SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihaela Božinović

PRIMJENA MATEMATIČKE ANALIZE U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, srpanj, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala Bogu!

Najviše hvala onima kojima sve dugujem te im od srca posvećujem ovaj rad; tati, mami i bratu. Hvala i ostalima koji su mi pomagali na ovome putu, a prije svega voljenim didovima i bakama. Posebno hvala mome Stjepanu!

Hvala najljepša mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić!

Sadržaj

Uvod

Vrijednost matematičkog pristupa prepoznata je u mnogim znanostima, a da je to slučaj i u ekonomiji, svjedoči činjenica da je matematika posljednjih tridesetak godina prozvana jezikom ekonomije. Precizna i jezgrovita matematička analiza sa sobom nosi cijelo bogatstvo teorije, nudi vrijedan uvid u generalizaciju problema te može pružiti i pouzdan temelj za donošenje raznih ekonomskih odluka. Kao što su ekonomisti motivirani činjenicom da u pozadini svake ozbiljne primjene ekonomske teorije leži matematika, tako su i matematičari često željni proučavanja primjene matematičke teorije, što je i tema ovog rada. U prvom poglavlju, naglasak je stavljen na primjenu diferencijalnog računa u ekonomiji, odnosno na primjenu pojmova kao što su derivacija, parcijalna derivacija i lokalni ekstrem. U drugom poglavlju obrađuje se teorija uvjetne optimizacije i metode Lagrangeovih multiplikatora te daju primjeri njihove primjene. U središtu posljednjeg poglavlja funkcijsko je svojstvo homogenosti.

Poglavlje 1

Primjena diferencijalnog računa

1.1 Teorija diferencijalnog računa

Na početku, prisjetimo se nekih osnovnih definicija i teorema teorije diferencijalnog računa.

Definicija 1.1.1. *Realna funkcija realne varijable $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna (ili derivabilna) u $c \in \langle a, b\rangle$ ako postoji limes*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

U tom slučaju, taj limes je jedinstven i broj

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

zovemo derivacija funkcije f u točki c. Još se koriste oznake $Df(c)$ ili $\frac{df}{dx}(c)$.

Kažemo da je f diferencijabilna na intervalu I ako je ona diferencijabilna u svakoj točki iz I. Tada je na I dobro definirana funkcija $x \mapsto f'(x)$ koju prirodno označavamo s f' i također zovemo derivacija od f na I. Nadalje, od operacija s funkcijama, valja se prisjetiti sljedećih;

Teorem 1.1.2. *Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u točki c otvorenog intervala I.*

- *Funkcija fg je diferencijabilna u točki c i*

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

- *Ako je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na I, onda je i diferencijabilna u točki c i*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Teorem 1.1.3. *Neka su $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ i neka je $f(I) \subseteq J$, tj. kompozicija $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ je dobro definirana na I. Ako je funkcija f diferencijabilna u točki $c \in I$ i funkcija g diferencijabilna u točki $d = f(c) \in J$, onda je kompozicija $g \circ f$ diferencijabilna u c i vrijedi*

$$(g \circ f)'(c) = g'(d)f'(c). \tag{1.1}$$

(1.1) nazivamo lančano pravilo. Dokazi prethodnih teorema mogu se pronaći u [7, str. 94] i [7, str. 95]. Prije nego pojam diferencijabilnosti lako poopćimo na funkcije više varijabli, definirajmo još i rastuću funciju te prokomentirajmo svojstvo konveksnosti.

Definicija 1.1.4. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je rastuća na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*

Definicija 1.1.5. *Za realnu funkciju f kažemo da je konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi da je*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Teorem 1.1.6. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je konveksna na I ako i samo ako je njena derivacija f' rastuća funkcija na I.*

Dokaz prethodnog teorema nalazi se u [7, str. 110].

Definicija 1.1.7. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je diferencijabilna u točki $c \in A$ ako postoji linearni operator $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0.$$

Analogno, funkcija f je diferencijabilna na A ako je ona diferencijabilna u svakoj točki skupa A.

Definicija 1.1.8. *Linearni operator L iz prethodne definicije naziva se diferencijal funkcije f u točki c i označava se s $Df(c)$.*

Operacije s funkcijama jednostavno se generaliziraju, kao i lančano pravilo, odnosno diferencijabilnost kompozicije.

Teorem 1.1.9. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u točki $c \in A$. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren skup, $f(A) \subseteq B$ i $g : B \to \mathbb{R}^p$ diferencijabilna u $d = f(c)$. Tada je i kompozicija $g \circ f$ diferencijabilna u c te vrijedi*

$$D(g \circ f)(c) = Dg(f(c))Df(c).$$

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [5, str. 62]. Dotaknimo se još pojma viših diferencijala.

Definicija 1.1.10. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na A. Ako je funkcija $Df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ diferencijabilna u točki $c \in A$ kažemo da je f dva puta diferencijabilna. Pripadni diferencijal $D(Df)(c) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ označavamo s $D^2 f(c)$ i zovemo drugi diferencijal ili diferencijal drugog reda.*

Više diferencijale definiramo na analogan način, proučavajući diferecijabilnost drugog, odnosno viših diferencijala.

1.2 Granični trošak, prihod i profit

Analizu nekih primjena diferencijalnog računa u ekonomiji započinjemo proučavanjem graničnog troška, prihoda i profita. Granični trošak (MC) definira se kao promjena troška proizvodnje izazvana proizvodnjom jedne dodatne jedinice nekog dobra. Analogno, granični je prihod (MR) promjena prihoda izazvana prodajom jedne dodatne jedinice. Profit se definira kao razlika prihoda i troškova, a granični profit (MP) kao promjena razine profita ostvarena proizvodnjom ili prodajom jedne dodatne jedinice. Općenito, koncept graničnosti u ekonomiji nalazi primjenu u sklopu ideje da bi poduzeća, potrošači i drugi ekonomski sektori mogli donositi odluke upravo uzimajući u obzir taj utjecaj malih promjena na postojeću situaciju. Primjerice, ako je prodajna cijena nekog proizvoda viša od graničnog troška, poduzeće bi onda trebalo odlučiti proizvoditi taj proizvod. S druge strane, ako je granični trošak viši od prodajne cijene proizvoda, njegova proizvodnja nije profitabilna za poduzeće. Dakle, proizvodnja se odvija dok granični trošak nije viši od prodajne cijene. Zaista, primjena koncepta graničnosti široka je i mnoge se odluke zasnivaju na njoj. Od interesa je, stoga, promatrati granični koncept raznih ekonomskih funkcija. Iako ćemo u ovom potpoglavlju to napraviti samo za funkcije troška, prihoda i profita, ideja za svaku ekonomsku funkciju je ista; granični koncept funkcije derivacija je te funkcije. Preciznije, radi se o derivaciji pripadne ekonomske funkcije koja predstavlja njenu ukupnost.

Budući da su funkcije ukupnog troška (C), ukupnog dohotka (R) i ukupnog profita (P) funkcije količine proizvodnje, odnosno prodaje (Q), imamo sljedeće:

$$MC = \frac{\partial C}{\partial Q}$$

$$MR = \frac{\partial R}{\partial Q}$$

$$MP = \frac{\partial P}{\partial Q}$$

U biti, ovdje se radi o linearnoj aproksimaciji funkcije f oko točke x_0. Iz alternativne formule za derivaciju

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

vidi se da je za Δx relativno malen

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Otuda za funkcije $C(x)$, $R(x)$ i $P(x)$, gdje je x količina proizvodnje, odnosno prodaje, i za $\Delta x = 1$ imamo sljedeće:

- Granični trošak u x približan je trošak proizvodnje x plus prve jedinice:

$$MC(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

- Granični prihod u x približan je prihod od prodaje x plus prve jedinice:

$$MR(x) \approx R(x + 1) - R(x)$$

- Granični profit u x približan je profit od proizvodnje (prodaje) x plus prve jedinice:

$$MP(x) \approx P(x + 1) - P(x)$$

Kao što vrijedi

$$P(x) = R(x) - C(x),$$

vrijedi i

$$MP(x) = MR(x) - MC(x).$$

Primjer 1.2.1. *Neka je troškovna funkcija poduzeća dana s*

$$C(x) = 0.00001x^3 - 0.003x^2 + 5x + 1000$$

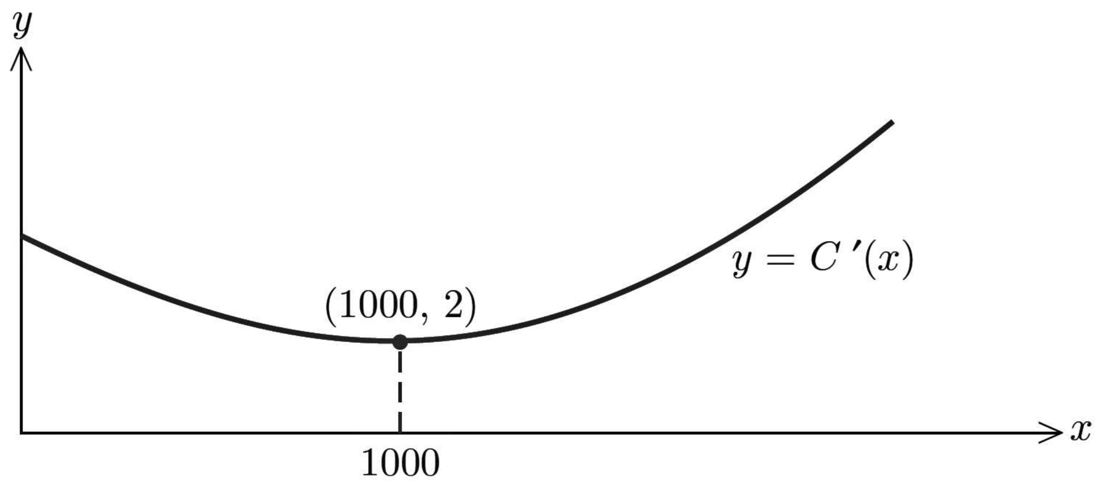
novčanih jedinica. Odredimo granični trošak te opišimo i interpretirajmo njegovo ponašanje.

