Matematičke konstante u nastavi matematike

Gjud, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Gjud

MATEMATIČKE KONSTANTE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojim roditeljima na podršci.

Sadržaj

Uvod

Matematičke konstante su brojevi koji se ističu zbog svojih specifičnih svojstava i raznovrsnih primjena te jer se pojavljuju češće nego drugi brojevi. Neke konstante su poznatije od drugih zato što su dijelom matematike koja se obrađuje u osnovnoj i srednjoj školi. Tako je na primjer većina ljudi u našoj okolini čula za brojeve π i $\sqrt{2}$, dok su se samo oni koji su pohađali gimnazije i strukovne srednje škole susreli s brojem e.

Ovaj rad bavi se upotrebom i primjenom matematičkih konstanti π, e i $\sqrt{2}$ kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Valja istaknuti da su sve tri obrađene konstante iracionalni brojevi, dakle imaju beskonačni neperiodičan decimalni zapis. Radi ljepšeg i kraćeg zapisa Arhimedov broj ima svoj simbol π, Napierov broj ima svoje posebno slovo e, a Pitagorina konstanta je već „prigodnog" zapisa $\sqrt{2}$. Svaka konstanta bit će kronološkim redoslijedom predstavljena kroz povijest svog nastanka uključujući najvažnije činjenice i matematičare koji su doprinijeli njenom otkriću. Cilj rada je prikazati put svake od navedenih konstanti kroz razrede osnovne i srednje škole, kroz razne uvodne primjere i tipične zadatke, na koji način bi se učenike moglo upoznati s određenom konstantom i na koji način se primjenjuje u zadatcima. Rad je podijeljen u tri poglavlja, svaka konstanta je obrađena u zasebnom poglavlju.

Prvo poglavlje odnosi se na broj π. Upoznaje se povijest broja π te njegovi, moglo bi se reći, „otkrivatelji", tj. matematičari koji su kroz povijest otkrivali njegove sve bolje i bolje aproksimacije. Također, prolazi se i kroz zanimljive činjenice o samom broju π, koje bi vrijedilo istaknuti na nastavnim satima. Jedan od ključnih dijelova poglavlja je uvodni primjer u sedmom razredu, u kojem se učenici prvi put susreću s brojem π kroz jednostavan pokus i definiraju ga kao omjer opsega kružnice i njenog dijametra. Također je ključan dio u osmom razredu gdje učenici u proširenom sadržaju gradiva spoznaju da broj π ima beskonačni neperiodični decimalni zapis, odnosno da je iracionalan. Ukoliko učitelji taj dio ne obrade u osmom razredu (jer prošireni sadržaj nije obavezan) onda se taj dio gradiva svakako obrađuje u prvom razredu srednje škole. Kroz nastavak srednje škole broj π postaje sastavni dio gradiva vezanog za krug i kružnicu, trigonometriju i integrale.

Drugo poglavlje odnosi se na bazu prirodnog logaritma. U prvom dijelu drugog poglavlja govori se o povijesti broja e i njegovoj primjeni kroz povijest. Broj e učenici upoznaju tek u trećem razredu srednje škole kroz eksponencijalne i logaritamske funkcije kao iracionalan broj. Također, učenici uviđaju vrlo široku primjenu broja e u raznim područjima života osim u matematici, primjerice u kemiji, biologiji, ekonomiji itd. U četvrtom razredu učenici se upoznaju s još jednom specifičnošću broja e kroz primjer neprekidnog ukamaćivanja. Važan dio poglavlja je i taj da je baza prirodnog logaritma povezana s Gaussovom krvuljom. Također, jedan od ključnih dijelova poglavlja je spoznaja da je eksponencijalna funkcija, u čijoj definiciji koristimo konstantu e, jednaka svojoj derivaciji.

U trećem poglavlju obrađuje se broj $\sqrt{2}$. U prvom dijelu trećeg poglavlja pobliže se upoznaje njegova povijest. Zatim slijedi uvid u dijelove gradiva u kojima se više doznaje o samom broju i njegovim svojstvima. Susret učenika s $\sqrt{2}$ važna je tema kojom se bavim u poglavlju. Učenici se prvi put susreću s tom konstantom prilikom obrade Pitagorina poučka te uviđaju njenu moguću primjenu na kvadrat, prilikom koje je njena vrijednost od velike važnosti jer je jednaka duljini dijagonale jediničnog kvadrata. Posljedično tome, broj $\sqrt{2}$ je dijelom raznih izvoda formula u geometriji i stereometriji. U proširenom sadržaju osmog razreda spominje se da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan broj, a u prvom razredu srednje škole to se i dokazuje. Važan je primjer u osmom razredu u kojem je moguća provedba konstrukcije broja $\sqrt{2}$. Ova konstanta spominje se u svakom razredu srednje škole, a istaknuta je kod trigonometrije, odnosno kod vrijednosti trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus kuta mjere 45°.

Prolaskom kroz sam rad bit će vidljivo da se konstante $\sqrt{2}$ i π koriste vrlo često u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi, dok se konstanta e spominje tek u srednjoj školi u puno manjem opsegu. Kao što ćemo vidjeti u ovom radu, proučavanje matematičkih konstanti te njihovih svojstava, primjera i povijesti ima važnu ulogu u matematičkom obrazovanju.

Poglavlje 1

Broj π

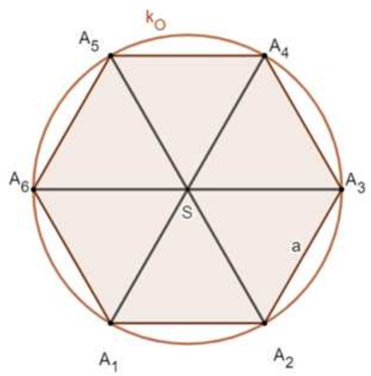
1.1 Povijest broja π

Procjenjivanje površine kruga seže još iz doba starih Egipćana. Otprilike 2040.–1794. pr. Kr. stari Egipćani su znali računati površine trokuta, pravokutnika, trapeza i kruga. Također su znali računati i volumene kocke, valjka, krnje kvadratne piramide. Slijedi jedan tipičan zadatak za to doba.

Zadatak 1. Koliko iznosi volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 kubita i visine 10 kubita[1]?
Rješenje: Oduzmi $\frac{1}{9}$ devetke od 9. Ostaje 8. Pomnoži 8 s 8, dobiješ 64. Pomnoži 64 s 10, to je 640 kubičnih kubita.
Pristup je bio takav da se zadaju zadaci s rješenjima, ali bez postupaka i pokušaja generalizacije te bez formula. Vidljivo je, dakle da su stari Egipćani znali procijeniti površinu kruga, tj. uočili su da su površina kruga i površina kvadrata nad polumjerom proporcionalne veličine. Možemo zaključiti da su stari Egipćani procjenjivali površinu kruga kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ gdje je d promjer. Ne možemo reći da su Egipćani znali za broj π, ali kad na današnji način interpretiramo ovaj postupak, ispadne da je to $\left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2$, odnosno $\frac{64}{81} \cdot 4r^2 = \frac{256}{81}r^2$, odnosno iz moderne perspektive $\frac{256}{81} \approx 3.16$. Možemo reći da je za “prvi pokušaj” ovo jako dobra procjena. Ovo je prva metoda dobivanja površine kruga. Kako se razvijala geometrija u Mezopotamiji, tako su se razvijale i metode izračuna površina i volumena raznih geometrijskih likova i tijela. Prema skripti [3], Mezopotamci su znali da su obujmi valjka i prizme jednaki umnošku površine baze i visine. Aproksimacije površine i opsega kruga najčešće računaju koristeći približnu vrijednost $\pi \approx 3$, a ponekad i $\pi \approx \frac{25}{8}$. Na jednoj pločici iz razdoblja 1900.–1600. pr. Kr. piše da je opseg pravilnog šesterokuta

[1] 1 kubit $\approx 52.3\ cm$

jednak $\frac{24}{25}$ opsega tom šesterokutu opisane kružnice. Ta ideja prikazana je na slici 1.1. Označimo s r radijus opisane kružnice, s a_6 duljinu stranice pravilnog šesterokuta, a s O_6 opseg pravilnog šesterokuta. Tada vrijedi: $r = a_6$ iz čega slijedi $O_6 = 6a_6 = 6r \approx \frac{24}{25}O = \frac{24}{25} \cdot 2r\pi$ iz čega dobivamo $\pi \approx \frac{25}{8}$.

