SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Belcar

DINAMIKA HÉNONOVIH PRESLIKAVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sonja Štimac

Zagreb, srpanj, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Dinamički sustavi, osim u matematici, imaju primjenu u fizici, biologiji, kemiji, ekonomiji, medicini i povijesti. Kao osnivač dinamičkih sustava smatra se francuski matematičar Henri Poincaré. On je revolucionirao istraživanje globalnih svojstava nelinearnih diferencijalnih jednadžba uvođenjem kvantitativnih metoda geometrije i topologije za razliku od strogo analitičkih metoda. U prvoj polovici 20tog stoljeća ove tehnike preuzeo je i unaprijedio Birkhoff, koji je naglašavao značaj diskretne dinamike za razumijevanje složenih problema.

Jedan od najviše istraživanih primjera diskretnih dinamičkih sustava kod kojeg se pojavljuje kaotično ponašanje je Hénonovo preslikavanje, $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ [1][2],

$$H_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x). \tag{1}$$

Preslikavanje je definirao francuski matematičar i astronom Michel Hénon [3] 1976. godine. Hénonovo preslikavanje ovisi o dva realna parametra. Osim toga ima samo jedan nelinearni član pa se, u vrijeme kada je preslikavanje definirano, činilo kao primjer jednostavnog dvodimenzionalnog nelinearnog preslikavanja. Pokazalo se da je dinamika Hénonovih preslikavanja vrlo složena te ju i danas vrlo slabo razumijemo.

U diplomskom radu ćemo detaljnije istražiti neka svojstva Hénonovih preslikavanja. U prvom poglavlju navodimo osnovne definicije koje ćemo koristiti u radu. U drugom poglavlju dokazat ćemo neka osnovna svojstva Hénonovih preslikavanja kao sto je ovisnost orijentacije preslikavanja o parametru b, izračunat ćemo fiksne točke i njihovu vrstu te periodične točke osnovnog perioda dva. U trećem poglavlju dokazujemo ne postojanje periodičnih točaka prije tangencijalne bifurkacije sedlaste fiksne točke. Ovo poglavlje dovodi nas do četvrtog poglavlja u kojem nam je cilj dokazati egzistenciju hiperboličkog skupa za određeni skup parametara. Uz klasične analitičke metode koristimo i geometrijske te topološke metode.

Poglavlje 1

Osnovne definicije

Definicija 1.1. *Neka je* $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Neka je* $f : U \to V$ *funkcija, gdje su* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoreni skupovi. Za* f *kažemo da je* C^r difeomorfizam *ako je bijekcija i ako su* f *i* f^{-1} *neprekidno diferencijabilne* r *puta.*

Definicija 1.2. *Neka je* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *preslikavanje,* $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. *Kažemo da* f čuva orijentaciju *ako za svake dvije točke* $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *takve da*

$$\arctan \frac{y}{x} > \arctan \frac{v}{u},$$

vrijedi

$$\arctan \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} > \arctan \frac{f_2(u, v)}{f_1(u, v)}.$$

Kažemo da f mijenja orijentaciju *ako za svake dvije točke* $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *takve da*

$$\arctan \frac{y}{x} > \arctan \frac{v}{u},$$

vrijedi

$$\arctan \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} < \arctan \frac{f_2(u, v)}{f_1(u, v)}.$$

Propozicija 1.3. *Neka su* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *preslikavanja.*

1. *Ako* f *i* g *čuvaju orijentaciju tada* $f \circ g$ *čuva orijentaciju.*

2. *Ako* f *čuva orijentaciju, a* g *mijenja orijentaciju tada* $f \circ g$ *i* $g \circ f$ *mijenjaju orijentaciju.*

3. *Ako* f *i* g *mijenjaju orijentaciju tada* $f \circ g$ *čuva orijentaciju.*

Dokaz. Dokazat ćemo prvi slučaj, a ostali slijede analogno.
Pretpostavimo da f i g čuvaju orijentaciju. Neka su $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljne točke. Pretpostavimo da vrijedi

$$\arctan \frac{y}{x} > \arctan \frac{v}{u}.$$

Kako g čuva orijentaciju vrijedi

$$\arctan \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)} > \arctan \frac{g_2(u, v)}{g_1(u, v)}.$$

Nadalje, f čuva orijentaciju vrijedi

$$\arctan \frac{f_2(g(x, y))}{f_1(g(x, y))} > \arctan \frac{f_2(g(u, v))}{f_1(g(u, v))}.$$

Budući da je $f \circ g(x, y) = f(g(x, y)) = (f_1(g(x, y)), f_2(g(x, y)))$ zaključujemo da $f \circ g$ čuva orijentaciju. □

U cijelom radu koristit ćemo sljedeće oznake: ako je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tada ćemo točku dobivenu u n-toj iteraciji označiti s

$$(x_n, y_n) = f^n(x_0, y_0),$$

gdje je $n \in \mathbb{Z}$. Također, djelovanje matrice $A \in \mathcal{M}_2$ na vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ označavat ćemo s $A(x, y)$.

Lema 1.4. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni homeomorfizam zadan dijagonalnom matricom $A \in \mathcal{M}_2$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a, d \in \mathbb{R}$. f čuva orijentaciju ako i samo ako* $\det A > 0$. *Analogno, f mijenja orijentaciju ako i samo ako* $\det A < 0$.

Dokaz. Neka su $(x_0, y_0), (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljne točke. Pretpostavimo da

$$\arctan \frac{y_0}{x_0} > \arctan \frac{v_0}{u_0}.$$

arctan je rastuća funkcija pa vrijedi

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{v_0}{u_0}.$$

Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} ax_0 \\ dy_0 \end{bmatrix}.$$

Ako je $ad = \det A > 0$, tada $\frac{d}{a} > 0$ pa vrijedi

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{d}{a}\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{a}\frac{v_0}{u_0} = \frac{v_1}{u_1}.$$

Kako je arctan je rastuća funkcija f čuva orijentaciju.
Analogno, ako je $ad = \det A < 0$, tada $\frac{d}{a} < 0$ pa vrijedi

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{d}{a}\frac{y_0}{x_0} < \frac{d}{a}\frac{v_0}{u_0} = \frac{v_1}{u_1},$$

odnosno f mijenja orijentaciju.

□

Lema 1.5. *Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni homeomorfizmi, $f(x, y) = A(x, y)$, $g(x, y) = B(x, y)$, gdje su*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

za neke realne brojeve a, b. Tada f mijenja orijentaciju, a g čuva orijentaciju.

Dokaz. Neka su $(x_0, y_0), (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljne točke takve da

$$\arctan\frac{y_0}{x_0} > \arctan\frac{v_0}{u_0}.$$

Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 + ay_0 \end{bmatrix}.$$

Sada iz pretpostavke možemo zaključiti da

$$\arctan\frac{y_1}{x_1} = \arctan\frac{x_0 + ay_0}{y_0} = \arctan\left(\frac{x_0}{y_0} + a\right) < \arctan\left(\frac{u_0}{v_0} + a\right) = \arctan\frac{v_1}{u_1},$$

odnosno f mijenja orijentaciju.
Matricu B možemo zapisati na sljedeći način

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

kao umnožak 2 matrice koje mijenjaju orijentaciju. Iz propozicije 1.3 slijedi da g čuva orijentaciju. □

Teorem 1.6. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni homeomorfizam dan matricom $A \in \mathcal{M}_2$. f čuva orijentaciju ako i samo ako* $\det A > 0$. *Analogno, f mijenja orijentaciju ako i samo ako* $\det A < 0$.

