Optimizacija portfelja uz posebna ograničenja

Budak, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Budak

Optimizacija portfelja uz posebna ograničenja

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Bratu

Zahvala

Prije svega, htio bih se zahvaliti Bogu. Posebno bih se htio zahvaliti svome mentoru, prof. dr. sc. Hrvoju Šikiću, koji je pristao mi pomoći napisati ovaj rad i koji je ukazao značajnu pomoć, veliko strpljenje i razumijevanje za moje napredovanje kroz danu temu.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovom radu ćemo promatrati problem optimizacije portfelja uz unaprijed određen uvjet da promatrani proces vrijednosti portfelja, u svakom trenutku, ne padne ispod unaprijed određenog postotka maksimalne vrijednosti koju je taj portfelj postigao od početka ulaganja i pritom maksimizirati dugoročnu stopu rasta očekivane korisnosti samog procesa. Vrijeme ćemo shvaćati kao neprekidnu pojavu i, shodno tome, modelirati ga s nediskretnim skupom koji će, najčešće, biti poluotvoreni interval u skupu realnih brojeva. Također, ovdje ćemo definirati portfelj nešto drugačije nego što se to obično radi te će ta razlika biti komentirana u drugom poglavlju. Ovaj problem su predstavili i riješili matematičari S.J. Grossman i Z. Zhou. Mi ćemo ovdje vidjeti pojednostavljeni i prošireni rezultat njihovih istraživanja do kojeg su došli J. Cvitanić i I. Karatzas.

Matematičkim jezikom, naš uvjet će glasiti

$$X^{\pi}(t) > \alpha \cdot \max_{0 \le s \le t} X^{\pi}(s), \quad \forall t \in [0, \infty) \tag{1.1}$$

gdje je $X^{\pi}(\cdot)$ promatrani slučajni proces vrijednosti portfelja, dok je portfelj označen s $\pi(\cdot)$, a $\alpha \in (0, 1)$ te ćemo zahtijevati da je gornja nejednakost zadovoljena gotovo svuda. Kao što je i najavljeno, s ovako definiranim uvjetom želimo naći portfelj $\hat{\pi}(\cdot)$ koji će zadovoljavati gornji uvjet i pritom maksimizrati dugoročnu stopu rasta očekivane korisnosti

$$R(\pi) := \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} lnE[X^{\pi}(T)]^{\delta} \tag{1.2}$$

gdje je $\delta \in (0, 1)$.

Iako su Grossman i Zhou dali rješenje za ovaj problem, oni su promatrali portfelje koji sadrže samo jednu obveznicu i jednu dionicu koji su modelirali geometrijskim Brownovim gibanjem s konstantnim koeficijentima. Mi ćemo ovdje promatrati slučaj s više dionica, odnosno rizičnih financijskih imovina s determinističkim koeficijentima koji su proučavali J. Cvitanić i I. Karatzas. Iako ćemo gledati proširenje problema na više financijskih imovina, naš cilj i ideja će ostati isti te ćemo ih samo poopćiti. Naravano, i nama će biti potrebno geometrijsko Brownovo gibanje za konstrukciju modela.

U drugom poglavlju je dan pregled definicija i rezultata koje koristimo i koje će nam biti potrebne za razumijevanje koncepata koje susrećemo u radu. Sam financijski model,koji je već standardan za opisivanje dinamike financijskih tržišta, je uveden u trećem poglavlju koristeći stohastičke diferencijalne jednadžbe. Treće poglavlje je podijeljeno na potpoglavlja u kojima ćemo strogo definirati problem koji su Grossman i Zhou promatrali te na temelju tog problema proširiti na onaj koji su promatrali J. Cvitanić i I. Karatzas, definirati model kojim opisujemo spomenuti problem, vidjet ćemo i pomoćni slučajni proces koji će nam biti od velike koristi prilikom dolaska do rješenja problema i na koncu, samo rješenje problema. U četvrtom poglavlju, pomoću rješenja viđenog u prethodnim razmatranjima, doći ćemo i do portfelja koji maksimizira dugoročnu stopu očekivane korisnosti procesa i koji također maksimizira dugoročnu stopu investicije.

Poglavlje 2

Preliminarije

U ovom poglavlju su navedene definicije pojmova i rezultati korištenih u radu. Samo poglavlje je organizirano u dva potpoglavlja gdje su u jednom opisani pojmovi i koncepti koji se tiču matematike i koji dolaze iz teorije vjerojatnosti, dok su drugom poglavlju dani pojmovi koji dolaze iz financija.

2.1 Pojmovi i koncepti teorije vjerojatnosti

Definicija 2.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Za nepraznu familiju $\mathcal{F}$ podskupova od Ω kažemo da je σ-algebra ako vrijedi:*
i) $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,
ii) $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$,
iii) $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$,
iv) $\Omega \in \mathcal{F}$.
Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ nazivamo izmjeriv prostor za bilo koji skup Ω i njemu pridruženu σ-algebru $\mathcal{F}$.

Definicija 2.1.2. *Neka je D familija podskupova od Ω. Tada σ-algebru generiranu s D definiramo s*

$$\sigma(D) := \bigcap_{D \subseteq A} A$$

gdje su A-ovi σ-algebre na Ω.

Definicija 2.1.3. *Reći ćemo da je σ-algebra u oznaci $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra ako je generirana svim otvorenim podskupovima iz $\mathbb{R}$, odnosno*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(C)$$

gdje je $C = \{A \subseteq \mathbb{R} | \ A \text{ otvoren}\}$

Definicija 2.1.4. *Neka su $(Y, \mathcal{F})$ i $(X, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ako vrijedi $f^{-1}(A) \in \mathcal{X}$, $\forall A \in \mathcal{G}$.*

Definicija 2.1.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Reći ćemo da je preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla ako je izmjerivo u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Slučajni vektor je preslikvanje $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ koje je izmjerivo u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ gdje je $n \in \mathbb{N}$, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ je σ-algebra generirana familijom otvorenih podskupova iz $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka je $\forall t \geq 0, X_t$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathbb{F})$. Familija $X = (X_t : t \geq 0)$ je slučajni proces(s neprekidnim vremenom).*

Definicija 2.1.7. *Za slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ kažemo da je ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je $|X_t| < M, \forall t \geq 0$.*

Definicija 2.1.8. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.*
a) Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ $\forall n \geq 0$ naziva se filtracija.
b) Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zove se adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je $\forall n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.
c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces. Za $n \geq 0$ definiramo $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Tada se filtracija $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0)$ zove prirodna filtracija od X. Pritom je $\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) = \{(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.

Definicija 2.1.9. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor s filtracijm $\mathbb{F}$. Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako vrijedi*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Definicija 2.1.10. *Za slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima matematičko očekivanje ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[|X|] := \int_\Omega |X| d\mathbb{P} = \int_\Omega |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

te tada definiramo matematičko očekvanje od X kao

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Definicija 2.1.11. *Neka je X nenegativna slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takva da vrijedi* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Neka je* $\mathcal{G}$ σ*-podalgebra od* $\mathcal{F}$.
Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$ *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva slučajna varijabla* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to [0, \infty]$ *takva da vrijedi*

$$\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1_A X], \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Definicija 2.1.12. *Za slučajnu varijblu za koju vrijedi* $\mathbb{E}[X] < \infty$ *definiramo*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$$

gdje je $X^+ := max\{X, 0\}$ *i* $X^- := max\{-X, 0\}$ *što su zapravo pozitivni i negativni dio od X.*

Definicija 2.1.13. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $\{X_t; t \geq 0\}$ *slučajni proces koji je adaptiran s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ *takav da vrijedi* $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ $\forall t \geq 0$. *Reći ćemo da je slučajni proces* $\{X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ *submartingal(, odnosno supermartingal) ako* $\forall 0 \leq s < t < \infty$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t] \geq X_s, \mathbb{P}\ g.s.(,\ \ \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t] \leq X_s, \mathbb{P}\ g.s.).$$

Reći ćemo da je proces $\{X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ *martingal ako je i supermartingal i submartingal.*

Definicija 2.1.14. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $X = \{X_t; t \geq 0\}$ *neprekidni slučajni proces koji je adaptiran s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ *na* $\mathcal{F}$. *Ako postoji neopadajući proces vremena zaustavljanja* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *koji je adaptiran s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}$ *takav da je proces* $\{X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ *martingal* $\forall n \geq 1$ *i* $\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} T_n = \infty) = 1$, *onda kažemo da je neprekidni lokalni martingal.*

Teorem 2.1.15. *Neka je* $X = (X_t; t \geq 0)$ *(super)martingal i T vrijeme zaustavljanja. Tada je i zaustavljen proces* $X^T = (X_t^T; t \geq 0)$ *(super)martingal gdje je* $X_t^T = X_t 1_{t<T}(t) + X_T 1_{t \geq T}(t), \ \ \forall t \geq 0$. *U slučaju supermartingala vrijedi*

$$\mathbb{E}X_{T \wedge t} \leq \mathbb{E}[X_0], \quad \forall t \geq 0,$$

dok je u slučaju martingala

$$\mathbb{E}[X_{T \wedge t}] = \mathbb{E}[X_0], \quad t \geq 0.$$

Definicija 2.1.16. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor i neka je* $\mathbb{F}$ *filtracija na tom prostoru. Reći ćemo da je* $\mathbb{F}$ *augmentirana filtracija ako je zdesna neprekidna i potpuna, odnosno ako vrijedi:*
i)(neprekidnost zdesna) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$ *gdje je* $\mathcal{F}^+ := (\mathcal{F}_i^+)_{i \in I}$ *i* $\mathcal{F}_i^+ := \bigcap_{i<w} \mathcal{F}_w$ *gdje je I totalno uređeni indeksni skup s uređajem* $\leq$.
ii)(potpunost) $\mathcal{N}_{\mathbb{P}} \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$ *gdje je* $\mathcal{N}_{\mathbb{P}} := \{A \subseteq \Omega | A \subseteq B; \mathbb{P}(B) = 0\}$.