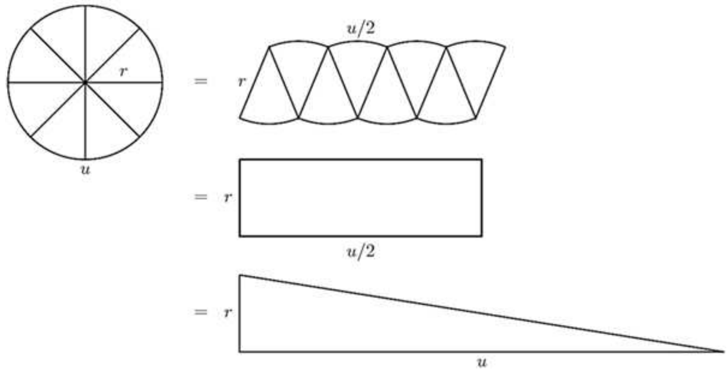


Slika 1.1: Šesterokutu opisana kružnica

Moderno tumačenje jest da to odgovara broju π s aproksimacijom $\frac{25}{8} \approx 3.125$. Dalje tijekom povijesti, brojem π značajnije se bavi Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.). Njegovi najpoznatiji tekstovi su *O kugli i valjku, O spiralama, O konoidi i sferoidi, O mjerenju kruga* te *O kvadraturi parabole*. U današnje vrijeme često kažemo da je Arhimed dokazao formulu za površinu kruga, no to nije dobro reći jer formule u to doba nisu postojale niti su matematičari u to doba dokazivali formule za neku svrhu. Arhimedov teorem, na temelju kojeg ima smisla govoriti o broju π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga, je upravo teorem o krugu iz njegovog djela *O kružnici i krugu*.

Teorem 1.1.1. *(Arhimedov teorem o krugu)*
Svaki krug K ima istu površinu kao pravokutni trokut T, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg.

Dokaz. Svedimo prvo tvrdnju teorema na modernu formulu. Ono što slijedi nije dokaz već ideja kako ga je on mogao naslutiti. Krug K, radijusa r i opsega u, možemo raspodijeliti na više sukladnih kružnih isječaka. U ovom primjeru, krug je podijeljen na osam takvih isječaka. Isječci su poredani na način da prividno tvore paralelogram, koji će sa što većim brojem takvih isječaka, podsjećati sve više na paralelogram, kao što je prikazano na slici 1.2. Mi danas znamo da takav krug K, radijusa r, ima površinu $P = r^2\pi$. Površina pravokutnog trokuta iz teorema je $P_{\Delta T} = \frac{1}{2}r \cdot u$. Kada uvrstimo u formulu za opseg kakvu danas poznajemo $u = 2r\pi$, vidimo da je površina tog trokuta $P_{\Delta T} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot u = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2r\pi = r^2\pi$. Dakle, time je izbjegao korištenje konstante π i sveo sve na izjednačavanje površine kruga i površine određenog trokuta. □



Slika 1.2: Ilustracija Arhimedovog teorema o krugu.

Arhimed je iterativnom metodom uspio dobiti procjenu za odnos opsega i promjera kruga. Slijedi teorem koji je još jedan razlog zašto se broj π često naziva Arhimedovom konstantom.

Teorem 1.1.2. *Opseg kruga σ je u odnosu na trostruki promjer d tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.*

Mi danas ovaj rezultat, to jest ovaj omjer, nazivamo brojem π: $\frac{223}{71} < \pi = \frac{\sigma}{d} < \frac{22}{7}$, a on približno iznosi: $3.140845\ldots < \pi = \frac{\sigma}{d} < 3.142857\ldots$ Iz njegovog djela se može vidjeti da je bio svjestan da je mogao dobiti bolju procjenu omjera opsega i promjera kad bi postupak nastavio dalje. Slijedi opis metode koja je sve do vremena kada je otkriven račun s redovima (18. stoljeće) bila temelj sve boljih procjena broja π.

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut. Broj koraka označit ćemo s n. Ovo je nulti korak ($n = 0$).

2. Neka je σ_n opseg upisanog pravilnog šesterokuta, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom idućem koraku, broj stranica će se udvostručiti).

3. Za polumjer kruga $r = 1$, početne vrijednosti su $\sigma_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.

4. Definiramo rastući niz $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n$ i padajući niz $O_0 > O_2 > O_3 > \ldots > O_n$ tako da prvi niz ima gornju granicu π, a drugi niz ima donju granicu π.

5. Arhimed je uočio rekurzivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta harmonijska je sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka, $O_{n+1} = \frac{2O_n\sigma_n}{O_n+\sigma_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta geometrijska je sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodno upisanog mnogokuta $\sigma_{n+1} = \sqrt{\sigma_n O_{n+1}}$.

Arhimed je u $n = 4$ koraka došao do opsega upisanog i opisanog 96-erokuta (σ_4 i O_4) i tako je dobio navedenu procjenu. U 3. stoljeću, kineski je matematičar Liu Hui u svojim komentarima *Devet poglavlja* dobio aproksimaciju broja $\pi \approx 3.14150$ na način da je upisivao $k \cdot 2^n$- terokute počevši od šesterokuta i jasno navodi da se povećanjem broja stranica, dobiva točnija aproksimacija. Njegov postupak analogan je Arhimedovom, ali je gotovo nemoguće da je znao za Arhimedov iterativni postupak. Al-Kaši, arapski matematičar, je oko 1380.–1429. pomoću iterativnog numeričkog postupka za izračunavanje trigonometrijskih tablica izračunao 2π s točnošću na čak 16 decimala. Tek će oko 1540.–1610. Ludolph van Ceulen dobiti bolju točnost i to na 35 decimala. Oznaka π potječe iz 18. stoljeća, točnije prvi ju je u današnjem smislu koristio Englez William Jones 1706. godine, a popularizirao ju je Leonhard Euler 1736. godine. Ferdinand von Lindemann (1852. – 1939.) je 1882. dokazao da je π transcendentan[2], a 1767. je Johann Heinrich Lambert (1728. – 1777.) dokazao da je iracionalan [3], [11]. Adrien-Marie Legendre je 1794. prvi dokazao da je π^2 također iracionalan.

1.2 Broj π u osnovnoj školi

Sedmi razred

Učenici se prvi puta susreću s brojem π u sedmom razredu osnovne škole. U predmetnom kurikulumu matematike u osnovnoj školi [12] može se pronaći odgojno-obrazovni ishod MAT OŠ D.7.4.: *Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova*. Razrada odgojno obrazovnih ishoda dana je ovako:

- Istražuje i računa opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.
- Objašnjava ulogu i svojstva broja π.
- Modelira površinama i opsezima geometrijskih oblika (krug i dijelovi, kružnica i dijelovi, kružni vijenac, mnogokuti) rješavanje problemske situacije.

Što se tiče računanja opsega i površine kruga, može se pronaći korelacija s predmetima Geografija, Fizika, Kemija i Biologija, a preporuča se učenicima ponuditi zadatak za samostalno istraživanje. Također se u predmetnom kurikulumu matematike [12] mogu pronaći preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda u kojima stoji *„... ovim se ishodom ne provjerava tehnika u računanju, nego učenikovo logičko razmišljanje i sposobnost analize problema. U računanje se mogu koristiti aproksimacije 3.14 ili* $\frac{22}{7}$ *...“* te dalje u tekstu stoji *„... istražiti povijesne crtice o broju* π *...“*. Upravo u ovom dijelu, gdje se preporuča

[2]Transcendentni brojevi su kompleksni brojevi koji nisu algebarski, odnosno, to su kompleksni brojevi koji nisu nultočke polinoma $f(x)$ (različitog od nulpolinoma) s racionalnim koeficijentima.

istražiti povijesne crtice o broju π, često u udžbenicima možemo naići na kratku uvodnu crticu o nastanku broja π. Slijedeći knjigu [20], bilo bi prigodno spomenuti sljedeće zanimljive činjenice o broju π kroz povijest na predmetnoj nastavi, kako bi se učenike malo više zainteresiralo za temu:

- Oko 1900. pr. Kr. aproksimacija broja π u Babilonu bila je $\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125$, a u Egiptu $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.16049\ldots$
- Arhimed sa Sirakuze (287.–212. pr. Kr.) dao je svoju procjenu s: $\frac{223}{71} \approx 3.140845\ldots < \pi < \frac{22}{7} \approx 3.142857\ldots$
- Lui Hui (oko 265. godine) je aproksimirao broj π s $\pi \approx 3.1416$.
- Ludolph van Ceulen (1540. – 1610.) izračunao je 35 decimala broja π koje su zapisane i na njegovom nadgrobnom spomeniku.
- John Van Neumann 1949. godine izračunao je 2037 decimala broja π koristeći se računalom.
- 1973. godine izračunata je milijunta decimala broja π.
- Još jedna zanimljiva činjenica o broju π, slijedeći knjigu [1], jest ta da matematičari 14. ožujka (u engleskom govornom području datum se zapisuje kao 3/14) obilježavaju dan broja π.