Dokaz. f je linearan homeomorfizam pa vrijedi $\det A \neq 0$. Ako je A dijagonalna matrica, dokaz slijedi iz leme 1.5. Pretpostavimo da A nije dijagonalna. Tada se A može zapisati na jedan od sljedeća dva načine

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{bc-ad}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{bc-ad}{b} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & b \neq 0 \end{cases}.$$

Pretpostavimo da vrijedi $c \neq 0$. Iz leme 1.5 zaključujemo da linearna preslikavanja zadana matricama

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

čuvaju orijentaciju, a linearno preslikavanje zadano matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mijenja orijentaciju. Iz propozicije 1.3 zaključujemo da f čuva orijentaciju ako i samo ako

$$\det \begin{pmatrix} \frac{bc-ad}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} < 0 \iff bc - ad < 0 \iff \det A > 0.$$

Analogno, f mijenja orijentaciju ako i samo ako

$$\det \begin{pmatrix} \frac{bc-ad}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} > 0 \iff bc - ad > 0 \iff \det A < 0.$$

Slučaj $b \neq 0$ dokazuje se analogno. □

Propozicija 1.7. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ difeomorfizam. f čuva (mijenja) orijentaciju ako je $\det Df(x,y) > 0$ ($\det Df(x,y) < 0$) za svaku točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Definicija 1.8. *Neka su X i Y topološki prostori te $f : X \to X$ i $g : Y \to Y$ preslikavanja. f i g su* topološki konjugirani *ako postoji homeomorfizam $h : X \to Y$ takvi da*

$$h \circ f = g \circ h.$$

Definicija 1.9. *Neka je X topološki prostor te $f : X \to X$ preslikavanje. Točku $x \in X$ nazivamo fiksna točka ako vrijedi*

$$f(x) = x.$$

Definicija 1.10. *Neka je X topološki prostor i $f : X \to X$ preslikavanje. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Točka x naziva se periodična točka perioda n ako*

$$f^n(x) = x.$$

Ako uz to još za svaki prirodni broj $m < n$ vrijedi $f^m(x) \neq x$, tada se n zove osnovni period od x.

Definicija 1.11. *Neka je x periodična točka preslikavanja f osnovnog perioda n. Točka x je hiperbolička ako je $|(f^n)'(x)| \neq 1$. Broj $(f^n)'(x)$ se zove* multiplikator *periodične točke.*

Postoje tri vrste hiperboličkih fiksnih točaka.

Definicija 1.12. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfizam. Neka je x hiperbolicna fiksna točka preslikavanja f. Kažemo da je točka x*

1. *privlačna, ako su sve svojstvene vrijednosti matrice $Df(x)$ po apsolutnoj vrijednosti strogo manje od 1,*

2. *odbojna, ako su sve svojstvene vrijednosti matrice $Df(x)$ po apsolutnoj vrijednosti strogo veće od 1,*

3. *sedlasta, ako postoje svojstvene vrijednosti matrice $Df(x)$ koje su po apsolutnoj vrijednosti strogo manje od 1, ali i postoje svojstvene vrijednosti matrice $Df(x)$ koje su po apsloutnoj vrijednosti strogo veće od 1.*

Poglavlje 2

Osnovna svojstva Hénonovih preslikavanja

U ovom poglavlju dokazat ćemo neka osnovna svojstva Hénonovih preslikavanja. Prisjetimo se, Hénonovo preslikavanje $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano je formulom $H_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x)$. Zbog jednostavnosti, označimo $H := H_{a,b}$.

Propozicija 2.1. *Ako je $b \neq 0$, preslikavanje H je C^∞ difeomorfizam.*

Dokaz. Neka je $b \neq 0$ i a proizvoljan. Označimo $H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$. Prvo ćemo dokazati da je H injekcija. Neka su (x, y) i (u, v) proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$ takve da vrijedi $H(x, y) = H(u, v)$. U tom slučaju direktno slijedi $x = u$ i $a - by - x^2 = a - bv - u^2$, odnosno $(x, y) = (u, v)$ pa je H injekcija.

Nadalje, potrebno je dokazati da je H surjekcija. Neka je (x, y) proizvoljna točka u $\mathbb{R}^2$. Tada vrijedi

$$H\left(y, \tfrac{a-x-y^2}{b}\right) = (a - (a - x - y^2) - y^2, y) = (x, y).$$

Primijetimo, kako vrijedi $b \neq 0$, točka je dobro definirana. Drugim riječima, za proizvoljnu točku iz kodomene postoji točka iz domene koju H preslikava u nju pa je H surjekcija. H je zato bijekcija i inverz je

$$H^{-1}(x, y) = \left(y, \tfrac{a-x-y^2}{b}\right). \tag{2}$$

Označimo $H^{-1}(x, y) = (H_1^{-1}(x, y), H_2^{-1}(x, y))$. Preostaje nam primijetiti da su komponente od H i njenog inverza, $H_1, H_2, H_1^{-1}, H_2^{-1}$, ako je $b \neq 0$, klase C^∞. Po definiciji 1.1 H je C^∞ difeomorfizam. □

Napomena 2.2. *Vrijedi*

$$\det DH(x, y) = \begin{vmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

iz čega slijedi po propoziciji 11.7 da Hénonovo preslikavanje čuva orijentaciju ako je $b > 0$, a mijenja ako je $b < 0$.

Teorem 2.3. *Neka je $b = 0$. Tada je preslikavanje H topološki konjugirano kvadratnom preslikavanju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$g(x) = a - x^2.$$

Dokaz. Preslikavanje H u ovom slučaju je

$$H(x, y) = (a - x^2, x).$$

Definirajmo skup

$$P = \{(a - x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Neka je (x, y) proizvoljna točka iz P. Tada $x = a - y^2$ i

$$H(x, y) = H(a - y^2, y) = (a - (a - y^2)^2, a - y^2) = (a - x^2, x) \in P,$$

odnosno, H preslikava skup P u P. Želimo pokazati da su preslikavanja

$$H\Big|_P : P \to P$$

i kvadratno preslikavanje g topološki konjugirana. To ćemo dokazati direktno po definiciji. Neka je $\pi_y : P \to \mathbb{R}$ projekcija na drugu koordinatu

$$\pi_y(x, y) = \pi_y(a - y^2, y) = y.$$

Dokažimo da je π_y injekcija na P. Neka su $(a - x^2, x)$ i $(a - y^2, y)$ proizvoljne točke u P takve da $\pi_y(a - x^2, x) = \pi_y(a - y^2, y)$. Ali to znaci da vrijedi

$$x = \pi_y(a - x^2, x) = \pi_y(a - y^2, y) = y$$

pa je $(a - x^2, x) = (a - y^2, y)$. Drugim riječima, π_y je injekcija. S druge strane, očito je da za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ postoji točka $(a - x^2, x) \in P$ koju π_y preslikava u x. Odnosno, π_y je surjekcija. Osim toga, neprekidnost π_y je očita. Pogledajmo sada inverz

$$\pi_y^{-1}(x) = (a - x^2, x).$$

Svaka komponenta inverza je neprekidna. Zaključujemo da je π_y homeomorfizam. Nadalje,

$$\pi_y \circ H(x, y) = \pi_y(H(a - y^2, y)) = \pi_y(a - (a - y^2)^2, a - y^2) = a - y^2$$
$$g \circ \pi_y(x, y) = g(\pi_y(a - y^2, y)) = g(y) = a - y^2,$$

odnosno

$$h \circ H = g \circ h.$$

□

Teorem 2.4. *Neka je* $0 < |b| \leq 1$. *Neka su*

$$A := \frac{a}{b^2} \quad i \quad B := \frac{1}{b}.$$

Tada su preslikavanja $H_{a,b}$ *i* $H^{-1}_{A,B}$ *topološki konjugirana.*

Dokaz. To ćemo dokazati direktno po definiciji, pronalaskom homeomorfizma. Definiramo preslikavanje $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kao

$$h(x, y) = b(y, x).$$

Primijetimo da je h linearno preslikavanje zadano matricom $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Determinanta te matrice je $-b^2 \neq 0$, zbog čega slijedi da je bijekcija pa je h homeomorfizam. Nadalje,

$$\begin{aligned} h \circ H^{-1}_{A,B}(x, y) &= h(y, \frac{1}{B}(A - x - y^2)) = b(b(A - x - y^2), y) = b(b(\frac{a}{b^2} - x - y^2), y) \\ &= (a - b(bx) - (by)^2, by) = H_{a,b}(by, bx) = H_{a,b}(b(y, x)) = H_{a,b} \circ h(x, y). \end{aligned}$$

Po definiciji 1.8, $H_{a,b}$ i $H^{-1}_{A,B}$ su topološki konjugirani. □

Iz teorema 2.3 i 2.4 zaključujemo da je dovoljno promatrati H za $0 < |b| \leq 1$. Slučaj $|b| = 1$ bitno se razlikuje od slučaja $|b| \neq 1$ i ta dva slučaja treba promatrati odvojeno. Naime, u slučaju $|b| = 1$, Hénonovo preslikavanje čuva površinu, dok je za $|b| \neq 1$ preslikavanje disipativno. Stoga u nastavku pretpostavljamo

$$0 < |b| < 1. \tag{3}$$

Tražimo fiksne točke od $H_{a,b}$, odnosno (x, y) takve da $(x, y) = H_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x)$. To znači da ako jednadžba

$$x^2 + (b + 1)x - a = 0 \tag{4}$$

ima rješenje onda postoje fiksne točke. Postojanje rješenja ovisi o determinanti
$D = (b + 1)^2 + 4a$. Definirajmo zato

$$a_0(b) = -\frac{(b + 1)^2}{4} \tag{5}$$

Dobivamo sljedeće slučajeve:

- $a < a_0(b)$ je ekvivalentno $D < 0$ pa slijedi da (4) nema rješenje te $H_{a,b}$ nema fiksnih točaka.