Definicija 2.1.17. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Za slučajni proces* $B = (B_t : t \geq 0)$ *kažemo da je Brownovo gibanje ako vrijede svojstva:*

- *i) Trajektorije procesa* $t \to B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *za g.s.* $\omega \in \Omega$.
- *ii)* $B_0 = 0$.
- *iii)* $\forall n \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *prirasti* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *su nezavisni.*
- *iv)* $\forall s \in [0, t)$ *prirast* $B_t - B_s$ *ima normalnu distribuciju s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$.

Definicija 2.1.18. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $B = (B_t : t \geq 0)$ *Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ *koja zadovoljava dolje navedena svojstva nazivamo filtracija za Brownovo gibanje ili Brownovska filtracija:*
i) (Neopadajuća familija) $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_t, \forall 0 \leq u < t$.
ii) (Adaptiranost) $\forall t \geq 0$, B_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla.*
iii)(Nezavisnost budućih prirasta) $\forall 0 \leq u < t$ *prirast* $B_t - B_u$ *je nezavisan od* $\mathcal{F}_u$.

Definicija 2.1.19. *Neka je X vektorski prostor nad poljem skalara* $\mathbb{D}$ $(= \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C})$. *Preslikavanje* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *koje zadovoljava svojstva:*
i)$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$,
ii)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in X$,
iii)$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$,
iv)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall y, x \in X$,
nazivamo norma.

O oznakama kao što su $P_0(t)$ i r će biti više govora u sljedećem poglavlju.

Kroz sljedeće definicije i rezultate definrat ćemo Itov integral, prvo za jednostavne integrande, a onda i za opće. Ako nije drukčije rečeno, u tim definicijama i rezultatima koristit ćemo fiksirano vrijeme $T > 0$, Brownovo gibanje $B = \{B_t; t \geq 0\}$ te njemu pridruženu Brownovsku filtraciju $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ i proces $G = \{G_t; t \geq 0\}$ iz $\mathcal{L}^2_{ad}$ koji je adaptrian s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$.

Definicija 2.1.20. *S* $\mathcal{L}^2_{ad}$ *označavat ćemo familiju* $\mathcal{F}$*-adaptiranih slučajnih procesa* $G = (G_t; t \geq 0)$ *koji zadovoljava uvjet* $\mathbb{E}[\int_0^T G_t^2 dt] < \infty$
$\mathcal{L}^2_{ad}$ *je normiran prostor s normom koja je inducirana skalarnim produktom koji je definiran s* $(G|M)_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \mathbb{E}[\int_0^T G_t M_t dt], \quad G, M \in \mathcal{L}^2_{ad}$.

Definicija 2.1.21. *Za $T > 0$,slučajni proces $G = (G_t; t \in [0,T])$ je jednostavan ako je adaptiran s obzirom na Brownovsku filtraciju i ako vrijedi*

$$G_t = \Sigma_{k=0}^{n-1} \varphi_k 1_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T; n \in \mathbb{N}\}$ intervala $[0,T]$ i omeđene slučajne varijable φ_k, $k = 0, 1, ..., n-1$ takve da je φ_k $\mathcal{F}_{t_k}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označavamo familiju svih adaptiranih slučajnih procesa na $[0,T]$.

Definicija 2.1.22. *Za slučajni proces $G \in \mathcal{E}_T$ definiran u definiciji 2.1.14., definiramo slučajni proces $I = (I_t; t \in [0,T])$ s*

$$I_t = \Sigma_{k=0}^{n-1} \varphi_k (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}).$$

Proces I zovemo Itov integral jednostavnog procesa G s obzirom na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t G_s dB_s = (G \cdot B)_t$$

Lema 2.1.23. *Za slučajni proces $G \in \mathcal{L}^2_{ad}$ postoji niz $(G^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_T$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \|G^{(n)} - G\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int_0^T |G_t^{(n)} - G_t|^2 dt] = 0, \tag{2.1}$$

odnosno $G^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}^2_{ad}}{\to} G$ kad $n \to \infty$.

Definicija 2.1.24. *Pomoću prethodne leme, za proces $G \in \mathcal{L}^2_{ad}$ možemo naći niz $(G^{(n)})_n$ jednostavnih procesa koji konvergiraju procesu G u normi $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2_{ad}}$ i može se pokazati da Itovi integrali dobiveni s obzirom na članove niza $(G^{(n)})_n$ također konvergiraju. Tada limes niza Itovih integrala jednostavnih procesa nazivamo Itovim integralom procesa G s obzirom na Brownovo gibanje B i označavamo s*

$$I_t = \int_0^t G_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^t G_s^{(n)} dB_s$$

Teorem 2.1.25. *Neka je $T > 0$ i neka je $G = (G_t : t \in [0,T]) \in \mathcal{L}^2_{ad}$. Tada sučajni proces $I = (I_t; t \geq 0)$ kojeg zovemo Itov integral ima sljedeća svojstva:*
i)(neprekidnost) Funkcija $t \to I_t$ je neprekidna na $[0,T]$ g.s.
ii)(linearnost) Za $G, M \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$((aG + bM) \cdot B)_t = a(G \cdot B)_t + b(M \cdot B)_t.$$

iii)(Itova izometrija) $\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^T G_s^2 ds]$.
vi)(martingalnost) Proces I je martingal obzirom na Brownovsku filtraciju.

Definicija 2.1.26. *Neka je $B = \{B_t; t \geq 0\}$ Brownovo gibnje i neka je $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ pridružena Brownovska filtracija. Itov proces je slučajni proces $X = \{X_t; t \geq 0\}$ obilka*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\, dB_s + \int_0^t V_s\, ds$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = \{H_t; t \geq 0\}$ i $V = \{V_t; t \geq 0\}$ su adaptirani procesi takvi da $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $\int_0^t |V_s|\, ds < \infty$ g.s.$\forall t \geq 0$.

Definicija 2.1.27. *Linearna stohastička diferencijalna jednažba je stohastička jednažba oblika*

$$X_t = Y_t + \int_0^t X_u dW_u$$

,napisana u diferencijalnom obliku

$$dX_t = dY_t + X_t dW_t, X_0 = Y_0$$

gdje su $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $W = (W_t : t \geq 0)$ Itovi procesi.

Definicija 2.1.28. *Neka su $X = (X_t; t \geq 0)$ i $Y = (Y_t; t \geq 0)$ slučajni procesi. Reći ćemo da su X i Y konačne kvadratne kovarijacije ako postoji slučajni proces u oznaci $\langle X, Y\rangle = (\langle X, Y\rangle_t; t \geq 0)$ tako da*

$$\langle X, Y\rangle_t = (\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\| \to 0} \Sigma_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})$$

gdje je $\|\Pi\|$ najveći korak pri particiji intervala $[0, t]$.
Slučajni proces $\langle X, Y\rangle$ nazivamo kvadratna kovarijacija od X i Y.

Teorem 2.1.29. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itov proces kao u definiciji 2.1.26. i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$, $f_x x(t, x)$. Tada za svaki $T > 0$ vrijedi*

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T f_t(x, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_x x(t, X_t)d\langle X\rangle_t$$

Teorem 2.1.30. *Neka je $Z_t(X) = exp[\Sigma_{i=1}^n \int_0^t X_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2 ds]$ gdje je $X = \{X_t = (X_t^{(1)}, ..., X_t^{(n)}, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty)\}$ vektor izmjerivih, adaptiranih procesa koji zadovoljavaju $P[\int_0^T (X_t^{(i)})^2 dt < \infty] = 1, 1 \leq i \leq n, T \in [0, \infty)$. Pretpostavimo da je $Z_t(X)$ martingal. Definiramo proces $\hat{W} = \{\hat{W}_t = (\hat{W}_t^{(1)}, ..., \hat{W}_t^{(n)}), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ s*

$$\hat{W}_t^{(i)} := W_t^{(i)} - \int_0^t X_s^{(i)} ds, 1 \leq i \leq n, t \in [0, \infty).$$

Za svaki fiksni $T \in [0, \infty)$ proces $\hat{W}$ je n-dimenzionalno Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}_t, \hat{P})$. gdje je W n-dimenzinalno Beownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\hat{P}_T = E[1_A Z_T(x)], A \in \mathcal{F}_T$.

2.2 Pojmovi i koncepti financijskih tržišta i ekonomije

U ovom poglavlju obrazložit ćemo pojmove i koncepte koji se javljaju na financijskim tržištima, a koji su nama potrebni.

Financijske imovine su imovine koje se u relativno kratkom vremenu mogu zamijeniti za gotovinu te one ostvaruju svoju vrijednost na temelju ugovrnih prava ili prava na vlasništvo drugih imovina. Mi ćemo financijske imovine dijeliti na rizične i nerizične gdje dionica predstavlja rizičnu, a obveznca nerizičnu financijsku imovinu. Kao što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju, kretanje financijskih imovina modelirat ćemo slučajnim procesima te ćemo sa oznakom $P_i(t)$ označavati vrijednost i-te imovine u trenutku t.

Sada ćemo formalno i matematički navesti neke deinicije.