Tipični uvodni pokus za otkrivanje broja π u sedmom razredu prilikom određivanja formule za opseg kruga, tj. duljine kružnice, jest onaj u kojem se pomoću konca, vezice ili manjeg komada konopa, mjeri opseg nekog "okruglog" predmeta poput kovanice, čepa od boce (treba paziti na poravnanje konca), konzerve, tanjura, CD-a i slično, i to s preciznošću na jednu decimalu. S obzirom na to da su učenici već upoznati s pojmovima polumjer i promjer kruga, lako će izmjeriti potrebne podatke u ovom pokusu. Ideja je da se odrade barem 3 mjerenja triju predmeta različitih opsega te da se izračuna omjer opsega i promjera (tj. dvostrukog polumjera). Zatim bi se porazgovaralo s učenicima o rezultatima unutar tablice te bi ih se upitalo zamjećuju li štogod? Zaključak nakon pokusa jest da su izračunati omjeri približni 3.14, a upravo to je približna vrijednost broja π. Jedan primjer takve tablice za provedbu takvog pokusa je tablica 1.1:

PREDMET	Kovanica od 50 c	Kovanica od 1 €	Kovanica od 2 €
o	7.6 cm	7.2 cm	8.2 cm
$2r = d$	2.4 cm	2.3 cm	2.6 cm
Omjer $(\boldsymbol{o} : \boldsymbol{d})$	3.17	3.13	3.15

Tablica 1.1: Tablica za određivanje broja π.

Prilikom rješavanja zadataka vezanih za krug i kružnicu, a gdje se koristi broj π, stvar je dogovora učitelja/ice matematike i učenika hoće li se u zadatcima koristiti približna vrijednost 3.14 ili će se koristiti aproksimacija broja π pomoću džepnog računala koji prikazuje prvih nekoliko njegovih decimala. U osnovnoj školi, broj π pojavljuje se u formulama gdje je r polumjer kruga, α mjera središnjeg kuta kružnog isječka, R polumjer veće kružnice:

- opseg kruga:
$$o = 2r\pi, \tag{1.1}$$
- površina kruga:
$$P = r^2\pi, \tag{1.2}$$
- duljina kružnog luka:
$$l = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}, \tag{1.3}$$
- površina kružnog isječka:
$$P = \frac{2r^2\pi\alpha}{360^\circ}, \tag{1.4}$$
- površina kružnog vijenca:
$$P = (R^2 - r^2) \cdot \alpha. \tag{1.5}$$

Slijedi nekoliko primjera u kojima se učenici prvi put susreću s brojem π u zadatcima prilikom računanja opsega kruga. U sljedećim zadatcima koristit će se aproksimacija $\pi \approx 3.14$.

Primjer 1. Izračunajmo opseg torte kojoj je promjer duljine 26 cm.

Rješenje: Promjer označavamo s d pa zapisujemo $d = 26\ cm$. Znamo da vrijedi $d = 2r$, stoga zapisujemo $r = 13\ cm$. Uvrštavamo u formulu za opseg kruga 1.1 i dobivamo sljedeće:

$$o \approx 2 \cdot 13 \cdot 3.14$$
$$o \approx 81.64\ cm.$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da je opseg torte približno jednak 81.64 *cm*.

Primjer 2. Izračunajmo radijus torte čiji je opseg 100.48 *cm*.

Rješenje: Zadan nam je opseg torte, stoga zapisujemo $o = 100.48\ cm$. Tražimo radijus torte, stoga zapisujemo "$r =?$" . Uvrštavamo poznate podatke u formulu za opseg kruga 1.1:

$$\begin{aligned} 100.48 &= 2r\pi \quad / : (2\pi)\ (\approx 6.28) \\ r &= 16\ cm. \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da radijus torte iznosi 16 *cm*.
Slijede tipični zadatci za računanje opsega, to jest duljine kružnice.

Zadatak 2. Opseg prvog kruga je 43.96 *cm*. Izračunajte opseg drugog kruga čija je duljina polumjera manja za 2 *cm* od duljine polumjera prvog kruga.

Rješenje: Poznat nam je opseg prvog kruga $o_1 = 43.96\ cm$. Izračunajmo radijus prvog kruga i označimo ga s r_1. Iz teksta zadatka znamo da je radijus drugog kruga za 2 *cm* manji od r_1 pa zapisujemo $r_2 = r_1 - 2$. Uvrštavanjem poznatih podataka u formulu 1.1 dobivamo:

$$\begin{aligned} o_1 &= 2r_1\pi \\ 43.96 &= 6.28 \cdot r_1 \quad / : 6.28 \\ r_1 &= 7\ cm. \end{aligned}$$

Sada kad znamo koliki je radijus prvog kruga, nakon što ga umanjimo za 2 *cm* dobit ćemo radijus drugog kruga te zapisujemo $r_2 = 5\ cm$. Računamo opseg drugog kruga:

$$o_2 = 31.4\ cm.$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da je opseg drugog kruga 31.4 *cm*.

Slijede primjeri i tipični zadatci za računanje duljine kružnog luka.

Primjer 3. Izračunajmo duljinu kružnog luka l u kružnici duljine polumjera 4.2 *cm* kojem odgovara središnji kut veličine 45°.

Rješenje: Zadane podatke $r = 4.2\ cm$ i $\alpha = 45°$ uvrstimo u formulu 1.3 pa slijedi:

$$\begin{aligned} l &= 4.2 \cdot 3.14 \cdot \frac{45°}{180°} \\ l &= 3.297\ cm. \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da je duljina kružnog luka jednaka 3.297 *cm*.

Primjer 4. Izračunajmo veličinu središnjeg kuta kružnice radijusa 6 *cm* pod kojim se vidi njezin luk duljine 6.28 *cm*.

Rješenje: Uvrštavanjem zadanih podataka u formulu 1.3 dobivamo:

$$6.28 = \frac{6 \cdot 3.14 \cdot \alpha}{180^\circ}.$$

Skraćivanjem brojnika i nazivnika sa 6 slijedi:

$$\begin{aligned} 6.28 &= \frac{3.14\alpha}{30^\circ} \quad / \cdot 30^\circ \\ 3.14\alpha &= 188.4^\circ \quad / : 3.14 \\ \alpha &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa slijedi da je veličina odgovarajućeg središnjeg kuta je 60°.

Zadatak 3. Izračunajte veličinu središnjeg kuta kojemu u kružnici duljine polumjera 9 *cm* odgovara kružni luk duljine 14.13 *cm*.

Rješenje: Uvrštavanjem zadanih podataka u formulu 1.3 dobivamo:

$$14.13 = \frac{9 \cdot 3.14 \cdot \alpha}{180^\circ}.$$

Skraćivanjem brojnika i nazivnika s brojem 9, dobivamo:

$$\begin{aligned} 14.13 &= \frac{3.14 \cdot \alpha}{20^\circ} \quad / \cdot 20^\circ \\ 3.14\alpha &= 282.6^\circ \quad / : 3.14 \\ \alpha &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da je veličina odgovarajućeg središnjeg kuta 90°.

Slijede primjeri zadataka za računanje površine kruga, kružnog isječka i kružnog vijenca.

Zadatak 4. Izračunajmo površinu kruga čiji je radijus 3 *m*.

Rješenje: Uvrštavanjem zadanih podataka u formulu 1.2 dobivamo:

$$\begin{aligned} P &= 9 \cdot 3.14 \\ P &= 28.26\ m^2. \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa slijedi da površina kruga radijusa 3 m iznosi 28.26 m^2.

Zadatak 5. Izračunajmo površinu kružnog isječka ako je duljina polumjera $r = 4\ cm$, a veličina središnjeg kuta $\alpha = 45°$.

Rješenje: Uvrštavanjem zadanih podataka $r = 4\ cm$ i $\alpha = 45°$ u formulu za računanje površine kružnog isječka 1.4 dobivamo sljedeće:

$$P_i = \frac{4^2 \cdot 3.14 \cdot 45°}{360°}$$
$$P_i = 6.28\ cm^2.$$

Iz prethodnog računa zaključujemo da površina kružnog isječka radijusa 4 cm i središnjeg kuta veličine 45° iznosi 6.28 cm^2.

Primjer 5. Izračunajmo površinu kružnog vijenca, ako je radijus njegove veće kružnice $r_2 = 3\ cm$, a radijus manje kružnice $r_1 = 1\ cm$.

Rješenje: Zapišimo poznate podatke:
$r_1 = 1\ cm$
$r_2 = 3\ cm$.