- $a = a_0(b)$ je ekvivalento $D = 0$ pa slijedi da (4) ima točno jedno rješenje i $H_{a,b}$ ima točno jednu fiksnu točaku. Ta točka je

$$p = \left(-\frac{b+1}{2}, -\frac{b+1}{2}\right).$$

- $a > a_0(b)$ je ekvivalentno $D > 0$ pa slijedi da (4) ima dva rješenja

$$x_\pm = \frac{-(b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2} \tag{6}$$

  i $H_{a,b}$ ima dvije fiksne točake. Označimo te točke sa

$$p_\pm = \left(x_\pm, x_\pm\right). \tag{7}$$

Napomena 2.5. *Kada je $a > a_0(b)$, jer $D > 0$, vrijedi*

$$x_- = \frac{-(b+1) - \sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2} < \frac{-(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2} = x_+$$

To pokazuje da u slučaju $a = a_0$ familija Hénonovih preslikavanja prolazi kroz tangencijalnu (ili sedlo-čvor) bifurkaciju.

U sljedećih nekoliko teorema pokazat ćemo kakve su fiksne točke Hénonovog preslikavanja za određene parametre. Za to će nam trebati svojstvene vrijednosti. Izvedimo svojstvene vrijednosti matrice $DH_{a,b}$ u fiksnoj točki $(x, x) \in \mathbb{R}^2$. Svojstvene vrijednosti zadovoljavaj jednadžbu

$$0 = |DH_{a,b}(x, x) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2x - \lambda & -b \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2x) + b.$$

Svojstvene vrijednosti su oblika

$$\lambda_\pm = -x \pm \sqrt{x^2 - b}. \tag{8}$$

Teorem 2.6. *Neka su $a > a_0$, $0 < |b| < 1$. Točka p_- je sedlasta točka.*

Dokaz. Uvjet $a > a_0$ daje

$$x_- < \frac{-(b+1)}{2} \implies x_-^2 + 2x_- + 1 < x_-^2 - b,$$

iz čega zaključujemo $|x_- + 1| < \sqrt{x_-^2 - b}$ pa vrijedi

$$\lambda_- = -x_- - \sqrt{x_-^2 - b} < 1 < -x_- + \sqrt{x_-^2 - b} = \lambda_+. \tag{9}$$

Drugi dio nejednakosti nam taje uvijet na λ_+,

$$|\lambda_+| > 1.$$

Primijetimo da $x_- < 0$ i zato vrijedi

$$\sqrt{x_-^2 - b} < \sqrt{x_-^2 + 1} < |x_-| + 1 = 1 - x_-.$$

Uvrstimo ovo u (8)

$$\lambda_- > -x_- + x_- - 1 = -1.$$

Ako dodamo prvi dio nejednakosti (9) slijedi

$$|\lambda_-| < 1.$$

Po definiciji 1.12, p_- je sedlasta točka. □

Neka je

$$a_1 = a_1(b) = \frac{3(b+1)^2}{4}. \tag{10}$$

Teorem 2.7. *Neka su $a_0 < a < a_1$, $0 < |b| < 1$. Tada je p_+ privlačna fiksna točka.*

Dokaz. Pogledajmo slučaj $x_+^2 - b < 0$. Tada $b > 0$ i

$$|\lambda_\pm| = \sqrt{x_+^2 + (b - x_+^2)} = \sqrt{b} < 1.$$

Ako $x_+^2 - b = 0$ tada $b > 0$ pa zato

$$|\lambda_\pm| = |-x_+ \pm 0| = \sqrt{b} < 1.$$

Sada pretpostavimo da je $x_+^2 - b > 0$. Uvjet $a > a_0$ daje

$$x_+ \geq \frac{-(b+1)}{2}$$

iz čega slijedi $x_+ + 1 \geq \dfrac{1-b}{2} \geq 0$ i

$$(x_+ + 1)^2 > x_+^2 - b \implies x_+ + 1 > \sqrt{x_+^2 - b} > -\sqrt{x_+^2 - b}.$$

Sada zaključujemo

$$1 > -x_+ \pm \sqrt{x_+^2 - b} = \lambda_\pm. \tag{11}$$

S druge strane, ako $a < a_1$

$$x_+ = \frac{-(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2} < \frac{b+1}{2},$$

a to, analogno kao gore implicira,

$$x_+^2 - b < (x_+ - 1)^2.$$

Iz $x_+ - 1 < \dfrac{b-1}{2} < 0$ i pretpostavke da je $x_+^2 - b > 0$ slijedi

$$-1 + x_+ < -\sqrt{x_+^2 - b} < \sqrt{x_+^2 - b}.$$

Odnosno,

$$-1 < -x_+ \pm \sqrt{x_+^2 - b} = \lambda_\pm. \tag{12}$$

Iz (11) i (12) slijedi da u slučaju $x_+^2 - b > 0$

$$|\lambda_\pm| < 1$$

pa zaključujemo da je p_+ je privlačna točka. □

Teorem 2.8. *Neka su $a = a_0$ i $0 < |b| < 1$. Tada p_+ ima jednu svojstvenu vrijednost -1 i nije hiperbolička fiksna točka.*

Dokaz. Ako u (4) uvrstimo $a = a_0$ tada je $x_+ = \dfrac{b+1}{2}$ i

$$\lambda_\pm = -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4} - b} = -\frac{b+1}{2} \pm \frac{b-1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -b \end{cases},$$

odnosno

$$\lambda_+ = -1 \qquad \text{i} \qquad |\lambda_-| < 1.$$

□

Teorem 2.9. *Neka su $a > a_1$ i $0 < |b| < 1$. Tada je p_+ sedlasta fiksna točka.*

Dokaz. U (6) uvrstimo $a > a_1$. Tada $x_+ > \dfrac{b+1}{2}$. Uvrstimo dobiveno u (8) i dobivamo

$$x_+^2 - b > x_+^2 - 2x_+ + 1 \implies \sqrt{x_+^2 - b} > (x_+ - 1)^2$$

Zato vrijedi

$$-x_+ + \sqrt{x_+^2 - b} > -1 > -x_+ - \sqrt{x_+^2 - b},$$

znači

$$\lambda_- < -1 \implies |\lambda_-| > 1.$$

Osim toga, jer $a > a_1$ znači da je $a > a_0$ pa analogono gornjem zaključujemo da $x_+ > -\dfrac{b+1}{2}$ pa

$$x_+^2 - b < x_+^2 + 2x_+ + 1 \implies \sqrt{x_+^2 - b} < (x_+ + 1)^2$$

Dodatno, jer $x_+ + 1 > \frac{b+3}{2} > 0$ zaključujemo

$$x_+ + 1 > \sqrt{x_+^2 - b} \implies \lambda_+ < 1$$

pa je

$$|\lambda_+| < 1,$$

odnosno, u ovom slučaju je p_+ sedlasta fiksna točka. □

U nastavku želimo vidjeti u kojim slučajevima Hénonovo preslikavanje ima periodične točke osnovnog perioda dva. Tražimo (x, y) takve da

$$(x, y) = H_{a,b}^2(x, y) = (a - bx - (a - by - x^2)^2, a - by - x^2).$$

Uvrstimo drugu jednadžbu

$$y = \frac{1}{b+1}(a - x^2)$$

u prvu

$$x = a - bx - (a - by - x^2)^2$$

i dobijemo

$$x^4 - 2x^2 + (b+1)^3 x + a^2 - a(b+1)^2 = 0.$$

Primijetimo da je y dobro definirano, jer je $b > -1$ pa $b + 1 \neq 0$. Nadalje, dobivenu jednadžbu zadovoljavaju i fiksne točke pa podijelimo s $x^2 + (b+1)x - a$ i dobijemo da tražene periodične točke, ako postoje, moraju zadovoljavati

$$x^2 - (b+1)x - a + (b+1)^2 = 0. \tag{13}$$

Postojanje rješenja ovisi o determinanti $D = 4a - 3(b+1)^2$. Pogledajmo sljedeće slučajeve:

