - Feynmanova parametrizacija, Wickova rotacija, dimenzionalna regularizacija te uz zadržavanje članova proporcionalnih samo s  $1/\epsilon$ , dobiveno je:

$$-i\Sigma \supseteq \frac{g^2 C_F i \not{p}}{(4\pi)^2 \epsilon}, \quad (4.26)$$

gdje je  $p$  ulazni/izlazni impuls. Član kojim se ova amplituda razlikuje od vlastite energije elektrona u QED-ju je  $C_F = T_a T_a$  o kojem se detaljnije može naći u Dodatku A.

#### 4.4.2 Dijagrami vlastite energije gluona



Slika 4.3: Dijagrami vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Na slici 4.3 su dani dijagrami koji predstavljaju korekciju vlastite energije gluona u

prvom redu računa smetnje. Analiza će se provesti za svaki zasebno, redom kako su numerirani na slici.

**1. dijagram - punoglavac** Prvi dijagram je primjer četverogluonskog vrha. Obzirom da ima samo jedan propagator, njegov doprinos u dimenzijski regulariziranoj teoriji jednak je nuli.

**2. dijagram - fermionska petlja** Amplituda drugog dijagrama je:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} = \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{-g^2 \text{Tr}(T^b T^a) \text{Tr}(\gamma^\nu (\not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m))}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)}, \quad (4.27)$$

gdje je  $k$  opet impuls u petlji, a  $p$  ulazni/izlazni impuls.

Doprinos ovog dijagrama je:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} \supseteq -\frac{4S_F \delta^{ab}}{3} \frac{ig^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{\epsilon} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu). \quad (4.28)$$

S  $S_F \delta^{ab}$  je označen trag  $\text{Tr}(T^b T^a)$  o čemu se može više pročitati u Dodatku A.

**3. dijagram - doprinos duhova** Amplituda trećeg dijagrama se zapisuje preko Feynmanovih pravila kao:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} = \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{g^2 f^{cbd} f^{dac} k_\nu (k+p)_\mu}{(k^2 - m_d^2)((k+p)^2 - m_d^2)}. \quad (4.29)$$

Ponovno je  $k$  impuls petlje, a  $p$  ulazni/izlazni impuls. Ovaj dijagram daje doprinos:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} \supseteq \frac{ig^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{(p^2 g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu)}{12}, \quad (4.30)$$

gdje je  $C_A \delta^{ab}$  umnožak strukturnih konstanti o čemu se više može naći u Dodatku A. Ono što se odmah može primjetiti je nepostojanje očekivane strukture  $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ , no to je u redu obzirom da su duhovi i uvedeni u teoriju kako bi poništili nefizikalne doprinose dijagrama vlastite energije gluona s gluonskom petljom. Očekuje se da će suma doprinosa trećeg i četvrtog dijagrama slike 4.3 dati izraz proporcionalan baš toj "poželjnoj" strukturi.

**4. dijagram - gluonska petlja** Amplituda četvrtog dijagrama je:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} = -\frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{f^{acd} f^{bcd}}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)} \cdot \quad (4.31)$$

$$\cdot [(g_{\nu\rho}(p-k)_\sigma + g_{\rho\sigma}(2k+p)_\nu + g_{\sigma\nu}(-k-2p)_\rho) \cdot$$

$$\cdot (g_\mu^\rho(-p+k)^\sigma + g^{\rho\sigma}(-2k-p)_\mu + g_\mu^\sigma(k+2p)^\rho)].$$

Nakon provođenja standardne procedure, dobije se doprinos četvrtog dijagrama kao:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab} \supseteq \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{iC_A \delta^{ab}}{\epsilon} \frac{19g^{\mu\nu} p^2 - 22p^\mu p^\nu}{12}. \quad (4.32)$$

Zaista, sumiranjem izraza (4.31) i (4.33) se dobije izraz proporcionalan strukturi  $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ :

$$\frac{ig^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{p^2 g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu}{12} + \frac{ig^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{19g^{\mu\nu} p^2 - 22p^\mu p^\nu}{12} = \quad (4.33)$$

$$= \frac{ig^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{5}{3} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$$

#### 4.4.3 Dijagrami korekcije vrhova

**1. dijagram - samo  $\bar{q}gq$  vezanja** Prvi dijagram korekcije vrha je u potpunosti analogan vrhu diskutiranom u prethodnom poglavlju kad se promatrao QED, do na strukture koje dolaze zbog SU(3) grupe koja opisuje QCD.

Amplituda prvog dijagrama je:

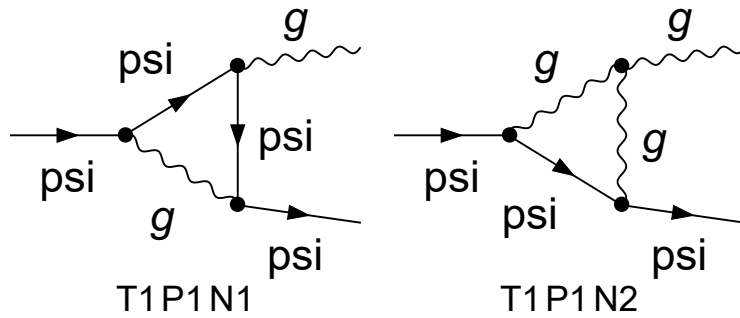
$$-i\Sigma = \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{-g^3 T^b T^a T^b \gamma_\nu (\not{k} + \not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\nu}{(k^2 - m_g^2)((k+p)^2 - m^2)((k+p')^2 - m^2)}, \quad (4.34)$$

gdje je  $k$  impuls petlje,  $p$  i  $p'$  impulsi ulaznog i izlaznog kvarka.

Doprinos ovog dijagrama je, nakon standardne procedure, dobiven kao:

$$-i\Sigma \supseteq \frac{g^2}{(4\pi)^2 \epsilon} (-ig\gamma^\mu T^a) \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right). \quad (4.35)$$

psi → g psi



Slika 4.4: Dijagrami korekcije vrha na razini jedne petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

**2. dijagram -  $\bar{q}gq$  i  $ggg$  vezanja** Amplituda drugog dijagrama je:

$$-i\Sigma = \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{ig^3 f^{abc} T^b T^c \gamma^\nu (\not{k} + m) \gamma^\rho}{(k^2 - m^2) ((k-p)^2 - m^2) ((k-p')^2 - m^2)} \cdot [g_\nu^\mu (k+p-2p')_\rho + g_{\nu\rho} (-2k+p+p')^\mu + g_\rho^\mu (k-2p+p')_\nu]. \quad (4.36)$$

Njegov doprinos je dobiven kao:

$$-i\Sigma \supseteq \frac{g^2}{(4\pi)^2 \epsilon} (-ig\gamma^\mu T^a) \frac{3C_A}{2}. \quad (4.37)$$

#### 4.4.4 Renormalizacijski faktori na razini jedne petlje

Sad je moguće iščitati  $Z_1$ ,  $Z_2$  i  $Z_3$  na razini jedne petlje.

**Vlastita energija kvarka** daje faktor  $Z_2$ :

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2 C_F}{(4\pi)^2 \epsilon}. \quad (4.38)$$

**Vlastita energija gluona** daje faktor  $Z_3$ :

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2\epsilon} \left( -\frac{4}{3}S_F N_f + \frac{5}{3}C_A \right), \quad (4.39)$$

gdje je  $N_f$  broj okusa kvarkova.

**Korekcija vrha** daje faktor  $Z_1$ :

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2\epsilon} (C_F + C_A). \quad (4.40)$$

Idući korak je izračunati doprinose na razini dvije petlje.

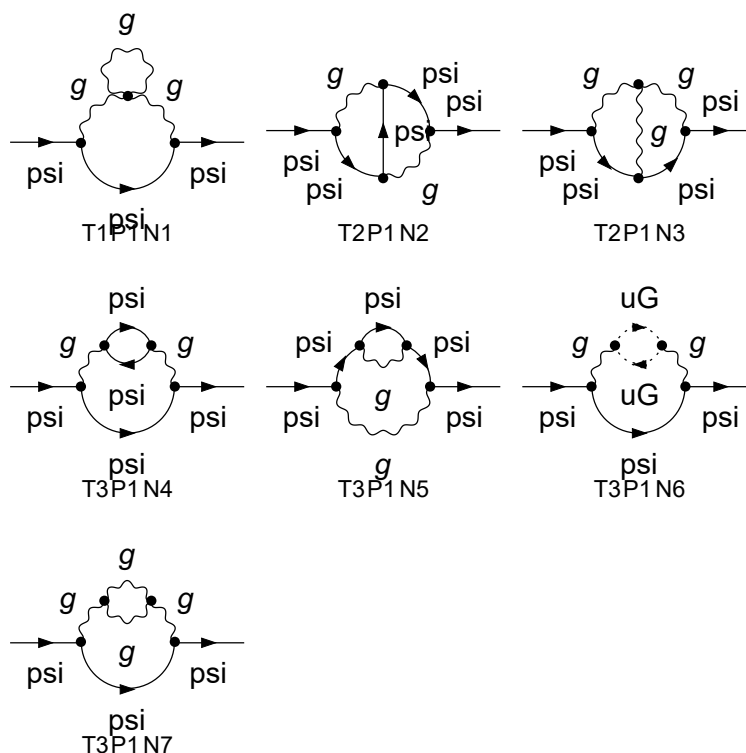
#### **4.5 Radijativne korekcije za QCD na razini dvije petlje**

Kako bi se dobila beta funkcija na razini dvije petlje, provodi se ista procedura kao i za QED: sumiraju se dijagrami na dvije petlje i dijagrami na jednoj petlji s umetnutim kontračlanovima. Time se ponište nelokalne divergencije i tek onda se mogu dobiti renormalizacijski faktori.

Ovom metodom je dobiveno puno dijagrama, a slike istih su dane ispod.

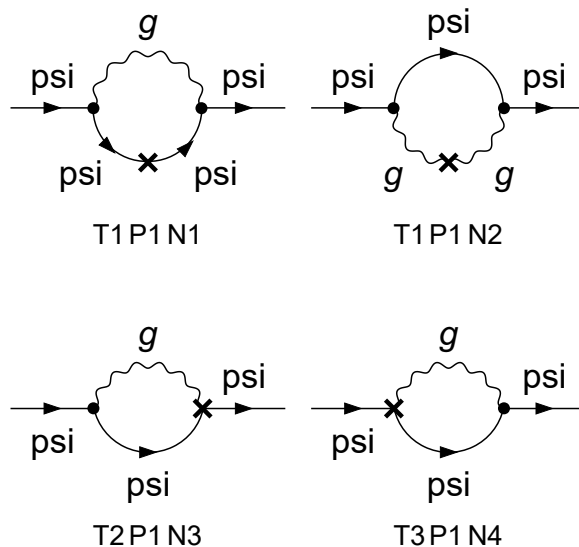
Dakle, račun ovolikog broja dijagrama bi bio dug i kompliciran uzimajući u obzir ograničenosti paketa TARCER koji računa samo vlastite energije. Zbog toga bi za vrh ponovno morale biti uključene neke pretpostavke koje kompliciraju račun. Srećom, postoji puno elegantnija metoda izračuna beta funkcije za QCD, a opisana je u idućem potpoglavlju.