$\diamond Rje\check{s}enje$:

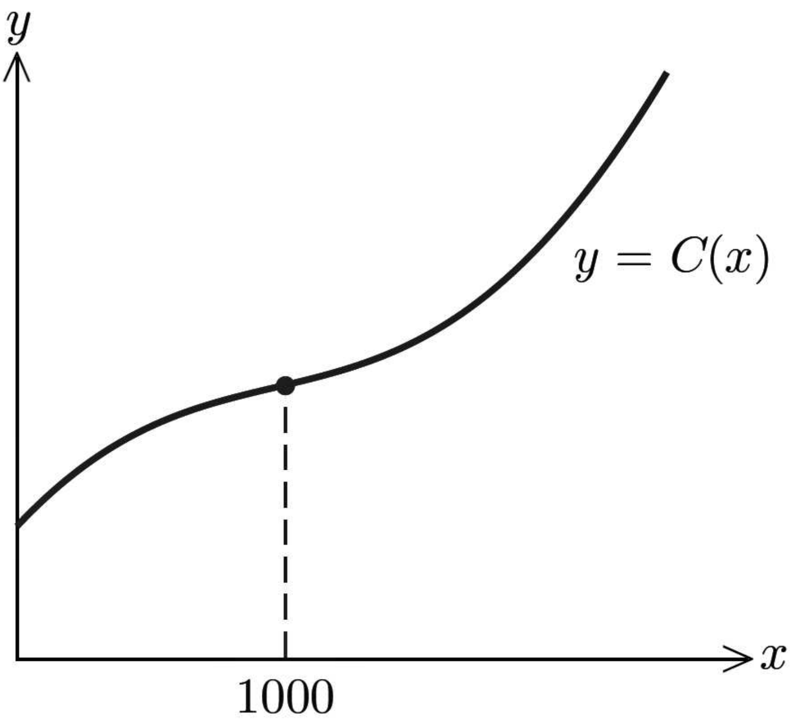
$$MC(x) = C'(x) = 0.00003x^2 - 0.006x + 5$$

Graf funkcije MC parabola je otvorena prema gore s tjemenom u $(1000, 2)$. Dakle, granični trošak prvo pada, a zatim dostiže minimum čija je vrijednost 2 na pripadnoj razini proizvodnje 1000. Nakon toga, granični trošak raste.

Na temelju ponašanja graničnog troška, lako zaključujemo o ponašanju troškovne funkcije. Budući da je MC uvijek pozitivna, troškovna funkcija je uvijek rastuća što je i ekonomski opravdano. Štoviše, budući da MC pada za razinu proizvodnje manju od 1000, a raste za razinu proizvodnje veću od 1000, troškovna funkcija je konkavna za razinu proizvodnje manju od 1000, a konveksna za razinu proizvodnje veću od 1000. Općenito, većina funkcija graničnih troškova ponaša se poput ove iz primjera. Razlog stoji u ekonomskoj opravdanosti. Naime, za male razine proizvodnje, proizvodnja dodatnih jedinica podliježe načelima ekonomije proizvodnje, odnosno, jedinični troškovi se smanjuju. S druge strane, povećana proizvodnja vodi do prekovremenog rada, korištenja manje efikasnih pogona te tržišnog natjecanja za oskudne materijale i sirovine zbog čega jedinični troškovi rastu.



Slika 1.1: Granični trošak



Slika 1.2: Troškovna funkcija

1.3 Granična korisnost, proizvod rada i proizvod kapitala

I u ovom potpoglavlju, ideja graničnih koncepata ostaje ista. Međutim, za proučavanje graničnih koncepata nekih ekonomskih funkcija, potrebno nam je poznavanje parcijalnih derivacija.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i neka je $f : A \to \mathbb{R}^m$. Neka su $f_1, ..., f_m : A \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od f tako da je $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Svaka od funkcija f_i funkcija je n varijabli, pa za danu točku $c = (c_1, ..., c_n) \in A$ možemo definirati realne funkcije jedne varijable $g_{ij}(h) = f_i(c_1, ..., c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, ..., c_n)$, definirane na nekom otvorenom intervalu u $\mathbb{R}$ koji sadrži 0. Ovime zapravo promatramo samo ponašanje funkcije f_i na nekoj otvorenoj okolini točke c koja je sadržana u A i to samo duž osi x_j.

Definicija 1.3.1. *Parcijalne derivacije funkcije f u točki $c \in A$, u oznaci $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$ ili $\partial_j f_i(c)$, dane su s*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) = g'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(c_1, ..., c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, ..., c_n) - f_i(c_1, ..., c_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(c + he_j) - f_i(c)}{h}.$$

Teorem 1.3.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija u točki $c \in A$. Tada sve parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$ postoje. Nadalje, ako definiramo matricu $\nabla f(c) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ s*

$$\nabla f(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix},$$

tada je $\nabla f(c)$ zapis od $Df(c)$ u paru kanonskih baza od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [5, str. 56]. Matricu $\nabla f(c)$ zovemo Jacobijeva matrica funkcije f u točki c, a ponekad i derivacija vektorske funkcije više varijabli. U slučaju $m = 1$, to jest kad je f realna funkcija više varijabli, Jacobijeva matrica u točki c je matrica dimenzije $1 \times n$. Vektor iz $\mathbb{R}^n$ s istim komponentama naziva se gradijent od f u c i označava se s $\mathrm{grad} f(c)$.

Parcijalne derivacije višeg reda u točki c definiraju se na isti način.

Teorem 1.3.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija u točki c. Tada postoje sve parcijalne derivacije drugog reda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)$ te je matrica drugog diferencijala $D^2 f(c) \in BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (bilinearni funkcionali) u kanonskoj bazi dana Hesseovom matricom od f u točki c*

$$Hf(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(c) \end{pmatrix}.$$

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [5, str. 72].

Primjene parcijalnih derivacija najprije proučavamo u kontekstu granične korisnosti. Ona je dio problema kojim se bavi teorija koja proučava kako potrošači raspoređuju dohotke na različita dobra i usluge kako bi maksimizirali svoje blagostanje. Ta teorija naziva se teorija ponašanja potrošača. Jedan od osnovnih pojmova te teorije je pojam tržišne košare koji označava popis određenih količina jednog ili više dobara. Brojčana vrijednost koja predstavlja zadovoljstvo koje potrošač dobiva od određene tržišne košare naziva se korisnost, a funkcija koja pojedinačnim tržišnim košarama pridružuje razinu korisnosti naziva se funkcija korisnosti. To je upravo ekonomska funkcija čiji nam je granični koncept trenutno od interesa. Granična korisnost (MU) odražava dodatno zadovoljstvo ostvareno potrošnjom jedne dodatne jedinice dobra.

Kao potrošači, u svakodnevnom životu svjedočimo brojnim primjenama prethodne teorije. Uzmimo za primjer savršene komplemente, odnosno dobra koja nam pružaju korisnost samo u slučaju da se konzumiraju zajedno. Tržišna košara koju čine lijeve cipele i njihove pripadne desne cipele primjer je košare savršenih komplemenata jer cipela bez svog para nema nikakvu korist. Iz toga slijedi da pripadna funkcija korisnosti ima oblik $U(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ gdje je x_1 količina lijevih, a x_2 količina desnih cipela.

Opći oblik funkcije korisnosti je $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ gdje su $x_1, x_2, ..., x_n$ količine različitih dobara koja se troše. Pretpostavimo da imamo potrošača s funkcijom korisnosti $U : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}$. Granična korisnost prvog dobra dana je s

$$MU_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Granična korisnost drugog dobra definira se analogno.

Važan pojam u mikroekonomiji je također i krivulja indiferencije. Ona prikazuje sve kombinacije tržišnih košara koje osobi osiguravaju istu razinu zadovoljstva. Gradijent krivulje indiferencije, odnosno nagib tangente u točki krivulje indiferencije, u ekonomiji je poznat pod nazivom granična stopa supstitucije (MRS). Nju interpretiramo kao količinu dobra koju je potrošač spreman žrtvovati da bi dobio dodatnu jedinicu drugog dobra. Budući da je to podatak koji je korisno znati za donošenje ekonomskih odluka, želimo ga dobiti preko graničnih korisnosti.

Promatrajmo situaciju u kojoj potrošač mijenja količinu oba dobra u svojoj tržišnoj košari $(\Delta x_1, \Delta x_2)$, ali na način da ostane na istoj krivulji indiferencije, to jest korisnost ostaje konstantna.

$$0 = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = MU_1 \Delta x_1 + MU_2 \Delta x_2. \tag{1.2}$$

Budući da je

$$MRS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1},$$

iz (1.2) slijedi

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

Zanimljivo je spomenuti i ekonomsko načelo opadajuće granične korisnosti koje kaže da će se povećanjem količine dobra koje se troši dodatno zadovoljstvo dobiveno potrošnjom dodatne jedinice dobra biti sve manje i manje.

Primjer 1.3.4. *Neka je funkcija korisnosti dana s*

$$U(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.8}.$$

Odredimo graničnu korisnost te provjerimo zadovoljava li načelo opadajuće granične korisnosti.

$\diamond Rješenje$:

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0.6 x_1^{-0.4} x_2^{0.8}$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0.8 x_1^{0.6} x_2^{-0.2}$$

Vidimo da MU_1 pada kad se x_1 povećava (dok se x_2 drži konstantom) i da MU_2 pada kad se x_2 povećava (dok se x_1 drži konstantom) čime se poštuje načelo opadajuće granične korisnosti.

U drugom dijelu ovog potpoglavlja, proučit ćemo još i granični koncept ekonomske funkcije proizvodnje. Analiza će biti analogna onoj od funkcije korisnosti budući da se i ovdje radi o primjeni parcijalnih derivacija na realnu funkciju više varijabli.

Opći oblik funkcije proizvodnje je

$$Q = f(K, L)$$

gdje je K kapital, a L rad. Parcijalnim deriviranjem dobivamo sljedeće granične funkcije:

$$MPK = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

$$MPL = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

MPK, odnosno granični proizvod kapitala, pokazuje promjenu ukupnog proizvoda koja nastaje zbog ulaganja dodatne jedinice kapitala. MPL, odnosno granični proizvod rada, pokazuje promjenu ukupnog proizvoda koja je rezultat povećanja ulaganja rada za jednu jedinicu uz ostale uvjete neizmijenjene. I ovdje je zanimljivo uočiti da je razumno zaključiti da će se s vremenom korist zapošljavanja novih radnika smanjiti. Na primjer, prevelik broj zaposlenih u poduzeću može dovesti do neučinkovitog rada. Do istog zaključka dolazimo i u slučaju povećanja kapitala. Radi se o ekonomskom zakonu opadajućeg graničnog proizvoda. Navedeno ćemo demonstrirati na primjeru Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje. Iako je model koji predstavlja poprilično pojednostavljen, pokazao se iznenađujuće točnim pa ne čudi što je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje omiljena u primjeni.

Primjer 1.3.5. *Neka je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje dana s*

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

gdje je A parametar koji odražava tehnološki nivo proizvodnje, α parametar koji označava približnu postotnu promjenu produktivnosti pri jednopostotnoj promjeni kapitala, a β parametar koji označava promjenu produktivnosti pri jednopostotnoj promjeni rada i konstantnoj vrijednosti kapitala. Odredimo granični proizvod rada i granični proizvod kapitala te provjerimo da je za $0 < \alpha, \beta < 1$ zadovoljen zakon opadajućeg graničnog proizvoda.

$\diamond Rješenje$:

$$MPL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \frac{\beta AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}}$$

Ako K držimo konstantnim, za zadane α, β i A, brojnik ovog izraza je konstanta. U nazivniku, kako povećavamo L, tako se povećava i $L^{1-\beta}$ (budući da je $0 < \beta < 1$) pa se MPL smanjuje. Dakle, povećanjem količine uloženog rada, vrijednost graničnog proizvoda rada pada.

$$MPK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} = \frac{\alpha AL^{\beta}}{K^{1-\alpha}}$$

Analogno, ako povećavamo K dok L držimo konstantnim, vrijednost MPK će padati.