Definicija 2.2.1. *Ako promatramo financijsko tržište s $n+1, n \in \mathbb{N}$ financijskih imovina i neprekidnim vremenom, onda dinamički portfelj definiramo kao slučajni proces $\pi(t) := \{(\pi_0(t), \pi_1(t), ..., \pi_n(t)); t \geq 0\}$ koji je izmjeriv u odnosu na danu filtraciju $\mathcal{F}$. U ovom radu će ta filtracija biti generirana Brownovim gibanjem.*

U gornjoj definiciji nismo specificirali što predstavljaju komponente definiranog procesa. Obično predstavljaju količinu kapitala uloženog u i-tu imovinu za i= $0, 1, ..., n$. Ovdje će te komponente predstavljati udio našeg kapitala uloženog u i-tu imovinu. To znači da postavljamo još jedan uvjet na proces $\pi(\cdot)$, a to je da je $\Sigma_{i=0}^{n} \pi_i(t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Definicija 2.2.2. *Slučajni proces $\{\beta(t) : t \geq 0\}$ definiran s*

$$\beta(t) := \frac{1}{P_0(t)} = \exp(-\int_0^t r(u)du), 0 \leq t < \infty$$

naziva se diskontni proces.
Ovdje je $P_0(t)$ cijena nerizične imovine u trenutku t, a $r(\cdot)$ kamatna stopa povrata te nerizične imovine koja je funkcija vremena t.

Definicija 2.2.3. *Za dani početni kapital $x > 0$, neka je $\mathcal{A}_\alpha(x)$ klasa izmjerivih, $\mathbb{F}$ -adaptiranih procesa $\pi : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ koji zadovoljavaju*

$$\int_0^T ||\pi^\tau(t)\sigma(t)||^2 dt < \infty, g.s.$$

za bilo koji $T \in (0, \infty)$ i za koju stohastička diferencijalna jednažba (3.5), (3.7) *ima jedinstveno $\mathbb{F}$ -adaptirano rješenje $X_\pi(\cdot)$ koja zadovoljava uvjet* (3.6). *Elemente klase $\mathcal{A}_\alpha(x)$ ćemo zvati dopustivim portfelj procesima.*
Ovdje je $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t); 0 \leq t < \infty\}$ slučajni proces koji je zapravo matrica volatilnosti.

Na kraju potpoglavlja 3.2 ćemo dati skicu dokaza koja pokazuje da klasa $\mathcal{A}_\alpha(x)$ nije prazna.

Prije nego što strogo definiramo funkciju korisnosti, pogledajmo, na intuitivnoj razini, kakav je to koncept zapravo. Mi ćemo ovdje uvesti pojmove koji su nam potrebni za razumijevanje funkcije korisnosti na način kako je to napravljeno u [2]. Promatramo ekonomiju u kojoj postoji jedno dobro te promatramo potrošača u toj ekonomiji koji donosi odluke. Možemo promatrati samo jedno dobro jer eventualna ostala dobra možemo izraziti u jedinicama promatanog prvog, a za to dobro ćemo uvijek birati da je novac. Stoga, naš potrošač mora donijeti odluku koliko će novaca potoršiti, koliko će uložiti i koliko će uštedjeti te pritom odlučivati tako da poveća svoje ukupno bogatstvo. Mi ćemo zbog jednostavnosti promatrati samo količinu koja će se potrošiti. Kako bi potrošač mogao odrediti željeni postatak svog prihoda koji će potrošiti, treba mu neka vrsta sustava, odnosno numerička reprezenracija. Također, pretpostavljamo da ove odluke promatrani potrošač donosi u diskretnim trenucim(npr., jednom mjesečno kada dobije plaću). O svijetu, u trenutku odluke, razmišljamo da je u određenom stanju koje je slučajno. Nadalje, korisitmo se tzv. relacijom preferencija. Naime, recimo da varijabla x predstavlja vektor vrijednosti potrošnje, odnosno komponente tog vektora su vrijednosti potrošnje s obzirom na stanje u kojem se, u tom trenutku, svijet našao. Ako imamo dva stanja svijeta, vektor(izbor) $x = (100, 200)$ i svijet se našao u stanju 2, tada će 200 jedinica novca biti potrošeno. Takav vektor x ćemo nazivati izborom potrošnje. Naravno, takvih izbora(vektora) može biti beskonačno mnogo pa se naš potoršač mora odlučiti za jedan. U modelima s neprekidnim vremenom ulaganje će biti slučajni proces, no princip je isti.

Ovdje mu pomaže sustav preferncija koji određuje koji izbor je najbolji za povećanje njegovog bogatstva. Za dva izbora potrošnje x i y ćemo reći da x dominira y ako izbor x više povećava ukupno bogatstvo od izbora y u svakom stanju svijeta i pisati $x \geq y$. Također, smatramo da potrošač preferira izbor x više nego izbor y. Naravano, svaki potrošač sam odlučuje na koji način smatra da mu je jedna opcija bolja od druge. Mi ćemo pisati $x \geq y$ ako mu izbor x odgovara barem koliko i izbor y te ćemo pisati $x \succ y$ ako mu izbor x odgovara više od y. Ako vrijedi $x \geq y$ i $y \geq x$, tada je indiferentan s obzirom na dva izbora i pišemo $x \sim y$. Također pretpostavljamo da ta relacija preferencija ima određena svojstva koja se nekad nazivaju i aksiomi, a to su potpunost, tranzitivnost, monotonost i konveksnot. Potpunost osigurava da su svaka dva izbora usporediva, u smislu da potoršač za svaka dva izbora može reći da mu jedan izbor odgovara više od drugog. Tranzitivnost kaže da ako potrošaču odgovara izbor x barem koliko i izbor y i ako mu odgovara izbor y barem koliko i izbor z, tada mu izbor x odgovara barem koliko i izbor z. Monotonost kaže da ako vrijedi $x \geq y$ za dva izbora x, y, tada je $x \geq y$. Konačano, konveksnost osigurava da izbor dobiven kao težinski prosjek neka druga dva početna izbora(y, z) odgovara potrošaču barem koliko i svaki izbor(x) za koji vrijedi da ne odgovara više od dva početna izbora($y \geq x$, $z \geq x$). Sada napokon možemo reći kakve veze ima funkcija korisnoti.

Funkcija korisnosti je preslikavanje koje svakom izboru ulaganja pridružuje realan broj i na taj način određuje realcije preferencije između izbora pritom zadovoljavajući svojstva:
1.$U(x) \geq U(y) \rightarrow x \succeq y$
2.$U(x) > U(y) \rightarrow x \succ y$
3.$U(x) = U(y) \rightarrow x \sim y$.
Sada slijedi stroga definicija.

Definicija 2.2.4. *Kažemo da je preslikavanje $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti ako je strogo rastuća, strogo konkavna klase C^1 takva da je $U'(0+) = \infty$, $U'(\infty) = 0$ i $U(0+) \geq -\infty$. Nadalje, njen konveksni dual je dan s*

$$\tilde{U}(y) := \max_{x>0}[U(x) - xy] = U(I(y)) - yI(y), y > 0$$

gdje je $I(\cdot)$ inverz od $U'(\cdot)$.

Vidimo da je domena funkcije korisnosti u definiciji skup pozitivnih realnih brojeva jer ćemo mi promatrati vrijednost stohastičkog procesa kojeg ćemo zvati proces bogatstva i koji neće moći imati nepozitivnu vrijednost. Naravno, proces koji opisuje ukupno bogatstvo pojedinca može biti i negativno(u smislu da je loše investirao pa nekom duguje određenu imovinu), ipak zbog određemog uvjeta kojeg ćemo postaviti na naš proces, teoretski, to neće biti moguće. Pretpostavka $U'(0+)$ znači da kako se pribiližavamo nuli zdesna, brzina promjene funkcije je sve veća, a to interpretriramo na način da razina korisnosti u početku, kada je vrijednost našeg bogatstva mala, raste puno brže za dodatnu jedinicu vrijednosti nego kada je ta vrijednost puno veća od nule. Pretopostavka $U'(\infty)$ ima istu ulogu, da što je veća vrijednost našeg bogatstva i ako to bogatstvo naraste za neku malu veličinu, naša korisnost neće puno narasti, a kako se udaljavmo od nule na x-osi tako naša funkcija kosrisnoti sve sporije i sporije raste. Svojstvo $U(0+) \geq -\infty$ kaže da funkcija korisnosti može poprimiti i negativne vrijednosti.

Izraz $\max_{x>0}[U(x) - xy]$ je tzv. Legendre-Fenchel konjugirana funkcija fukcije korisnosti $U(\cdot)$, a jednakost koja slijedi neposredno se dobije na sljedeći način: Kada maksimiziramo izraz $U(x) - xy$, deriviamo s obzirom na varijablu x i izjednačimo s nulom, dobijemo $U'(x) = y$. Kako je $U'(\cdot)$ strogo padajuća na cijeloj domeni zbog uvjeta definicije funkcije korisnosti, znači da ima inverz i da je $x = U'^{-1}(y) = I(y)$ gdje je $U'^{-1}(\cdot)$ upravo taj inverz i jednostavno ga označavamo s $I(y)$. Kada $x = I(y)$ uvrstimo u izraz u definiciji, dobijemo traženu jednakost.

Iako smo, prilikom uvođenja relacije preferencija promatrali izbore potrošača kao izbore potrošnje, mi ćemo ovdje zapravo razmišljati o tim vrijednostima kao o konačnom bogatstvo, odnosno vrijednosti našeg preocesa bogatstva s obzirom na slučajno stanje koje se dogodilo.

Poglavlje 3

Stohastički model i rješenje

3.1 Grossman-Zhou problem

Ovdje ćemo strogo definirati problem koji su postavili S.J. Grossman i Z. Zhou 1993, [4], a koji su proširili J. Cvitanić i I. Karatzas te ćemo mi promatrati taj prošireni problem. Prije nego što krenemo na samu definiciju problema podsjetimo se na funkciju korisnosti i njezinog konveksnog duala iz definicije 2.2.4.