$\psi \rightarrow \psi$

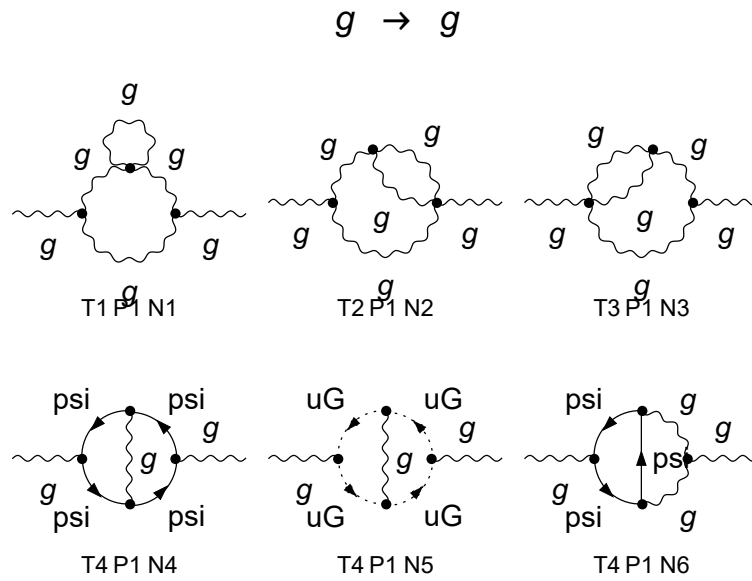


Slika 4.5: Dijagrami vlastite energije kvarka na razini dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

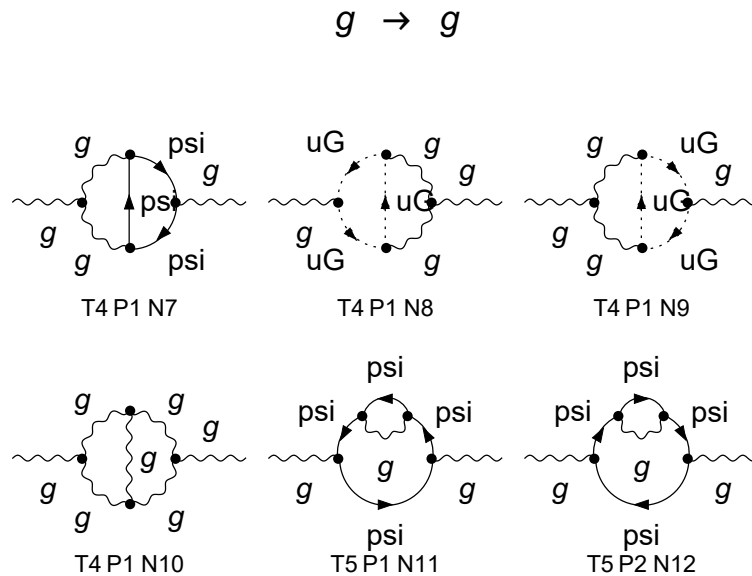
$\psi \rightarrow \psi$



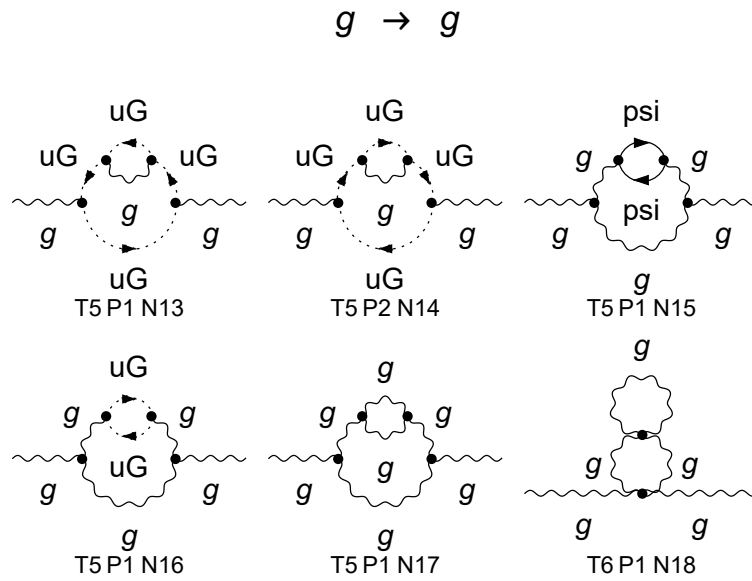
Slika 4.6: Dijagrami vlastite energije kvarka s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.



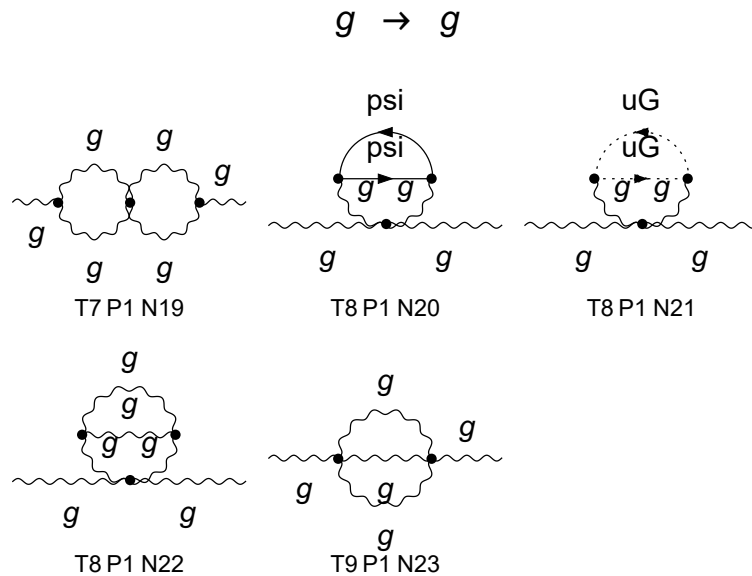
Slika 4.7: Dijagrami vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-6 od 23.



Slika 4.8: Dijagrami vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 7-12 od 23.



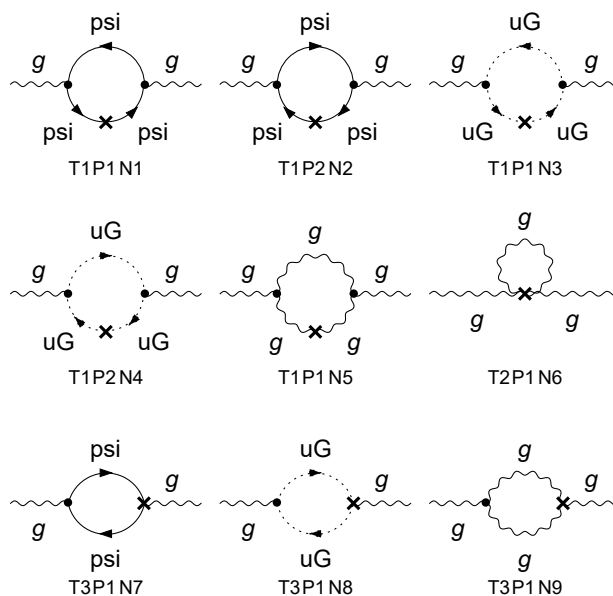
Slika 4.9: Dijagrami vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 13-18 od 23.



Slika 4.10: Dijagrami vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 18-23 od 23.

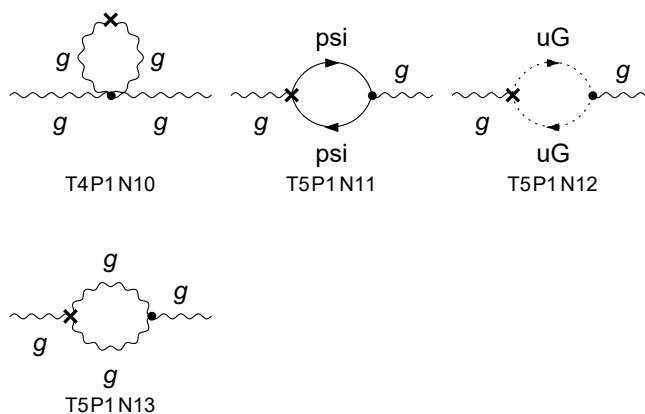


$$g \rightarrow g$$



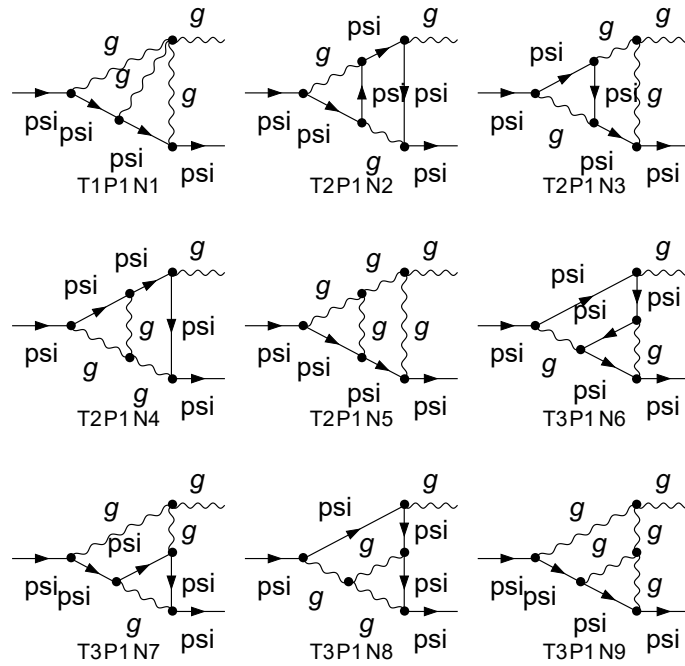
Slika 4.11: Dijagrami vlastite energije gluona s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-9 od 13.

$$g \rightarrow g$$



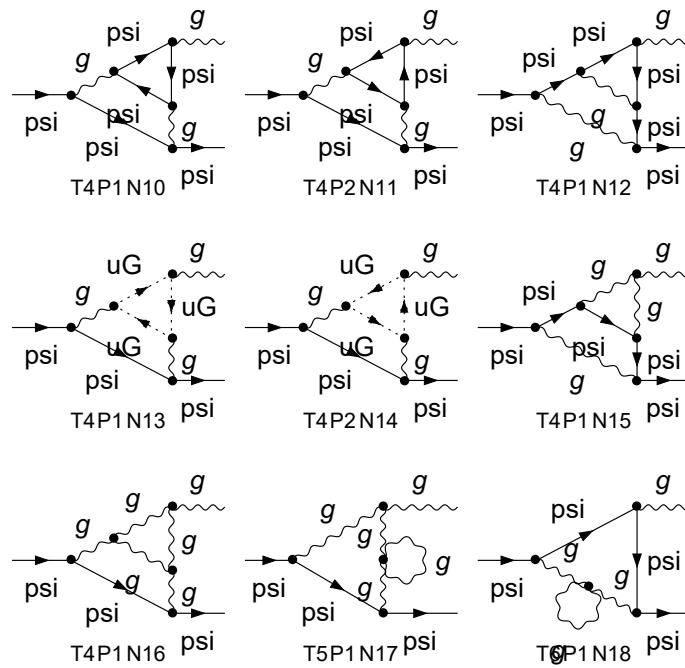
Slika 4.12: Dijagrami vlastite energije gluona s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 10-13 od 13.