1.4 Cjenovna elastičnost potražnje

U ekonomiji nas često može zanimati osjetljivost jedne varijable na drugu koju mjeri elastičnost. U ovom potpoglavlju proučavat ćemo cjenovnu elastičnost potražnje E_p. Ona označava postotnu promjenu količine potražnje za nekim dobrom koja je izazvana porastom cijene tog dobra za 1%.

Pretpostavimo da je funkcija potražnje za prvim dobrom Q_1 funkcija cijene tog dobra P_1, cijene P_2 nekog drugog dobra i dohotka I. Tada je cjenovna elastičnost potražnje za prvim dobrom E_{P_1} jednaka omjeru postotne promjene u potražnji za prvim dobrom i postotne promjene u cijeni prvog dobra.

Postotna promjena u cijeni prvog dobra dana je s

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = \frac{\Delta P_1}{P_1} \cdot \frac{100}{100} = \frac{\Delta P_1 \cdot 100}{P_1}\%.$$

Promjena cijene prvog dobra dovodi do promjene u potražnji za prvim dobrom. Postotna promjena potražnje za prvim dobrom dana je s

$$\frac{\Delta Q_1}{Q_1} = \frac{\Delta Q_1}{Q_1} \cdot \frac{100}{100} = \frac{\Delta Q_1 \cdot 100}{Q_1}\%.$$

Omjer postotne promjene u potražnji za prvim dobrom i postotne promjene u cijeni prvog dobra je

$$E_{P_1} = \frac{\Delta Q_1/Q_1}{\Delta P_1/P_1},$$

što možemo zapisati kao

$$E_{P_1} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{\Delta Q_1}{\Delta P_1}. \tag{1.3}$$

Za mali ΔP_1 imamo

$$\Delta Q_1 \approx \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \cdot \Delta P_1$$

pa (1.3) sada postaje

$$E_{P_1} = \frac{P_1 \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial P_1}(P_1, P_2, I)}{Q_1(P_1, P_2, I)}.$$

Cjenovna elastičnost potražnje obično ima negativnu vrijednost. Kad cijena dobra poraste, količina potražnje obično pada.

1.5 Maksimizacija prihoda i profita

U mikroekonomiji često se polazi od pretpostavke da poduzeća imaju za cilj maksimizaciju svog profita. Pitanje je li to zaista tako okruženo je kontroverzama. Primjerice, u većim tvrtkama menadžeri koji svakodnevno donose operativne odluke imaju djelomičnu slobodu pri upravljanju poduzećem budući da ih vlasnici ne mogu redovno kontrolirati. To može dovesti do situacije u kojoj menadžeri mogu više brinuti o maksimizaciji prihoda, rastu prihoda ili isplati dividendi dioničarima. Međutim, menadžerska sloboda pri izboru i ostvarenju drugih ciljeva osim maksimizacije profita ograničena je. Također, tvrtke koje ne maksimiziraju profit dugoročno ne mogu opstati. Zato je radna pretpostavka maksimizacije profita razumna pretpostavka u mikroekonomiji pa nam je cilj u ovom potpoglavlju proučiti maksimizaciju dohotka i profita za koje nam treba teorija određivanja ekstrema.

Definicija 1.5.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}$ i $c \in A$.*

- *Ako postoji okolina $U(c)$ od c na kojoj je $f(c)$ maksimalna vrijednost of f, tj.*

$$f(x) \leqslant f(c), \forall x \in U(c),$$

  onda kažemo da je c lokalni maksimum, a $f(c)$ je vrijednost lokalnog maksimuma.

- *Ako postoji okolina $U(c)$ od c na kojoj je $f(c)$ minimalna vrijednost of f, tj.*

$$f(c) \leqslant f(x), \forall x \in U(c),$$

  onda kažemo da je c lokalni minimum, a $f(c)$ je vrijednost lokalnog minimuma.

- *Za točku c kažemo da je lokalni ekstrem of f ako je lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije f.*

- *Za točku c kažemo da je stacionarna točka ako je funkcija f diferencijabilna u c i $Df(c) = 0$.*

Definicija 1.5.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za točku $c \in A$ kažemo da je sedlasta točka funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ ako je c stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem od f.*

Teorem 1.5.3. *Neka $f : I \to \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem. Ako je f diferencijabilna u c, onda je $f'(c) = 0$.*

Prethodnim teoremom, koji je poznat pod nazivom Fermatov teorem, dan je nužan uvjet za lokalni ekstrem, a generaliziramo ga u sljedećem teoremu.

Teorem 1.5.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $c \in A$. Ako je c lokalni ekstrem funkcije f, onda je $Df(c) = 0$, to jest c je stacionarna točka funkcije f.*

Preostalo nam je još dati dovoljan uvjet za lokalni ekstrem.

Teorem 1.5.5. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(n+1)}(I)$. Neka je $c \in I$ stacionarna točka, to jest $f'(c) = 0$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $k \in \{1, ...n\}$ vrijedi $f^{(k)}(c) = 0$ i $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, tada u slučaju*

- *kad je $n + 1$ paran broj i $f^{(n+1)}(c) > 0$, f ima u c strogi lokalni minimum,*

- *kad je $n + 1$ paran broj i $f^{(n+1)}(c) < 0$, f ima u c strogi lokalni maksimum,*

- *kad je $n + 1$ neparan broj, f nema u c lokalni ekstrem (ima horizontalnu infleksiju).*

Dakle, za $n = 1$ i $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ako funkcija ima lokalni minimum ili maksimum u točki $c \in \langle a, b\rangle$ i ako je funkcija diferencijabilna u c, tada je $f'(c) = 0$. Ako je još funkcija dva puta diferencijabilna u točki c i $f''(c) < 0$, tada je c (strogi) lokalni maksimum, a ako je $f''(c) > 0$, tada je c (strogi) lokalni minimum. U nastavku donosimo poopćenje ovog rezultata, ali prije toga definiramo pozitivno definitnu, negativno definitnu i indefinitnu matricu.

Definicija 1.5.6. *Za simetričnu matricu $H \in M_n(\mathbb{R})$ kažemo da je:*

- *pozitivno definitna (pišemo $H > 0$) ako je $(Hx|x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.*
- *pozitivno semidefinitna (pišemo $H \geq 0$) ako je $(Hx|x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.*
- *negativno definitna (pišemo $H < 0$) ako je $(Hx|x) < 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.*
- *negativno semidefinitna (pišemo $H \leq 0$) ako je $(Hx|x) \leq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.*
- *indefinitna ako nije ni pozitivno ni negativno semidefinitna.*

Teorem 1.5.7. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ klase C^2.*

- *Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $Hf(c)$ negativno definitna matrica, onda f ima lokalni maksimum u c.*
- *Ako f ima lokalni maksimum u c, onda je $Hf(c)$ negativno semidefinitna.*
- *Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $Hf(c)$ pozitivno definitna matrica, onda f ima lokalni minimum u c.*
- *Ako f ima lokalni minimum u c, onda je $Hf(c)$ pozitivno semidefinitna.*
- *Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $Hf(c)$ indefinitna matrica, onda f nema u točki c lokalni ekstrem, to jest c je sedlasta točka funkcije f.*

Kako za danu matricu nije lako odrediti njenu definitnost iz same definicije, navodimo kriterij, poznat pod nazivom Sylvesterov kriterij, koji nam to uvelike olakšava.

Teorem 1.5.8. *Neka je $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Označimo redom determinante*

$$\Delta_1 = h_{11}$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

- *H je pozitivno definitna ako i samo ako je $\Delta_i > 0$ za sve $i = 1, ..., n$.*
- *H je negativno definitna ako i samo ako je*

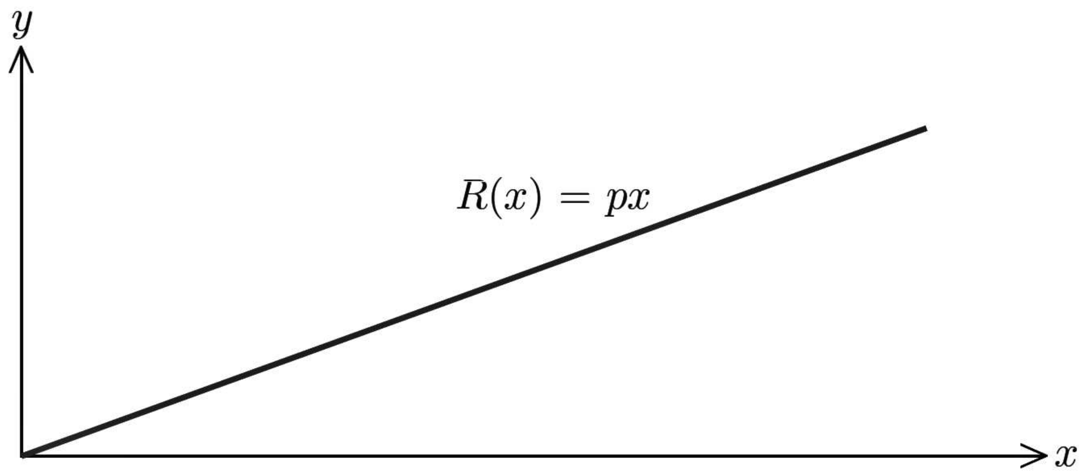
$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ...$$

Dokazi prethodnih teorema mogu se pronaći u [7] i [5].

Započnimo proučavanje primjene na primjeru maksimizacije funkcije prihoda. Ako x jedinica dobra prodajemo po jediničnoj cijeni p, ostvarujemo prihod $R(x)$ dan s

$$R(x) = x \cdot p. \tag{1.4}$$

Nakon grafičkog prikaza funkcije prihoda, uslijedit će zadatak u kojem ćemo riješiti konkretan problem maksimizacije funkcije prihoda na primjeru jedne aviokompanije. U praksi, problem određivanja cijena karti kao i ulaznica za razna događanja može biti poprilično kompleksan zbog brojnih faktora koje treba uzeti u obzir. No, kao i uvijek, treba imati na umu da je matematički model aproksimacija stvarnog svijeta koja u pravilu ne opisuje posve precizno pojave iz stvarnog svijeta, ali mu je, ako je model dobar, dovoljno bliska i kao takva korisna.