- $a < a_1(b)$ je evivalentno $D < 0$ i (13) nema rješenje pa ni $H_{a,b}$ nema periodičnih točaka osnovnog perioda dva.
- $a = a_1(b)$ je ekvivalento $D = 0$ i (13) ima točno jedno rješenje i točka je $p = \left(\frac{b+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$. Ta točka je fiksna, dakle nije periodična osnovnog perida dva.
- $a > a_1(b)$ je ekvivalentno $D > 0$ i (13) ima dva rješenja

$$y_\pm = \frac{(b+1) \pm \sqrt{4a - 3(b+1)^2}}{2}. \tag{14}$$

Zato $H_{a,b}$ ima dvije periodične točake osnovnog perioda dva. Te točke su

$$t_\pm = \left(y_\pm, y_\mp\right).$$

Dodatno,

$$\lim_{a \to a_1} t_\pm = \lim_{a \to a_1} \left(y_\pm, y_\mp\right) = \left(\tfrac{b+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}\right).$$

S druge strane

$$\lim_{a \to a_1} p_+ = \left(\tfrac{-(b+1)+2(b+1)}{2}, \tfrac{-(b+1)+2(b+1)}{2}\right) = \left(\tfrac{b+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}\right).$$

Odnosno, kako $a \to a_1$ orbita periodične točke osnovnog perioda dva konvergira prema fiksnoj točki p_+. To pokazuje da u $a = a_1$ fiksna točka p_+ prolazi kroz bifurkaciju duplikacije perioda.

Poglavlje 3

Dinamika prije tangencijalne bifurkacije

U ovom poglavlju želimo pokazati da za Hénonovo preslikavanje prije bifurkacije sedlaste fiksne točke *ne postoji dinamika*. Odnosno, za $a < a_0$, H nema periodičnih točaka. Dokaz ćemo razdvojiti na dva dijela $b > 0$ i $b < 0$. Razlog malo drugačijem pristupu je orijentacija Hénonovog preslikavanja. U slučaju $b < 0$ preslikavanje mijenja orijentaciju, a u slučaju $b > 0$ preslikavanje čuva orijentaciju.

Prvo ćemo gledati slučaj $b > 0$. Iskazat ćemo glavni teorem za ovaj slučaj, definirati područja u faznom postoru i dokazati nekoliko pomoćnih lema, kako bismo što više izbjegli zamršenost u dokazu teorema.

Teorem 3.1. *Ako je $a < a_0$ i $b > 0$ tada $|H^n(x, y)| \to \infty$, kada $n \to \infty$ i $|H^{-n}(x, y)| \to \infty$, kada $n \to \infty$, za sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Definirajmo skupove

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \le -|y|\}, \\ M_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ge -|y|, y \ge 0\}, \\ M_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ge -|y|, y \le 0\}. \end{aligned}$$

Sada možemo krenuti na leme.

Lema 3.2. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada vrijedi $H(M_1) \subset M_1$, dodatno $x_1 < x_0$.*

Dokaz. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u M_1. Želimo dokazati da je tada $x_1 < -|y_1|$.

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by_0 - x_0^2 < -\frac{(b+1)^2}{4} - bx_0 - x_0^2 - x_0 + x_0 = -\left(\frac{b+1}{2} + x_0\right)^2 + x_0 \\ &\le x_0 = y_1 \le 0 \le -x_0 = -y_1, \end{aligned} \tag{15}$$

gdje smo iskoristili $x_0 \leq y_0$. Iz (15), zbog proizvoljnosti početne točke, zaključujemo $M_1 \subset H(M_1)$. Dodatno je izvedeno $x_1 < x_0$. □

Lema 3.3. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada vrijedi $H(M_2) \subset \operatorname{int} M_1$.*

Dokaz. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u M_2. Vrijedi

$$x_0 \geq -y_0 \qquad \text{i} \qquad y_0 \geq 0.$$

Neka je

$$(x_1, y_1) = H(x_0, y_0).$$

Želimo dokazati da je tada $x_1 < -|y_1|$. Dokažimo prvo da vrijedi $x_1 < y_1$.

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by_0 - x_0^2 < -\left(\frac{b-1}{2} - x_0\right)^2 - \frac{(b+1)^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4} + x_0 \leq -b + x_0 \\ &\leq x_0 = y_1 \end{aligned} \tag{16}$$

Na isti način ćemo dokazati da vrijedi $x_1 < -y_1$.

$$x_1 = a - by_0 - x_0^2 < -\left(\frac{b+1}{2} - x_0\right)^2 - x_0 \leq -x_0 = -y_1 \tag{17}$$

Iz (16) i (17), zbog proizvoljnosti početne točke i strogih nejednakosti, zaključujemo $H(M_2) \subset \operatorname{int}(M_1)$. □

Lema 3.4. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada vrijedi $H^{-1}(M_3) \subset \operatorname{int} M_3$, dodatno $|y_0| < |y_{-1}|$.*

Dokaz. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u M_3. Vrijedi

$$x_0 \geq y_0 \qquad \text{i} \qquad y_0 \leq 0.$$

Želimo dokazati da je tada $x_{-1} > y_{-1}$ i $y_{-1} < 0$. Dokažimo da vrijedi $x_{-1} > y_{-1}$.

$$\begin{aligned} by_{-1} &\overset{(2)}{=} a - x_0 - y_0^2 < -\frac{(b+1)^2}{4} - (1+b)y_0 - y_0^2 + by_0 = -\left(y_0 + \tfrac{b+1}{2}\right)^2 + by_0 \\ &\leq by_0 = bx_{-1} < 0 \end{aligned}$$

Proizvoljnost početne točke, stroge nejednakosti i činjenica da je $b > 0$ implicira $H^{-1}(M_3) \subset \operatorname{int} M_3$. Dodatno je izvedeno $y_{-1} < y_0 \leq 0$, odnosno $|y_{-1}| > |y_0|$. □

Lema 3.5. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada vrijedi $H^{-1}(M_2) \subset \operatorname{int} M_3$.*

Dokaz. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u M_2. Vrijedi

$$x_0 \geq -y_0 \qquad \text{i} \qquad y_0 \geq 0.$$

Neka je

$$(x_{-1}, y_{-1}) = H^{-1}(x_0, y_0).$$

Želimo dokazati da je tada $x_{-1} > y_{-1}$ i $y_{-1} < 0$. Dokažimo prvo da vrijedi $y_{-1} < 0$.

$$by_{-1} = a - x_0 - y_0^2 < -\frac{(b+1)^2}{4} + y_0 - y_0^2 = -\frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} - \left(y_0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \tag{18}$$

Sada dokazujemo da vrijedi $x_{-1} > y_{-1}$.

$$by_{-1} = a - x_0 - y_0^2 < -\left(y_0 + \tfrac{b-1}{2}\right)^2 + -\frac{(b+1)^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4} + by_0 \leq by_0 = bx_{-1} \tag{19}$$

Iz (18) i (19), zbog proizvoljnosti početne točke, strogih nejednakosti i činjenice da je $b > 0$, zaključujemo $H^{-1}(M_2) \subset \operatorname{int} M_3$. □

Lema 3.6. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada za svaku točku $(x_0, y_0) \in M_3$ postoji prirodan broj k_0 takav da za svaki $k > k_0$*

$$H^k(x_0, y_0) \in M_1.$$

Dokaz. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u M_3. Lemu dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da vrijedi suprotno. Primjenom lema 3.2 i 3.3 to znači da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$(x_n, y_n) \in M_3.$$

Ako je $(x_0, y_0) \in M_3$ i $x_0 > 0$, onda je $y_1 = x_0 > 0$ pa (x_1, y_1) nije u M_3. Pretpostavimo da je $(x_0, y_0) \in M_3$, $x_0 < 0$ i $x_n \leq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz leme 3.4 slijedi $y_n < y_{n+1}$ i zato $x_{n-1} < x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, sve točke niza (x_n, y_n) su sadržane u trokutu omeđenom pravcima $x = 0$, $y = x$ i $y = x_0$. Zato su nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ monotoni i omeđeni te konvergiraju. Ali onda $H^n(x_0, y_0)$ konvergira prema nekom $(x, y) \in M_3$ kad $n \to \infty$. Također, $H^{n+1}(x_0, y_0)$ konvergira prema $(x, y) \in M_3$ kad $n \to \infty$.. S druge strane zbog neprekidnosti, kad $n \to \infty$, $H^{n+1}(x_0, y_0)$ konvergira prema $H(x, y)$. Ali sada zbog jedinstvenosti limesa slijedi da

$$H(x, y) = (x, y),$$

drugim riječima, H ima fiksnu točku kad $a < a_0$, što je u kontradikciji sa (6).