$\psi \rightarrow g \psi$



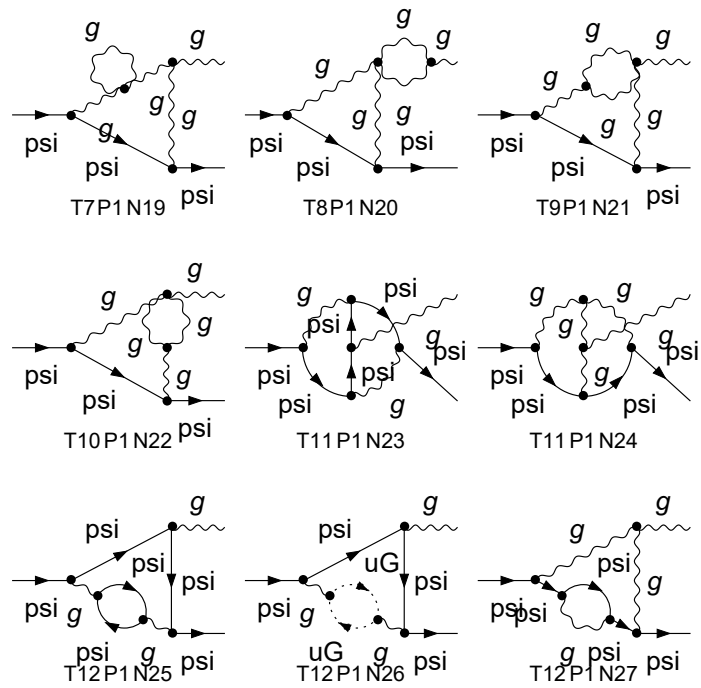
Slika 4.13: Dijagrami korekcije vrha. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-9 od 36.

$\psi \rightarrow g \psi$



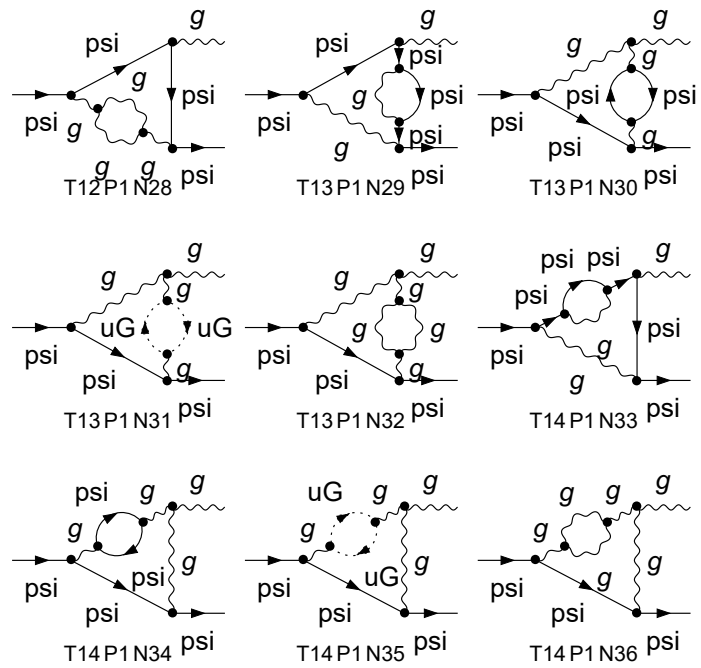
Slika 4.14: Dijagrami korekcije vrha. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 10-18 od 36.

$\psi \rightarrow g \psi$



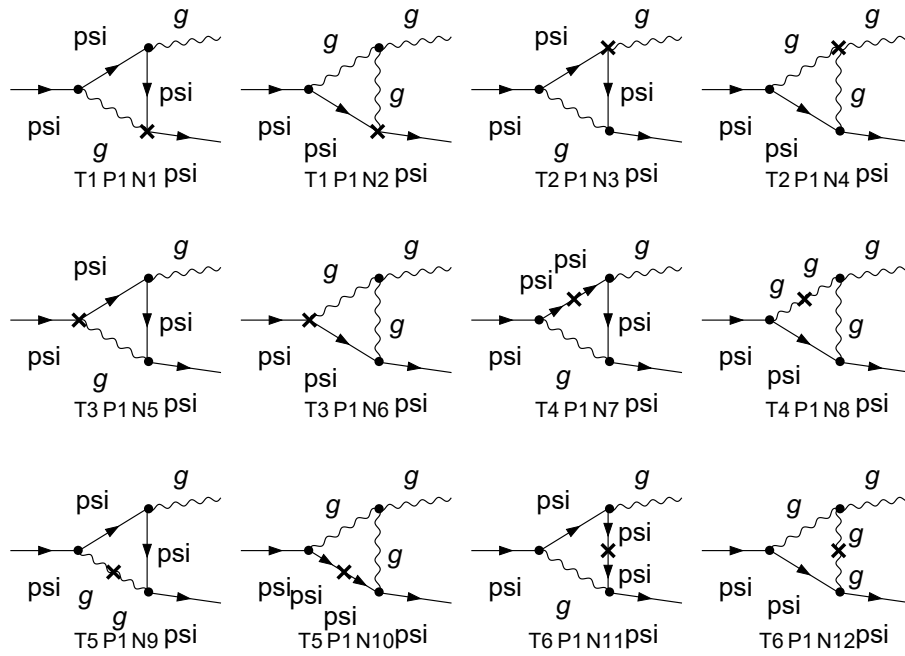
Slika 4.15: Dijagrami korekcije vrha. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 19-27 od 36.

$\psi \rightarrow g \psi$



Slika 4.16: Dijagrami korekcije vrha. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 28-36 od 36.

$\psi \rightarrow g \psi$



Slika 4.17: Dijagrami korekcije vrha s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

## 4.6 Metoda pozadinskog polja (BFM)

Metoda pozadinskog polja je tehnika kvantizacije baždarnih polja pri kojoj se ne gubi baždarna invarijantnost. Nju je uveo DeWitt u formalizmu primjenjivom na procese s jednom petljom. Na procese s više petlji su metodu "proširili" 't Hooft, DeWitt, Boulware i Abbott, a ona je upravo korištena u ovom radu kako bi olakšala račun i smanjila broj dijagrama koje je potrebno izračunati kako bi se dobila beta funkcija na razini dvije petlje za kvantnu kromodinamiku.

Bilo koja formulacija baždarne teorije polja počinje s baždarno invarijantnim lagranžijanom. Međutim, kako bi se teorija kvantizirala, mora se odabrati baždarenje. U konvencionalnoj formulaciji to znači da lagranžijan koji sadrži član kojim se fiksira baždarenje i članove koji sadrže duhove nije baždarno invarijantan [10]. Naravno, bilo koja izračunata fizikalna veličina je neovisna o izboru baždarenja, no veličine koje nemaju direktnu fizikalnu interpretaciju neće biti baždarno invarijantne- na primjer divergentni kontračlanovi.

Koristeći metodu pozadinskog polja, eksplicitna baždarna neovisnost koja je prisutna u početnom lagranžijanu je također prisutna i nakon što su dodani članovi koji fiksiraju baždarenje i članovi koji sadrže duhove. Kao rezultat ovakvog formalizma, nefizikalne veličine kao što su to divergentni kontračlanovi postaju baždarno invarijantni.

### 4.6.1 Metoda funkcionala

Krajnji cilj svakog računa u teoriji polja je  $S$  matrica. Nju se na jednostavan način može dobiti preko Greenovih funkcija teorije koristeći LSZ redukciju formulu. U pristupu preko funkcionala, Greenove funkcije su određene funkcionalnom derivacijom generirajućeg funkcionala  $Z[J]$  po funkciji-izvoru  $J$  gdje je generirajući funkcional zadan kao [10]:

$$Z[J] = \int \delta Q \exp i[S[Q] + J \cdot Q]. \quad (4.41)$$

U ovoj formuli  $Q$  predstavlja polje s klasičnom akcijom  $S$  i:

$$J \cdot Q \equiv \int d^4x (JQ). \quad (4.42)$$

$Z[J]$  je određen funkcionalnom integracijom po svim konfiguracijama polja  $Q$ . Gre-

enove funkcije su definirane kao:

$$\langle 0|T\{Q \dots Q\}|0\rangle = \int \delta Q(Q \dots Q) \exp iS[Q] = \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)^n Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (4.43)$$

gdje se u T produktu i u integraciji polja  $Q$  pojavljuju  $n$  puta.

Tako definirane Greenove funkcije su većinom nepovezane i sastoje se od potpuno razdvojenih dijelova, koji ne doprinose  $S$  matrici obzirom da su  $S$  matični elementi definirani preko amplituda povezanih dijagrama. Zbog toga je bolje raditi samo s povezanim Greenovim funkcijama koje se generiraju funkcionalom jednakim logaritmu funkcionala  $Z[J]$ :

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (4.44)$$

Povezane Greenove funkcije se dalje mogu pojednostaviti tako da ih se izrazi preko jednočestičnih ireducibilnih dijagrama što poprilično olakšava račun.

Povezani dijagrami su ili granasti ili sadrže jednočestično ireducibilne (1PI) poddijagrame. Amplitude granastih poddijagrama su UV konačne i ne doprinose renormalizacijskim grupnim jednažbama (RGE). Amplitude 1PI dijagrama su beskonačne i daju doprinose RGE te su zbog toga upravo 1PI dijagrami najvažniji u analizi renormalizabilnosti teorije. Zato se uvodi funkcional amplituda 1PI dijagrama, tzv. efektivna akcija definirana s:

$$\Gamma[\bar{Q}] = W[J] - J \cdot \bar{Q}, \quad (4.45)$$

gdje je:

$$\bar{Q} \equiv \frac{\delta W}{\delta J}. \quad (4.46)$$

Dakle, jako bitna veličina u teoriji polja je upravo efektivna akcija. Jednom kad je ona poznata,  $S$  matrica se može konstruirati slažući jednočestine ireducibilne dijagrame koji generiraju punu i povezanu Greenovu funkciju, zatim amputiranjem vanjskih propagatora, stavljanjem svih impulsa na ljusku mase te dodavanjem odgovarajućih faktora koji pripadaju valnim funkcijama.

#### 4.6.2 Metoda pozadinskog polja (BFM): ne-baždarne teorije

Metoda pozadinskog polja je prigodan način za računanje efektivne akcije.

Već uvedenim veličinama se dodaje novi član  $\phi$  koji predstavlja proizvoljno pozadinsko polje. Funkcional koji generira nepovezane dijagrame se može definirati kao:

$$Z[J] = \int \delta Q \exp i[S[Q] + J \cdot Q] \longrightarrow \tilde{Z}[J, \phi] = \int \delta Q \exp i[S[Q + \phi] + J \cdot Q]. \quad (4.47)$$

$\tilde{Z}$  ovisi i o izvoru  $J$  i pozadinskom polju  $\phi$  kojeg se može shvatiti kao alternativni izvor.

Također, analogno se dobije i generator povezanih dijagrama:

$$W[J] = -i \ln Z[J] \longrightarrow \tilde{W}[J, \phi] = -i \ln \tilde{Z}[J, \phi], \quad (4.48)$$

te

$$\bar{Q} = \frac{\delta W}{\delta J} \longrightarrow \tilde{Q} = \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J}. \quad (4.49)$$

Konačno, da bi se zamijenila konvencionalna efektivna akcija

$$\Gamma[\bar{Q}] = W[J] - J \cdot \bar{Q}, \quad (4.50)$$

definira se BFM efektivna akcija:

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, \phi] = \tilde{W}[J, \phi] - J \cdot \tilde{Q}. \quad (4.51)$$

Da bi se vidio smisio ovih definicija, varijabla integracije u (4.47) se translata za  $-\phi$ .

Iz toga odmah slijedi:

$$\tilde{Z}[J, \phi] = Z[J] \exp(-iJ \cdot \phi). \quad (4.52)$$

Uzimajući logaritam gornje relacije, dobije se:

$$\tilde{W}[J, \phi] = W[J] - J \cdot \phi. \quad (4.53)$$

Diferenciranjem dobivenog izraza po  $J$ , dobije se:

$$\tilde{Q} = \bar{Q} - \phi. \quad (4.54)$$

Konačno, iz jednadžbi (4.50) i (4.51) se dobiva:

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, \phi] = W[J] - J \cdot \phi - J \cdot \bar{Q} + J \cdot \phi = \Gamma[\bar{Q}], \quad (4.55)$$

što se, uz  $\bar{Q} = \tilde{Q} + \phi$ , može zapisati kao:

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, \phi] = \Gamma[\tilde{Q} + \phi]. \quad (4.56)$$

Gornja relacija predstavlja jako važan rezultat. U posebnom slučaju  $\tilde{Q} = 0$  vrijedi:

$$\tilde{\Gamma}[0, \phi] = \Gamma[\phi]. \quad (4.57)$$

Važnost te jednadžbe je u tome što govori da se efektivnu akciju može odrediti izračunom  $\tilde{\Gamma}[0, \phi]$ .