Problem 3.1.1. *Za dani $\delta \in (0,1)$, treba maksimizirati dugoročnu stopu rasta*

$$R(\pi) := \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} lnE[(X^{\pi}(T))^{\delta}] \tag{3.1}$$

očekivanja potencirane korisnosti na klasi portfelja $\mathcal{A}_{\alpha}(x)$ iz definicije 2.2.3. Preiciznije treba izračunati

$$v(\alpha) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}_{\alpha}(x)} R(\pi) \tag{3.2}$$

i pronaći $\hat{\pi} \in \mathcal{A}_{\alpha}(x)$ za koji limes $R(\hat{\pi}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} lnE[(X^{\hat{\pi}}(T))^{\delta}]$ postoji i za koji se postiže supremum u (3.2).

J. Cvitanić i I. Karatzas su promatrali i riješili ovaj problem na općenitoj razini, odnsno za konačno mnogo rizičnih imovina($n \geq 1$) te su pretpostavljali da su $r(\cdot), b(\cdot), \sigma(\cdot)$ deterministički koeficijenti. Ovaj, prošireni, problem ćemo nazivati Cvitanić-Karatzas problem.

Promatrajmo izraz (3.1). Pošto je proces koji ćemo promatrati slučajan($X^{\pi}(\cdot)$), gledat ćemo srednju veličinu funkcije korisnosti $U(X^{\pi}(\cdot))$, odnosno njeno očekivanje. Možemo razmišljati da želimo da se naša srednja stopa rasta funkcije korisnosti ponaša kao i kod složenog ukamaćivanja. Zaista, za funkciju korisnosti oblika $U(x) = x^\delta$, $\delta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} E[U(x)] &= e^{RT} \\ RT &= lnE[U(x)] \\ R &= \frac{1}{T} lnE[U(x)] \end{aligned}$$

Uzimajući $\overline{lim}_{T\to\infty}$ dobivamo izraz (3.1).

3.2 Osnovni model

U ovom poglavlju uvodi se model financijskog tržišta na kojem ćemo promatrati problem i dati samo rješenje prema [3].

Model se sastoji od jedne nerizične financijske imovine(nerizičnu imovinu redovito predstavljamo obveznicom) i n rizičnih imovina(predstavljamo s dionicama), gdje je $n \in \mathbb{N}$. Cijenu obveznice u trenutku t označavamo sa $P_0(t)$, a cijenu k-te dionice u trenutku t sa $P_k(t), 1 \leq k \leq n$.

Model je zadan stohastičkim jednadžbama

$$dP_0(t) = P_0(t)r(t)dt, P(0) = 1 \tag{3.3}$$

$$dP_k(t) = P_k(t)[b_k(t)dt + \sum_{l=1}^{n} \sigma_{kl}(t)dW_l(t)], P_k(0) = p_k > 0 \tag{3.4}$$

za $k = 1, 2, ..., n$. Ove jednadžbe pokreće n-dimenzionalno Brownovo gibanje $W = (W_1, ..., W_n)$ koje je jedini izvor slučajnosti u modelu, u smislu da su slučajni procesi $\{r(t) : t \geq 0\}$ kamatnih stopa, $\{b(t) = (b_1(t), ..., b_n(t)) : t \geq 0\}$ stopa povrata za svaku od n dionica te $\{\sigma(t) = \{\sigma(t)\}_{1\leq k,l\leq n} : t \geq 0\}$ proces matrice volatilnosti ograničeni, izmjerivi i adaptirani s obzirom na augmentiranu filtraciju $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t<\infty}$ Brownovske filtracije $\mathcal{F}^W(t) = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t), 0 \leq t < \infty$ koja je generirana Brownovim gibanjem W.

Pretpostavljamo da je matrica volatilnosti $\sigma(t)$ invertibilna $\forall t \geq 0$. Nadalje, promatramo i proces relativnog rizika $\{\theta(t) := \sigma^{-1}(t)[b(t) - r(t)\mathbf{1}] : 0 \leq t < \infty\}$ koji je ograničen i gdje je $\mathbf{1}$ n-dimenzionalni vektor sa jedinicama na svim komponentama. Ovaj proces je zapravo poopćenje Sharpeovog omjera koji ima stohastičku komponentu. Intuitivno, ovaj proces opisuje koliko veći je povrat rizične imovine u odnosu na nerizičnu po jedinici volatilnosti za svaku od rizičnih imovina.

Promotrimo sada ekonomskog agenta koji investira na financijskom tržištu s obzirom na portfelj $\pi(t) = (\pi_1(t), ..., \pi_n(t))^\tau$ tako da je njegov pridružen proces vrijednosti portfelja

$X^{\pi}(\cdot)$ opisan sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned} dX^{\pi}(t) &= \Sigma_{k=1}^{n}\pi_k(t)(X^{\pi}(t) - \frac{\alpha M^{\pi}(t)}{\beta(t)})[b_k(t)dt + \Sigma_{l=1}^{n}\sigma_{kl}dW_l(t)] \\ &+[(1 - \Sigma_{k=1}^{n}\pi_k(t))(X^{\pi}(t) - \frac{\alpha M^{\pi}(t)}{\beta(t)}) + \alpha\frac{M^{\pi}(t)}{\beta(t)}]r_t dt \\ &= r(t)X^{\pi}(t)dt + (X^{\pi}(t) - \frac{\alpha M^{\pi}(t)}{\beta(t)})\pi^{\tau}(t)[(b(t) - r(t)\mathbf{1})dt + \sigma(t)dW(t)] \\ X^{\pi}(0) &= x, \end{aligned} \tag{3.5}$$

te proces $X^{\pi}(\cdot)$ zadovoljava uvjet

$$\mathbb{P}(\beta(t)X^{\pi}(t) > \alpha M^{\pi}(t), \forall 0 \leq t < \infty) = 1. \tag{3.6}$$

Ovdje je $\alpha \in (0, 1)$ dana konstanta, x je početni kapital uložen u portfelj, odnosno vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$, $\beta(\cdot)$ je diskontni proces i

$$M^{\pi}(t) := \max_{0\leq y\leq t}(\beta(y)X^{\pi}(y)). \tag{3.7}$$

Interpretacija je sljedeća: agent ne tolerira da pad od $1 - \frac{\beta(t)X^{\pi}(t)}{M^{\pi}(t)}$ njegovog diskontiranog procesa vrijednosti portfelja bude veća ili jednaka od konstante $1-\alpha$ u bilo kojem trenutku $t \geq 0$. Stoga, zahtijeva da uvjet (3.6) uvijek bude zadovoljen. Prvo investira dio $\pi_k(t)$ od razlike $X^{\pi}(t) - \alpha\frac{M^{\pi}(t)}{\beta(t)} > 0$ u k-tu dionicu, gdje je k = 1,2,...,n, a ostatak svog bogatstva $(1 - \Sigma_{k=1}^{n}\pi_k(t))(X^{\pi}(t) - \alpha\frac{M^{\pi}(t)}{\beta(t)}) + \alpha\frac{M^{\pi}(t)}{\beta(t)}$ u obveznicu.

Za rješavanje problema i pronalazak portfelja koji zadovoljava gornje jednažbe poslužit će nam pomoćni problem i proces koje definiramo u sljedećem potpoglavlju, a sada ćemo dati skicu dokaza da klasa portfelja $\mathcal{A}_{\alpha}(x)$ iz definicije portfelja nije prazna.

Skica dokaza: Tvrdimo da je za izmjeriv, $\mathcal{F}$- adaptirani proces $\rho : [0, T] \times \Omega \to \mathcal{R}^n$, portfelj $\hat{\pi}$ dopustiv i nalazi se u $\mathcal{A}_{\alpha}(x)$, $\forall x > 0$. Kada bi se pokazalo da za svaki $x > 0$ i $\rho(\cdot)$ stohastička jednadžba

$$dY_t = (Y_t - \alpha\hat{M}_t)\rho_t' dW_0(t), \hat{M}_t = \max_{0\leq s\leq t} Y_s, Y_0 = x$$

dopušta jedinstveno, adaptirano rješenje koje zadovoljava $Y_t > \alpha\hat{M}_t, \forall t \in [0, \infty)$, g.s. Tada $\frac{Y(\cdot)}{\beta(\cdot)}$ se poklapa s $Y^{\hat{\pi}}(\cdot)$, procesom bogatstva koji odgovara portfelju iz tvrdnje te zadovoljava uvjete modela kojeg smo uveli u ovom potpoglavlju. Pretpostavi se da je $Y(\cdot)$ $\mathcal{F}$-adaptiran proces koji zadovoljava uvjete malo prije uvedene stohastičke jednadžbe i uvjeta definiranog neposredno poslije. Prema rezultatima iz [4] se izračuna $d(ln(\frac{Y_T}{\hat{M}_T} - \alpha))$ te se odavde dobije nejednakost

$$-\epsilon_t + ln(\frac{\hat{M}_t}{x})^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq 0$$

gdje je $\epsilon_t := \int_0^t \rho'(s)dW_0(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\rho(s)||^2 ds$. Za proces $K_t := ln(\frac{\hat{M}_t}{x})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ se pomoću teorije stohastičkih jednadžbi dobije da vrijedi $K_t = \max_{0\leq s\leq t} \epsilon_s$. Odavde se pak dobije Y_t i $\hat{M}_t$ Za ovaj proces Y_t se onda pokaže da zadovoljava uvjete s početka skice. Detalji su dani u [4].