Sada mozemo zaključiti da postoji neki prirodan broj k_0 za koji vrijedi $(x_{k_0}, y_{k_0}) \in M_1 \cup M_2$. Primijenom leme 3.2. i 3.3 dobivamo dokaz tvrdnje. □

Lema 3.7. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada za svaku točku $(x_0, y_0) \in M_1$ postoji prirodan broj k_0 takav da za svaki $k > k_0$*
$$H^{-k}(x_0, y_0) \in M_3.$$

Dokaz. Dokazuje se analogno lemi 3.6 uz primijenu lema 3.4 i 3.5. □

Vraćamo se na dokaz teorema 3.1.
Dokaz teorema 3.1 Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u $\mathbb{R}^2$. Tada ona može biti u jednom od 3 područja, M_1, M_2 ili M_3. Ako je $(x_0, y_0) \in M_1$, iz leme 3.2. slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$H^n(x_0, y_0) \in M_1.$$

Štoviše, po lemi 3.2 vrijedi $|x_n| < |x_{n+1}|$ iz cega slijedi $|y_n| < |y_{n+1}|$. Dakle nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ su monotoni. Kontradikcijom ćemo dokazati da kada $n \to \infty$ tada $|H^n(x_0, y_0)| \to \infty$. Pretpostavimo da postoji neka točka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takva da kada $n \to \infty$

$$H^n(x_0, y_0) \to (x, y).$$

Zbog neprekidnosti kada $n \to \infty$

$$H^{n+1}(x_0, y_0) \to H(x, y),$$

Iz jedinstvenosti limesa slijedi $H(x, y) = (x, y)$, odnosno, postoji fiksna točka. Budući da je $a < a_0$, to je kontradikcija sa (6). Dakle, kada $n \to \infty$

$$|H^n(x_0, y_0)| \to \infty.$$

Ako je $(x_0, y_0) \in M_2$, iz leme 3.3. slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$H^n(x_0, y_0) \in \operatorname{int} M_1,$$

a sada iz prvog slučaja slijedi, kada $n \to \infty$

$$|H^n(x_0, y_0)| \to \infty.$$

Ako je $(x_0, y_0) \in M_3$, iz leme 3.6 slijedi da postoji prirodan broj k takav da

$$H^k(x_0, y_0) \in M_1 \cup M_2,$$

a sada iz prva dva slučaja slijedi, kada $n \to \infty$

$$|H^n(x_0, y_0)| \to \infty.$$

Ukratko, za svaku točku (x_0, y_0) vrijedi, kada $n \to \infty$

$$|H^n(x_0, y_0)| \to \infty.$$

Analogno, iz leme 3.4, leme 3.5 i leme 3.7 dokazuje se da za svaku točku (x_0, y_0) vrijedi, kada $n \to \infty$

$$|H^{-n}(x_0, y_0)| \to \infty.$$

□

Korolar 3.8. *Neka je $a < a_0$ i $b > 0$. Tada H nema periodičnih točaka.*

Dokaz. Pretpostavimo da H ima periodičnu točku (x_0, y_0) perioda $k_0 \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $(x_{nk_0}, y_{nk_0})_n$ stacionarni niz. Slijedi da $(x_n, y_n)_n$ ima omeđeni podniz, a to je u kontradikciji sa teoremom 3.1. □

Pretpostavimo sada da je $b < 0$. Da bismo iskazali glavni teorem za ovaj slučaj, definirat ćemo sljedeće skupove:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -|y|\},\\
Q_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq |y|\},\\
Q_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -|x|\},\\
Q_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq |x|\}.
\end{aligned}$$

Iskažimo sada glavni teorem.

Teorem 3.9. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Ako $(x_0, y_0) \in Q_1 \cup Q_3$ vrijedi $|(x_n, y_n)| \to \infty$, kada $n \to \infty$. S druge strane, ako $(x_0, y_0) \in Q_2 \cup Q_4$ vrijedi $|(x_{-n}, y_{-n})| \to \infty$, kada $n \to \infty$.*

Za dokaz će biti potrebna sljedeća područja:

$$\begin{aligned}
S &= Q_1 \cap H(Q_1)\\
S_1 &= \{(x, y) \in Q_1; x \leq a - by - y^2, y \leq 0\},\\
S_2 &= \{(x, y) \in Q_1; x \geq a + by - y^2, y \leq 0\},\\
S_3 &= \{(x, y) \in Q_1; y \geq 0\},\\
P_1 &= \{(x, y) \in H(Q_1); x \geq -|y|, x \leq a - y^2\},\\
P_2 &= \{(x, y) \in H(Q_1); x \geq -|y|, x \geq a - y^2, x \leq a + by - y^2, x \leq 0\},\\
P_3 &= \{(x, y) \in H(Q_1); x \geq -|y|, x \geq 0, x \leq a + by - y^2\},
\end{aligned}$$

Napomena 3.10. *Primijetimo da iz definicije skupova vrijedi $H(S_1) \subset P_1 \cup S$, $H(S_2) \subset P_1 \cup S$, $H(S_3) \subset P_2 \cup P_3 \cup S$.*

Lema 3.11. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Tada za svaku točku $(x_0, y_0) \in S$ vrijedi $(x_1, y_1) \in S$ i $x_1 < x_0$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_0) \in S$ proizvoljna. Tada je po definiciji $(x_0, y_0) \in Q_1$ pa je $(x_1, y_1) \in H(Q_1)$. Osim toga

$$x_1 = a - by_0 - x_0^2 \leq x_0 + y_0^2 - x_0^2 \leq x_0 < -x_0.$$

Iskoristili smo nejednakost $x_0 \geq a - by_0 - y_0^2$ te $x_0 \leq -|y_0|$. Zaključujemo,

$$x_1 \leq -|x_0| = -|y_1|,$$

što znači $(x_1, y_1) \in Q_1$. Dokazali smo da vrijedi $(x_1, y_1) \in Q_1 \cap H(Q_1) = S$ i $x_1 < x_0$. □

Korolar 3.12. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Neka je $(x_0, y_0) \in S$ proizvoljna točka. Tada $|H^n(x_0, y_0)| \to \infty$, kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada zbog leme 3.11 vrijedi $(x_n, y_n) \to (x, y)$, kada $n \to \infty$, za neku točku $(x, y) \in S$. Neprekidnost i jedinstvenost limesa daju $H(x, y) = (x, y)$ pa bismo u tom slučaju u ovom području imali fiksnu točku, što je nemoguće, jer $a < a_0$, (6). □

U nastavku ćemo dokazati da sve točke iz $Q_1 \cup Q_3$ pod iteracijama od H u jednom trenutku završe u S.

Lema 3.13. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Tada vrijedi $H(Q_1) \subset Q_1 \cup Q_3$ i $H(Q_3) \subset Q_1$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_0) \in Q_1$ proizvoljna točka. Tada vrijedi $x_0 < -y_0$ pa

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by_0 - x_0^2 < a_0 + bx_0 - x_0^2 + x_0 - x_0 = -\left(\frac{b+1}{2} - x_0\right) - x_0 \\ &< -x_0 = -y_1 \end{aligned}$$

što znači da je $(x_1, y_1) \in Q_1 \cup Q_3$.
Neka je sada, $(x_0, y_0) \in Q_3$ proizvoljna točka. Tada vrijedi $y_0 < x_0 < -y_0$, odnosno $|x_0| < -y_0$ pa

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by_0 - x_0^2 < a_0 + b|x_0| - x_0^2 + |x_0| - |x_0| = -\left(\frac{b+1}{2} - |x_0|\right) - |x_0| \\ &\leq -|x_0| = -|y_1|. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(x_1, y_1) \in Q_1$. □

Lema 3.14. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Tada vrijedi*

1. $H(P_1 \cup P_2) \subseteq S_1$
2. $H(P_3) \subseteq S_3$

Dokaz. 1. Neka je $(x_0, y_0) \in P_1 \cup P_2$ proizvoljna točka. Tada je prema lemi 3.13 $(x_1, y_1) \in Q_1$. Osim toga

$$x_1 = a - by_0 - x_0^2 < a - by_1 - y_1^2,$$

jer je $y_1 = x_0 > -|y_0| = y_0$. Dodatno, $y_1 = x_0 \leq 0$. Znači da je $(x_1, y_1) \in S_1$.
2. Neka je $(x_0, y_0) \in P_3$ proizvoljna točka. Tada je prema lemi 3.13 $(x_1, y_1) \in Q_1$. Osim toga $y_1 = x_0 > 0$. Znači da je $(x_1, y_1) \in S_3$. □

Napomena 3.15. *Iz prethodne napomene 3.10 i leme 3.14 slijedi $H^2(S_2) \in S_1 \cup S$.*

U nastavku slijede ključne leme za dokaz teorema 3.9.