Površinu kružnog vijenca računamo tako da od površine P_2 kruga većeg polumjera oduzmemo površinu P_1 kruga manjeg polumjera. Računamo površinu P_2:

$$P_2 = r_2^2\pi$$
$$P_2 = 28.26\ cm^2.$$

Zatim, računamo površinu P_1:

$$P_1 = r_1^2\pi$$
$$P_1 = 3.14\ cm^2.$$

Nakon toga oduzmemo površine:

$$P = P_2 - P_1$$
$$P = 28.26 - 3.14$$
$$P = 25.12\ cm^2.$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da je površina traženog kružnog vijenca 25.12 cm^2.

Osmi razred

Učenici se već u petom razredu osnovne škole upoznaju s pojmovima *beskonačni decimalni zapis* i *period* unutar cjeline *Razlomci i decimalni brojevi*, a unutar lekcije *Zapis decimalnim brojem i razlomkom*, tako da u osmom razredu unutar cjeline *Realni brojevi*, uče o iracionalnim brojevima, definirajući ih kao brojeve koji imaju beskonačan neperiodičan zapis i koji se ne mogu zapisati u obliku razlomka, a takav broj je upravo broj π. Dakle, u osmom razredu učenici spoznaju da je broj π iracionalan broj. U ovom dijelu nastavnog sadržaja, prigodno bi i interesantno bilo učenicima spomenuti i pokazati, ukoliko učionica sadrži pametnu ploču ili projektor, program[3] koji računa na kojem se mjestu u prvih milijun decimala broja π nalazi datum njihovog rođendana. Također, učenici mogu to samostalno provjeriti na svojim pametnim telefonima, tabletima ili računalima. Primjer datuma koji se ne pronalazi u prvih milijun decimala broja π je 20.11.2010. (po američkom obrascu datuma to bi izgledalo: 11202010). S obzirom na to da je π također i pripadno slovo grčkog alfabeta, o čemu je već spomenuto u udžbeniku sedmog razreda [14], on se u osmom razredu koristi i kao oznaka za ravninu u cjelini *Točke, pravci i ravnine u prostoru.* U osmom razredu se također broj π javlja u formulama za oplošje i volumen geometrijskih tijela poput uspravnog valjka, stošca i kugle gdje je r polumjer kruga (baze), h visina geometrijskog tijela, s duljina izvodnice stošca, R radijus kugle:

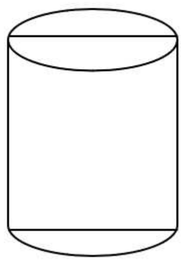
- oplošje uspravnog valjka:
$$O = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h = 2r\pi(r + h), \tag{1.6}$$
- volumen uspravnog valjka:
$$V = r^2\pi h, \tag{1.7}$$
- oplošje stošca:
$$O = r^2\pi + rs\pi = r\pi(r + s), \tag{1.8}$$
- volumen stošca:
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h, \tag{1.9}$$
- oplošje kugle (površina sfere):
$$O = 4R^2\pi, \tag{1.10}$$
- volumen kugle:
$$V = \frac{4}{3}R^3\pi. \tag{1.11}$$

[3]Poveznica na program Find birthday in Pi: `https://www.piday.org/find-birthday-in-pi/`

Učenici upoznaju dijelove valjka: osnovku ili bazu i plašt. Osnovka ili baza valjka definira se kao krug. Plašt se definira kao skup svih točaka koje pripadaju dužinama koje spajaju rubove baza i okomite su na njih. Kada se plašt uspravnog valjka razvije u ravninu, dobije se pravokutnik. Upravo zato što je baza uspravnog valjka krug, prilikom računanja oplošja i volumena valjka, koristit će se broj π. Kroz motivacijski dio nastavnog sata s učenicima se može proći kroz nekoliko primjera iz svakodnevnog života u kojima prepoznajemo uspravni valjak, poput hokejske pločice koju nazivamo pak, čaše valjkastog oblika, konzerve, limenke, raznih građevina poput kula, bunara, lonca itd. U sljedećim zadatcima koristit će se aproksimacija $\pi \approx 3.14$.

Primjer 1. Izračunajmo opseg i površinu osnog presjeka valjka radijusa duljine 1.5 cm i visine duljine 4 cm.

Rješenje: Skicirajmo valjak, zapišimo i označimo na skici zadane podatke:



Slika 1.3: Uspravni valjak.

$$r = 1.5\ cm$$
$$h = 4\ cm.$$

Primijetimo da je osni presjek valjka oblika pravokutnika sa stranicama duljina 3 cm (dvostruki polumjer baze valjka) i 4 cm (visina valjka). Vidi sliku 1.3. Opseg osnog presjeka valjka jest zbroj svih stranica tog pravokutnika, odnosno:

$$o_{op} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$
$$o_{op} = 14\ cm.$$

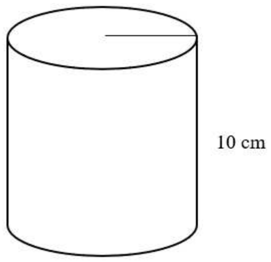
Opseg osnog presjeka valjka je 14 cm. Površinu osnog presjeka valjka računamo kao površinu pravokutnika sa stranicama 3 cm i 4 cm.

$$P_{op} = 3 \cdot 4$$
$$P_{op} = 12\ cm^2$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da površina osnog presjeka valjka iznosi 12 cm^2.

Zadatak 1. Izračunaj oplošje i volumen uspravnog valjka ako mu je radijus osnovke 3 cm, a duljina visine 10 cm.

Rješenje: Skicirajmo uspravni valjak kao na slici 1.4 i označimo na skici podatke koji su nam poznati:



Slika 1.4: Uspravni valjak.

$$r = 3\ cm$$
$$h = 10\ cm.$$

Uvrstimo u formulu 1.6 poznate podatke:

$$O = 2r\pi(r + h)$$
$$O = 2 \cdot 3 \cdot 3.14 \cdot (3 + 10)$$
$$O = 244.92\ cm^2.$$

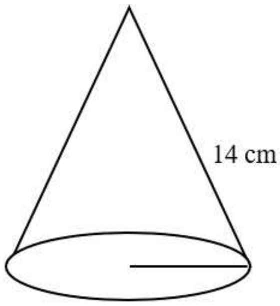
Oplošje zadanog uspravnog valjka je 244.92 cm^2. Uvrstimo sad poznate podatke u formulu 1.7 za volumen valjka:

$$V = r^2\pi h$$
$$V = 3^2 \cdot 3.14 \cdot 10$$
$$V = 282.6\ cm^3.$$

Iz prethodnog računa slijedi da je volumen zadanog uspravnog valjka 282.6 cm^3.
Nakon uspravnog valjka, obrađuje se uspravni stožac. U svakodnevnom životu oko nas, stožac možemo uočiti u krovovima kula, kornetu od sladoleda, rođendanskim kapicama itd.

Zadatak 2. Izračunaj oplošje i volumen stošca čiji je opseg baze 16π cm, a duljina izvodnice 1.4 dm.

Rješenje: Skicirajmo uspravni stožac kao na slici 1.5 i označimo na skici podatke koji su nam poznati.



Slika 1.5: Uspravni stožac.

Primijetimo da imamo zadan opseg baze iz kojeg vrlo lako možemo doznati radijus baze pomoću formule za opseg kruga. Uvrstimo sad poznate podatke u formulu 1.1 za opseg kruga:

$$O = 2r\pi$$
$$16\pi = 2r\pi \; / : (2\pi)$$
$$r = 8 \; cm.$$

Sada su nam poznati radijus osnovke i izvodnica stošca. Uvrstimo sad poznate podatke u formulu 1.8 za oplošje stošca:

$$O = 8 \cdot 3.14 \cdot (8 + 14)$$
$$O = 552.64 \; cm^2.$$

Oplošje zadanog uspravnog stošca iznosi 552.64 cm^2.
Izračunajmo sada i volumen uspravnog stošca prema formuli 1.9:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 3.14 \cdot 14$$
$$V = 937.81 \; cm^3.$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da volumen zadanog stošca iznosi 937.81 cm^3.

1.3 Broj π u srednjoj školi

Drugi razred

U srednjoj školi (opća gimnazija s 3 ili 4 sata nastave matematike tjedno), broj π spominje se tek u drugom razredu u nastavnim cjelinama *Kružnica i krug*, *Poliedri* i *Rotacijska tijela*. U cjelini *Kružnica i krug* učenici izvode formule za duljinu kružnog luka, površinu kruga i površinu kružnog isječka pomoću proporcionalnosti. U ovom diplomskom radu izvest će se samo jedna od navedenih formula.

Izvod formule za duljinu kružnog luka.