Efektivna akcija pozadinskog polja  $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, \phi]$  je samo konvencionalna efektivna akcija izračunata u prisustvu pozadinskog polja  $\phi$ . Dakle, sadrži sve jednočestične ireducibilne dijagrame koji doprinose Greenovim funkcijama.

U ovom slučaju derivacijom  $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, \phi]$  po  $Q$  će se generirati jednočestične ireducibilne Greenove funkcije u prisustvu pozadinskog polja. Obzirom da, u gore spomenutom posebnom slučaju,  $\tilde{\Gamma}[0, \phi]$  nema ovisnosti o  $\tilde{Q}$ , ne generiraju se dijagrami s vanjskim linijama. Umjesto toga, dobiva se suma svih jednočestičnih ireducibilnih *vakuumskih* dijagrama u prisustvu polja  $\phi$ . Upravo to predstavlja veliku prednost korištenja metode pozadinskog polja: efektivnu akciju je moguće dobiti zbrajanjem samo vakuumskih dijagrama.

Postoje dva različita pristupa u računanju  $\tilde{\Gamma}[0, \phi]$ . Jedan od njih podrazumijeva da se  $\phi$  tretira egzaktno, no on je moguć samo za jako jednostavna pozadinska polja. Drugi način podrazumijeva perturbativno tretiranje pozadinskog polja. Dakle, promatraju se jednočestični ireducibilni dijagrami  $Q$  polja s  $\phi$  kao vanjskim linijama.

U ovom radu je korišten drugi pristup u kojem je pozadinsko polje proizvoljno. Postupak računa je sljedeći: korištenjem akcije  $S[Q + \phi]$ , dobiju se Feynmanova pravila. Iz akcije se dobije član kvadratičan u  $Q$  - propagator  $Q$  polja. Članovi koji nisu kvadratični u  $Q$  generiraju međudjelovanja: međudjelovanja između  $Q$  polja su korištena unutar dijagrama, dok su međudjelovanja između  $Q$  i  $\phi$  korištena kao vanjske linije. Na ovaj način se bilo koja jednočestična ireducibilna Greenova funkcija



može izračunati.

### 4.6.3 Metoda pozadinskog polja (BFM): baždarne teorije

U računima s baždarnim teorijama postoji jedna važna razlika: mora se odabrati baždarenje. Generirajući funkcional je u ovom slučaju [10]:

$$Z[J] = \int \delta Q \det \left[ \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \exp i \left[ S[Q] - \frac{1}{2\alpha} G \cdot G + J \cdot Q \right], \quad (4.58)$$

gdje je  $Q$  sad baždarno polje  $Q_\mu^a$ . U ovoj jednadžbi je  $S$  akcija baždarnog polja

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu}^a)^2, \quad (4.59)$$

s  $F_{\mu\nu}^a$  definiranim kao:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu Q_\nu^a - \partial_\nu Q_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b Q_\nu^c. \quad (4.60)$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} J \cdot Q &\equiv \int d^4x J_\mu^a Q_\mu^a, \\ G \cdot G &\equiv \int d^4x G^a G^a. \end{aligned} \quad (4.61)$$

$G^a$  je član koji fiksira baždarenje, na primjer -  $G^a = \partial_\mu Q_\mu^a$ .

Na kraju,  $\delta G^a / \delta \omega^b$  je derivacija  $G^a$  u odnosu na baždarnu transformaciju:

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b Q_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (4.62)$$

Generirajući funkcional u metodi s pozadinskom poljem za baždarnu teoriju glasi:

$$\tilde{Z}[J, A] = \int \delta Q \det \left[ \frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} \right] \exp i \left[ S[Q + A] - \frac{1}{2\alpha} \tilde{G} \cdot \tilde{G} + J \cdot Q \right], \quad (4.63)$$

gdje je  $\delta \tilde{G}^a / \delta \omega^b$  derivacija člana koji fiksira baždarenje u infinitezimalnoj baždarnoj transformaciji:

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b (Q_\mu^c + A_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (4.64)$$

Nakon što su se uvele i objasnile sve nove veličine, može se napraviti analogija s

prethodno uvedenim veličinama:

$$\tilde{\Gamma}[0, \phi] = \Gamma[\phi] \longrightarrow \tilde{\Gamma}[0, A] = \Gamma[A] \quad (4.65)$$

Ako je  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  izračunat koristeći član koji fiksira baždarenje  $\tilde{G}^a = \tilde{G}^a(Q, A)$ , tad će biti jednak konvencionalnoj efektivnoj akciji  $\Gamma[\bar{Q}]$  izračunatoj s  $G^a = \tilde{G}^a(Q - A, A)$  i izvrijednjenoj u  $\bar{Q} = A$ .

Jednadžba (4.65) i baždarna neovisnost fizikalnih veličina osiguravaju da, iako daje različite Greenove funkcije od konvencionalnog pristupa, metoda pozadinskog polja daje istu S matricu i zbog toga je ona važeća metoda u računu s baždarnim teorijama. Velika je prednost metode pozadinskog polja u tome što zadržava baždarnu neovisnost. To znači da postoji izbor  $\tilde{G}^a$  takav da efektivna akcija  $\tilde{\Gamma}[0; A]$  bude neovisan funkcional od  $A$ . Odabir baždarnog člana je:

$$\tilde{G}^a = \partial_\mu Q_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b Q_\mu^c. \quad (4.66)$$

Može se vidjeti da je u takvom izboru baždarenja funkcional (4.63) invarijantan na infinitezimalne transformacije:

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc} \omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a, \quad (4.67)$$

$$\delta J_\mu^a = -f^{abc} \omega^b J_\mu^c. \quad (4.68)$$

Da bi se to dokazalo, napravi se zamjena varijabli u integraciji

$$Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a - f^{abc} \omega^b Q_\mu^c. \quad (4.69)$$

Iz posljednje dvije jednadžbe slijedi da je član funkcionala  $J \cdot Q$  invarijantan.

Zbrajanjem izraza (4.67) i (4.69) dobiva se:

$$\delta (Q_\mu^a + A_\mu^a) = -f^{abc} \omega^b (Q_\mu^c + A_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (4.70)$$

To je zapravo baždarna transformacija polja varijable  $(Q_\mu^a + A_\mu^a)$  pa je akcija  $S[Q + A]$  također invarijantna.

Napokon, (4.67) je baždarna transformacija od  $A$  dok je (4.69) pridružena rotacija

od  $Q$ . Baždarni član  $\tilde{G}^a$  u (4.66) je kovarijantna derivacija od  $Q$ . Po definiciji je to invarijano na takve transformacije. Može se zato lako pokazati da je faktor koji sadrži determinantu također invarijantan. Iz svega toga slijedi da je cijeli funkcional  $\tilde{Z}$  invarijantan na (4.67) i (4.68).

Obzirom da je  $\tilde{Q}$  samo konjugat varijable  $J$ , slijedi odmah iz invarijantnosti  $\tilde{Z}$  da je  $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$  invarijantan na

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc}\omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a, \quad (4.71)$$

$$\delta\tilde{Q}_\mu^a = -f^{abc}\omega^b\tilde{Q}_\mu^c. \quad (4.72)$$

Obzirom da je (4.72) homogena transformacija pa je  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  invarijantan na samu transformaciju (4.71). Zbog toga se kao rezultat dobiva važna činjenica: jednočestične ireducibilne Greenove funkcije generirane diferenciranjem  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  po  $A$  će poštovati naivne Wardove identitete baždarne invarijantnosti.

Dakle, Feynmanova pravila se razlikuju unutar petlji i van njih. Vanjske noge su uvijek dane pozadinskim poljem, dok petlju mogu činiti gluoni, kvarkovi i duhovi [10], [11].

#### 4.6.4 Renormalizacija QCD koristeći BFM

Renormalizacija se provodi standardno povezujući gole i renormalizirane veličine renormalizacijskim faktorima:

$$(A_\mu)_0 = Z_A^{1/2} A_\mu, \quad (4.73)$$

$$g_0 = Z_g g. \quad (4.74)$$

Renormalizacijom člana:

$$(F_{\mu\nu}^a)_0 = Z_A^{1/2} \left[ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + Z_g Z_A^{1/2} g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right], \quad (4.75)$$

uz zahtjev da  $(F_{\mu\nu}^a)$  zadržava kovarijantni oblik, dobije se veza među renormalizacijskim faktorima:

$$Z_g = Z_A^{-1/2}. \quad (4.76)$$

Zbog toga što je korištena dimenzionalna regularizacija, kako bi se dobila bezdimen-

zionalna renormalizirana konstanta veze, dimenzionalnom analizom se dobije novi izraz koji povezuje голу i renormaliziranu konstantu veze:

$$g_0 = Z_g \mu^\epsilon g. \quad (4.77)$$

Obzirom da je klizna skala  $\mu$  proizvoljna, zahtjeva se da je  $g_0$  neovisan o njoj što daje [12], [10]:

$$\mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = 0 = Z_g \mu^\epsilon \left[ \epsilon g + g \mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \right]. \quad (4.78)$$

Po definiciji vrijedi:

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad (4.79)$$

pa je

$$\beta = -\epsilon g - g \mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}. \quad (4.80)$$

Zadnji se izraz, koristeći lančano pravilo  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} = \beta \frac{\partial}{\partial g}$ , može zapisati kao:

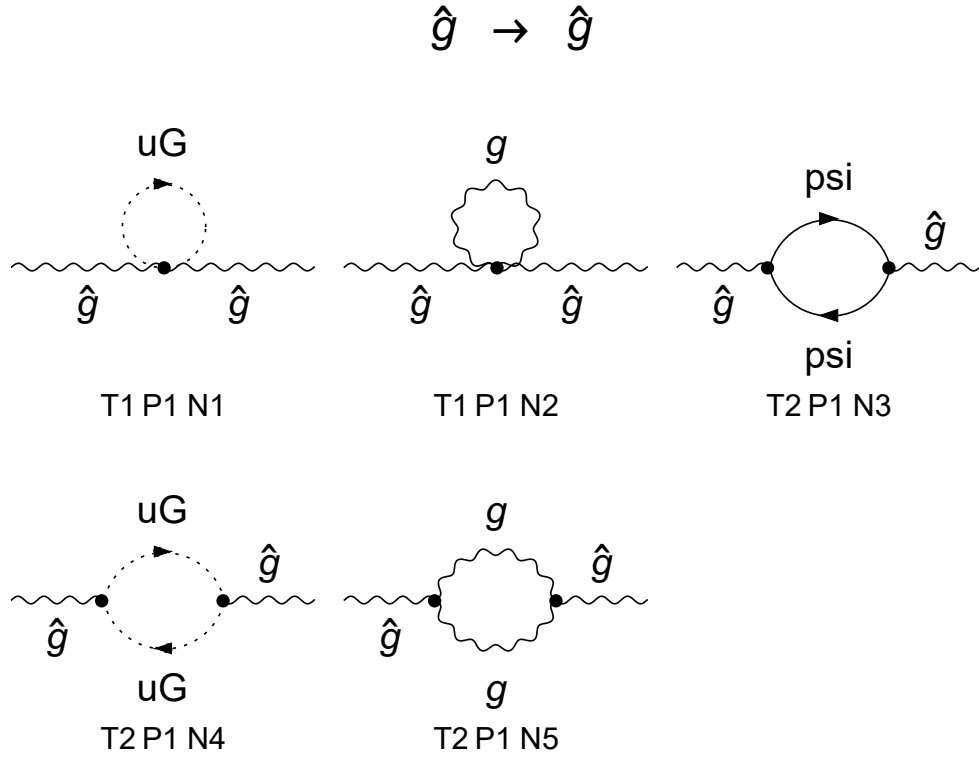
$$\beta = -\epsilon g - g \beta \frac{\partial \ln Z_g}{\partial g}, \quad (4.81)$$

a upotrebom veze među renormalizacijskim faktorima, zapisivanjem istih kao sume  $Z_A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_A^{(n)}}{\epsilon^n}$ , zadržavanjem samo člana uz pol prvog reda te puštanjem  $\epsilon \rightarrow 0$  isti izraz postaje:

$$\beta = -\frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial g} Z_A^{(1)}. \quad (4.82)$$

## 4.7 Radijativne korekcije za QCD koristeći BFM na razini jedne petlje

Za razliku od prethodno računatih dijagrama za QCD na jednoj petlji gdje su se računale korekcije vrhova (2 dijagrama), fermiona (jedan dijagram) i baždarnog bozona (4 dijagrama), koristeći metodu pozadinskog polja, potrebno je bilo izračunati samo doprinose tri dijagrama (odnosno 5, ali doprinosi dva dijagrama su jednaki nuli). Dakle, na razini jedne petlje su računati dijagrami dani na slici 4.18.