Lema 3.16. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Za svaku točku $(x_0, y_0) \in S_1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_n, y_n) \in S$ za svaki prirodan broj $n \geq n_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Po lemi 3.11 slijedi da postoji točka $(x_0, y_0) \in S_1$ takav za svaki $n \in \mathbb{N}$ $(x_n, y_n) \notin S$. Iz napomene 3.10 i leme 3.14 zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ $(x_{2n}, y_{2n}) \in S_1$ i $(x_{2n-1}, y_{2n-1}) \in P_1$. Vrijedi

$$\begin{aligned} &x_{2n+1} = a - by_{2n} - x_{2n}^2 < a - bx_{2n-1} - x_{2n-1}^2 < -\left(\frac{b+1}{2} + x_{2n-1}\right)^2 + x_{2n-1} < x_{2n-1}, \\ &y_{2n+1} < x_{2n+1}, \end{aligned}$$

gdje smo koristili $|x_{2n}| > |y_{2n}| = |x_{2n-1}|$. $(x_{2n-1})_n$ i $(y_{2n-1})_n$ su strogo padajući nizovi u kompaktnom skupu, znači da konvergiraju prema limesu u P_1. Nazovimo te limese $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = y$. Sada zbog neprekidnosti i jedinstvenosti limesa slijedi da je točka (x, y) periodična točka perioda dva. To je kontradikcija s činjenicom da je $a < a_0 < a_1$. To znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in S$. Primijenimo leme 3.11 dobivamo tvrdnju. □

Napomena 3.17. *Iz napomene 3.15 i leme 3.16 slijedi da za svaku točku $(x_0, y_0) \in S_2$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_n, y_n) \in S$ za svaki $n \geq n_0$.*

Lema 3.18. *Neka je $a < a_0$ i $b < 0$. Za svaku točku $(x_0, y_0) \in S_3$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_n, y_n) \in S$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Po lemi 3.11 slijedi da postoji točka $(x_0, y_0) \in S_3$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ $(x_n, y_n) \notin S$. Iz leme 3.14 i napomene 3.10 zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $(x_{2n}, y_{2n}) \in S_3$ i $(x_{2n-1}, y_{2n-1}) \in P_3$. Također za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da $(x_n, y_n) \notin P_1 \cup P_2 \cup S_1$. U suprotnom bismo se pozvali na lemu 3.14, napomenu 3.15, lemu 3.16 ili napomenu 3.17 i dobili da posotoji $n_0 \in \mathbb{N}$ iz tvrdnje. Pretpostavimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da $(x_n, y_n) \in S_3 \cup P_3$. Vrijedi

$$x_{2n+1} = a - by_{2n} - x_{2n}^2 < a - bx_{2n-1} - x_{2n-1}^2 < -\left(\frac{b+1}{2} + x_{2n-1}\right)^2 + x_{2n-1}$$
$$< -\frac{(b+1)^2}{4} + x_{2n-1}.$$

Indukcijom se može dokazati da vrijedi,

$$x_{2n+1} < -\frac{n(b+1)^2}{4} + x_1.$$

Sada po Arhimedovom aksiomu slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_{2n_0+1} < -\frac{n_0(b+1)^2}{4} + x_1 \leq 0,$$

a to je kontradikcija s pretpostavkom, jer $(x_{2n_0+1}, y_{2n_0+1}) \notin P_3$. Zato možemo zaključiti da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_{k_0}, y_{k_0}) \in P_1 \cup P_2 \cup S_1 \cup S$. Primjenivši lemu 3.11, lemu 3.14 i/ili lemu 3.16 zaključujemo da postoji $n_0 \geq k_0$ takav da tvrdnja leme vrijedi. □

Sada dokaz teorema 3.9 slijedi iz prethodnih lema.

Dokaz teorema 3.9
Iz lema 3.11, 3.14, 3.16, 3.18 i napomene 3.17 slijedi da za svaku točku $(x_0, y_0) \in Q_1 \cup Q_3$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(x_k, y_k) \in S$ za svaki $k \geq k_0$. Osim toga, za $k \geq k_0$ vrijedi $x_{k+1} < x_k < 0$, $y_{k+1} < y_k < 0$. Tvrdimo da tada $|(x_n, y_n)| \to \infty$, kada $n \to \infty$. U suprotno bi postojala točka (x, y) takva da $(x_n, y_n) \to (x, y)$, kada $n \to \infty$. No u tom slučaju, zbog neprekidnosti vrijedi $H(x, y) = (x, y)$, odnosno, u ovom području bi postojala fiksna točka, što je nemoguće, jer $a < a_0$, (6). Zaključujemo, da $|(x_n, y_n)| \to \infty$, kada $n \to \infty$.

Na sličan način dokazali bismo drugu tvrdnju teorema, odnosno, ako $(x_0, y_0) \in Q_2 \cup Q_4$ vrijedi $|(x_{-n}, y_{-n})| \to \infty$, kada $n \to \infty$. □

Korolar 3.19. *Ako je $a < a_0$ i $b < 0$ tada H nema periodičnih točaka.*

Zaključno s ovim korolarom dokazali smo da za $a < a_0$ H nema periodičnih točaka pa ćemo od sada promatrati slučajeve kada je $a > a_0$.

Poglavlje 4

Hiperbolički skup

U ovom poglavlju ćemo dokazati egzistenciju hiperboličkog skupa Hénonovog preslikavanja za određeni skup parametara. Na početku ćemo definirati skup S koji sadrži sve periodične točke preslikavanja H, izvan kojega nema periodičnih točaka.

Neka je R veći korijen jednadžbe $\rho^2 - (|b| + 1)\rho - a = 0$, odnosno

$$R = \frac{(|b| + 1) + \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}.$$

Neka je sada skup S definiran kao

$$S = (-R, R)^2,$$

kvadrat s centrom u ishodištu. Sljedeća dva teorema govore da izvan S nema periodičnih točaka.

Teorem 4.1. *Neka je $a > a_0$ i $(x, y) \in S^c$. Ako je $|x| \geq |y|$ onda $|H^n(x, y)| \to \infty$ kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_0) \in S^c$ proizvoljna točka takva da $|x_0| \geq |y_0|$. Tada je $|x_0| > R$. Najprije želimo dokazati da je $|x_1| > |x_0| = |y_1|$.

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by_0 - x_0^2 \leq a + (|b| + 1)|x_0| - |x_0|^2 - |x_0| \\ &= -\underbrace{\left(|x_0| - \frac{(|b| + 1) + \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}\right)}_{=|x_0|-R>0}\underbrace{\left(|x_0| - \frac{(|b| + 1) - \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}\right)}_{\geq|x_0|-R>0} - |x_0| \quad < -|x_0|. \end{aligned}$$

Drugim riječima, $|x_1| > |x_0|$ pa induktivno slijedi $x_{n+1} > x_n$. Nadalje, $|x_n| \to \infty$ kada $n \to \infty$. Za H^n vrijedi

$$|H^n(x_0, y_0)| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq |x_n|.$$

pa $|H^n(x_0, y_0)| \to \infty$ kada $n \to \infty$. □

Teorem 4.2. *Neka je $a > a_0$ i $(x, y) \in S^c$. Ako je $|y| \geq |x|$ onda $|H^{-n}(x, y)| \to \infty$ kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_0) \in S^c$ proizvoljna točka takva da $|y_0| \geq |x_0|$. Tada je $|y_0| > R$. Najprije želimo dokazati da je $|y_{-1}| > |y_0| = |x_{-1}|$.