Središnjem kutu mjere 360° odgovara kružni luk duljine cijele kružnice, a koji zovemo opseg kruga ($O = 2r\pi$). S obzirom na to da su duljina kružnog luka l i polumjer kružnice r proporcionalne veličine, tada možemo zapisati:

$$l : \alpha = O : 360^\circ$$

iz čega slijedi

$$l = \frac{O \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ}.$$

Odnosno, nakon što brojnik i nazivnik skratimo s brojem 2, dobivamo da je duljina kružnog luka jednaka

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}. \tag{1.12}$$

Stupnjevi i radijani.

Slijedeći knjigu [5] objasnit ćemo radijane. Iako je uobičajeno veličinu kuta izraziti u stupnjevima, postoji još jedna mjerna jedinica za izražavanje kuta, a s kojom se učenici susreću u drugom razredu srednje škole. Riječ je o radijanima. Ako je duljina luka kojem odgovara središnji kut α jednaka radijusu kružnice, onda veličina tog kuta iznosi 1 radijan. Veličina kuta iskazana u radijanima dobiva se omjerom duljine luka i radijusa kružnice na sljedeći način:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{l}{r} \,.$$

Kut veličine 90° iznosi četvrtinu punog kuta, pa tako i duljina kružnog luka iznosi četvrtinu opsega kruga

$$90^\circ = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2r\pi}{r} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ rad}.$$

Veza između stupnjeva i radijana iskazuje se jednakošću π rad = 180°, odakle slijedi:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.29578^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Poliedri.

Učenici u drugom razredu srednje škole izvode formule za oplošje i volumen dosad naučenih geometrijskih tijela poput prizme, piramide, valjka, stošca i kugle. Osim toga, učenici još proširuju svoje znanje o poliedrima, otkrivajući nove formule u kojima se koristi konstanta π gdje je h visina krnjeg stošca, r_1 polumjer veće baze, r_2 polumjer manje baze krnje piramide:

- oplošje krnjeg stošca:

$$O = r_1^2\pi + r_2^2\pi + s\pi(r_1 + r_2), \tag{1.13}$$

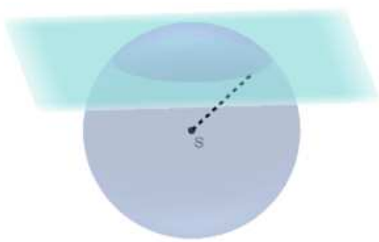
- volumen krnjeg stošca:

$$V = \frac{h\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2). \tag{1.14}$$

Slijede formule vezane za kugline dijelove pri čemu je h visina kuglina odsječka, R je radijus kugle, r je radijus kuglina odsječka:

- volumen kuglina odsječka (slika 1.6):

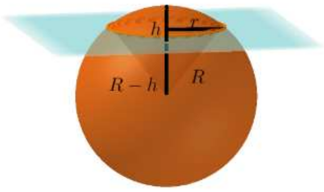
$$V_o = \frac{(3R - h)h^2\pi}{3}, \; V_o = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2), \tag{1.15}$$



Slika 1.6: Kuglin odsječak.

- volumen kuglina isječka (slika 1.7):

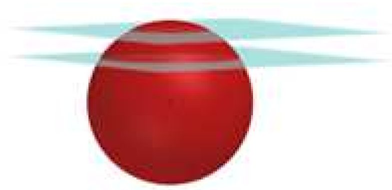
$$V_i = \frac{2}{3}\pi R^2 h, \tag{1.16}$$



Slika 1.7: Kuglin isječak.

• volumen kuglina sloja (slika 1.8):

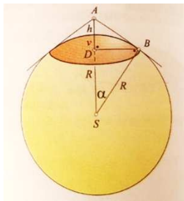
$$V_{ks} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2), \tag{1.17}$$



Slika 1.8: Kuglin sloj.

- površina kugline kapice (slika 1.9):

$$P_k = 2R\pi h. \tag{1.18}$$



Slika 1.9: Kuglina kapica.

Slijedi nekoliko zadataka u kojima ćemo primijeniti neke od navedenih formula.

Zadatak 1. Kolika je duljina visine krnjeg stošca ako je njegov volumen 584 π cm^3, a duljine polumjera osnovica iznose 7 cm i 10 cm?

Rješenje: Prvo zapišimo poznate podatke: $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 7$ cm, $V = 584\pi$ cm^3.
Uvrštavanjem poznatih podataka u formulu za volumen krnjeg stošca 1.14 dobivamo:

$$\begin{aligned} 584\pi &= \frac{h\pi}{3}(10^2 + 10\cdot 7 + 7^2) \\ 584\pi &= \frac{219h\pi}{3} \\ 584\pi &= 73h\pi \quad / : (73\pi) \\ h &= 8\ cm. \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa slijedi da visina krnjeg stošca iznosi 8 cm.

Zadatak 2. Koliki je volumen kuglina odsječka, ako mu radijus iznosi 8 cm, a visina 4 cm?

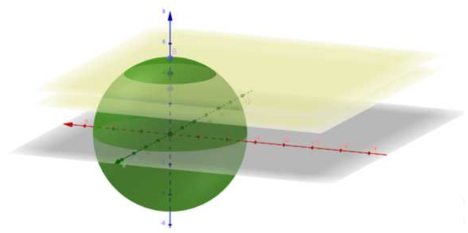
Rješenje: Zapišimo poznate podatke $r = 8$ cm i $h = 4$ cm. Uvrštavanjem u formulu za računanje volumena kuglina odsječka 1.15 dobivamo:

$$\begin{aligned} V_O &= \frac{4\pi}{6}(3\cdot 8^2 + 4^2) \\ V_O &= \frac{416}{3}\pi\ \ cm^3. \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa zaključujemo da volumen kuglina odsječka iznosi $\frac{416}{3}\pi$ cm^3.

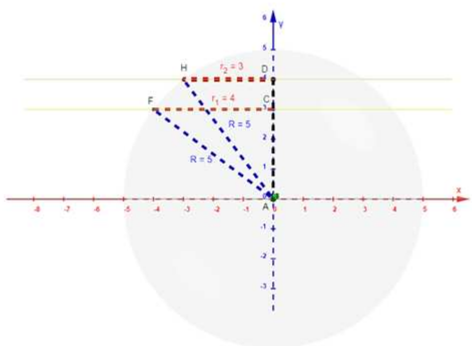
Zadatak 3. Polumjeri osnovki kuglinog sloja jednaki su 3 cm, 4 cm a polumjer kugle iznosi 5 cm. Koliki je obujam kuglina sloja ako su ravnine presjeka s iste strane središta kugle?

Rješenje: Zapišimo poznate podatke: $r_1 = 4\ cm,\ r_2 = 3\ cm,\ R = 5\ cm.$
Uočimo da nam za izračun volumena kuglina sloja nedostaje podatak o visini kuglina sloja. Promotrimo sliku 1.10, a potom njenu ortogonalnu projekciju na ravninu xy.



Slika 1.10: Slika kugle presječene dvjema paralelnim ravninama s iste strane središta kugle.

Središte kugle označimo s A. Ortogonalna projekcija presjeka kugle i dviju ravnina na ravninu xy su pravci. Presjekom tih pravaca s y osi dobivamo točke C i D, a presjekom tih pravaca s kuglom dobivamo točke F i H. Dužine $\overline{CF}$ i $\overline{DH}$ su polumjeri osnovki kuglinih slojeva. Spojit ćemo središte kugle s točkama F i H te ćemo tako redom dobiti dužine $\overline{AF}$ i $\overline{AH}$. Pogledajmo sada sliku 1.11 i uočimo pravokutne trokute $\triangle AFC$ i $\triangle AHD$. Pitagorinim poučkom izračunat ćemo redom duljine njihovih nepoznatih kateta $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$. Visinu kuglina sloja dobit ćemo upravo oduzimanjem duljina tih dviju kateta, točnije, od



Slika 1.11: Nacrt kugle presječene dvjema paralelnim ravninama s iste strane središta kugle.

duljine katete $\overline{AD}$ oduzet ćemo duljinu katete $\overline{AC}$ i dobivena razlika bit će duljina visine kuglina sloja. Izračunajmo prvo duljinu katete $\overline{AC}$ trokuta $\triangle AFC$:

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 4^2 + |AC|^2 \\
25 &= 16 + |AC|^2 \\
|AC|^2 &= 9 \quad / \sqrt{} \\
|AC| &= 3\ cm.
\end{aligned}
$$

Iz gornjeg računa zaključujemo da duljina katete $\overline{AC}$ unutar trokuta $\triangle AFC$ iznosi 3 cm. Izračunajmo sad duljinu katete $\overline{AD}$ trokuta $\triangle AHD$:

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 3^2 + |AD|^2 \\
25 &= 9 + |AD|^2 \\
|AD|^2 &= 16 \quad / \sqrt{} \\
|AD| &= 4\ cm.
\end{aligned}
$$

Iz prethodnog računa slijedi da duljina katete $\overline{AD}$ unutar trokuta $\triangle AHD$ iznosi 4 cm. Sada ćemo od duljine katete $\overline{AD}$ oduzeti duljinu katete $\overline{AC}$:

$$|AD| - |AC| = 4 - 3 = 1\ cm.$$

Dobivena razlika je duljina visine h kuglina sloja. Sada imamo sve podatke potrebne za računanje volumena kuglina sloja, pa odmah uvrštavamo u formulu 1.17 i dobivamo:

$$
\begin{aligned}
V_{ks} &= \frac{\pi \cdot 1}{6}(3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 3^2 + 1^2) \\
V_{ks} &= \frac{\pi}{6} \cdot 76 \\
V_{ks} &= \frac{38}{3}\pi\ cm^3.
\end{aligned}
$$

Iz prethodnog računa slijedi da volumen kuglina sloja iznosi $\frac{38}{3}\pi\ cm^3$.