Slika 1.3: Funkcija prihoda

Primjer 1.5.9. *Na određenoj ruti, regionalna aviokompanija preveze 8000 putnika mjesečno. Cijena aviokarte iznosi 50 dolara i aviokompanija ju želi povećati. Međutim, odjel za istraživanje tržišta procijenio je da će za svaki dodatni dolar povećanja aviokompanija izgubiti 100 putnika. Odredimo cijenu aviokarte koja maksimizira prihod aviokompanije.*

⋄*Rješenje*: Neka x označava broj putnika mjesečno i neka p označava cijenu karte. Broj putnika ovisi o cijeni aviokarte i jednak je početnom broju putnika (8000) umanjenom za broj putnika koje je aviokompanija izgubila povećanjem cijene aviokarte. Cijena karte se povećala za $p - 50$, a budući da za svaki dolar povećanja aviokompanija izgubi 100 putnika, broj takvih putnika iznosi $(p - 50) \cdot 100$. Dakle, vrijedi

$$x = 8000 - (p - 50) \cdot 100 = 13000 - 100p.$$

Otuda dobivamo

$$p = -\frac{1}{100}x + 130$$

što, kad uvrstimo u (1.4), nam daje funkciju prihoda

$$R(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{100}x + 130\right).$$

Graf ove funkcije je parabola otvorena prema dolje s nultočkama $x = 0$ i $x = 13000$. Maksimum se postiže na polovištu dužine između nultočaka, odnosno u točki $x = 6500$.

Cijena koja odgovara tom broju putnika je

$$p = -\frac{1}{100} \cdot 6500 + 130 = 65.$$

Dakle, s cijenom aviokarte od 65 dolara aviokompanija će ostvarivati najviši mjesečni prihod.

Do kraja potpoglavlja, bavit ćemo se maksimizacijom profita. Prije primjera, proučimo zašto vrijedi sljedeći važan ekonomski rezultat.

Teorem 1.5.10. *Na razini proizvodnje koja maksimizira profit P, granični trošak MC mora biti jednak graničnom prihodu MR.*

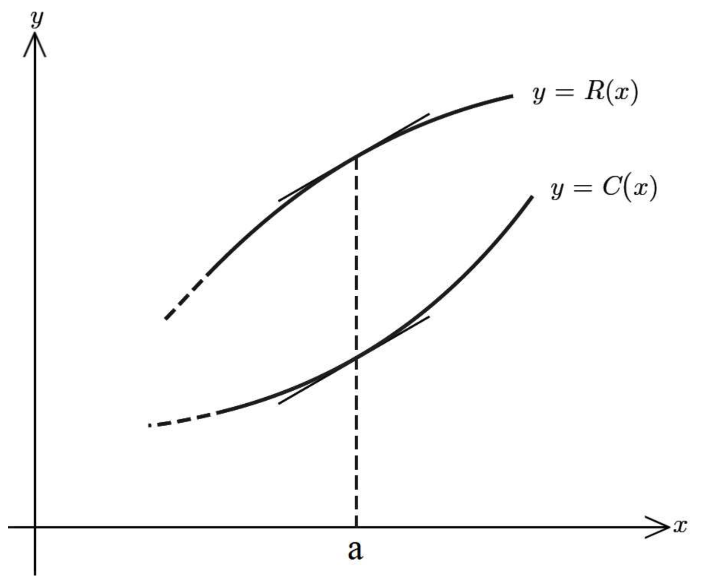
Dokaz. Iz $P = R - C$ koristeći nužan uvjet za ekstrem dobivamo traženu tvrdnju.

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{\partial R}{\partial Q} - \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial Q} = \frac{\partial C}{\partial Q}$$

$$MR = MC$$

□



Slika 1.4: $MR = MC$ za optimalnu razinu proizvodnje a

Primjer 1.5.11. *Proizvođač je utvrdio da, kako bi prodao x jedinica dobra, jedinična cijena, izražena u dolarima, mora biti*

$$p(x) = 1000 - x.$$

Proizvođač je također utvrdio da je ukupan trošak proizvodnje x jedinica dobra dan s

$$C(x) = 3000 + 20x.$$

Odredimo koliko jedinica dobra proizvođač mora proizvoditi i prodavati kako bi maksimizirao svoj profit i koliko on iznosi te kolika mora biti jedinična cijena dobra kako bi se taj maksimalan profit ostvario.

$\diamond Rje\check{s}enje$:
Prvo odredimo funkciju ukupnog prihoda.

$$R(x) = x \cdot p$$

$$R(x) = x(1000 - x) = 1000x - x^2$$

Sad kad imamo funkciju troška i prihoda, možemo odrediti funkciju profita.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = (1000x - x^2) - (3000 + 20x) = -x^2 + 980x - 3000$$

Sad tražimo stacionarne točke od P(x), odnosno računamo P'(x)=0.

$$\begin{aligned} P'(x) &= -2x + 980 \\ P'(x) &= -2x + 980 = 0 \\ x &= 490 \end{aligned}$$

Imamo samo jednu stacionarnu točku. Idemo za nju provjeriti pomoću druge derivacije da je zaista lokalni maksimum.

$$P''(x) = -2$$

Budući da je $P''(490) = -2 < 0$, profit se zaista maksimizira proizvodnjom 490 jedinica dobra. Idemo izračunati koliko iznosi taj maksimalni profit i koliku jediničnu cijenu on zahtjeva.

$$P(490) = -(490)^2 + 980 \cdot 490 - 3000 = 237100$$

$$p = 1000 - 490 = 510$$

Dakle, maksimalan profit iznosi 237100 dolara, a jedinična cijena dobra mora iznositi 510 dolara kako bi se taj profit ostvario.

Primjer 1.5.12. *Poduzeće ima funkciju proizvodnje danu s*

$$C = 120 + 0.1x^2.$$

Svoje proizvode prodaje na prvom tržištu sa sljedećom cijenom i prihodom:

$$p_1 = 400 - 0.5x_1$$

$$R_1 = 400x_1 - 0.5x_1^2,$$

a na drugom tržištu:

$$p_2 = 300 - 0.4x_2$$

$$R_2 = 300x_2 - 0.4x_2^2.$$

Pronađimo razine proizvodnje na svakom od tržišta koje maksimiziraju ukupan profit poduzeća.

$\diamond$*Rješenje*: Budući da je ukupna proizvodnja jednaka

$$x = x_1 + x_2$$

funkcija ukupne proizvodnje postaje:

$$C = 120 + 0.1x^2 = 120 + 0.1(x_1 + x_2)^2 = 120 + 0.1x_1^2 + 0.2x_1x_2 + 0.1x_2^2.$$

Ukupan profit poduzeća jednak je razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova.

$$P = R_1 + R_2 - C = 400x_1 - 0.6x_1^2 + 300x_2 - 0.5x_2^2 - 120 - 0.2x_1x_2$$

Nužan uvjet za maksimum nam daje sljedeći sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 400 - 1.2x_1 - 0.2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 300 - x_2 - 0.2x_1 = 0,$$

odnosno imamo sustav jednadžbi

$$1.2x_1 + 0.2x_2 = 400$$

$$0.2x_1 + x_2 = 300.$$

Njegovim rješavanjem (na primjer metodom supstitucije) dobivamo približno rješenje $x_1 = 293.1$ i $x_2 = 241.4$. Još ćemo iskoristiti Sylvesterov kriterij kako bismo se uvjerili da se zaista radi o razinama proizvodnje koje maksimiziraju ukupan profit poduzeća.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = -1.2$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = -0.2$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = -1$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1} = -0.2$$

Hesseova matrica, stoga, izgleda ovako:

$$H = \begin{pmatrix} -1.2 & -0.2 \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da su

$$\Delta_1 = -1.2 < 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1.2 & -0.2 \\ -0.2 & -1 \end{vmatrix} = 1.2 - 0.04 = 1.16 > 0,$$

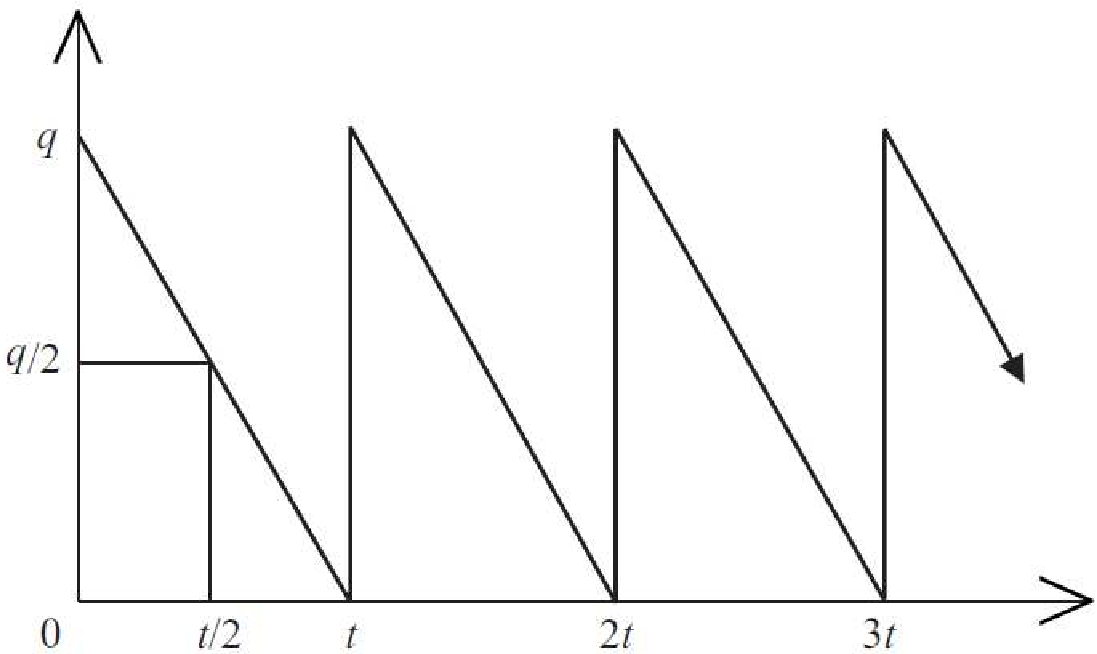
Sylvesterov kriterij nam govori da je Hesseova matrica negativno definitna što potvrđuje da su $x_1 = 293.1$ i $x_2 = 241.4$ tražene razine proizvodnje.

1.6 Minimizacija ukupnih troškova u kontekstu kontrole inventara

U ovom potpoglavlju primijenit ćemo matematičku teoriju iz prethodnog poglavlja, ali umjesto maksimizacije, bavit ćemo se minimizacijom. U ekonomskoj praksi minimizaciju primjerice susrećemo u strategiji inventara. To je svakodnevna metodologija za naručivanje, održavanje i obradu stavki (u skladištu). Za potrebe primjera, uzmimo da se radi samo o zalihama za skladište.

Poduzeće mora odrediti optimalnu veličinu narudžbe zaliha koja minimizira troškove naručivanja i troškove skladištenja. Treba imati na umu da naknadno naručivanje dodatno košta zbog administracije, dostave i sličnoga, no treba imati na umu i da skladištenje košta. Dakle, ako poduzeće napravi nekoliko velikih narudžbi, imat će visoke troškove skladištenja, a ako napravi mnogo manjih narudžbi, imat će visoke troškove naknadnog naručivanja. Sad ćemo proučiti kako poduzeće, s obzirom na navedeno, može odrediti optimalnu veličinu narudžbe.