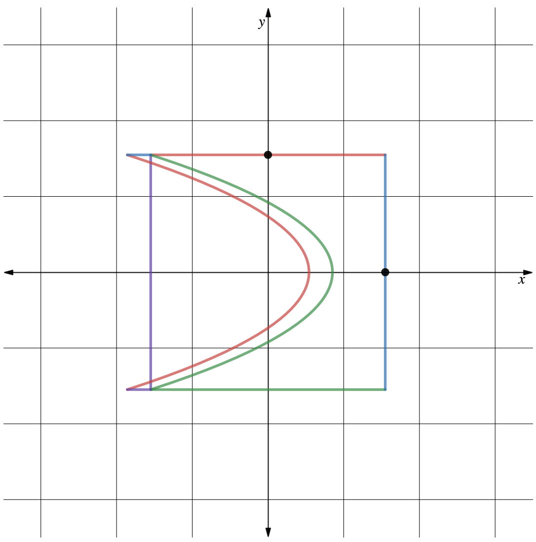
$$|b||y_{-1}| = |a - x_0 - y_0^2| \geq y_0^2 + x_0 - a \geq |y_0|^2 - (|b| + 1)|y_0| - a + |b||y_0|$$
$$= \underbrace{\left(|y_0| - \frac{(|b| + 1) + \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}\right)}_{=|y_0|-R>0} \underbrace{\left(|y_0| - \frac{(|b| + 1) - \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}\right)}_{\geq|y_0|-R>0} + |b||y_0| \quad > |b||y_0|.$$

Drugim riječima, $|y_{-1}| > |y_0|$ pa induktivno slijedi $y_{-n-1} > y_{-n}$. Nadalje, $|y_{-n}| \to \infty$ kada $n \to \infty$. Za H^{-n} vrijedi

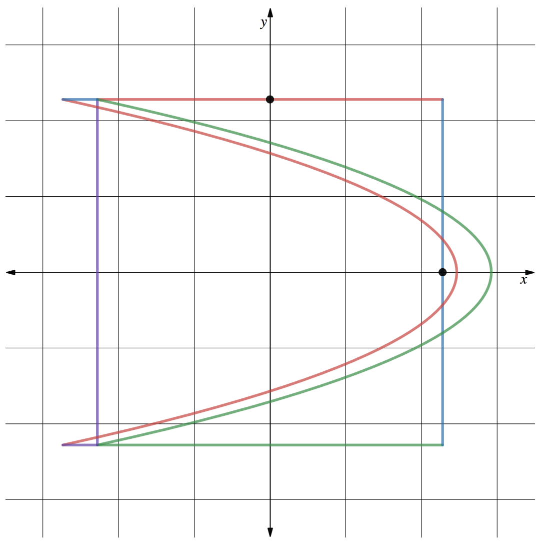
$$|H^{-n}(x_0, y_0)| = \sqrt{x_{-n}^2 + y_{-n}^2} \geq |y_{-n}|.$$

pa $|H^{-n}(x_0, y_0)| \to \infty$ kada $n \to \infty$. □

S ova dva teorema smo dokazali da se periodične točke, ako postoje, nalaze u skupu S. U nastavku ćemo eksplicitnim računom pokazati kako H preslikava skup S. Donje slike prikazuju skupove S i $H(S)$ za različite parametre.



Slika 4.1: $b = 0.1, a = 0.7$



Slika 4.2: $b = 0.1, a = 2.7$

Vidimo da za proizvoljan $0 < |b| < 1$ te $|x_0| = R$, $|y_0| < R$

$$x_1 = a - by_0 - R^2 < a + (|b| + 1)R - R^2 - R = -R. \tag{20}$$

Teorem 4.3. *Za proizvoljan b postoji $a_2 = a_2(b)$ takav da za $a > a_2$ $H(S)$ presijeca S (slika 4.2).*

Dokaz. Kao što smo vidjeli u (20), dio $H(S)$ preslikava se lijevo od S. Izracunat cemo takav a da točka $(0, \pm R)$ bude desno od S. Vrijedi $0 < |b| < 1$. Kada je $b > 0$ zelimo da se tjeme parabole $H(x, R)$ preslika desno od $x = R$, odnosno

$$a_2 - bR = R.$$

Analgono, kada je $b < 0$ zelimo da se tjeme parabole $H(x, -R)$ preslika desno od $x = R$, odnosno

$$a_2 + bR = R.$$

Ta dva slucaja su ekvivalentna

$$\begin{aligned} a_2 - |b|R &= R \\ a_2 &= \frac{(|b|+1)^2 + (|b|+1)\sqrt{(|b|+1)^2 + 4a}}{2} \end{aligned}$$

Ovo vrijedi ako je $a_2(a_2 - 2(|b|+1)^2) = 0$. Definirajmo sada

$$a_2 = 2(|b|+1)^2. \tag{21}$$

Zaključujemo da $H(S)$ presijeca S ako je $a > a_2$. □

Lema 4.4. *Neka su*

$$C^u(\lambda) = \{(p, q) : |p| \geq \lambda|q|\}$$
$$C^s(\lambda) = \{(p, q) : |q| \geq \lambda|p|\}$$

konusi, gdje je $\lambda \geq 1$. Ako je $|x| \geq \lambda(1 + |b|)/2$ tada je $C^u(\lambda)$ invarijantan pod $DH(x, y)$. Slično, ako je $|y| \geq \lambda(1 + |b|)/2$ tada je $C^s(\lambda)$ invarijantan pod $DH^{-1}(x, y)$.

Dokaz. Neka je (x, y) točka takva da vrijedi $|x| \geq \lambda(1 + |b|)/2$. Uzmimo proizvoljnu točku (p, q) iz konusa $C^u(\lambda)$. Tada je

$$DH(x, y)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xp - bq \\ p \end{pmatrix}$$

i vrijedi

$$|-2xp - bq| \geq 2|x||p| - |b||q| \geq \lambda(1 + |b|)|p| - \lambda|b||p| \leq \lambda|p|$$

Kako je (p, q) bila proizvoljna točka možemo zaključiti da je $C^u(\lambda)$ invarijantno pod $DH(x, y)$.

Neka je sada (x, y) točka takva da vrijedi $|y| \geq \lambda(1 + |b|)/2$. Uzmimo proizvoljnu točku (p, q) iz konusa $C^s(\lambda)$. Tada je

$$DH^{-1}(x, y)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{b} & -\frac{2y}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{b}(p + 2yq) \end{pmatrix}$$

i vrijedi

$$|p + 2yq| \geq 2|y||q| - |p| \geq \lambda(1 + |b|)|q| - \lambda|q| \leq \lambda|b||q|$$

Podjelimo sve sa $|b|$. Kako je (p, q) bila proizvoljna točka možemo zaključiti da je $C^s(\lambda)$ invarijantno pod $DH^{-1}(x, y)$.

□

U nastavku ćemo koristiti sljedeće oznake:
Neke su (x, y) i (p_0, q_0) proizvoljne točke $\mathbb{R}^2$ i $n \in \mathbb{Z}$ tada označavamo

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = DH^n(x, y)\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Lema 4.5. *Neka je $(p_0, q_0) \in C^u(\lambda)$ i $|x| \geq \lambda(1 + |b|)/2$. Tada vrijedi $|p_1| \geq \lambda|p_0|$. Slično, ako $|y| \geq \lambda(1 + |b|)/2$ tada je $q_{-1} \geq \lambda|q_0|$.*

Dokaz. Vrijedi

$$|p_1| = | - 2xp_0 - bq_0| \geq 2|x||p_0| - |b||q_0| \geq \lambda(1 + |b|)|p_0| - \lambda|b||p_0| \leq \lambda|p_0|.$$

Nadalje, vrijedi

$$|q_{-1}| = \frac{1}{|b|}| - 2xq_0 - p_0| \geq \frac{2|x||q_0|}{|b|} - \frac{1}{|b|}|p_0| \geq \frac{\lambda(1 + |b|)|q_0|}{|b|} - \frac{1}{|b|}|q_0|$$

□

Neka je (x, y) proizvoljna točka u ravnini. Ako tocka (x, y) pripada skupu S, vrjedi

$$|x|, |y| \leq R = \frac{|b| + 1 + \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}.$$

Osim toga, ako tocka (x, y) zadovoljava pretpostavke prethodne dvije leme, vrijedi

$$|x|, |y| > \lambda(|b| + 1)/2.$$

Da bi takve točke postojale treba vrijediti

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(|b|+1)}{2} &< \frac{|b|+1+\sqrt{(|b|+1)^2+4a}}{2} \\ 0 \le (\lambda-1)(|b|+1) &< \sqrt{(|b|+1)^2+4a} \\ \lambda(\lambda-2)\frac{(|b|+1)^2}{4} &< a \end{aligned} \tag{22}$$

Za svaki $\lambda \geq 2$ iz gornje nejednadžbe možemo izračunati a_3 takav da za svaki $a > a_3$ skup svih točaka (x, y) za koje vrijedi

$$\lambda(|b|+1)/2 < |x|, |y| < R \tag{23}$$

je neprazan skup. Ovaj zaključak nam daje sljedeću lemu.