Rotacijska tijela.

Nakon što su obradili geometrijska tijela poput valjka i prizme, koja nastaju translatiranjem izvodnica preko točaka ravninskog lika koje nazivamo provodnicama tijela, i tijela poput piramide i stošca, koja nastaju tako da se svaka točka provodnice spaja s jednom točkom prostora, tj. vrhom, učenici sad upoznaju tijela koja ne možemo dobiti niti na jedan od ovih opisanih načina. Riječ je o rotacijskim tijelima. Kao što im i sam naziv kaže, to su geometrijska tijela koja nastaju rotacijom, odnosno vrtnjom nekog ravninskog lika. Tako primjerice možemo reći za valjak da je nastao rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Za stožac možemo reći da je nastao vrtnjom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Ovisno o vrsti trokuta s obzirom na veličine njegovih unutarnjih kutova, dobivamo tijelo koje je stožac ili unija dvaju stožaca ili pak jedan stožac iz kojeg je izvađen drugi stožac. Za kuglu također možemo reći da je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom polukruga oko njegova promjera.

Zadatak 4. Koliki su oplošje i obujam tijela koje nastane rotacijom kvadrata stranice duljine a oko dijagonale?

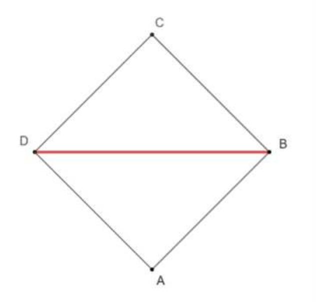
Rješenje: Promotrimo slike 1.12, 1.13 i 1.14. Na njima je prikazan kvadrat ABCD i istaknuta je proizvoljno odabrana dijagonala $\overline{BD}$ oko koje će se kvadrat rotirati. Tlocrt dobivenog rotacijskog tijela prikazan je na slici 1.13, a dobiveno rotacijsko tijelo u prostoru, prikazano je na slici 1.14. Primjećujemo da je dobiveno rotacijsko tijelo zapravo unija dvaju sukladnih uspravnih stožaca. Za izračun oplošja rotacijskog tijela, dovoljno je izračunati površinu plašta jednog stošca te je udvostručiti, a za izračun volumena rotacijskog tijela, bit će dovoljno izračunati volumen jednog stošca pa ga također udvostručiti. Zapišimo prvo poznate podatke za izračun površine plašta stošca. Označimo li duljinu dijagonale $\overline{BD}$ s d, znajući da kod kvadrata vrijedi jednakost $d = a\sqrt{2}$, polumjer baze stošca R tada je jednak $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a duljina stranice kvadrata a jednaka je duljini izvodnice stošca s, te vrijedi $s = a$. U formulu za površinu plašta stošca $P_{pl} = R\pi s$ uvrštavanjem dobivamo:

$$P_{pl} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\pi \ cm^2.$$

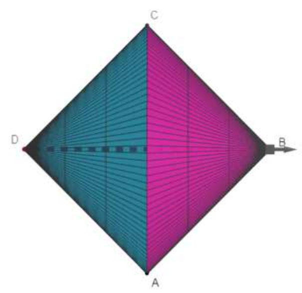
Udvostručimo li dobivenu površinu plašta, dobit ćemo oplošje rotacijskog tijela. Dakle, oplošje rotacijskog tijela iznosi $a^2\sqrt{2}\pi \ cm^2$. Primijetimo da je duljina visine stošca h u ovom slučaju pola dijagonale, odnosno $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Uvrštavanjem u formulu za volumen uspravnog stošca 1.9 imamo:

$$V = \frac{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\pi}{3} = \frac{\frac{2a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\pi}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12} \ cm^3.$$

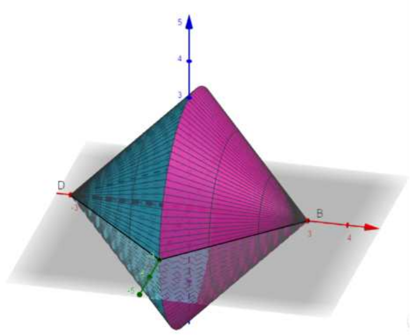
Udvostručimo li dobiveni volumen stošca, dobit ćemo volumen rotacijskog tijela, koji iznosi $\frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12} \ cm^3$.



Slika 1.12: Kvadrat ABCD.



Slika 1.13: Tlocrt rotacijskog tijela.



Slika 1.14: Rotacijsko tijelo u prostoru.

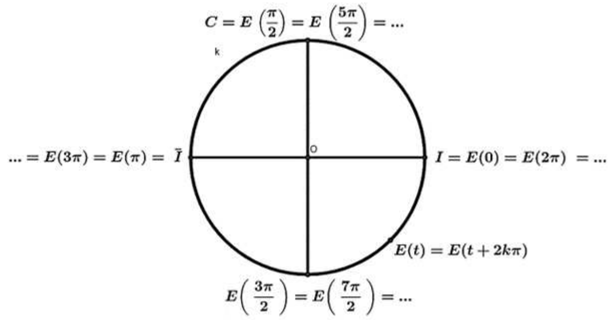
Treći razred

Učenici se ponovno susreću s brojem π u trećem razredu srednje škole unutar nastavne cjeline *Trigonometrijske funkcije realnog broja*. Učenici se prisjećaju mjerne jedinice za veličinu kuta, radijana. Slijedeći udžbenik [22], učenici se podsjećaju da je radijan veličina određena omjerom duljine luka kružnice (l) sa središtem u vrhu kuta i polumjera (r) te kružnice ($\alpha\ rad = \frac{l}{r}$). 1 rad (čitamo: jedan radijan) jest kut kojemu je duljina luka jednaka polumjeru kružnog isječka kojim je kut definiran. Ako kut ima α radijana, to znači da je duljina kružnog luka $\widehat{AB}$ na jediničnoj kružnici jednaka l. Prema tome, veličina ispruženog kuta iznosi π rad jer duljina polukružnice s polumjerom $r = 1$ iznosi $r\pi = \pi$. Mjera ispruženog kuta izražena u stupnjevima i radijanima bitna je za postavljanje razmjera koji povezuje mjeru kuta u stupnjevima i radijanima:

$$180^\circ : \pi = \alpha^\circ : \alpha_r.$$

Brojevna kružnica.

Kada je riječ o brojevnoj kružnici, nju definiramo kao kružnicu k sa središtem u $(0, 0)$, radijusa $r = 1$ i s eksponencijalnim preslikavanjem $E : \mathbb{R} \to k$. Eksponencijalno preslikavanje, koje pišemo kao $t \to E(t) = T$, realne brojeve $t \in \mathbb{R}$ pridružuje točkama jedinične kružnice $T \in \mathbb{R}^2$. Broju 0 na brojevnoj kružnici pridružena je točka I s koordinatama $(1, 0)$. Preslikavanje definiramo na sljedeći način. Duljina jedinične kružnice je 2π. Primijetimo da se broj 2π ponovno preslikava u točku I. Polukružnica ima duljinu π, stoga se broj π preslikava u točku $\bar{I}(-1, 0)$, koja je dijametralno nasuprot I. Tako je četvrtina kružnice duljine $\frac{\pi}{2}$, stoga se u točku $C(0, 1)$ preslikavaju brojevi $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$ Općenito vrijedi $I = E(2k\pi)$, $\bar{I} = E\left((2k + 1)\pi\right)$, $C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Radijanska mjera kuta α jest duljina luka kružnice k od početne točke I do točke $E(t)$ na kružnici, koja se dobije eksponencijalnim preslikavanjem. Također, možemo zaključiti da svake dvije točke, koje su na pravcu udaljene za 2π ili višekratnik broja 2π namatanjem padaju u istu točku kružnice. Možemo zapisati $E(t + 2k\pi) = E(t)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Na slici 1.15 prikazane su točke u kojima su često skupovi rješenja trignometrijskih jednadžbi i nejednadžbi.