Pretpostavimo da je Q ukupna godišnja potražnja za komponentama (koje se naručuju) jednoliko raspoređena tijekom godine na količine q. Koristit ćemo i pretpostavku da nove pošiljke dolaze tek kada se sve komponente, odnosno zalihe iz skladišta potroše. Neka F označava fiksni trošak svake pojedine narudžbe, a S neka označava jediničnu godišnju cijenu skladištenja. Ako pošiljke veličine q dolaze u konstantno razmaknutim intervalima vremena, onda je prosječna količina zaliha u skladištu jednaka $q/2$.



Slika 1.5: Prosječna količina zaliha $q/2$ kad pošiljke dolaze s vremenskim razmakom t

Stoga će ukupni godišnji troškovi skladištenja iznositi $(q/2)S$. Broj napravljenih narudžbi u godini iznosit će Q/q pa će ukupni godišnji troškovi naručivanja iznositi $(Q/q)F$.

Odredimo veličinu narudžbe koja minimizira ukupne troškove C koji su jednaki zbroju troškova naručivanja i troškova skladištenja.

$$C = \left(\frac{Q}{q}\right)F + \left(\frac{q}{2}\right)S$$

Tražimo stacionarne točke imajući na umu da su Q, F i S egzogeno dane konstante.

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{-QF}{q^2} + \frac{S}{2} = 0$$

$$\frac{2QF}{S} = q^2$$

$$q = \sqrt{\frac{2QF}{S}}$$

Budući da zbog prirode problema Q, F i q moraju biti pozitivni, vidimo da se zaista radi o minimumu zbog

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = 2QFq^{-3} > 0.$$

1.7 Komparativnostatička analiza

Parcijalne derivacije mogu se koristiti i za dobivanje raznih multiplikatora modela za određivanje (nacionalnog) dohotka. Modeli se, između ostalog, sastoje od endogenih i egzogenih varijabli. Endogene varijable su one koje model objašnjava, a egzogene one koje dolaze izvan modela i utječu na endogene. Dolazimo do područja komparativnostatičke analize koja ispituje kako možemo očekivati da će se ravnotežna (ekvilibrijska) razina endogene varijable mijenjati kao odgovor na promjenu neke egzogene varijable ili parametra modela. Uvedimo model na kojem ćemo raditi.

$$Y = C + I + G + (X - Z) \tag{1.5}$$

gdje je Y dohodak, C potrošnja, I investicije, G vladina potrošnja, X izvoz i Z uvoz.

Kako bismo dobili ravnotežnu razinu od Y, u oznaci $\bar{Y}$, jednostavno u (1.5) uvrstimo zadane dodatne informacije.

Neka imamo zadano

$$C = C_0 + bY$$

$$I = I_0 + aY$$

$$G = G_0$$

$$X = X_0$$

$$Z = Z_0$$

gdje je b granična sklonost potrošnji, a granična sklonost investiranju te $C_0, I_0, G_0.X_0$ i Z_0 egzogeno dane varijable. To sve uvrštavamo u (1.5) i dobivamo ekvilibrijsku razinu od Y, u oznaci $\bar{Y}$.

$$\bar{Y} = \frac{1}{1 - b - a}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0).$$

Uzimanje parcijalne derivacije po nekoj od varijabli ili parametara daje nam pripadni multiplikator. Primjerice, multiplikator vladine potrošnje dan je s

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b-a}.$$

Vidimo da ako se vladina potrošnja povećava, nacionalni dohodak raste. Kao drugi primjer pogledajmo parcijalnu derivaciju po graničnoj sklonosti investiranju a.

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial a} = \frac{(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)}{(1-b-a)^2} = \frac{\bar{Y}}{1-b-a}$$

Vidimo da se nacionalni dohodak povećava i kad a raste što je zaista u skladu s očekivanjima.

1.8 Dodatna motivacija

Na kraju poglavlja, vrijedi istaknuti da postoje još brojne primjene diferencijalnog računa u ekonomiji koje nisu navedene u ovom radu. Spomenute primjene samo su ilustrativni primjeri obrađene teorije i svjedoci sve uže povezanosti matematičke analize i ekonomije. Iako nije predmet rada, razmatranje diferencijalnog računa prirodno za sobom povlači i integralni račun koji nalazi jednako značajno mjesto u ekonomiji kao i diferencijalni račun. Neke od problematika, odnosno polja u kojima ga susrećemo su potrošačev i proizvođačev višak, računanje ukupnog profita, računanje buduće vrijednosti investicije, sadašnja i buduća vrijednost neprekidnog toka prihoda, planiranje transporta, upravljanje investicijama i akumuliranje kapitala i tako dalje.

Poglavlje 2

Primjena uvjetne optimizacije i metode Lagrangeovih multiplikatora

2.1 Teorija uvjetne optimizacije

Do sada smo se bavili optimizacijom bez uvjeta koji bi ograničavao skup točaka domene. Međutim, u ekonomiji često nailazimo na neka ograničenja koja proizlaze iz prirode problema, na primjer zbog ograničenosti resursa. Stoga ćemo u ovom poglavlju proučavati primjenu optimizacije uz uvjet. Ograničit ćemo se na optimizaciju uz samo jedan uvjet i to na primjeru funkcija dvije varijable. Problem se lako generalizira i na situacije s više uvjeta i varijabli, ali takvim se primjerima nećemo baviti u ovome poglavlju.

Definicija 2.1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je f neprekidna na Ω te neka je $S \subseteq \Omega$. Ekstrem funkcije $f|_S : S \to \mathbb{R}$ nazivamo uvjetni ekstrem funkcije f s obzirom na skup S.*

Nakon iskaza teorema o implicitnoj funkciji, slijedi teorem koji nam daje nužne uvjete za ekstrem u slučaju kad imamo jedan uvjet gdje ćemo se susreti s čestim načinom zadavanja skupa S kao

$$S = \{P \in \Omega : g_1(P) = 0, g_2(P) = 0, ..., g_m(P) = 0\},$$

gdje su $g_i \in C(\Omega), i = 1, ..., m, m < n$, dane funkcije.

Teorem 2.1.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otvoren, $F : A \to \mathbb{R}^m$ klase C^p, $p \geq 1$. Pretpostavimo da $(x_0, y_0) \in A$ zadovoljava $F(x_0, y_0) = 0$ i neka je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ regularna matrica. Tada postoje otvorena okolina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ od x_0, otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^m$ od y_0 i jedinstvena funkcija $f : U \to V$ klase C^p takva da vrijedi*

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U.$$

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [5, str. 96].

Teorem 2.1.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1 i neka je zadan skup $S = \{P \in \Omega : g(P) = 0\}$ te neka vrijedi $\nabla g(P) \neq 0$, $\forall P \in S$. Ako je $P_0 \in S$ točka lokalnog ekstrema za $f|_S$, onda postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ sa svojstvom*

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0), \tag{2.1}$$

odnosno

$$\partial_i f(P_0) = \lambda \partial_i g(P_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati za slučaj kada je $n = 2$, a analogno se dokazuje i za $n > 2$. Kako je $\nabla g(x, y) \neq 0$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$, $P_0 = (x_0, y_0)$. Primjenom teorema o implicitnoj funkciji na funkciju g dobivamo otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $x_0 \in I$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvima

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= y_0, \quad x \in I \\ g(x, \varphi(x)) &= 0, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Pritom je

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial g(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x, \varphi(x))}{\partial y}}, \quad x \in I. \tag{2.2}$$

Sada je jasno da je točka (x_0, y_0) točka lokalnog uvjetnog ekstrema za funkciju f uz uvjet $g(x, y) = 0$ ako i samo ako je x_0 točka lokalnog ekstrema za funkciju $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\bar{f}(x) = f(x, \varphi(x))$.

Nadalje, kako je funkcija f funkcija klase C^1, zaključujemo da i funkcija $\bar{f}$ ima neprekidnu prvu derivaciju na intervalu I. Upotrebom pravila za derivaciju kompozicije funkcija više varijabli dobivamo da za sve $x \in I$ vrijedi

$$\bar{f}'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Ovu jednakost, uvažavajući formulu (2.2) i uvrštavajući $x = x_0$, možemo zapisati kao

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} = 0,$$

što je ekvivalentno jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0),$$

za

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

□

O dovoljnim uvjetima bit će riječ u sljedećem potpoglavlju.

2.2 Algoritam metode Lagrangeovih multiplikatora

Metoda Lagrangeovih multiplikatora jedna je od metoda za rješavanje problema iz područja uvjetne optimizacije. Pokazuje se jako pogodnom u praksi, primjerice kad je alternativna metoda, metoda supstitucije, prekomplicirana ili nemoguća. Njezini počeci vežu se uz francuskog matematičara J. L. Lagrangea koji je 1797. godine došao na zamisao da od funkcije cilja i uvjeta iz zadanog problema uvjetne optimizacije pomoću varijable λ, Lagrangeovog multiplikatora, dobije novu funkciju, Lagrangeovu funkciju, kojom se problem uvjetne optimizacije svodi na problem bezuvjetne optimizacije.

Neka je f funkcija cilja, a g uvjet kao u prethodnom potpoglavlju. Uvodimo Lagrangeovu funkciju

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda g(x_1, x_2, ..., x_n),$$

gdje je λ varijabla koju nazivamo Lagrangeov multiplikator. Rješavanje optimizacijskog problema svodi se na rješavanje sljedećeg sustava jednadžbi kojeg dobivamo parcijalnim deriviranjem funkcije F po svim varijablama $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda$ i izjednačavanjem tih parcijalnih derivacija s nulom. Nazivamo ga Lagrangeov sustav jednadžbi.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0$$

Primijetimo da na taj način dobivamo nužne uvjete za ekstrem u slučaju kad imamo jedan uvjet pri čemu parcijalna derivacija od F po λ daje uvjet $g(x_1, ..., x_n) = 0$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \\
g(x_1, ..., x_n) &= 0
\end{aligned}$$

što je točno (2.1).

Kao što je već rečeno, ovi rezultati lako se generaliziraju i na uvjetnu optimizaciju kad imamo više uvjeta, ali time se nećemo baviti u ovome radu.

Sada kada vidimo da su zaista zadovoljeni nužni uvjeti za ekstrem, navedimo i rezultat o dovoljnim uvjetima u slučaju kad imamo jedan uvjet i funkciju dvije varijable.

Teorem 2.2.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^2 i neka je $S = \{P \in \Omega : g(P) = 0\}$. Dodatno, neka je $P_0 = (x_0, y_0) \in S$ rješenje Lagrangeovog sustava jednadžbi i $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vrijednost Lagrangeovog multiplikatora pripadne Lagrangeove funkcije*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Neka je sljedećim izrazom dana tzv. obrubljena Hesseova matrica:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ako je

- *$\det H > 0$, funkcija $f(x, y)$ ima lokalni uvjetni maksimum u točki (x_0, y_0).*
- *$\det H < 0$, funkcija $f(x, y)$ ima lokalni uvjetni minimum u točki (x_0, y_0).*

Dokaz. Neka je φ funkcija kao u dokazu teorema 2.1.3.