Slika 4.18: Dijagrami korekcije pozadinskog polja. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Amplitude danih dijagrama su redom:

$$i\Pi_1^{ab,\mu\nu} = 0, \quad (4.83)$$

$$i\Pi_2^{ab,\mu\nu} = 0, \quad (4.84)$$

$$i\Pi_3^{ab,\mu\nu} \supseteq \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{-4}{3\epsilon} g^2 \delta^{ab} S_F N_f (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu),$$

$$i\Pi_4^{ab,\mu\nu} \supseteq \frac{ig^2 C_A \delta^{ab} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)}{(4\pi)^2 3\epsilon}, \quad (4.85)$$

$$i\Pi_5^{ab,\mu\nu} \supseteq \frac{5ig^2 C_A \delta^{ab} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)}{24\pi^2 \epsilon}. \quad (4.86)$$

Pri računu ovih doprinosa je provedena standardna procedura (Feynmanova parametrizacija, Wickova rotacija, dimenzionalna regularizacija, razvoj i zadržavanje

članova proporcionalnih s  $\epsilon^{-1}$ ). Amplitude su zbrojene i dobio se rezultat:

$$i\Pi^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^2\delta^{ab}(11C_A - 4N_fS_F)(k^2g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)}{(4\pi)^2 3\epsilon}. \quad (4.87)$$

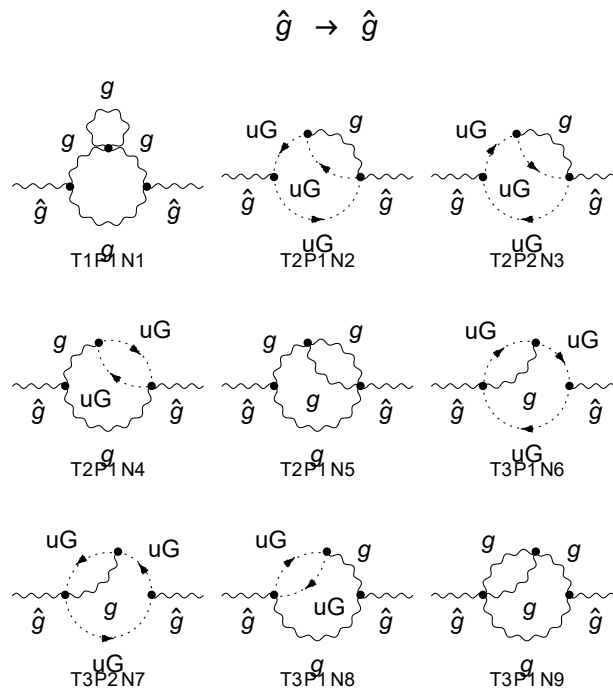
k su ulazni/ izlazni impulsi, a o konstantama koje se javljaju  $C_A, S_F$  se može više naći u Dodatku A. Sad je samo bitno naglasiti da će u daljnjem računu za Dynkinov indeks biti uzeto  $S_F = 1/2$ .

Još preostaje iščitati renormalizacijski faktor  $Z_{GB}^{1L}$  na razini jedne petlje:

$$Z_{GB}^{1L} = \frac{g^2(11C_A - 2N_F)}{3(4\pi)^2\epsilon}. \quad (4.88)$$

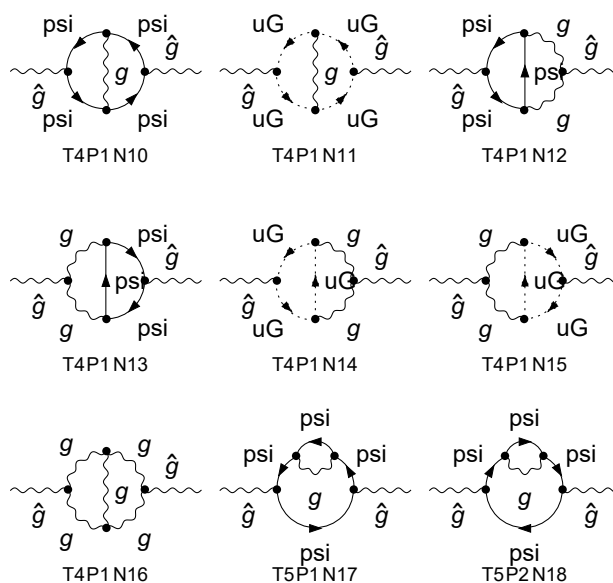
## 4.8 Radijativne korekcije za QCD koristeći BFM na razini dvije petlje

Dijagrami na razini dvije petlje čiji su doprinosi računati su prikazani na slikama 4.19-4.22.



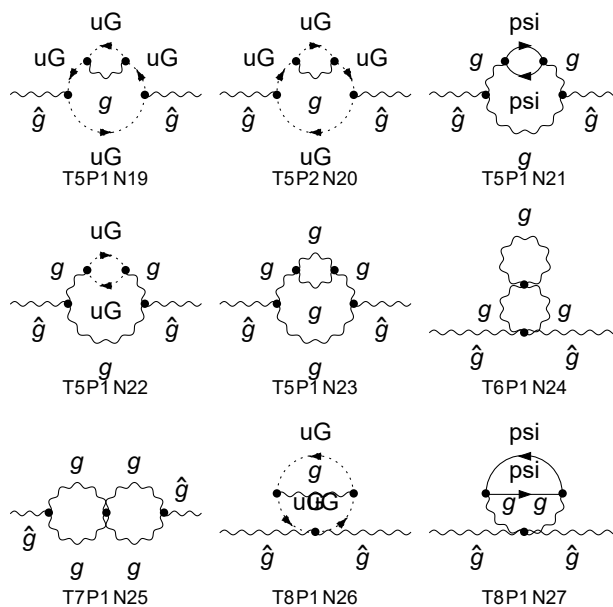
Slika 4.19: Dijagrami korekcije pozadinskog polja na razini dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-9 od 31.

$$\hat{g} \rightarrow \hat{g}$$

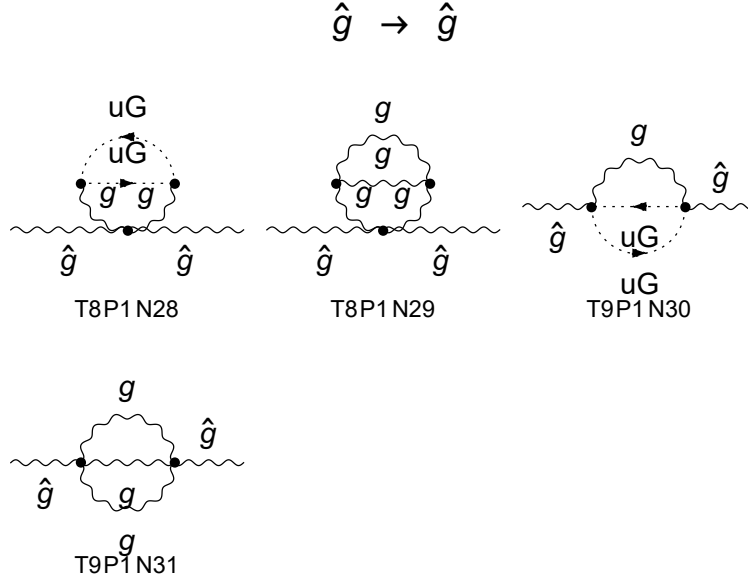


Slika 4.20: Dijagrami korekcije pozadinskog polja na razini dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 10-18 od 31.

$$\hat{g} \rightarrow \hat{g}$$



Slika 4.21: Dijagrami korekcije pozadinskog polja na razini dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 19-27 od 31.



Slika 4.22: Dijagrami korekcije pozadinskog polja na razini dvije petlje. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 28-31 od 31.

Amplitude prikazanih dijagrama su redom:

$$i\Pi_1^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{24}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{26}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{27}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{28}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{29}^{ab,\mu\nu} = 0, \quad (4.89)$$

$$i\Pi_2^{ab,\mu\nu} = i\Pi_3^{ab,\mu\nu} = -\frac{i g^4 N^2 \delta^{ab} (Dk^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} - 3k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{768\pi^8 (D-4)k^2}, \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} i\Pi_4^{ab,\mu\nu} &= i\Pi_8^{ab,\mu\nu} = \\ &= \frac{i g^4 N^2 \delta^{ab} (6Dk^2 g^{\mu\nu} - 5Dk^\mu k^\nu - 19k^2 g^{\mu\nu} + 15k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{1536\pi^8 (D-4)k^2}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} i\Pi_5^{ab,\mu\nu} &= i\Pi_9^{ab,\mu\nu} = \\ &= \frac{3i g^4 N^2 \delta^{ab} ((D^2 - 10D + 21)k^\mu k^\nu + (5D - 17)k^2 g^{\mu\nu}) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{512\pi^8 (D-4)k^2}, \end{aligned} \quad (4.92)$$



$$i\Pi_6^{ab,\mu\nu} = i\Pi_7^{ab,\mu\nu} = -\frac{ig^4 N^2 \delta^{ab} ((D-3)k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{768\pi^8 (D-4)k^2}, \quad (4.93)$$

$$i\Pi_{10}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4 (D-2) D N_f \delta^{ab}}{6144\pi^8 (D-4)^2 (D-1) N} \cdot \left( 3(D-4) (D^2 - 7D + 16) (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \left( B_{(1,0),(1,0)}^{(D)} \right)^2 + \frac{2((3D^3 - 19D^2 + 68D - 112) k^2 g^{\mu\nu} - 2(D^3 - 5D^2 + 22D - 48) k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{k^2} \right) \quad (4.94)$$

$$i\Pi_{11}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4 N^2 \delta^{ab}}{1536\pi^8 (D-4)^2 (D-1) k^2} \cdot \left( k^2 g^{\mu\nu} \left( 4(D^2 - 2D - 2) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} - 3(D-4)k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 \right) + k^\mu k^\nu \left( 3(D-4)k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 + 2(D^3 - 11D^2 + 28D - 12) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right) \right), \quad (4.95)$$