Slika 1.15: Brojevna kružnica s čestim skupovima rješenja.

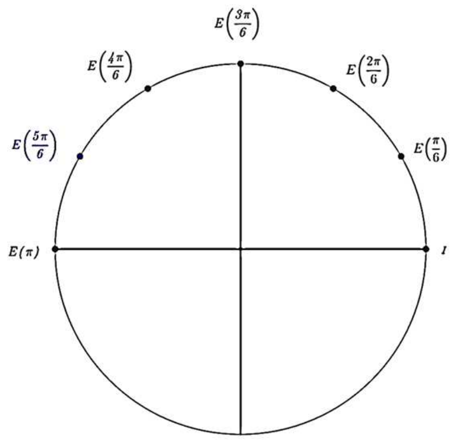
Na slici 1.16 je prikaz često upotrebljavanih kutova i njihovih trigonometrijskih funkcija:

	I kvadrant					II kvadrant			
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Slika 1.16: Česte vrijednosti trigonometrijskih funkcija u zadatcima.

Zadatak 5. Nacrtajmo $E(t)$ ako je $t = \frac{5\pi}{6}$.

Rješenje:



Slika 1.17: Brojevna kružnica kojoj je gornja polukružnica podijeljena na šest jednakih dijelova.

Gornju polukružnicu podijelimo na šest jednakih dijelova kao što je prikazano na slici 1.17. Redom označimo $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Na brojevnoj kružnici istaknimo broj $E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Zadatak 6. Za realni broj $t = \frac{15\pi}{4}$ pronađimo brojeve $t_1 \in [0, 2\pi\rangle$, $t_2 \in [4\pi, 6\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t) = E(t_1) = E(t_2)$.

Rješenje: Primijetimo da je $\frac{15\pi}{4} = \frac{12\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 3\pi + \frac{3\pi}{4}$. Vidimo da je $\frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi\rangle$, stoga je $t_1 = \frac{3\pi}{4}$.
No, kod računanja t_2, primijenit ćemo malo drugačiji način rješavanja. Interval $[4\pi, 6\pi\rangle$ možemo još zapisati kao $\left[\frac{16\pi}{4}, \frac{24\pi}{4}\right\rangle$. Sada računamo ovako:

$$\frac{15\pi}{4} = \left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) - 5\pi + 5\pi = (3\pi - 5\pi) + \left(5\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -2\pi + \frac{23\pi}{4}.$$

Dakle, $t_2 = \frac{23\pi}{4} \in [4\pi, 6\pi\rangle$.

Periodičnost.

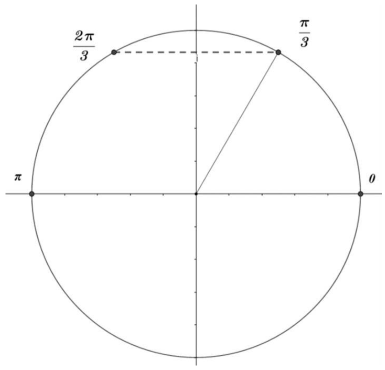
Već je spomenuto da su brojevi, koji su međusobno udaljeni za višekratnik broja 2π na brojevnom pravcu, na brojevnoj kružnici pridruženi istoj točki, tj. $E(t) = E(t + 2k\pi)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ i za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Tu jednakost možemo zapisati pomoću koordinata točke $E(t) = (\cos t, \sin t)$, $\sin t = \sin(t + 2k\pi)$, $\cos t = \cos(t + 2k\pi)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$ i za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Kažemo da su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom 2π, dok su tangens i kotangens periodične funkcije s temeljnim periodom π.

Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

Prema udžbeniku [22], jednadžbe i nejednadžbe u kojima se nepoznanica x javlja kao argument neke od trigonometrijskih funkcija, nazivaju se trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe. Rješenje trigonometrijske jednadžbe ili nejednadžbe je svaki realan broj koji zadovoljava tu jednadžbu ili nejednadžbu. Ne postoji neki općeniti način i metoda za rješavanje trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi, ali se u postupku rješavanja uvijek pojavljuju osnovne jednadžbe oblika $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Slijedi nekoliko primjera trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi.

Zadatak 7. Riješite jednadžbu $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje: Rješenje su oni brojevi $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi da im točka pridružena brojevnoj kružnici ima y-koordinatu jednaku $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Takvih točaka će biti dvije. Prikazane su na slici 1.18. Jedna od njih je $x_1 = \frac{\pi}{3}$, a druga je $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.
Zbog periodičnosti sinusa, također su i brojevi $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ i $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, takvi da je $k \in \mathbb{Z}$, rješenja jednadžbe. Konačna rješenja zapisujemo kao $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



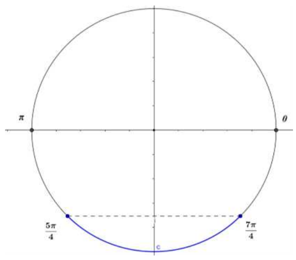
Slika 1.18: Skup svih rješenja jednadžbe.

Zadatak 8. Riješite nejednadžbu $2\sin x + \sqrt{2} \leq 0$.

Rješenje: Prvo ćemo nejednadžbu pojednostaviti i zapisati u elementarnom obliku:

$$\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Točke brojevne kružnice kojima je ordinata jednaka $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ pridružene su brojevima $\frac{5\pi}{4}$ i $\frac{7\pi}{4}$, a točke za koje je $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ su točke luka kružnice od $\frac{5\pi}{4}$ do $\frac{7\pi}{4}$. Skup svih rješenja nejednadžbe prikazan je na slici 1.19



Slika 1.19: Skup svih rješenja nejednadžbe.

Rješenje nejednažbe možemo zapisati na dva načina:
kao $x \in \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\, , \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ ili kao $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Četvrti razred

U četvrtom razredu gimnazija i nekih strukovnih škola, broj π pojavljuje se u cjelini *Kompleksni brojevi: Trigonometrijski oblik kompleksnog broja*, u cjelini *Integral i primitivna funkcija: Primjena integrala u računanju volumena* te u cjelini *Vjerojatnost.*

Kompleksni brojevi. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Uloga broja π u cjelini *Kompleksni brojevi*, u lekciji *Trigonometrija kompleksnog broja* je kao mjerna jedinica kuta φ u radijanima. Prema udžbeniku [6], kut φ nazivamo argumentom kompleksnog broja $z = x + iy$ gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, i označava se s $\varphi = \arg(z)$. Za $x \neq 0$ vrijedi sljedeće:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.19}$$

Ova jednadžba ima dva rješenja koja se nalaze unutar intervala $[0\ ,\ 2\pi\rangle$. Rješenje za koje se odlučujemo, određeno je predznacima brojeva x i y, odnosno na osnovu podataka u kojem se kvadrantu nalazi broj z. Slijedi prikaz kompleksnog broja z u trigonometrijskom obliku:

$$z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Modul r kompleksnog broja z računamo po formuli:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.20}$$

Sada ćemo kroz nekoliko zadataka prikazati u trigonometrijskome obliku neke kompleksne brojeve.

Zadatak 1. Odredi argument i modul i zapiši u trigonometrijskom obliku broj $-1 - i\sqrt{3}$.

Rješenje: Neka je $z = -1 - i\sqrt{3}$. Tada je $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$. Modul r kompleksnog broja z računamo po formuli 1.20:

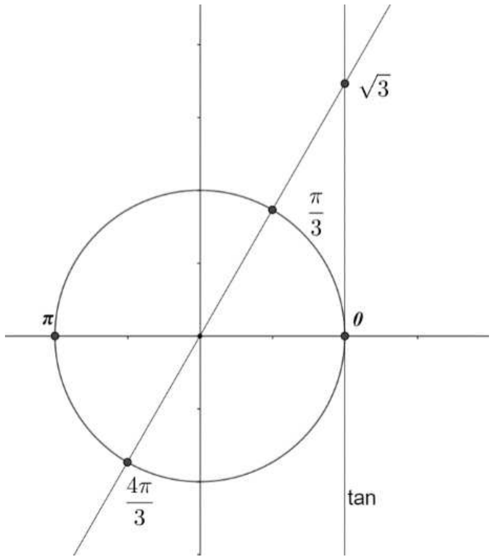
$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Argument φ kompleksnog broja z računamo po formuli 1.19:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}.$$

Dakle, argument φ za kojeg se odlučujemo je $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ jer je to kut koji pripada III. kvadrantu. Pogledajmo sliku 1.20. Sada imamo sve potrebne podatke za prikaz kompleksnog broja z u trigonometrijskom obliku:

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$



Slika 1.20: Argument φ.

Primjena integrala u računanju volumena.