Uočimo da je (x_0, y_0) točka lokalnog uvjetnog ekstrema za funkciju f uz uvjet $g(x, y) = 0$ ako i samo ako je x_0 točka lokalnog ekstrema za funkciju $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\bar{f}(x) = f(x, \varphi(x))$ (pri tome je interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kao u dokazu teorema 2.1.3). Sada računamo $\bar{f}''(x_0)$. Imamo

$$\bar{f}'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) \end{aligned}$$

pa je

$$\bar{f}'(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), \lambda) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \lambda) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right) \cdot \varphi'(x).$$

Kako je iz (2.2)

$$\varphi'(x) = - \frac{\dfrac{\partial g(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x, \varphi(x))}{\partial y}},$$

imamo

$$\begin{aligned} \bar{f}'(x) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), \lambda) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi'(x) \\ \bar{f}''(x) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x), \lambda) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi'(x) \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi'(x)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi''(x) \\ &= - \frac{1}{\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^2} \Bigg[- \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right]^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x), \lambda) \\ &\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x), \lambda) - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right]^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x), \lambda) \Bigg] \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \lambda) \cdot \varphi''(x) \end{aligned}$$

$$\bar{f}''(x_0) = -\frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))\right)^2} \det H + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0), \lambda_0) \cdot \varphi''(x_0).$$

Kako je (x_0, y_0) rješenje Lagrangeovog sustava jednadžbi i $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vrijednost Lagrangeovog multiplikatora pripadne Lagrangeove funkcije, to je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

pa je

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

odnosno

$$\bar{f}''(x_0) = -\frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))\right)^2} \det H.$$

Točka (x_0, y_0) je lokalni maksimum funkcije f uz uvjet $g(x, y) = 0$ ako i samo ako je $\bar{f}''(x_0) < 0$, tj. ako i samo ako je $\det H > 0$.

Točka (x_0, y_0) je lokalni minimum funkcije f uz uvjet $g(x, y) = 0$ ako i samo ako je $\bar{f}''(x_0) > 0$, tj. ako i samo ako je $\det H < 0$. □

2.3 Interpretacija i primjena Lagrangeovih multiplikatora

Prije nekoliko primjera primjene, osvrnimo se na (ekonomsku) interpretaciju Lagrangeovih multiplikatora. Lagrangeov multiplikator λ aproksimira granični utjecaj promjene konstante u funkciji uvjeta na vrijednost funkcije cilja. Dakle, promjena, odnosno povećanje ili smanjenje, konstante u funkciji uvjeta za jednu jedinicu uzrokuje istu vrstu promjene vrijednosti funkcije cilja za približno λ jedinica. Također, Lagrangeove se multiplikatore često zove cijenama iz sjene. Naime, ako je funkcija cilja funkcija korisnosti koja se maksimizira, a funkcija uvjeta označava određeno budžetsko ograničenje, tada λ aproksimira graničnu korisnost dodatne novčane jedinice prihoda. Formalizirajmo to sljedećim teoremom za slučaj maksimizacije, a analogno vrijedi i za minimizaciju. No, prije teorema, navodimo još jednu varijantu lančanog pravila koja će se koristiti u dokazu teorema.

Teorem 2.3.1. *Neka su*

$$x = g(t)$$

$$y = h(t)$$

diferencijalne funkcije u varijabli t i neka je $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija u varijablama x i y. Tada je $z = f(x(t), y(t))$ diferencijabilna funkcija i vrijedi

$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \cdot y'(t). \tag{2.3}$$

Teorem 2.3.2. *Neka su f i g funkcije dvije varijable koje su klase C^1. Za bilo koju fiksnu vrijednost parametra a, neka je $(x_0(a), y_0(a))$ rješenje problema*

$$f(x, y) \to max \tag{2.4}$$

$$g(x, y) = a,$$

gdje je g uvjet, uz odgovarajući multiplikator $\lambda_0(a)$. Pretpostavimo da su x_0, y_0 i λ_0 funkcije u varijabli a klase C^1. Tada vrijedi

$$\lambda_0(a) = \frac{\partial f}{\partial a}(x_0(a), y_0(a)).$$

Dokaz. Lagrangeova funkcija za (2.4) glasi

$$F(x, y, \lambda; a) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - a).$$

Rješenje $(x_0(a), y_0(a), \lambda_0(a))$ za svaki a zadovoljava

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(a), y_0(a), \lambda_0(a); a)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) - \lambda_0(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) \tag{2.5}$$

te također

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0(a), y_0(a), \lambda_0(a); a)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)) - \lambda_0(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)). \tag{2.6}$$

Štoviše, budući da je $g(x_0(a), y_0(a)) = a, \forall a$, koristeći (2.3) imamo

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) \cdot x_0'(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)) \cdot y_0'(a) = 1, \forall a.$$

Koristeći (2.3), (2.5) i (2.6), dobivamo traženu tvrdnju. Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned}
f'(x_0(a), y_0(a)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) \cdot x_0'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)) \cdot y_0'(a) \\
&= \lambda_0(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) \cdot x_0'(a) + \lambda_0(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)) \cdot y_0'(a) \\
&= \lambda_0(a) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0(a), y_0(a)) \cdot x_0'(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0(a), y_0(a)) \cdot y_0'(a) \right) \\
&= \lambda_0(a) \cdot 1
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.3.3. *Riješimo problem optimizacije Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje*

$$q = K^{0.3} L^{0.5}$$

s uvjetom

$$6K + 2L = 384.$$

$\diamond$*Rješenje*: Lagrangeova funkcija glasi

$$Q = K^{0.3} L^{0.5} - \lambda \cdot (6K + 2L - 384).$$

Dobivamo Lagrangeov sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial K} &= 0.3K^{-0.7} L^{0.5} - 6\lambda = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial L} &= 0.5K^{0.3} L^{-0.5} - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= 384 - 6K - 2L = 0.
\end{aligned}$$

Dijeljenjem, iz prve dvije jednadžbe dobivamo:

$$\frac{0.3K^{-0.7} L^{0.5}}{0.5K^{0.3} L^{-0.5}} = \frac{6\lambda}{2\lambda},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
0.6K^{-1} L &= 3 \\
\frac{L}{K} &= \frac{3}{0.6}
\end{aligned}$$

$$L = 5K.$$

Uvrštavanjem posljednje jednadžbe u

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 384 - 6K - 2L = 0,$$

imamo

$$384 - 6K - 2 \cdot (5K) = 0,$$

iz čega konačno dobivamo

$$K_0 = 24$$
$$L_0 = 120.$$

Obrubljeni Hessijan glasi

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 6 & -0.21K_0^{-1.7}L_0^{0.5} & 0.15K_0^{-0.7}L_0^{-0.5} \\ 2 & 0.15K_0^{-0.7}L_0^{-0.5} & -0.25K^{0.3}L_0^{-1.5} \end{pmatrix},$$

a uvrštavanjem $K_0 = 24$ i $L_0 = 120$ dobivamo

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 6 & -0.01036 & -0.00148 \\ 2 & -0.00148 & -0.05921 \end{pmatrix}.$$

Budući da je $\det H = 2.13748 > 0$, funkcija q ima lokalni uvjetni maksimum u točki $(K_0, Y_0) = (24, 120)$.

Za kraj poglavlja, navodimo dva važna ekonomska rezultata zajedno s njihovim dokazima u kojima koristimo metodu Lagrangeovih multiplikatora.

Teorem 2.3.4. *Neka je funkcija korisnosti dana s*

$$u = Ax^a y^b,$$

a uvjet optimizacije dan s

$$P_x x + P_y y = B.$$

Uvjet predstavlja budžetsko ograničenje gdje je su P_x i P_y cijene. U točki uvjetnog maksimuma omjer cijena mora biti jednak omjeru graničnih korisnosti, odnosno mora vrijediti

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}.$$

Dokaz. Iz Lagrangeove funkcije

$$U = Ax^a y^b - \lambda(P_x x + P_y y - B)$$

dobivamo Lagrangeov sustav jednadžbi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = aAx^{a-1}y^b - \lambda P_x = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = bAx^a y^{b-1} - \lambda P_y = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = B - P_x x - P_y y = 0.$$

U (2.7) prepoznajemo da je

$$aAx^{a-1}y^b = u_x = MU_x$$

te u (2.8) da je

$$bAx^a y^{b-1} = u_y = MU_y.$$

Iz (2.7) imamo

$$\lambda = \frac{aAx^{a-1}y^b}{P_x} = \frac{MU_x}{P_x},$$

a iz (2.8) imamo

$$\lambda = \frac{bAx^a y^{b-1}}{P_y} = \frac{MU_y}{P_y}.$$

Izjednačavanjem λ dobivamo traženu tvrdnju.

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$$

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

□

Teorem 2.3.5. *Neka se optimizacijski problem sastoji od funkcije cilja koja je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje dana s*

$$q = AK^\alpha L^\beta$$

i uvjeta koji predstavlja budžetsko ograničenje dano s

$$P_K K + P_L L = B.$$

Tada na razini inputa koja minimizira troškove vrijedi

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha P_L}{\beta P_K}.$$

Dokaz. Koristeći Lagrangeovu metodu multiplikatora, dobivamo sljedeće:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} - \lambda(P_K K + P_L L - B)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} - \lambda P_K = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} - \lambda P_L = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = B - P_K K - P_L = 0$$

Iz (2.9) i (2.10) imamo

$$\frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}}{P_K} = \lambda = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{P_L},$$

iz čega dobivamo

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}}.$$

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{\beta K}{\alpha L}.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha P_L}{\beta P_K}.$$

□

Poglavlje 3

Primjena homogenosti, Eulerovog teorema i homogenizacije funkcije

3.1 Definicija i primjeri homogenih funkcija

Nakon što smo se uvjerili u važnost i široku primjenu diferencijabilnih funkcija, u ovom posljednjem poglavlju obradit ćemo teoriju te proučiti primjenu jednako važne klase homogenih funkcija.

Definicija 3.1.1. *Za bilo koji skalar k, realna funkcija $f(x_1, ..., x_n)$ homogena je stupnja k ako vrijedi*

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n),$$

za svaki $x_1, ..., x_n$ i za svaki $t > 0$.

Obično ćemo raditi s homogenim funkcijama definiranima na $\mathbb{R}^n_+$. U svakom slučaju, domena homogene funkcije mora biti konus zbog važnog svojstva kojeg posjeduje; ako je neki x u skupu, onda je svaki pozitivan skalarni višekratnik tx također u tom skupu.

Pogledajmo par polaznih primjera na kojima ćemo komentirati homogenost. Očito je da su monomi jedne varijable

$$y = ax^k$$

homogeni stupnja k. Monomi oblika

$$z = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$$

homogeni su stupnja $k_1 + ... + k_n$. Lako se provjeri i da je zbroj monoma koji su homogeni stupnja k polinom koji je homogen stupnja k. Međutim, zbroj monoma koji su homogeni, ali različitog stupnja, polinom je koji nije homogen.

Primjer 3.1.2. *Funkcija*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-\frac{3}{2}} x_2^{\frac{9}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^3 x_3^{-\frac{1}{2}}$$

homogena je stupnja 3.