$$i\Pi_{12}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{13}^{ab,\mu\nu} = \frac{-i(D-2) D g^4 N_f N \delta^{ab}}{6144\pi^8 (D-4)(D-1)k^2} \cdot \left( k^\mu k^\nu \left( 2(D^2 + 5D - 24) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} - 9(D-4)k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 \right) + k^2 g^{\mu\nu} \left( 9(D-4)k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 + 4(14 - 5D) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right) \right), \quad (4.96)$$

$$i\Pi_{14}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{15}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4 N^2 \delta^{ab} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)}{512\pi^8 (D-4)(D-1)k^2} \cdot \left( (D-4)k^2 \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 - 2(D-3) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)} \right), \quad (4.97)$$

$$i\Pi_{16}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4 N^2 \delta^{ab}}{512\pi^8 (D-4)^2 (D-1)} \cdot \left( (D-4)(6D^2 - 27D + 23)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \left( B_{[1,0][1,0]}^{(D)} \right)^2 - \frac{2(2(D^3 - 16D^2 + 51D - 34)k^2 g^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{(D^4 - 12D^3 + 65D^2 - 142D + 84)k^\mu k^\nu J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{k^2} \right), \quad (4.98)$$

$$i\Pi_{17}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{18}^{ab,\mu\nu} = \frac{i(D-2)Dg^4(N^2-1)N_f\delta^{ab}}{6144\pi^8(D-4)k^2N} \cdot ((8-3D)k^2g^{\mu\nu} + 4(D-3)k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}, \quad (4.99)$$

$$i\Pi_{19}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{20}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4N^2\delta^{ab}(Dk^\mu k^\nu - 4k^2g^{\mu\nu})J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{1536\pi^8(D-4)k^2}, \quad (4.100)$$

$$i\Pi_{21}^{ab,\mu\nu} = \frac{i(D-2)Dg^4N_fN\delta^{ab}}{3072\pi^8(D-6)(D-4)(D-1)k^2} \cdot (4(5D^2 - 59D + 126)k^2g^{\mu\nu} + (D^3 - 31D^2 + 270D - 528)k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}, \quad (4.101)$$

$$i\Pi_{22}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4N^2\delta^{ab}}{1536\pi^8(D-6)(D-4)(D-1)k^2} \cdot (4(-6D^3 + 49D^2 - 97D + 18)k^2g^{\mu\nu} + (23D^3 - 185D^2 + 354D - 48)k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}, \quad (4.102)$$

$$i\Pi_{23}^{ab,\mu\nu} = \frac{-ig^4N^2\delta^{ab}}{512\pi^8(D-6)(D-4)(D-1)k^2} \cdot (4(3D^3 - 46D^2 + 133D - 78)k^2g^{\mu\nu} + (D^4 - 24D^3 + 229D^2 - 590D + 336)k^\mu k^\nu) J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}, \quad (4.103)$$

$$i\Pi_{25}^{ab,\mu\nu} = \frac{-3ig^4N^2\delta^{ab}(k^\mu k^\nu - k^2g^{\mu\nu})\left(B_{[1,0][1,0]}^{(D)}\right)^2}{128\pi^8}, \quad (4.104)$$

$$i\Pi_{30}^{ab,\mu\nu} = \frac{ig^4N^2g^{\mu\nu}\delta^{ab}J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{512\pi^8}, \quad (4.105)$$

$$i\Pi_{31}^{ab,\mu\nu} = \frac{-3i(D-1)g^4N^2g^{\mu\nu}\delta^{ab}J_{[1,0][1,0][1,0]}^{(D)}}{512\pi^8}. \quad (4.106)$$

U računu su korištene relacije  $C_A = N$  i  $C_F = (N^2 - 1)/2N$ . Više o tome se može naći u Dodatku A.

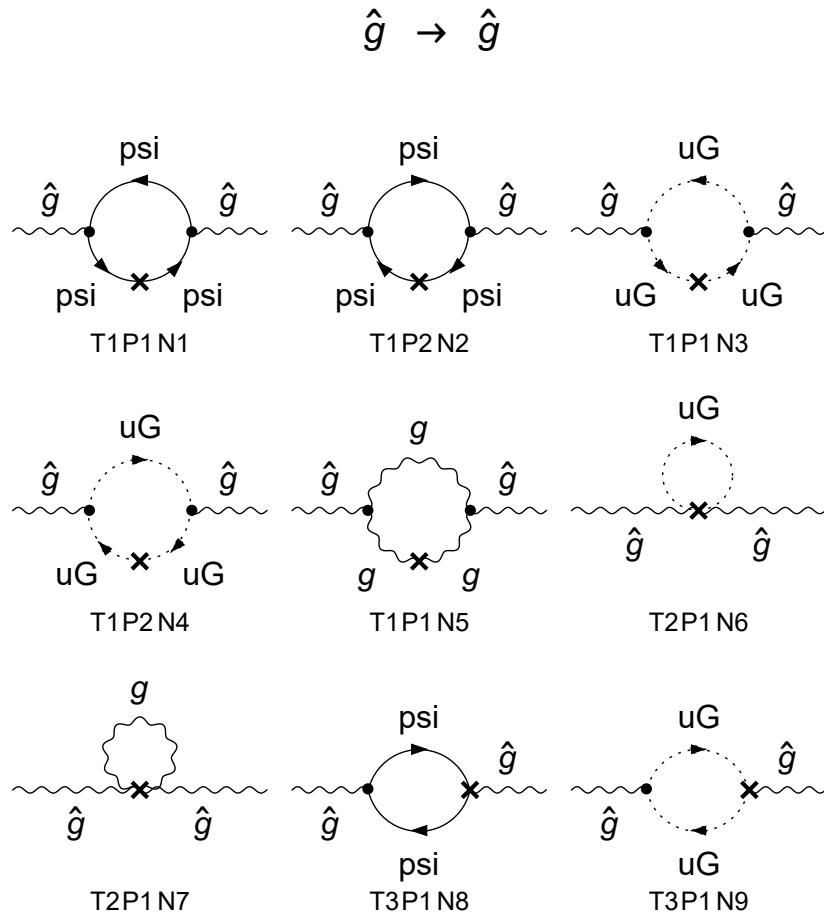
Ovakve amplitude su se zbrojile, izraz se razvio do člana proporcionalnog s  $\epsilon^{-1}$  te je

dobiven izraz:

$$i\Pi_{2L}^{ab,\mu\nu} = \frac{-i g^4 (14N^3 - 5N^2N_f + 3N_f) \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{1536\pi^4 N \epsilon}. \quad (4.107)$$

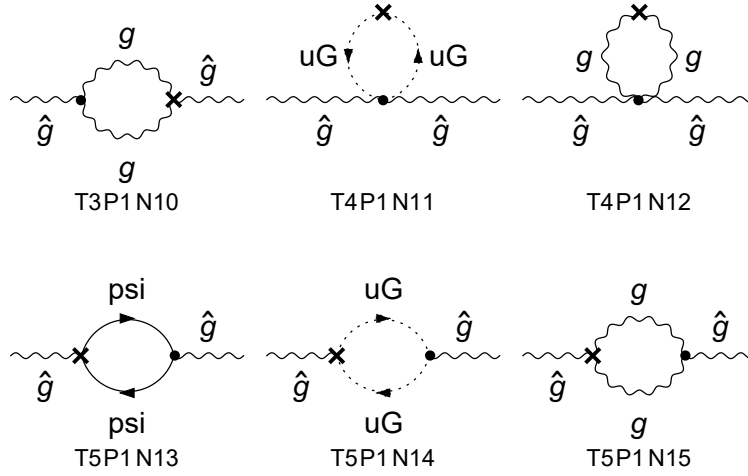
Zanimljiva činjenica vezana za ovakav rezultat jest da se u njemu ne pojavljuju nelokalne divergencije (članovi proporcionalni s  $\log(-k^2)$ ). To dalje vodi na zaključak da se ni u sumi amplituda s umetnutim kontračlanovima ne pojavljuju nelokalni članovi.

**Dijagrami s umetnutim kontračlanovima** čiji su doprinosi računati su prikazani na slikama 4.23 i 4.24.



Slika 4.23: Dijagrami korekcije pozadinskog polja s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-9 od 15.

$$\hat{g} \rightarrow \hat{g}$$



Slika 4.24: Dijagrami korekcije pozadinskog polja s umetnutim kontračlanovima. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 10-15 od 15.

Amplitude ovih dijagrama su redom:

$$i\Pi_{CT,1}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,2}^{ab,\mu\nu} = \frac{-(D-2)D\delta Z_{qq}g^2 N_f \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{64\pi^2(D-1)}, \quad (4.108)$$

$$i\Pi_{CT,3}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,4}^{ab,\mu\nu} = \frac{\delta Z_{ghgh} g^2 N \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{16\pi^2(D-1)}, \quad (4.109)$$

$$i\Pi_{CT,5}^{ab,\mu\nu} = \frac{(D+1)\delta Z_{GG} g^2 N \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{16\pi^2}, \quad (4.110)$$

$$i\Pi_{CT,6}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,7}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,11}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,12}^{ab,\mu\nu} = 0, \quad (4.111)$$

$$i\Pi_{CT,8}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,13}^{ab,\mu\nu} = \frac{\delta Z_{qqGb}(D-2)D g \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{64\pi^2(D-1)}, \quad (4.112)$$

$$i\Pi_{CT,9}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,14}^{ab,\mu\nu} = \frac{-\delta Z_{ghghGb} \cdot g N \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}}{16\pi^2(D-1)}, \quad (4.113)$$

$$i\Pi_{CT,10}^{ab,\mu\nu} = i\Pi_{CT,15}^{ab,\mu\nu} = \frac{g N \delta^{ab}}{32\pi^2(D-1)} \cdot ((8-7D)\delta Z_{GGGb} + (2D-3)g\delta Z_{GG}) (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_{[1,0][1,0]}^{(D)}. \quad (4.114)$$

Ono što preostaje izračunati su svi  $\delta Z$  koji se pojavljuju u ovim amplitudama. Kako bi se zadržala preglednost, sav račun se napravio u Dodatku B, a rezultati su:

$$\delta Z_{qq} = -\frac{g^2 C_F}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (4.115)$$

$$\delta Z_{ghgh} = \frac{g^2 C_A}{32\pi^2 \epsilon}, \quad (4.116)$$

$$\delta Z_{GG} = \frac{g^2 (5C_A - 2N_f)}{48\pi^2 \epsilon}, \quad (4.117)$$

$$\delta Z_{qqGb} = -\frac{g^3 C_F}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (4.118)$$

$$\delta Z_{ghghGb} = \frac{g^3 C_A}{32\pi^2 \epsilon}, \quad (4.119)$$

$$\delta Z_{GGGb} = \frac{g^3 (5C_A - 2N_f)}{48\pi^2 \epsilon}. \quad (4.120)$$

Kontračlanovi su ubačeni u amplitude (4.108) – (4.114),  $C_A$  i  $C_F$  su izraženi preko  $N$ , doprinosi su zbrojeni, napravljen je razvoj i zadržani su samo članovi proporcionalni s  $\epsilon^{-1}$  te se kao rezultat dobio izraz:

$$i\Pi_{CT}^{ab,\mu\nu} = \frac{-ig^4 N (5N - 2N_f) \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{384\pi^4 \epsilon}. \quad (4.121)$$

Dobiven je rezultat koji ne sadrži nelokalne divergencije (članove proporcionalne s  $\log(-k^2)$ ). To je bilo i očekivano obzirom na to da se nelokalni članovi ne pojavljuju ni u sumi amplituda na dvije petlje bez umetnutih kontračlanova.