3.3 Pomoćni proces i bitni martingali

Za bilo koji portfelj $\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x)$ definiran u definiciji 2.2.3. promatrat ćemo proces:

$$N_\alpha^\pi(t) := (X^\pi(t) - \alpha\frac{M^\pi(t)}{\beta(t)})(M^\pi(t))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad 0 \leq t < \infty. \tag{3.8}$$

Radi lakše notacije, uvijek ćemo smatrati da promatramo procese s obzirom na neki dopustiv portfelj $\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x)$ i unaprijed određenu konstantu $\alpha \in (0,1)$, dok će vremenski argument t stajati u indeksu. Stoga, zapis gornjeg procesa će izgledati:

$$N_t = (X_t - \alpha\frac{M_t}{\beta_t})(M_t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Kako bi naglasili o kojem se portfelju radi i ako ćemo raditi s nekim drugim vrijednostima iz intervala $(0,1)$ različitim od α, njih ćemo jedostavno nabrojati u eksponentu procesa kojeg promatramo (npr., $N_t^{\pi,\alpha}$)

Kako je rastući proces $M^\pi(\cdot)$,dan jednadžbom (3.7) ,konstantan izvan skupa $\{t \geq 0; \beta(t)X(t) = M^\pi(t)\}$, iz definicije diskontnog procesa 2.2.2., stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.5) i procesa $N_\alpha^\pi(t)$ definiran s (3.8) imamo:

$$d(\beta_t N_t) = (\beta_t N_t)\pi_t^\tau \sigma_t dW_t^0, \qquad W_t^0 := W_t + \int_0^t \theta(s)ds. \tag{3.9}$$

Također promatramo i procese:

$$Z(t) := exp\{-\int_0^t \theta^\tau(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds\}, \qquad H(t) := \beta(t)Z(t). \tag{3.10}$$

Proces Z_t je poznati proces iz Girsanovljevog teorema koji služi za definiranje nove vjerojatnosti u kojoj je proces W_t^0 Brownovo gibanje, a onda posljedično i martingal. Pod određenim uvjetima, proces Z_t je također martingal. Proces H_t je samo diskontirani proces od Z_t. Koristeći Itovu formula za produkt imamo

$$d(H_t N_t) = \beta_t N_t dZ_t + Z_t d(\beta_t N_t) + d\langle Z, \beta N_\alpha^\pi\rangle_t \tag{3.11}$$

te kombinirajući sa (3.9) i (3.10) dobivamo:

$$d(H_t N_t) = H_t N_t(\pi_t^\tau \sigma_t - \theta_t^\tau)dW_t. \tag{3.12}$$

Kako je integrani oblik prethodne jednadžbe

$$H_t N_t = \int_0^t H_s N_s (\pi_s^\tau \sigma_s - \theta_s^\tau) dW_s + H_0 N_0 \tag{3.13}$$

, vidimo da je to zapravo Itov integral, a znamo da je on martingal. Za svaki $\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x)$, rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.12) je proces

$$H_t N_t = (1-\alpha) x^{\frac{1}{1-\alpha}} exp\{\int_0^t (\pi^\tau \sigma - \theta^\tau)_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\pi^\tau \sigma - \theta\|_s^2 ds\} \tag{3.14}$$

koji je pozitivan, lokalan martingal pa je posebno i supermartingal te vrijedi

$$\mathbb{E}[H_T N_T] \leq \mathbb{E}[N_0] = (1-\alpha) x^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \forall T \in (0, \infty) \tag{3.15}$$

jer je integral na skupu mjere nula uvijek nula. Pozitivnost slijedi jer je $\alpha \in (0,1)$ pa je također i $(1-\alpha) \in (0,1)$, $x > 0$ je početni kapital uložen u portfelj te je po prirodi pozitivan broj, a eksponencijalna funkcija je pozitivna na cijeloj svojoj domeni.
Kako $T > 0$ može biti izabran proizvoljno te ga možemo shvaćati kao vrijeme zaustavljnja jer je on trivijalno adaptiran s obzirom na augmentiranu filtraciju generiranu Brownovim gibanjem, za svaki taj T, znamo da ako zaustavimo martingal u vremenu T, on je opet martingal te zbog toga je proces (3.14) lokalan martingal.

U daljnjem promatramo stohastički kontorolni problem koji uključuje proces $N_\alpha^\pi(\cdot)$ definiran u (3.8).

3.4 Pomoćni kontrolni problem s konačnim vremenom

Sa $\mathcal{A}_\alpha(x,T)$ označimo klasu portfelja $\pi(\cdot)$ koji zadovoljavaju uvjete definicije 2.2.3. promatrani na segmentu $[0,T]$. Za dani $T \in (0,\infty)$ i funkciju korisnosti $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, želimo pronaći portfelj $\hat{\pi} \in \mathcal{A}_\alpha(x,T)$ koji postiže supremum

$$V(\alpha; T, x) := \underset{\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x,T)}{sup} \mathbb{E}(N_\alpha^\pi(T))]. \tag{3.16}$$

Naime, postoji relativno nekomplicirano rješnje za ovaj problem na tragu Karatzasa, Lehoczkyja i Shrevea koje slijedi.

Za bilo koje $z > 0$ i $\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x,T)$, iz definicije 2.2.4. i nejednakosti (3.15), dobivamo

$$\mathbb{E}[(N_T)] \leq \mathbb{E}[\tilde{U}(zH_T)] + z\mathbb{E}[N_T] \leq \mathbb{E}[\tilde{U}(zH_T)] + z(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.17}$$

Prva nejednakost slijedi iz monotonosti očekivanja i same deinicije 2.2.4. duala funkcije korisnosti $\tilde{U}(y) = \underset{w>0}{max}[U(w) - wy]$, što zapravo znači $\tilde{U}(y) \geq U(w) - wy, \forall w, y > 0$. Druga

nejednakost je primijenjen rezultat (3.15).
Gornje nejednakosti su jednakosti ako i samo ako su $z = \hat{z}$ i $\pi(\cdot) = \hat{\pi(\cdot)}$ takvi da vrijedi

$$N_\alpha^{\hat{\pi}}(T) = I(\hat{z}H(t)), \tag{3.18}$$

$$\mathbb{E}[H(T)I(\hat{z}H(t))] = (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.19}$$

Sada se $\hat{z}$ može jedinstvno odrediti iz (3.19), a portfelj $\hat{\pi} \in \mathcal{A}_\alpha(x)$ koji zadovoljava (3.18), može se naći uvođenjem pozitivnog martingala

$$Q(t) := \mathbb{E}[H(T)I(\hat{z}H(T))|\mathcal{F}(t)] = (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} + \int_0^t Q(s)\phi^\tau(s)dW(s), \quad 0 \le t \le \infty. \tag{3.20}$$

Druga jednakost slijedi iz teorema o reprezentaciji martingala za Brownovske martingale kao stohastičke integrale s obzirom na Brownovo gibanje i izmjerivu funckiju $\phi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ koja je zapravo $\mathbb{F}$-adaptiran proces za koji vrijedi $\int_0^T \|\phi(s)\|^2 ds < \infty$, g.s.(Detalji se nalaze u [1])
Uzimajuću u obzir da je H_tN_t iz (3.14) martingal i da je $N_T^{\hat{\pi}} = I(\hat{z}H(T))$ iz (3.18), dobivamo iz definicije (3.20)

$$Q(t) = \mathbb{E}[H_TN_T|\mathcal{F}(t)] = H_tN_t \tag{3.21}$$

i iz općih teorema o stohastičkom integriranju slijedi

$$H(\cdot)N^{\hat{\pi}}(\cdot) = Q(\cdot), \quad g.s. \tag{3.22}$$

Sada ćemo se , na trenutak, vratiti definiciji 2.2.3. i klasi $\mathcal{A}_\alpha(x)$. Pokazali smo da je ta klasa neprazna, tj., pokazali smo da za svaki izmjeriv, $\mathbb{F}$-adaptiran proces $\gamma : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\hat{\pi} = (\gamma^\tau\sigma^{-1})^\tau$ je dopustiv portfelj iz $\mathcal{A}_\alpha(x)$, za svaki $x > 0$. Odavde slijedi

$$\hat{\pi}(\cdot) = ((\theta^\tau + \phi^\tau)\sigma^{-1})^\tau(\cdot) \in \mathcal{A}_\alpha(x,T) \tag{3.23}$$

jer je $(\theta^\tau + \phi^\tau)(\cdot)$ izmjeriva i $\mathbb{F}$-adaptirana kao suma takvih funkcija čija je domena $[0,T]\times\Omega$, a kodomena $\mathbb{R}^n$.
Iz tvrdnji (3.21),(3.22) i (3.18) posebno slijedi

$$V(\alpha; T, x) = \mathbb{E}[(U \circ I)(\hat{z}H_T)]. \tag{3.24}$$

Primjer 3.4.1. *Sada ćemo promotriti kontrolni problem uz konkretnu funkciju korisnosti*

$$U(w) = \frac{1}{\eta}w^\eta, \quad \text{gdje je } \eta := \delta(1-\alpha), 0 < \delta < 1. \tag{3.25}$$

Prije nego što krenemo na sam izračun $V(\alpha; T, x)$, trebaju nam neki međurezultati. Izračunajmo prvo funkciju $I(\cdot)$ iz definicije 2.1.9..
Kako je $I(\cdot)$ inverz od $U'(\cdot)$ treba nam derivacije funkcije korisnosti.