Lema 4.6. *Neka je $a > a_3$. Tada možemo izabrati λ u prethodne dvije leme veći od 2.*

U nastavku ćemo definirati hiperboličke skupove difeomorfizama ravnine te iskazati dobro poznati i važan teorem o hiperboličkom skupu koji daje dovoljne uvjete na skup Λ da bi bio hiperbolički. Na kraju ćemo konstruirati određeni skup Λ i dokazati da je to hiperbolički skup za Hénonovo preslikavanje H za određeni skup parametara. U dokazu ćemo koristiti teorem o hiperboličkom skupu.

Definicija 4.7. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ difeomorfizam. Skup Λ je hiperbolički skup za f ako vrijedi:*

1. *Za svaku točku $p \in \Lambda$ postoje pravci $E^s(p)$ i $E^u(p)$ u tangencijalnoj ravnini u p koji su invarijantni na $DF(p)$.*

2. *$E^s(p)$ i $E^u(p)$ neprekidno ovise o p.*

3. *Postoji konstanta $\lambda > 1$ takva da za sve $v \in E^u(p)$ vrijedi $|Df(p)v| \geq \lambda|v|$, a za sve $v \in E^s(p)$ vrijedi $|Df^{-1}(p)v| \geq \lambda|v|$.*

$E^s(p)$ naziva se stabilni pravac, a $E^u(p)$ nestabilni pravac.

Teorem 4.8. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ difeomorfizam. Neka je Λ zatvoren, f-invarijantan podskup omeđenog skupa u $\mathbb{R}^2$. Neka je U otvorena okolina od Λ. Pretpostavimo da postoje međusobno disjunktni konusi C^s i C^u za koje vrijedi*

1. *$\alpha \leq \pi/4$*

2. *$Df(C^u(p)) \subset C^u(f(p))$, $Df^{-1}(C^s(p)) \subset C^s(f^{-1}(p))$*

3. $v \in C^u(p) \implies |Df(p)v| \geq 2|v|$

4. $w \in C^s(p) \implies |Df^{-1}(p)w| \geq 2|w|$.

Tada je Λ *hiperbolički skup te* $E^u \subset C^u$ *i* $E^s \subset C^s$.

Neka je D skup dobiven tako da iz skupa S izbacimo trake $|x|, |y| \leq \lambda(1+|b|)/2$, odnosno

$$D = S \setminus \Big(\{(x,y) : |x| \leq \lambda(1+|b|)/2\} \cup \{(x,y) : |y| \leq \lambda(1+|b|)/2\}\Big).$$

Definirajmo skup

$$\Lambda = \{(x,y) \in D : H^n(x,y) \in D, \forall n \in \mathbb{Z}\}. \tag{24}$$

Teorem 4.9. *Neka je* $a > \max\{a_2, a_3\}$. *Neka je* Λ *definiran kao u (24). Tada je* Λ *hiperbolički skup za* H *i* $E^u \subset C^u$ *i* $E^s \subset C^s$.

Dokaz. Iz leme 4.6 zaključujemo da za $a > a_3$ postoje konusi za čiji kut vrijedi $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (to vrijedi za $\lambda > 2$). Iz leme 4.4 slijedi druga točka teorema teorema 4.8. Sada će iz leme 4.5 slijediti nejednakost 3. i 4. teorema 4.8. Uzmimo proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in C^u(p)$. Za nju vrijedi

$$\begin{aligned}|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} &\geq \sqrt{(\lambda^2+1)y_1^2} = \sqrt{(\lambda^2+1)x_0^2} \\ &\geq \lambda\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \lambda|(x_0, y_0)| > 2|(x_0, y_0)|.\end{aligned}$$

S druge strane, uzmimo proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in C^s(p)$. Za nju vrijedi

$$\begin{aligned}|(x_{-1}, y_{-1})| = \sqrt{x_{-1}^2 + y_{-1}^2} &\geq \sqrt{(\lambda^2+1)x_{-1}^2} = \sqrt{(\lambda^2+1)y_0^2} \\ &\geq \lambda\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \lambda|(x_0, y_0)| > 2|(x_0, y_0)|.\end{aligned}$$

Nadalje, po definiciji, skup Λ je H-invarijantan, omeđen i zatvoren. Iz svega do sad zaključenog slijedi da je Λ hiperbolički skup i $E^u \subset C^u$ i $E^s \subset C^s$. $\square$

Bibliografija

[1] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.

[2] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Communications in Mathematical Physics **50** (1976), br. 1, 69–77.

[3] Wikipedia, *Hénon map*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Henon_map`, [Online; accessed 3-July-2020].

Sažetak

Preslikavanje $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dano formulom $H_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x)$ definirao je Michael Hénon 1976. godine. Pokazalo se da je dinamika tog preslikavanja veoma složena te ju ni danas ne razumijemo.

U ovom radu proučavali smo dinamiku Hénonovih preslikavanja. U prvom poglavlju definirani su pojmovi koji se koriste u radu. U drugom poglavlju smo pokazali da je dovoljno proučavati Hénonova preslikavanja za parametre $0 < |b| < 1$ te smo izračunali parametar $a_0(b)$ u kojem Hénonovo preslikavanje prelazi kroz tangencijalnu bifurkaciju i parametar $a_1(b)$ u kojem prolazi kroz bifurkaciju duplikacije perioda. Izračunali smo i fiksne točke i periodične točke osnovnog perioda dva te pokazali njihov tip (u odnosu na hiperboličnost). U trećem poglavlju smo dokazali da Hénonovo preslikavanje nema periodičnih točaka prije tangencijalne bifurkacije. Za to smo trebali promatrati odvojeno dva slučaja: $b > 0$ i $b < 0$. Takav pristup je bio nužan, jer Hénonovo preslikavanje čuva orijentaciju za $b > 0$, a mijenja orijentaciju za $b < 0$. U četvrtom poglavlju definirali smo određeni skup Λ za koji smo dokazali da je hiperbolički za Hénonovo preslikavanje za određeni skup parametara. To je H-invarijantan skup koji sadrži sve periodične točke i u kojem svaka točka ima stabilan i nestabilan pravac u svojoj tangencijalnoj ravnini. To je, također, onaj skup na kojem je Hénonovo preslikavanje kaotično.

Summary

The map $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by the formula $H_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x)$ was defined by Michael Hénon in 1976. It turned out that the dynamics of this map is very complex and we do not understand it even today.

In this paper, we studied the dynamics of Hénon maps. The first chapter defines the terms used in the paper. In the second chapter we showed that it is sufficient to study Hénon maps for the parameters $0 < |b| < 1$ and we calculated the parameter $a_0(b)$ in which the Hénon map passes through tangent bifurcation and the parameter $a_1(b)$ in which it goes through the period doubling bifurcation. We calculated both fixed points and periodic points of the base period two and showed their type (in relation to hyperbolicity). In the third chapter, we proved that the Hénon map has no periodic points before tangent bifurcation. For this we had to consider two cases separately: $b > 0$ and $b < 0$. Such an approach was necessary because Hénon map preserves the orientation for $b > 0$ and flips the orientation for $b < 0$. In the fourth chapter, we defined a certain set Λ which we proved to be hyperbolic for Hénon map for a certain set of parameters. It is an H-invariant set containing all periodic points and in which each point has a stable and unstable line in its tangent plane. It is also the set on which the Hénon map shows chaotic behaviour.

Životopis

Rođena sam 18. studenog 1994. u Varaždinu. Osnovnu školu završila sam u Ivancu, a nakon toga sam upisala i završila Prvu gimnaziju u Varaždinu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2013. Diplomski studij Primijenjene matematike upisala sam 2017., a završavam obranom ovog rada. Za vrijeme studiranja bavila sam se glumom i izvođenjem u kazalištu.