Da bi se dobila beta funkcija za QCD na dvije petlje, još preostaje iščitati  $\delta Z_{GB}^{2L}$  iz

sume (4.107) + (4.121):

$$i\Pi_{2L}^{ab,\mu\nu} + i\Pi_{CT}^{ab,\mu\nu} = \frac{-i g^4 (34N^3 - 13N^2N_f + 3N_f) \delta^{ab} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{1536\pi^4 N \epsilon}, \quad (4.122)$$

$$\rightarrow \delta Z_{GB}^{2L} = \frac{g^4 (34N^3 - 13N^2N_f + 3N_f)}{1536\pi^4 N \epsilon}. \quad (4.123)$$

#### 4.8.1 Izračun beta funkcije na razini dvije petlje za QCD

Upotrebljava se izraz (4.82):

$$\beta = -\frac{g^2}{2} \frac{\partial Z}{\partial g} = \quad (4.124)$$

$$= -\frac{g^2}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{g^2 (11N - 2N_f)}{3(4\pi)^2} + \frac{g^4 (34N^3 - 13N^2N_f + 3N_f)}{1536\pi^4 N} \right) =$$

$$= -g^3 \frac{11N - 2N_f}{48\pi^2} - g^5 \frac{34N^3 - 13N^2N_f + 3N_f}{768\pi^4 N}. \quad (4.125)$$

Tako dobivena beta funkcija se slaže s literaturom [11]. Obzirom da se kroz cijeli račun zadržavao općeniti  $N$ , sad se uvrštavanjem  $N = 3$  za SU(3) grupu simetrija dobiva:

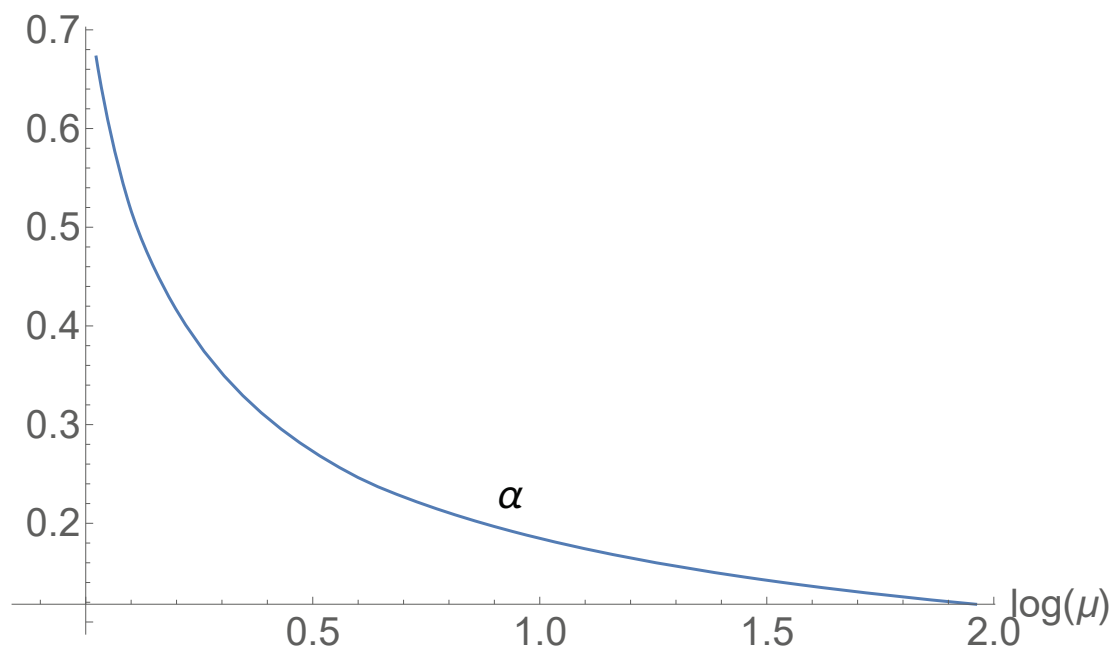
$$\beta = -g^3 \frac{33 - 2N_f}{48\pi^2} - g^5 \frac{306 - 38N_f}{768\pi^4}. \quad (4.126)$$

Zanimljivo je primjetiti da povećanjem broja uključenih fermiona, beta funkcija postaje pozitivna.

Integracijom tako dobivene beta funkcije se dobiva ovisnost konstante veze o energiji. Integracija je obavljena numerički od mase Z bozona do mase s kvarka. Naime, područje promatranja energije se podijelilo na tri dijela: od mase Z bozona do mase b kvarka gdje je uključen broj fermiona bio pet, od mase b kvarka do mase c kvarka gdje je uključen dio fermiona bio četiri i od mase c kvarka do mase s kvarka gdje su se uključila tri fermiona. Donja granica integracije je 0.758 GeV što je približno masa  $\rho$  mezona. Ispod te energije je program javljao greške i funkcija nije bila stabilna.

Ovisnost  $\alpha$  o energiji je dana na slici 4.25.

Dakle, porastom energije konstanta vezanja se smanjuje i to je razlog zbog kojeg je korištenje perturbacijskog računa smetnje dozvoljeno i na visokim energijama.



Slika 4.25: Ovisnost  $\alpha$  o energiji na skali od mase s kvarka do mase Z bozona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

## 5 Zaključak

Renormalizacija je postupak uklanjanja divergencija iz teorije na način da se divergentni doprinosi uključuju u takozvane kontračlanove i na taj se način redefiniiraju fizikalne veličine. Uvođenjem klizne skale svi parametri teorije postaju ovisni o energiji na kojoj se proces odvija. To je od velike važnosti jer daje predviđanja za parametre na energijama višim od onih koje su trenutno dostupne eksperimentu.

Renormalizirale su se dvije teorije na razini dvije petlje: kvantna elektrodinamika (QED) i kvantna kromodinamika (QCD). U računu amplituda su zadržavani samo članovi do reda  $\epsilon^{-1}$  jer je pokazano da samo ti članovi doprinose u renormalizacijskim grupnim jednadžbama. Dobivene su beta funkcije za obje teorije.

Posebno, u QED je izračunat i anomalni magnetski moment na razini dvije petlje. To je zahtijevalo da se u računu korekcije vrha zadrže i konačni članovi iz kojih se dobio form faktor  $F_2(q^2)$  preko kojeg je i izračunat anomalni magnetski moment.

Posebnost u računu renormalizacijskih grupnih jednadžbi za QCD je u tome što je uvedena nova metoda koja olakšava račun. Naime, korištenjem istog pristupa kao i za QED je dobiveno puno dijagrama na razini dvije petlje koji su uključivali korekcije vlatite energije gluona, kvarka i korekcije vrha. Zbog toga što je paket TARCER

ograničen samo na računanje vlastitih energija, trebale su se uvoditi posebne pretpostavke koje možda i ne bi dale dobar rezultati zbog mogućnosti pojave infracrvenih divergencija. Zbog toga se uvela metoda pozadinskog polja koja zahtjeva samo izračun amplituda vlastite energije čije su izlazne linije pozadinska polja, a unutarnje gluoni, kvarkovi i duhovi.

Usporedbom dobivenih ovisnosti konstanta veze o energiji za QED i QCD se primjećuje da se ponašaju suprotno. U QED konstanta veze raste porastom energije što zapravo znači da električni naboj "slabi" na velikim udaljenostima, tj. niskim energijama. Razlog je u tome što se vakuum oko nabijene čestice polarizira i zbog toga se na velikim udaljenostima od njega, čini slabijim. Ta se pojava naziva *zasjenjenje*. Međutim, zbog toga što je u QCD dozvoljeno međudjelovanje više gluona, konstanta veze u tom slučaju pada porastom energije - *asimptotska sloboda*. To je jako važan rezultat jer dozvoljava korištenje računa smetnje na visokim energijama.



# Dodaci

## Dodatak A SU(N) algebra

SU(N) je specijalna unitarna grupa čije elemente čine  $N \times N$  matrice. Uvjeti koji moraju biti ispunjeni da bi  $A$  bio element SU(N) grupe su:

a) unitarnost :  $A^\dagger A = 1$ , gdje je  $A^\dagger$  konjugirana i transponirana  $A$  matrica,

b) za determinantu mora vrijediti  $\det A = 1$ .

su(N) Lieva algebra ima  $N^2 - 1$  generatora: hermitskih matrica s iščezavajućim tragom  $\text{Tr } T^a = 0$  koji zadovoljavaju komutacijsku relaciju:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \text{gdje su } a, b, c = 1, 2, \dots, N^2 - 1, \quad (\text{A.1})$$

gdje su  $f^{abc}$  strukturne konstante za koje vrijedi:

$$f^{abc} f^{abd} = C_A \delta^{cd}. \quad (\text{A.2})$$

U daljnjem računu se koristi  $C_A = N$ .

Također, za trag umnoška dvaju generatora vrijedi:

$$\text{Tr} (T^a T^b) = S_F \delta^{ab} \quad \rightarrow \quad \text{Tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{A.3})$$

Koristeći ovakvu konvenciju,  $f^{abc}$  su potpuno antisimetrični i realni. To se može pokazati koristeći antikomutativnost komutatora.

a) strukturne konstante su antisimetrične:

$$\begin{aligned} i f^{abc} T^c &= [T^a, T^b] = - [T^b, T^a] = -i f^{bac} T^c, \\ \Rightarrow f^{abc} &= -f^{bac}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

b) strukturne konstante su realne:

$$\begin{aligned} i f^{abc} T^c &= [T^a, T^b] = [T^b, T^a]^\dagger = -i (f^{bac})^* T^c, \\ \Rightarrow f^{abc} &= (f^{bac})^*. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Također, za umnožak istih generatora vrijedi:

$$T^a T^a = C_F I, \quad (\text{A.6})$$

gdje je  $I$  zapravo  $N \times N$  jedinična matrica. Preostaje još izračunati  $C_F$ , odnosno izraziti ga preko  $N$ . Uzimajući trag relacije (A.5), upotrebljena je činjenica da je  $\text{Tr } I = N$ , relacija (A.2) i sumacija po  $a$  -  $\delta^{aa} = N^2 - 1$  te se dobila ovisnost  $C_F$  o  $N$  [13]:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^a T^a) &= C_F \text{Tr } I = C_F N, \\ \text{Tr}(T^a T^a) &= \frac{1}{2} \delta^{aa}, \\ \rightarrow \frac{N^2 - 1}{2} &= C_F N, \\ \rightarrow C_F &= \frac{N^2 - 1}{2N}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

U  $\text{su}(N)$  algebri se također može definirati i potpuno simetričan tenzor trećeg ranga:

$$d^{abc} = 2 \text{Tr} [\{T^a, T^b\} T^c]. \quad (\text{A.8})$$

Iz relacije (A.8) slijedi:  $d_{aac} = d_{aca} = d_{caa} = 0$ , gdje se podrazumijeva suma po ponovljenim indeksima.

Također vrijedi:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}), \quad (\text{A.9})$$

a veza potpuno simetričnih i antisimetričnih tenzora s  $N$  je:

$$\begin{aligned} f_{abc} f_{abd} &= C_A \delta_{cd}, \\ d_{abc} d_{abd} &= \left( \frac{N^2 - 4}{N} \right) \delta_{cd}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

U radu su još od koristi bile relacije [13]:

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (\text{A.11})$$

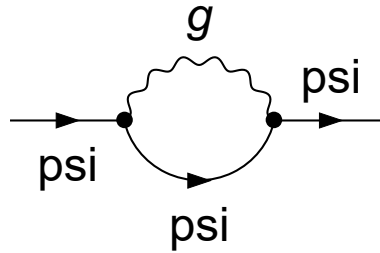
$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{4N} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{8} (d^{abe} d^{cde} - f^{abe} f^{cde} + i f^{abe} d^{cde} + i f^{cde} d^{abe}), \quad (\text{A.12})$$

gdje indeksi  $i, j, k, l$  poprimaju vrijednosti  $1, \dots, N$ .