$$U(w) = \frac{1}{\eta}w^\eta \Rightarrow U'(w) = w^{\eta-1}$$

Kako je $0 < \eta < 1$*, onda slijedi da je* $\eta - 1 < 0$*. Prethodno koristimo u računu inverza od* $U'(\cdot)$*.*

$$\begin{aligned} U'(w) &= w^{\eta-1} = z \\ \frac{1}{w^{1-\eta}} &= z \\ w^{1-\eta} &= z^{-1} \\ w &= z^{-\frac{1}{1-\eta}} \end{aligned}$$

,odnosno dobivamo

$$I(z) = z^{-\frac{1}{1-\eta}}.$$

Sada iz (3.19) *računamo*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H_T I(\hat{z}H_T)] &= (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \mathbb{E}[H_T(\hat{z}H_T)^{-\frac{1}{1-\eta}}] &= (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \hat{z}^{-\frac{1}{1-\eta}}\mathbb{E}[H_T^{1-\frac{1}{1-\eta}}] &= (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

i na kraju

$$\hat{z}^{-\frac{1}{1-\eta}} = \frac{(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mathbb{E}[H_T^{1-\frac{1}{1-\eta}}]}. \tag{3.26}$$

Nadalje, imamo

$$(U \circ I)(z) = \frac{1}{\eta}(z^{-\frac{1}{1-\eta}})^{\eta}$$

te za $z = \hat{z}H_T$ *dobivamo*

$$(U \circ I)(\hat{z}H_T) = \frac{1}{\eta}(\hat{z}^{-\frac{1}{1-\eta}}H_T^{-\frac{1}{1-\eta}})^{\eta}.$$

Sada napokon iz (3.24) *računamo* $V(\alpha; T, x)$

$$\mathbb{E}[(U \circ I)(\hat{z}H_T)] = \mathbb{E}[\frac{1}{\eta}(\hat{z}^{-\frac{1}{1-\eta}}H_T^{-\frac{1}{1-\eta}})^{\eta}] =$$

$$= \frac{1}{\eta}\hat{z}^{-\frac{\eta}{1-\eta}}\mathbb{E}[H_T^{-\frac{\eta}{1-\eta}}] = \frac{1}{\eta}[\frac{(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mathbb{E}[H_T^{-\mu}]}]^{\eta}\mathbb{E}[H_T^{-\mu}] =$$

$$= \frac{1}{\eta}[(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{\mathbb{E}[H_T^{-\mu}]^{\frac{1}{\eta}}}{\mathbb{E}[H_T^{-\mu}]}]^{\eta} = \frac{1}{\eta}[(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}\mathbb{E}[H_T^{-\mu}]^{\frac{1}{\eta}}]^{\eta}$$

, odnosno

$$V(\alpha; T, x) = \frac{1}{\eta}[(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}\mathbb{E}[H_T^{-\mu}]^{\frac{1}{\eta}}]^{\eta} \tag{3.27}$$

gdje smo definirali $\mu := \frac{\eta}{1-\eta}$.

Ako još pretpostavimo da koeficijent $r(\cdot)$, *vektor* $b(\cdot)$ *i matrica* $\sigma(\cdot)$ *su neslučajne vrijednosti, dobivamo*

$$(H_T)^{-\mu} = exp\{\mu \int_0^t \theta_s^{\tau} dW_s + \frac{\mu}{2}\int_0^t ||\theta_s||^2 ds\} exp\{\mu \int_0^t r_s ds\}$$

te ćemo to još zapisati kao

$$(H_T)^{-\mu} = exp\{\mu \int_0^t \theta_s^{\tau} dW_s - \frac{\mu^2}{2}\int_0^t ||\theta_s||^2 ds\} exp\{\mu \int_0^t r_s + \frac{1+\mu}{2}||\theta_s||^2 ds\}.$$

Iz (3.20), (3.22), (3.23) *i* (3.27) *dobivamo*

$$Q_t = (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} exp\{\mu \int_0^t \theta_s^{\tau} dW_s - \int_0^t ||\theta_s||^2 ds\}, \quad \phi_t = \mu\theta_t \tag{3.28}$$

$$\hat{\pi}_t^{\tau}\sigma_t = (1+\mu)\theta_t^{\tau} = \frac{1}{1-\delta(1-\alpha)}\theta_t^{\tau}, \quad \textit{nezavisno od } T \tag{3.29}$$

$$V(\alpha; T, x) = \frac{1}{\eta}[(1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} exp\{\int_0^T (r_t + \frac{1+\mu}{2}||\theta_t||^2)dt\}]^{\eta} \tag{3.30}$$

Primijetimo da je $\hat{\pi}(\cdot)$ *dobro definirano jer je* $\int_0^T ||\hat{\pi}^{\tau}\sigma||^2 < \infty, \forall t \in [0,\infty)$ *te zbog oblika* $\hat{\pi}^{\tau}\sigma$ *i komentara o dopustivim portfeljima iz same definicije vidimo da pripada klasi* $\mathcal{A}_{\alpha}(x)$.

3.5 Rješenje problema

U ovom poglavlju dajemo rješenje problema kojeg su proučavali J. Cvitanić i I. Karatzas i kojeg smo definirali na početku te je on zapravo proširenje problema koji su promatrali Grossman i Zhou. Rješenje je dano teoremom koji pokazuje da je portfelj dobiven u prošlom poglavlju uistinu optimalan za poopćeni problem na n rizičnih imovina. Sam dokaz ćemo izvesti onako kako je to napravljeno u [4].

Teorem 3.5.1. *Pretpostavimmo da su procesi* $r(\cdot), \sigma(\cdot)$ *i* $b(\cdot)$ *neslučajni i da limesi* $r_\star := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds$ *i* $||\theta_\star||^2 := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T ||\theta(s)||^2 ds$ *postoje i konačni su. Tada je portfelj* $\hat{\pi}(\cdot)$ *dobiven u* (3.29) *optimalan za Cvitanić-Karatzas problem. U notaciji koju smo koristili u prošlom poglavlju i veličinama koje smo definirali na početku ovoga imamo*

$$\lim_{T\to\infty} lnE[(X^{\hat{\pi}})^{\delta}] = R(\hat{\pi}) = v(\alpha) = V(\alpha) + \alpha\delta r_\star \tag{3.31}$$

gdje je

$$V(\alpha) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} lnV(\alpha; T, x) = \eta r_\star + \frac{\eta}{2}(1+\mu)||\theta_\star||^2 = \delta(1-\alpha)[r_\star + \frac{||\theta_\star||2}{2}\frac{\delta(1-\alpha)}{1-\delta(1-\alpha)}]. \tag{3.32}$$

Primijetimo da gornji teorem kaže da se upravo za portfelj $\hat{\pi}(\cdot)$ iz (3.29) postiže supremum $v(\alpha)$ i još nam daje operabilini oblik s kojim možemo izračunati taj supremum te na taj način dobiti dugoročnu stopu rasta očekivanja potencirane korisnosti. Jedino što ostaje tema za raspravljanje jest pretpostavke teorema, odnosno postojanje i konačnost navedenih limesa. Nije baš jasno jesu li uvijek zadovoljene te pretpostavke.

U izrazu (3.32) prva jednakost se dobije jednostavnim raspisom funkcije $lnV(a; T, x)$, dijeljnjem sa T te korištenjem pretpostavke teorema o postojanju limesa dok ostali članovi teže u nulu kada se pusti limes $\lim_{T\to\infty}$. Druga jednakost je raspis definicija od η i δ.

Prije nego što krenemo na dokaz ovog rezultata definirat ćemo pomoćne objekte.

$$\overline{v} := \sup_{\pi\in\mathcal{A}_\alpha(x)} \overline{R}_\alpha(x), \quad \overline{R}_\alpha(x) := \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} lnE[(N^\pi(T))^{\delta(1-\alpha)}]. \tag{3.33}$$

Iz činjenica da je portfelj $\hat{\pi}$ iz prošlog poglavlja nezavisan od $T \in (0,\infty)$ slijedi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} lnE[N_T^{\hat{\pi},\alpha}]^{\delta(1-\alpha)} = \overline{R_\alpha}(\hat{\pi}) = \overline{v}_\alpha = V(\alpha). \tag{3.34}$$

Također, iz definicije procesa $N^\pi(t)$ dobivamo da vrijedi

$$(N_t^{\pi,\alpha})^{\delta(1-\alpha)} = \beta_t^{\alpha\delta}(X_t^\pi)^\delta (f_\alpha(\frac{\alpha M_t^\pi}{\beta_t X_t^\pi}))^\delta. \tag{3.35}$$

Lako se provjeri da je funkcija $f_\alpha := (\frac{x}{\alpha})^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}, 0 \le x \le 1$ strogo rastuća na $(0,\alpha)$ i strogo padajuća na $(\alpha, 1)$. Vidimo da f_α postiže maksimum u α na intervalu $[0, 1]$. Znamo da je $\alpha \in (0, 1)$ pa definicija funckije f_α ima smisla. Pređimo na dokaz.