Primjer 3.1.3. *Funkcija*

$$f(x_1, x_2) = \frac{5x_1^2 - x_1 x_2}{3x_1^{\frac{5}{2}}}$$

homogena je stupnja $-\frac{1}{2}\left(= 2 - \frac{5}{2}\right)$.

Valja primijetiti da se u slučaju jedne varijable točno zna oblik homogene funkcije, odnosno, da je samo jedan mogući.

Teorem 3.1.4. *Homogene funkcije jedne varijable na* $\mathbb{R}_+$ *funkcije su oblika*

$$z = ax^k$$

gdje je $k \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x > 0$ proizvoljan.

Neka je $z = f(x)$ proizvoljna homogena funkcija jedne varijable stupnja k i neka je $a = f(1)$. Tada je

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x^k f(1) = ax^k.$$

□

3.2 Homogene funkcije u ekonomiji

Poticaj za proučavanje homogenih funkcija, između ostalog, je njihova česta upotreba u ekonomiji. Svojstvo homogenosti ponekad proizlazi iz prirode problema. Neki od primjera su funkcije potražnje koje su prirodno homogene u cijenama i dohotku, funkcije profita i troškova izvedene iz funkcija proizvodnje te funkcije potražnje izvedene iz funkcija korisnosti. S druge strane, homogenost funkcije ponekad se koristi kao pretpostavka kako bi se (jednostavnije) dokazali teoremi nekih ekonomskih modela. Naime, puno više toga možemo reći i zaključiti o modelima s homogenim funkcijama u odnosu na modele reprezentirane funkcijom bez svojstva homogenosti.

Neka je $q = f(x_1, ..., x_n)$ funkcija proizvodnje koja je homogena stupnja 1. Tada vrijedi

$$f(tx_1, ..., tx_n) = tf(x_1, ..., x_n)$$

za sve tržišne košare $(x_1, ..., x_n)$ i za svaki $t > 0$. Uzimajući da je, primjerice, $t = 2$, ta jednadžba nam govori da ako poduzeće s tom funkcijom proizvodnje udvostruči sve inpute, udvostručit će i outpute, odnosno proizvodnju. Za takvo poduzeće kažemo da ima konstantne prinose na obujam što, dakle, znači da uravnoteženo povećanje svih inputa dovodi do proporcionalnog povećanja proizvodnje.

S druge strane, pretpostavimo da je funkcija proizvodnje homogena stupnja $k > 1$. Ako poduzeće s tom funkcijom proizvodnje udvostruči količinu svakog inputa, njezin output narast će s faktorom 2^k. Budući da je $k > 1$, output će se i više nego udvostručiti. Kažemo da takvo poduzeće ima rastuće prinose na obujam jer uravnotežno povećanje svih inputa dovodi do i više nego proporcionalnog povećanja proizvodnje. Analogno, u slučaju kad je $k < 1$, govorimo o padajućim prinosima na obujam jer dolazi do manje nego proporcionalnog povećanja proizvodnje.

Još jedan vrijedan primjer homogene funkcije je Cobb-Douglasova funkcija za koju smo već komentirali da je omiljena u primjeni. Ona može biti zadana u obliku monoma više varijabli

$$q = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

gdje su $a_1, ..., a_n$ obično pozitivni razlomci. O tome je li njihov zbroj jednak, veći ili manji od 1 ovisi ima li poduzeće čija je proizvodnja opisana ovakvom Cobb-Douglasovom funkcijom konstantne, rastuće ili padajuće prinose na obujam. Empirijske studije pokazale su da je ta suma obično vrlo blizu 1.

3.3 Svojstva homogenih funkcija

U ovom potpoglavlju navest ćemo dva važna teorema vezana uz svojstva homogenih funkcija koje su i diferencijabilne. Oba teorema imaju važne posljedice u ekonomiji. Prvo dokazujemo svojstvo da su parcijalne derivacije diferencijabilnih funkcija koje su homogene stupnja k opet homogene funkcije, ali stupnja $k - 1$. Ovo svojstvo poprilično je intuitivno i očito je zašto vrijedi za homogene polinome. Slijedi teorem u kojem ćemo formalizirati ovu tvrdnju i dokazati ju za općenite homogene funkcije.

Teorem 3.3.1. *Neka je $z = f(x)$ funkcija klase C^1 na otvorenom konusu u $\mathbb{R}^n$. Ako je f homogena funkcija stupnja k, njene parcijalne derivacije (prvog reda) homogene su stupnja $k - 1$.*

Dokaz. Funkcija f je homogena pa vrijedi

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

za sve tržišne košare $(x_1, ..., x_n)$ i za svaki $t > 0$. Računanjem parcijalne derivacije po x_i dobivamo

$$t\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dijeljenjem obje strane jednakosti s t dobivamo traženu tvrdnju.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

□

Sljedeći teorem vrijedi i u $\mathbb{R}^n_+$, ali ga navodimo i dokazujemo za $\mathbb{R}^2_+$ gdje će nam inputi biti rad L i kapital K. Prije njega ćemo objasniti graničnu stopu tehničke supstitucije $MRTS$.

$MRTS$ pokazuje za koliko se mora smanjiti kapital ako se poveća rad za jednu dodatnu jedinicu tako da razina proizvodnje ostane nepromijenjena. Granična stopa tehničke supstitucije između dva inputa jednaka je omjeru graničnih proizvoda ta dva inputa. U našem primjeru radi se o radu i kapitalu pa imamo

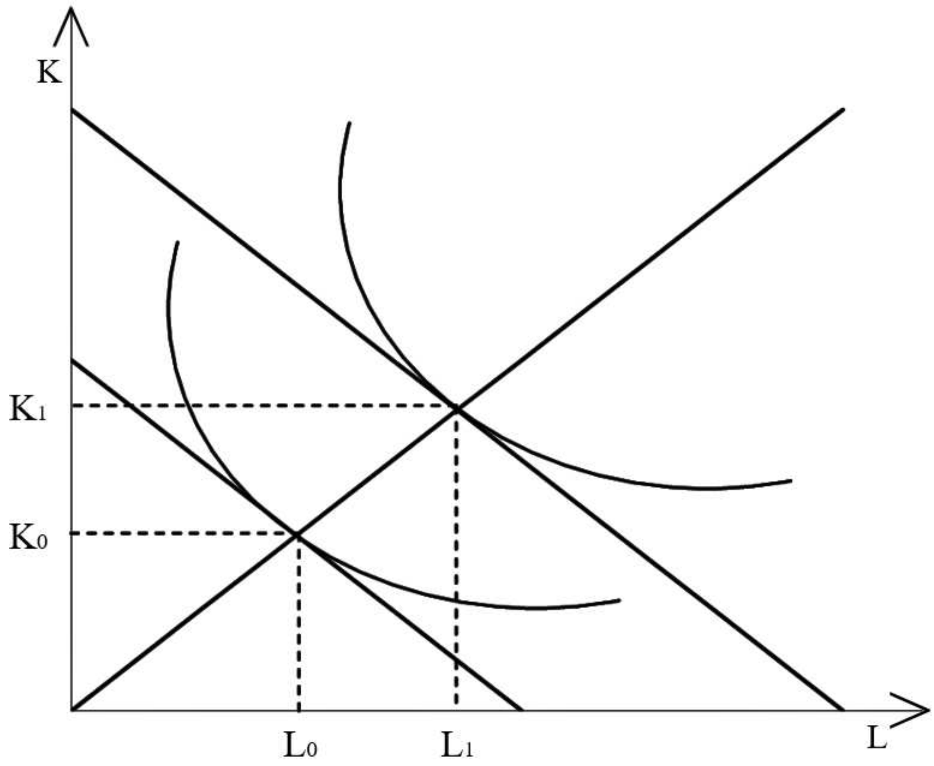
$$MRTS = \frac{MPL}{MPK}.$$

Dakle, granična stopa tehničke supstitucije nagib je izokvante, odnosno krivulje koja povezuje sve moguće kombinacije inputa za koje je razina proizvodnje jednaka.

Teorem 3.3.2. *Neka je $q = f(L, K)$ homogena funkcija stupnja k i klase C^1 na $\mathbb{R}^2_+$. Tangente na izokvante imaju konstantan nagib duž pojedine zrake iz ishodišta.*

Dokaz. Želimo pokazati da je granična stopa supstitucije konstantna duž pojedine zrake iz ishodišta.

Neka su (L_0, K_0) i $(L_1, K_1) = t(L_0, K_0)$ dva para inputa na istoj zraci iz ishodišta kao što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 3.1: MRTS je konstantna duž zrake iz ishodišta

Iz definicije od $MRTS$ slijedi

$$MRTS = \frac{MPL}{MPK}.$$

$MRTS$ u točki (L_1, K_1) iznosi

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial L}(L_1, K_1)}{\frac{\partial f}{\partial K}(L_1, K_1)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}(tL_0, tK_0)}{\frac{\partial f}{\partial K}(tL_0, tK_0)}.$$

Koristeći teorem 3.3.1, dobivamo

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial L}(tL_0, tK_0)}{\frac{\partial f}{\partial K}(tL_0, tK_0)} = \frac{t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial L}(L_0, K_0)}{t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial K}(L_0, K_0)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}(L_0, K_0)}{\frac{\partial f}{\partial K}(L_0, K_0)},$$

gdje je

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial L}(L_0, K_0)}{\frac{\partial f}{\partial K}(L_0, K_0)} = MRTS(L_0, K_0).$$

Dakle, imamo

$$MRTS(L_0, K_0) = MRTS(L_1, K_1)$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Jednostavnom ekonomskom analizom temeljenoj na prethodnom teoremu, dolazimo, između ostalog, do sljedećih važnih rezultata u ekonomiji.

Ako je funkcija korisnosti homogena stupnja k, tada je:

- MRS konstantna duž zraka iz ishodišta.
- putovi povećanja dohotka su zrake iz ishodišta.
- odgovarajuća potražnja linearno ovisi o dohotku.
- dohodovna elastičnost potražnje identički je jednaka 1.

3.4 Eulerov teorem

Proučimo sad nužan i dovoljan uvjet homogenosti za funkcije koje su klase C^1. Nužan uvjet poznat je pod nazivom Eulerov teorem i u ekonomiji predstavlja jedan vrlo koristan analitički alat u radu s homogenim funkcijama. On predstavlja n-dimenzionalnu verziju sljedećeg jednostavnog rezultata za monom $f(x) = ax^k$:

$$x(ax^k)' = k(ax^k),$$

odnosno

$$xf'(x) = kf(x).$$

Teorem 3.4.1. *Neka je f funkcija klase C^1 na $\mathbb{R}^n_+$. Funkcija f je homogena stupnja k ako i samo ako za svaki $x \in \mathbb{R}^n_+$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = kf(x_1, ..., x_n), \tag{3.1}$$

što u notaciji s gradijentom zapisujemo kao

$$x \cdot \nabla f(x) = kf(x).$$

Dokaz. $\Longrightarrow$

Budući da je f homogena stupnja k, vrijedi

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n)$$

za svaki $(x_1, ..., x_n)$ i svaki $t > 0$. Deriviramo svaku stranu po t i dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial t}(tx_1, ..., tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, ..., x_n),$$

odnosno

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, ..., tx_n) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, ..., tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, ..., x_n).$$

Za $t = 1$ slijedi tražena tvrdnja.