**Dodatak B Izračun  $\delta Z_{qq}, \delta Z_{ghgh}, \delta Z_{GG}, \delta Z_{qqGb}, \delta Z_{ghghGb}$  i  $\delta Z_{GGGb}$**

Dijagram vlastite energije kvarka je dan na slici B.1: Račun za ovaj dijagram je

**psi  $\rightarrow$  psi**



**T1 P1 N1**

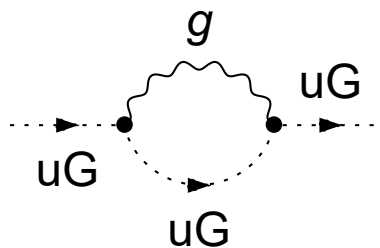
Slika B.1: Dijagram vlastite energije kvarka. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

već napravljen u 4. poglavlju pa se samo iščitava rezultat dan u poglavlju 4.4.4

$$\delta Z_{qq} = -\frac{g^2 C_F}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{B.13})$$

Dijagram vlastite energije duha je dan na slici B.2:

**uG  $\rightarrow$  uG**



**T1 P1 N1**

Slika B.2: Dijagram vlastite energije duha. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

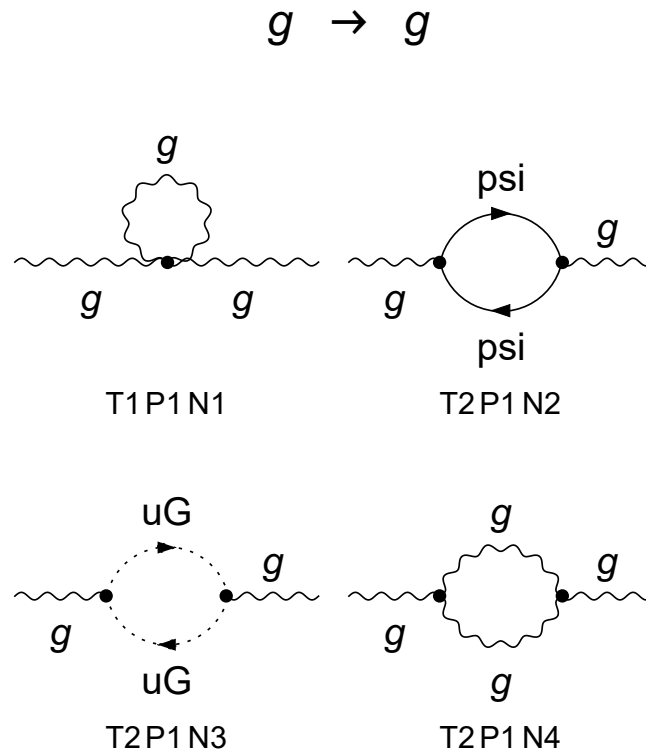
Amplituda ovog dijagrama sadrži član uz  $\epsilon^{-1}$ :

$$\frac{-i g^2 k^2 C_A \delta^{ab}}{32\pi^2 \epsilon}, \quad (\text{B.14})$$

iz kojeg se iščitava:

$$\delta Z_{ghgh} = \frac{g^2 C_A}{32\pi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.15})$$

**Dijagrami vlastite energije gluona** su dani na slici B.3: Račun amplituda ovih



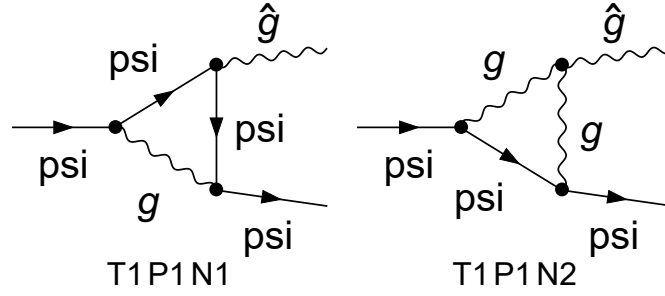
Slika B.3: Dijagram vlastite energije gluona. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

dijagrama je već izračunat u poglavlju 4 i sad se samo može iščitati

$$\delta Z_{GG} = \frac{g^2 (5C_A - 2N_f)}{48\pi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.16})$$

**Dijagrami korekcije vrha s kvarkom, antikvarkom i pozadinskim poljem** su dani na slici B.4:

$\psi \rightarrow \hat{g} \psi$



Slika B.4: Dijagram korekcije vrha s kvarkom, antikvarkom i pozadinskim poljem. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Suma amplituda ta dva dijagrama uz član  $1/\epsilon$  je:

$$-i\Sigma \supseteq \frac{i g^3 C_F \gamma^\mu T_{31}^b}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (\text{B.17})$$

gdje je  $T_{31}^b$  matrica, eksponent b označava boju, a indeksi 3 i 1 označavaju okus. Iz tog izraza se iščita:

$$\delta Z_{qqGb} = -\frac{g^3 C_F}{16\pi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.18})$$

**Dijagrami korekcije vrha s dva duha i pozadinskim poljem** su dani na slici B.5.

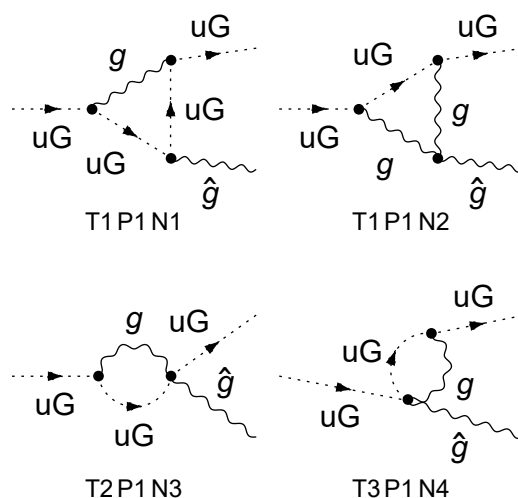
Suma amplituda svih dijagrama je razvijena i zadržani su članovi samo uz  $1/\epsilon$ :

$$-i\Sigma \supseteq \frac{g^3 C_A (2k_1^\mu + k_2^\mu) f^{abc}}{32\pi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.19})$$

Iz toga se dalje iščitava:

$$\delta Z_{ghghGb} = \frac{g^3 C_A}{32\pi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.20})$$

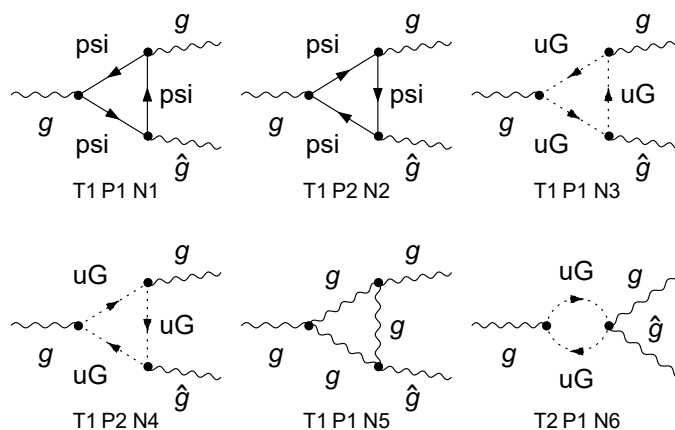
$$uG \rightarrow uG \hat{g}$$



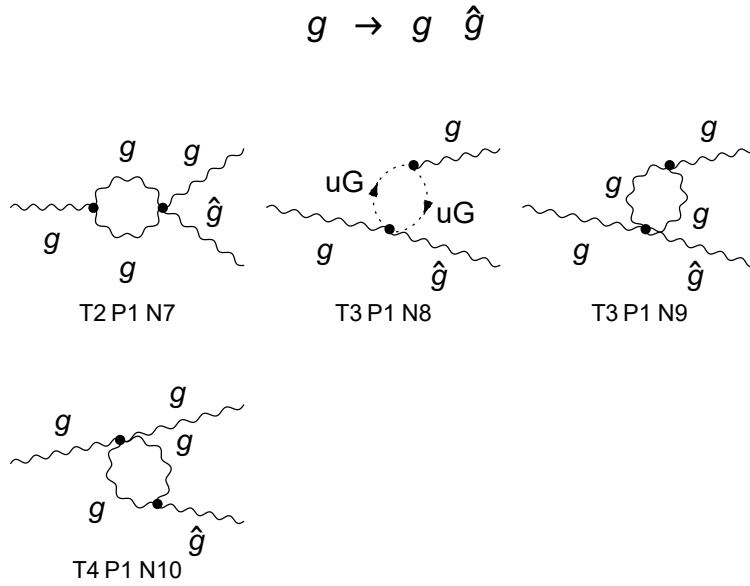
Slika B.5: Dijagram korekcije vrha s dva duha i pozadinskim poljem. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada.

Dijagrami korekcije vrha s dva gluona i pozadinskim poljem su dani na slici B.6 i B.7.

$$g \rightarrow g \hat{g}$$



Slika B.6: Dijagram korekcije vrha s dva gluona i pozadinskim poljem. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 1-6 od 10.



Slika B.7: Dijagram korekcije vrha s dva gluona i pozadinskim poljem. Slika je dobivena kodom napravljenim u sklopu diplomskog rada i prikazuje dijagrame 7-10 od 10.

Doprinosi ovih dijagrama su sumirani, suma je razvijena i zadržani su članovi uz  $1/\epsilon$ :

$$-i\Sigma \supseteq \frac{-g^3 (5C_A - 2N_f) f^{abc}}{48\pi^2\epsilon} \cdot (g^{\mu\nu} (2k_1^\rho + k_2^\rho) - g^{\mu\rho} (k_1^\nu + 2k_2^\nu) + g^{\nu\rho} (k_2^\mu - k_1^\mu)). \quad (\text{B.21})$$

Iz toga se iščita:

$$\delta Z_{GGGb} = \frac{g^3 (5C_A - 2N_f)}{48\pi^2\epsilon}. \quad (\text{B.22})$$

## Bibliography

- [1] Ilakovac, Amon: Relativistička kvantna fizika prema Peskin-Schroederu (skripta iz kolegija Teorija polja 1 i 2)
- [2] Weinberg, Steven: The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications 1st ed., Cambridge University Press 1996
- [3] Peskin, Michael E. ; Schroeder, Daniel V.: An Introduction To Quantum Field Theory, Addison-Wesley 1995
- [4] Grozin, Andrey: Lectures on QED and QCD - Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi- Loop Feynman diagrams, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007
- [5] Mađor-Božinović, Marija: Renormalizacijska grupa (diplomski rad) <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:295963>
- [6] Machacek, Marie E.; Vaughn, Michael T.: Two-loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory,(I). Wave Function Renormalization, Nucl. Phys. B 222(1983) 83-103
- [7] Thomson, Mark: Modern Particle Physics, University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom 2013
- [8] Kumerički, Krešimir: Grupe, simetrije i tenzori u fizici, Zagreb 7.svibnja 2012
- [9] Flicker F. Faddeev-Popov ghosts <http://www.felixflicker.com/pdf/Ghosts.pdf>, 15.8.2019.
- [10] Abbott, L. F.: Introduction to the background field method; ACTA PHYSICA POLONICA, 1982
- [11] Abbott, L. F.; Grisau, M. T.; Schaefer, R.K.:The background field method and the S-matrix; Nuclear Physics B229 (1983) 372-380, North-Holland Publishing Company
- [12] D. Gross, Methods in Field Theory, ed. C.R. Balian, J. Zinn-Justin, North Holland 1976.



- [13] H. Haber: Useful relations involving the generators of  $su(N)$ , Physics 218, Winter 2016 <http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph218/sunid17.pdf>, 10.7.2019.