Dokaz. Kako funkcija $f_\alpha(x)$ postiže maksimum za $x = \alpha$, iz (3.35), djelovanjem s očekivanjem i koristeći svojstvo monotonosti i homogenosti očekivanja, dobivamo

$$E[N_T^{\delta(1-\alpha)}] \le \beta_t^{\alpha\delta}(1-\alpha)^{\delta(1-\alpha)}E[X_t^\delta] \tag{3.36}$$

Sada djelovajući s funkcijom $ln(\cdot)$ na tu nejednakost te dijeleći s T dobivamo

$$\frac{1}{T}E[N_T^{\delta(1-\alpha)}] \le \frac{1}{T}ln\beta_T^{\alpha\delta} + \frac{1}{T}ln(1-\alpha)^{\delta(1-\alpha)} + \frac{1}{T}E[X_T^\delta] \tag{3.37}$$

Sada ćemo primijeniti limes superior $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}$ na prethodnu nejednakost i dobiti

$$\overline{R_\alpha}(\pi) \leq R(\pi) - \alpha\delta r^\star \leq v(\alpha) - \alpha\delta r^\star, \quad \forall \pi \in A_\alpha(x) \tag{3.38}$$

jer srednji član s desne strane u početnoj nejednakosi teži u nulu dok za član $\frac{1}{T} ln\beta_T^{\alpha\delta}$ vrijedi

$$\frac{1}{T} ln\beta_T^{\alpha\delta} = \alpha\delta\frac{1}{T} ln\beta_T = -\alpha\delta\frac{1}{T}\int_0^T r_s ds.$$

Kako, po pretpostavci, vrijedi $r_\star = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds$, kada se pusti limes $\lim\limits_{T\to\infty}$ dobijemo gornju nejednakost. Ocjena $R(\pi) \leq v(\alpha)$ slijedi iz same difinicije od $v(\cdot)$. Sada iz nejednakosti (3.38) dobivamo

$$V(\alpha) \leq v(\alpha) - \alpha\delta r^\star. \tag{3.39}$$

Za obratnu nejednakost neka je $\lambda \in (0, \alpha)$ dovoljno blizu α tako da je $f_\lambda(\lambda) \geq f_\lambda(\frac{\lambda}{\alpha})$ i iz (3.36), za proizvoljni $\pi \in A_\alpha(x) \subseteq A_\lambda(x)$, dobivamo

$$E[N_T^{\delta(1-\lambda)}] \geq \beta_T^{\delta\lambda} f_\lambda^\delta(\frac{\lambda}{\alpha})E[X_T^\delta] = \beta_T^{\lambda\delta}(\alpha^{-\lambda}(1-\frac{\lambda}{\alpha})^{1-\lambda})^\delta E[X_T^\delta]. \tag{3.40}$$

Analogno kao i gore, zaključujemo da vrijedi

$$V(\lambda) \geq \overline{R}_\lambda(\pi) \geq R(\pi) - \lambda\delta r_\star, \quad \forall \pi \in A_\alpha(x). \tag{3.41}$$

Stoga je $V(\lambda) \geq v(\alpha) - \lambda\delta r_\star$. Puštanjem limesa $\lambda \nearrow \alpha$ i korištenjem neprekidnosti funkcije $V(\cdot)$ u (3.32), iz same definicije funkcije, dobivamo $V(\alpha) \geq v(\alpha) - \alpha\delta r_\star$ pa zaključujemo, s obzirom na te dvije nejednakosti, da je

$$V(\alpha) = v(\alpha) - \alpha\delta r_\star \tag{3.42}$$

što je jedna od jednakosti iz tvrdnje teorema. Za dokaz da je $R(\hat{\pi}) = v(\alpha)$ treba primijetiti da iz (3.34), (3.38), (3.42) slijedi

$$v(\alpha) \geq R(\hat{\pi}) \geq \overline{R_\alpha}(\hat{\pi}) + \alpha\delta r_\star = V(\alpha) + \alpha\delta r_\star = v(\alpha) \tag{3.43}$$

pa slijedi da su sve nejednakosti iz prethodnog izraza zapravo jednakosti. Naime, prva nejednakost slijedi jer je $v(\alpha)$ naporosto supremum svih $R_\alpha(\cdot)$ na skupu dopustivh portfelja, druga nejednakost slijedi prebacujući član $\alpha\delta r_*$ na lijevu stranu u nejednakosti (3.38), a ostale jednakosti slijede direktno iz spomenutih izraza. Na kraju, jedankost $\lim\limits_{T\to\infty} lnE[X_T^\delta] = R(\hat{\pi})$ će slijediti iz dvije nejednakosti

$$-\frac{\delta(1-\alpha)}{T} ln(1-\alpha) + \frac{\alpha\delta}{T}\int_0^T r_s ds + \frac{1}{T} lnE[N_T^{\delta(1-\alpha)}] \leq \frac{1}{T} lnE[X_T^\delta] \tag{3.44}$$

i

$$\frac{1}{T}lnE[X_T^\delta] \leq -\frac{\delta}{T}ln(\alpha^{-\lambda(1-\frac{\lambda}{\alpha})^{1-\lambda}}) + \frac{\lambda\delta}{T}\int_0^T r_s ds + \frac{1}{T}lnE[N_T^{\delta(1-\lambda)}] \tag{3.45}$$

Ove nejednakosti su posljedice izraza (3.36), (3.40) i niza jednakosti iz (3.34). Pokažimo račun za prvu nejednkost. Uvrštavajući portfelj $\hat{\pi}$, djeovanjem s $ln(\cdot)$ na (3.34), koristeći svojstva logaritamske funkcije, prisjećajući se definicije diskontong procesa i ostavljajući član $E[X_T^\delta]$ samog s jedne strane dobivamo

$$ln(\beta^{\alpha\delta}) + ln((1-\alpha)^{\delta(1-\alpha)}) + ln(E[(X_T^{\hat{\pi}})^\delta]) \geq ln(E[N_T^{\delta(1-\alpha)}])$$

$$ln(E[(X_T^{\hat{\pi}})^\delta]) \geq -\delta(1-\alpha)ln(1-\alpha) + \alpha\delta\int_0^T r_s ds + ln(E[(N_T^{\hat{\pi}})^{\delta(1-\alpha)}])$$

te dijeleći s T dobivamo prvu nejednakost. Analogno za drugu nejednakost, samo koristeći nejednakost (3.40). Puštajući limese $T \to \infty$ i $\lambda \nearrow \alpha$ dobivamo i traženu jednakost čime je dokaz teorema potpun. $\square$

Poglavlje 4

Maksimizacija dugoročnih veličina

4.1 Maksimizacija dugoročne stope rasta očekivanja logaritmirane korisnosti

U ovom poglavlju ćemo vidjeti koji portfelj maksimizira dugoročnu stopu onako kako su to iznijeli J. Cvitanić i I. Karatzas u [4]. Također, nula koja se pojavljuju u eksponentu veličina ,kao što su π^0, r^0 i drugih, je samo oznaka za tu veličinu i ne predstavlja potenciranje s nulom.
Može se pokazati da je portfelj

$$\pi^0(t) = [\theta^\tau(t)\sigma^{-1}(t)]^\tau, \quad t \in [0, \infty) \tag{4.1}$$

optimalan u smislu da maksimizira dugoročnu stopu očekivanja logaritmirane korisnosti pritom zadovoljavajući uvjet (3.6), tj. vrijedi

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} E[lnX^\pi(T)] \leq \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} E[lnX^{\pi^0}(T)] = (1-\alpha)(r^0 + \frac{||\theta^0||^2}{2}) + \alpha r^0, \quad \forall \pi \in \mathcal{A}_\alpha(x). \tag{4.2}$$

Također, pokazuje se da prethodna nejednakost vrijedi i za slučajne, $\mathcal{F}$-adaptirane procese $r(\cdot)$, $b(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ za koje su uvjeti poglavlja 3.2 zadovoljeni i za koje limesi

$$r^0 := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T E[r_t]dt, \ \ ||\theta^0||^2 := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T E[||\theta_t||^2]dt \tag{4.3}$$

postoje i konačni su. Definirajmo veličine

$$u(\alpha) = \sup_{\pi \in A_\alpha(x)} \mathcal{S}(\pi), \ \ \mathcal{S}(\pi) := \overline{\lim_{T\to\infty}} E[lnX^\pi(T)],$$

$$u^0(\alpha) = \sup_{\pi \in A_\alpha(x)} \mathcal{S}^0_\alpha(\pi), \ \ \mathcal{S}^0_\alpha(\pi) := \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1-\alpha}{T} E[lnN^\pi_\alpha(T)]$$

umjesto (3.1), (3.2), (3.33) redom i rješvajući Cvitanić-Karatzas problem analogno kako smo napravili u potpoglavlju 3.4 za ovako definirane vrijednosti i za funkciju uzimajući logaritimiranu korisnost $U(x) = (1-\alpha)lnx$ dobivamo $Q(\cdot) \equiv (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}, \phi(\cdot) \equiv 0$ u (3.20) za koje optimalni portfelj $\pi^0(\cdot)$ izgleda kao u (4.1) s početka poglavlja te je nezavisan od trenutka $T > 0$. Funkcija $V(\alpha; T, x)$ poprima oblik $V(\alpha; T, x) = lnx + ln(1-\alpha)^{1-\alpha} + (1-\alpha)E[\int_0^T (r_s + \frac{1}{2}||\theta_s||^2)ds]$ da bismo na kraju dobili

$$u_\alpha^0 = \lim_{T\to\infty} \frac{V(\alpha; T, x)}{T} = (1-\alpha)(r^0 + \frac{||\theta^0||^2}{2}). \tag{4.4}$$

Sada (3.35) zapisujemo sa $\delta = 1$ te dobivamo puno lakši problem te analgono, istim principom kao u potpoglavlju 3.5 pokazujemo da vrijedi $\lim\limits_{T\to\infty} = \frac{1}{T}E[lnX^{\pi_0}(T)] = \mathcal{S}(\pi^0) = u(\alpha) = u^0(\alpha) + \alpha r^0$ iz čega dobivamo nejednakost, odnosno ocjenu (4.2).