$\Longleftarrow$

Neka vrijedi (3.1). Fiksirajmo $(x_1, ..., x_n)$ i definirajmo funkciju g kao

$$g(t) = t^{-k} f(tx_1, ..., tx_n) - f(x_1, ..., x_n).$$

Deriviranjem dobivamo

$$g'(t) = -kt^{-k-1} f(tx_1, ..., tx_n) + t^{-k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n).$$

Po (3.1) imamo

$$\sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) = kf(tx_1, ..., tx_n)$$

pa je

$$g'(t) = 0, \forall t.$$

Stoga je $g(t)$ konstanta. Budući da je $g(1) = 0$, imamo da je $g(t) = 0$ za svaki t iz čega slijedi da je

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n)$$

za svaki $t > 0$. Dakle, funkcija f je homogena stupnja k. $\square$

3.5 Eulerov teorem u ekonomiji

Standarna primjena Eulerovog teorema u ekonomiji je sljedeća. Neka je $f(x_1, ..., x_n)$ funkcija proizvodnje nekog poduzeća. Pretpostavimo da je f homogena stupnja k. Eulerov teorem stoji u pozadini rezultata koji kaže da ako je cijena i-tog inputa njegova granična proizvodnja $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$, tada je ukupan trošak dan s

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

jedan ukupnom outputu, odnosno jednak $f(x_1, ..., x_n)$.

Proučimo sad još jednu primjenu Eulerovog teorema koja nas dovodi do rezultata koji je u ekonomiji poznat kao Wicksellov zakon. Neka je $q = f(x_1, x_2)$ funkcija proizvodnje koja ima :

- konstantne prinose na obujam
$$f(tx) = tf(x)$$
- padajuću graničnu proizvodnju od x_1
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} < 0.$$

Budući da je f homogena stupnja 1, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ homogena je stupnja 0. Primjenom Eulerovog teorema na $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ dobivamo:

$$0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{x_1}{x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}.$$

Budući da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} < 0,$$

slijedi da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} > 0.$$

To nam govori da se granična proizvodnja jednog faktora proizvodnje poveća kad se drugi faktor smanji.

3.6 Homogenizacija funkcije

Sad kad smo se uvjerili da homogene funkcije imaju korisnu primjenu, lijepa svojstva i prirodno se pojavljuju u ekonomiji, postavlja se pitanje je li svaka funkcija definirana na konusu u $\mathbb{R}^n$ restrikcija neke homogene funkcije koja je definirana na prostoru više dimenzije. Odgovor je potvrdan, a sama konstrukcija poprilično je izravna.

Teorem 3.6.1. *Neka je f realna funkcija definirana na konusu C u $\mathbb{R}^n$ te neka je k cijeli broj. Definiramo novu funkciju F koja je funkcija $n+1$ varijable dana s*

$$F(x_1, ..., x_n, z) = z^k \cdot f\left(\frac{x_1}{z}, ..., \frac{x_n}{z}\right).$$

Tada je F homogena funkcija stupnja k na konusu $C \times \mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}^{n+1}$. Budući da je $f(x) = F(x, 1)$ za svaki $x \in C$, f možemo smatrati restrikcijom od F na n-dimenzionalni podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz. Za svaki $t \in \mathbb{R}_+$ i $(x, z) \in C \times \mathbb{R}_+$, pomoću definicije od F dobivamo traženu tvrdnju.

$$F(tx, tz) = (tz)^k f\left(\frac{1}{tz} tx\right) = t^k z^k f\left(\frac{1}{z} x\right) = t^k F(x, y).$$

□

Pokažimo da vrijedi i obrat ovog teorema.

Teorem 3.6.2. *Pretpostavimo da je $(x, z) \mapsto F(x, z)$ funkcija koja je homogena stupnja k na skupu $C \times \mathbb{R}_+$ gdje je C neki konus u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo funkciju f na C s*

$$f(x) := F(x, 1).$$

Tada je

$$F(x, z) = z^k f\left(\frac{1}{z} x\right), \forall (x, z) \in C \times \mathbb{R}_+.$$

Dokaz. Koristimo činjenicu da je F homogena stupnja k.

$$F(x, z) = F\left(z \cdot \left(\frac{1}{z} x, 1\right)\right) = z^k \cdot F\left(\frac{1}{z} x, 1\right)$$

Budući da imamo

$$F(x, 1) = f(x),$$

slijedi tvrdnja.

$$F(x, z) = z^k \cdot F\left(\frac{1}{z} x, 1\right) = z^k \cdot f\left(\frac{1}{z} x\right)$$

□

Primjer 3.6.3. *Za funkciju na $\mathbb{R}_+$ danu s*

$$f(x) = x^a$$

homogenizacija stupnja 1 glasi

$$F(x, y) = y \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^a = x^a y^{1-a}.$$

Primjer 3.6.4. *Za nehomogenu funkciju danu s*

$$x \mapsto x - ax^2$$

homogenizacija stupnja 1 glasi

$$F(x, y) = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right) = y\left[\left(\frac{x}{y}\right) - a\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = x - a\frac{x^2}{y}$$

Primjer 3.6.5. *Za funkciju*

$$f(x, y) = 2xy^3$$

homogenizacija stupnja 3 glasi

$$F(x, y, z) = z^3 \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 2z^3 \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y^3}{z^3} = \frac{2xy^3}{z}.$$

3.7 Homogenizacija funkcije u ekonomiji

Na samom kraju, navedimo jednu primjenu homogenizacije u ekonomiji, koja se odnosi na situaciju kad nam je dana nepotpuna lista faktora funkcije. Neka je, primjerice, $f(x_1, ..., x_{n-1})$ funkcija proizvodnje koja je procijenjena nepotpunom listom faktora proizvodnje $x_1, ..., x_{n-1}$. Pretpostavimo da imamo jedan neprocijenjeni faktor x_n i da potpuna funkcija proizvodnje F, odnosno ona sa svih n procijenjenih faktora proizvodnje, ima konstantne prinose na obujam. Homogenizacija nam omogućava da na temelju funkcije f dođemo do funkcije F na sljedeći način:

$$F(x_1, ..., x_n) = x_n \cdot f\left(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Primjer 3.7.1. *Za neki dvofaktorski proces proizvodnje s konstantnim prinosima na obujam, ekonometričar je procijenio da kad se drugi faktor drži konstantnim, funkcija proizvodnje prvog faktora je*

$$f(x_1) = x_1^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Od interesa je znati funkciju proizvodnje oba faktora. Po Primjeru 3.6.3 imamo da homogenizacija stupnja 1 *glasi*

$$F(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},$$

što je upravo Cobb- Douglasova funkcija proizvodnje.

Bibliografija

[1] *Economic applications of Lagrange multipliers*, https://sites.math.northwestern.edu/~clark/285/2006-07/handouts/lagrange-econ.pdf, posjećena 2021-03-23.

[2] M. Biernacki, *Applications of differential calculus in economics*, https://dbc.wroc.pl/Content/39673/Biernacki_Applications_Of_Differential_Calculus_In_Economics_2016.pdf, posjećena 2021-04-09.

[3] M. L. Bittinger, D. J. Ellenbogen i S. A. Surgent, *Calculus and its applications*, Pearson, New York, 2012.

[4] E. T. Dowling, *Introduction to mathematical economics*, McGraw Hill, New York, 2001.

[5] I. Gogić, P. Pandžić i J. Tambača, *Skripta iz Diferencijalnog računa funkcija više varijabli*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/Diferencijalni_racun.pdf, posjećena 2021-02-22.

[6] L. J. Goldstein, D. C. Lay, D. I. Schneider i N. H. Asmar, *Calculus & its applications*, Pearson, New York, 2018.

[7] B. Guljaš, *Skripta iz Matematičke analize I & II*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf, posjećena 2021-02-01.

[8] R. S. Pindyck i D. L. Rubinfeld, *Microeconomics*, Pearson, New York, 2013.

[9] A. Puljić, I. Vrankić i M. Oraić, *Dolazak na putanju dohodak-potrošnja u točke maksimalnog zadovoljstva i minimalnih izdataka*, https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=16841, posjećena 2021-04-07.

[10] M. Rosser, *Basic mathematics for economists*, Routledge, New York, 2003.

[11] P. Samuelson i W. Nordhaus, *Economics*, McGraw Hill, New York, 2009.

[12] C. P. Simon i L. Blume, *Mathematics for economists*, W. W. Norton & Company, New York, 1994.

Sažetak

Brojne primjene matematičke analize u ekonomiji svjedoče o njihovoj neraskidivoj povezanosti. Granični koncepti poput graničnog troška, prihoda, profita, korisnosti, proizvoda rada i proizvoda kapitala, cjenovna elastičnost, kontrola inventara te komparativnostatička analiza samo su neki od primjera u kojima se primjenjuje diferencijalni račun. Njega direktno koristimo i u maksimizaciji i minimizaciji nekih ekonomskih funkcija. Međutim, uvjeti poput budžetskog ograničenja često proizlaze iz prirode problema što nas vodi do uvjetne optimizacije. Jedna pogodna metoda za pronalaženje uvjetnih ekstrema je metoda Lagrangeovih multiplikatora. Osim diferencijabilnosti, važno svojstvo je i homogenost koja se često pretpostavlja u ekonomskoj teoriji gdje su primjenu pronašli i Eulerov teorem i homogenizacija.

Summary

There are numerous applications of mathematical analysis in economics evidencing their inextricable bound. Marginal concepts such as marginal cost, revenue, profit, utility, the product of labour and the product of capital, price elasticity, inventory control and comparative statics analysis are only some of the examples where calculus is used. Calculus is also directly used in maximization and minimization of some economic functions. However, constraints like budget constraints naturally arise, which leads us to constraint optimization. One convenient method for finding constrained local extrema is the method of Lagrange multipliers. Other than differentiability, one other important function property is homogenity that is often assumed in economic theory, where also Euler's theorem and homogenization found their application.

Životopis

Rođena sam 1. svibnja 1995. godine u Zagrebu. Osnovnu školu i Sedmu gimnaziju završavam uz pohvale za odličan uspjeh. Godine 2013. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu po čijem završetku stječem akademski naziv univ. bacc. math. Studiranje nastavljam na diplomskom studiju Financijska i poslovna matematika. Razne vještine usavršavala sam kao članica međunarodne studentske udruge te pohađajući škole stranih jezika. Tijekom obrazovanja, stekla sam Certificate in Advanced English (CAE) by University of Cambridge. Stjecala sam radno iskustvo uz studiranje u sektoru računovodstva i kontrolinga Erste & Steiermärkische Bank d.d te u sektoru aktuaristike (neživotno osiguranje) Wiener osiguranja Vienna Insurance Group d.d.