4.2 Maksimizacija dugoročne stope rasta investicije

U ovom poglavlju ćemo vidjeti da portfelj (4.1) iz prošlog odjeljka maksimizira i dugoročnu stop rasta same investicije, odnosno

$$P(\pi) := \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} lnX^\pi(T) \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} lnX^{\pi^\star}(T) = (1-\alpha)(r^\star + \frac{||\theta^\star||^2}{2}) + \alpha r^\star, \quad g.s. \tag{4.5}$$

među svim portfeljima $\pi \in \mathcal{A}_\alpha(x)$. Ovaj rezultat ćemo izvesti na način kako su ga izveli J. Cvitanić i I Karatzas u [4]. Također, ovaj rezultat vrijedi i za slučajne, $\mathbb{F}$-adaptirane procese $r(\cdot), b(\cdot), \sigma(\cdot)$ pod pretpostvakom da postoje limesi $r^\star$ i $||\theta^\star||^2$ iz pretpostavki teorema 3.5.1. i da su konačni g.s.

Pređimo na dokaz.

Dokaz. Za pokazivanje početne jednakosti poglavlja trebamo primijetiti da proces $L(t) := \frac{N_\alpha^\pi(t)}{N_\alpha^{\pi^0}(t)}, t \in [0, \infty >$ zadovovljava stohastičku jednadžbu

$$dL_t = L_t(\pi_t'\sigma_t - \theta_t')dW_t, \quad L(0) = 1 \tag{4.6}$$

iz (3.9) i Itovog pravila za deriviranje pa onda, kao i u potpoglavlju 3.2, zaključujemo da je i ovaj proces pozitivan supermartingal za bilo koji $\pi \in A_\alpha(x)$. Odavde slijedi prema teoriju koju je razvio Karatzas da je $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} lnL_t \leq 0$, odnosno

$$P_\alpha^0(\pi) := \overline{\lim_{T\to}}(\pi)\frac{1}{T} ln(N_T^{\pi,\alpha})^{1-\alpha} \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} ln(N_T^{\pi^0})^{1-\alpha} = (1-\alpha)(r^0 + \frac{||\theta^0||^2}{2}) =: s^0(\alpha), \quad g.s. \tag{4.7}$$

Egzistencija i vrijednost zadnjeg limesa iz prethodnog izraza dolazi od pretpostavki teorema 3.5.1. i iz dokaza tvrdnje da klasa portfelja iz definicije (2.2.3) nije prazna te se taj dokaz može naći u [2]. Nadalje, iz izraza (3.35) za $\delta = 1$, kao i u (3.44) i (3.45) računajući na isti način kao i u potpoglavlju 3.5 dobivamo opet dvije nejednakosti

$$\frac{1}{T}ln(N_T^{\pi,\alpha})^{1-\alpha} + \frac{\alpha}{T}\int_0^T r_s ds - \frac{1-\alpha}{T}ln(1-\alpha) \leq \frac{1}{T}lnX_T^{\pi} \tag{4.8}$$

i

$$\frac{1}{T}lnX_T^{\pi} \leq \frac{1}{T}ln(N_T^{\pi,\lambda})^{1-\lambda} + \frac{\lambda}{T}\int_0^T r_s ds - \frac{1}{T}ln(\alpha^{-\lambda}(1-\frac{\lambda}{\alpha})^{1-\lambda}) \tag{4.9}$$

te obje nejednakosti vrijede g.s., za bilo koji $\pi \in A_\alpha(x) \subseteq A_\omega(x)$ gdje je $\omega \in (0, \alpha)$ dovoljno blizu α. Vidimo da su ovo gotove iste nejednakosti kao i u potpoglavlju 3.5, samo bez uzimanja očekivanja slučajnih procesa. Iz prethodnih nejednakosti slijedi

$$P_\alpha^0(\pi) + \alpha r^0 \leq s(\alpha) := \underset{\pi \in A_\alpha(x)}{esssup} P(\pi), \quad g.s. \tag{4.10}$$

gdje je $\underset{\pi \in A_\alpha(x)}{esssup}$ esencijalni supremum koji je zapravo norma na prostoru svih izmjerivih, ograničenih, skalarnih fukncija koji obično označavamo s L^∞. Sada iz prethodnog dobivamo $s^0(\alpha) + \alpha r^0 \leq s(\alpha)$. Analogno dobijemo i

$$P(\pi) - \lambda r^0 \leq P_\lambda^0(\pi) \leq s_\lambda^0$$

pa onda opet iz dobivenog slijedi

$$s(\alpha) - \lambda r^0 \leq s_\lambda^0.$$

Puštajući sada $\lambda \nearrow \alpha$ u $s(\alpha) - \alpha r^0 \leq s_{lambda}^0$ dobivamo da je $s(\alpha) - \alpha r^0 \leq \overline{s}_\omega$, g.s. Sada napokon imamo da je

$$s(\alpha) = s^0(\alpha) + \alpha r^0 = (1-\alpha)(r^0 + \frac{1}{2}||\theta^0||^2).$$

Na kraju bi trebalo i pokazati postojanje limesa i jednakost u (4.5), no oboje će slijediti kada u nejednakostima iz (4.8) i (4.9) stavimo $\pi \equiv \pi^\star$ te puštajući limes $T \to \infty$ i koristeći izraz (4.7), dobivamo

$$s(\alpha) = s^0(\alpha) + \alpha r^0 \leq \underline{lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}ln(X_T^{\pi^0}) \leq \overline{lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}ln(X_T^{\pi^0}) \leq s(\lambda). \tag{4.11}$$

Puštajući da λ ide u α, $\lambda \nearrow \alpha$, dobivamo

$$lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}ln(X_T^{\pi^0}) = s(\alpha), \quad g.s.$$

□

Bibliografija

[1] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus,Springer Science+Business Media, LLC, New York, New York, SAD, 1991.

[2] J. Cvitanić, F. Zapatero, Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, SAD, 2004.

[3] I. Karatzas, J. Cvitanić, On portoflio optimization under "drawdown" constraints, IMA Volumes in math. and its appl. 65, 1995., 35-46.

[4] S.J. Grossman, Z. Zhou, Optimal investment strategies for controlling drawdowns, Mathematcal Finance, Volume 3, Issue 3, 1993., 241-276.

[5] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak

U ovom radu bavimo se, kao što i naslov kaže, optimizacijom portfelja uz neke posebne uvjete. Ovaj problem promatramo na financijskom tržištu i ideja je naći portfelj koji dugoročno donosi pozitivne prinose te promatramo njemu pridružen proces bogatstva koji opisuje naše prinose s obzirom na portfelj koji smo odabrali te postavljamo uvjete na sam proces.

Prvo poglavlje je uvod gdje izlažemo uvjete na proces bogatstva, odnosno, htjeli bismo da ne padne ispod postotka maksimalne vrijednosti koju je postigao od početka ulaganja.

U drugom poglavlju navodimo defnicije, koncepte i rezultate koji su potrebni za razumijevanje i praćenje samog rada. U centru su pojmovi martingala, Itovog integrala te njihovih svojstava.

U trećem poglavlju je strogo izložen problem koji proučavamo, koji je zapravo problem koji su proučavali J. Cvitanić i I. Karatzas a koji je svojevrsno poopćenje onoga što su proučavali Grossman i Zhou, a to je zapravo proširenje tog problema na više financijskih imovina. Nadalje je dan model kojim opisujemo kretanje financijskih imovina na tržištu te slučajni proces bogatstva u obliku stohastičke diferencijalne jednadžbe. Zatim, kako bi se došlo do rješenja, uvodi se pomoćni slučajni proces te na kraju kroz primjer, uz konkretnu funkciju korisnosti, dano je rješenje problema, odnosno portfelj koji optimizira ulaganja te pritom pripadajući proces bogatstva s obzirom na dani portfelj koji zadovoljava otprije zadani uvjet.

U četvrtom poglavlju pokaže se da postoji i kako izgleda portfelj koji maksimizira dugoročnu stopu srednje vrijednosti korisnosti. Potom se i dokaže sama tvrdnja.

U petom poglavlju je pokazano da portfelj iz četvrtog poglvalja maksimizira i dugoročnu stopu investicije.

Summary

In this thesis we observe the problem of optimization of portfolio with special conditions imposed on our process. This problem is observed on financial markets and the idea is to find a portfolio which brings long term positive income and simultaneously observing wealth process with respect to portfolio that we chose thus imposing conditions on our wealth process.

First chapter is introduction where we present conditions restricting our wealth process and we don't want it to fall under the fixed fraction of maximum value achieved at or before the observed time.

In second chapter we give the definitions of concepts used in this paper needed for understanding the materia as well as theorems and others results that are natural extension of before given definitions. In the center of interest are the concepts such as martingales, Ito integral and their properties.

In the third chapter is strictly determined the problem we study which is a problem studied by J. Cvitanić and I. Karatzas which is a generalization of problem studied by Grossmann and Zhou. It is the expansion of the original problem on the several risky assets. Furthermore, we define the stochastic model which describes dynamic of financial assets on the financial markets and random wealth process in terms of differential stochastic equations. Then, to find a solution of our problem, we define an auxiliary stochastic control problem with finite horizon so we could, through example, with explicit utility function, construct the portfolio which optimizes our investments and satisfy the equation representing our wealth process.

In the fourth chapter we discuss and find portfolio that maximize long term average growth rate of utility and then we prove existence and above statement of maximization. We also show that the same portfolio maximize the long term growth rate of investment.

Životopis

Rođen sam 1996. godine u Zagrebu gdje sam pohađao osnovnu školu te poslije i opću gimnaziju. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na matematičko-logičkom natjecanju te ostvario 6. mjesto. Paralelno sam pohađao te završio osnovnu i srednju glazbenu školu gdje mi je glavni predmet bio Klavir.

Upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu 2015. godine kako bih onda 2019. godine upisao i diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom odsjeku.