Prilikom primjene integrala u računanju volumena tijela s poznatim poprečnim presjecima, javlja se broj π. Učenici su se već susreli s ovim formulama, međutim sada su te formule drugačije zapisane – pomoću integrala. Prema [7], rotacijom krivocrtnog trapeza dobivamo rotacijsko tijelo. Njegov poprečni presjek s ravninom okomitom na x-os je krug polumjera $f(x)$. Zato je površina poprečnog presjeka:

$$P(x) = f(x)^2 \pi,$$

a volumen tijela:

$$V = \int_a^b P(x)\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\ . \tag{1.21}$$

Lik može biti omeđen i dvjema krivuljama. Tako, na primjer, u situaciji kad rotacijsko tijelo ima koncentričnu kružnicu kao poprečni presjek, volumen takvog rotacijskog tijela dobivamo oduzimajući volumene tijela ispod pojedinačnih krivulja.

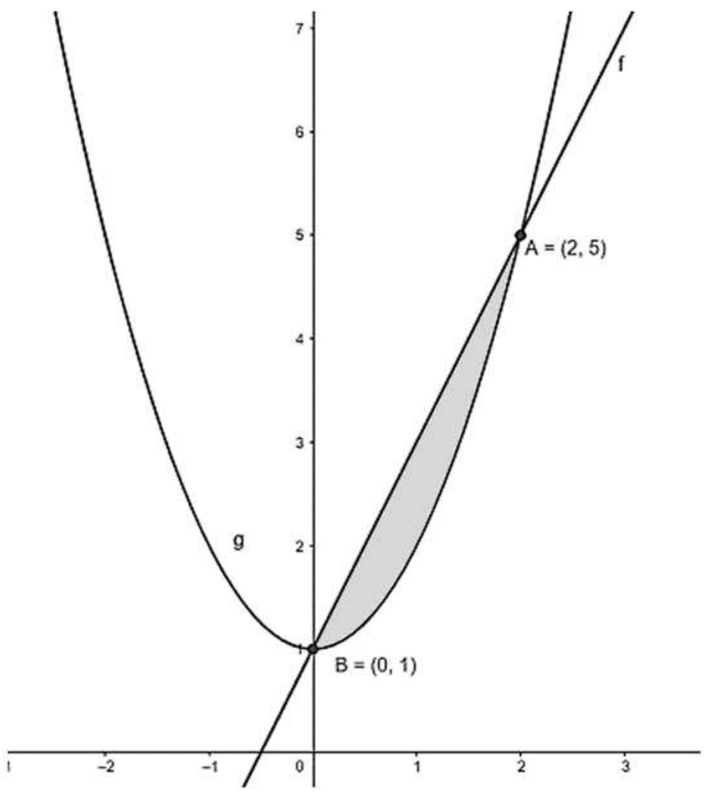
Zadatak 2. Odredi volumen tijela nastalog vrtnjom oko x-osi lika omeđenog krivuljama $y = 2x + 1$ i $y = x^2 + 1$.

Rješenje: Rješavanjem sustava dviju jednadžbi različitog stupnja pronađimo prvo točke presjeka ovih dviju krivulja, tj. pravca i parabole. Izjednačavanjem tih dviju jednadžbi, dobivamo:

$$2x + 1 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Izračunajmo sada y-koordinate točaka presjeka:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 1 \Rightarrow y_1 = 1, \\ y_2 &= 2x_2 + 1 \Rightarrow y_2 = 5. \end{aligned}$$



Slika 1.21: Lik omeđen krivuljama.

Dakle, točke presjeka dviju krivulja su $(0, 1)$ i $(2,\ 5)$. Na intervalu $[0\ ,\ 2]$ lik je omeđen gornjom funkcijom $f(x) = 2x + 1$ i donjom funkcijom $g(x) = x^2 + 1$.
Volumen rotacijskog tijela, prema formuli 1.21 je:

$$
\begin{aligned}
V = \pi \int_0^2 \pi \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx \ &= \pi \int_0^2 \pi \left[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx \\
= \pi \int_0^2 \left[4x^2 + 4x + 1 - (x^4 + 2x^2 + 1) \right] dx &= \pi \int_0^2 \left[-x^4 + 2x^2 + 4x \right] dx \\
&= -\pi \int_0^2 x^4 dx + 2\pi \int_0^2 x^2 dx + 4\pi \int_0^2 x dx \\
&= -\frac{\pi x^5}{5}\bigg|_2^0 + \frac{2\pi x^3}{3}\bigg|_2^0 + \frac{4\pi x^2}{2}\bigg|_2^0 = \frac{104\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Volumen tijela koje nastaje rotacijom zadanog pravca i parabole je $\frac{104\pi}{15}$ kvadratnih jedinica.

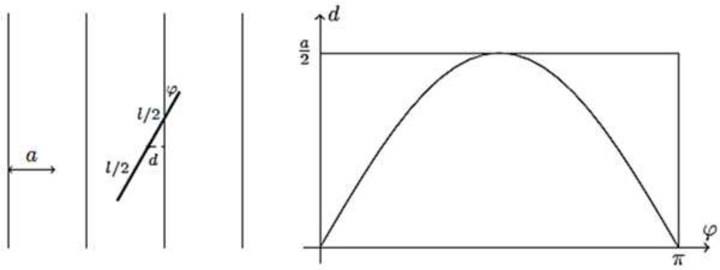
Vjerojatnost.

U sklopu teorije vjerojatnosti, učenici četvrtih razreda pomoću problema *Buffonove igle* mogu otkriti približnu vrijednost broja π. Riječ je o negeometrijskom postupku u kojem se eksperimentalno određuje broj π. Za aktivnost je potreban papir formata $A3$ i jedna kutija šibica. Na listu papira se nacrta mreža paralelnih pravaca koji su razmaknuti točno za duljinu jedne šibice. Nakon toga, s udaljenosti od otprilike pola metra, na taj list bacaju se šibice iz kutije. Potom se prebroje šibice koje sijeku neke od pravaca (također se jedna šibica može višestruko bacati, umjesto da se iznova baca druga šibica). Zbog veće i bolje točnosti i preciznosti, postupak bi bilo dobro ponoviti što više puta. Nakon određenog broja bacanja možemo izračunati približnu vrijednost broja π i to po sljedećoj formuli:

$$
\frac{dvostruki\ broj\ ukupno\ bačenih\ šibica}{broj\ šibica\ koje\ su\ presjekle\ pravce} \approx \pi.
$$

Vrlo vjerojatno se na jednom nastavnom satu ne može odraditi dovoljan broj pokusa kojim bi dobro aproksimirali broj π. Ustanovljeno je da treba otprilike 900 000 šibica (ili toliko bacanja jedne šibice) da bi se s vjerojatnošću od 95% postigla točnost 1%. Za točnost na dvije decimale, potrebno je oko 28 000 bacanja. Prvi je takav eksperiment, ali s iglom, 1777. izveo francuski matematičar Georges – Louis Leclerc de Buffon (1707.–1788.). Po njemu je takav način približnog računanja broja π nazvan Buffonovom iglom.

Buffonov problem. Ako u ravnini imamo mrežu paralelnih jednako razmaknutih pravaca, razmaka a, te ako na ravninu bacimo iglu duljine $l \leq a$, kolika je vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca?
Objašnjenje: Neka je d udaljenost središta igle do bližeg pravca, a φ kut koji igla zatvara s pravcem, takav da je $0 \leq \varphi \leq 90°$. Gledajući problem na slici 1.22 (lijevo) primijetimo



Slika 1.22: Buffonov problem.

da će igla sjeći jedan pravac ako je točno $\frac{l}{2}\sin\varphi < d$. To jest, ukoliko su φ uniformno distribuirani unutar $[0, \pi]$, a d unutar $\left[0, \frac{a}{2}\right]$, tražena je vjerojatnost omjera površine ispod krivulje $d = \frac{l}{2}\sin\varphi$ između 0 i π te pravokutnika $[0,\ \pi] \times \frac{[0,a]}{2}$, što je vidljivo na slici 1.22 (desno), tj.

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi\, d\varphi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{2l}{2}}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}\ .$$

Poglavlje 2

Broj e

2.1 Povijest broja e

Prema [3], John Napier, škotski plemić koji se matematikom bavio iz hobija, prvi je otkrio logaritme i konstruirao prvu logaritamsku tablicu u povijesti te je prvi naišao na vrijednost broja e, ne dajući mu poseban značaj ni oznaku. Zbog toga se broj e često naziva bazom prirodnog logaritma ili Napierovog logaritma. U raznim literaturama može se pronaći naziv Napierov broj. Približna vrijednost broja e jest $e \approx 2.71828182\ldots$ Nakon Napiera, sljedeći matematičar koji je naišao na konstanstu e tijekom 17. stoljeća proučavajući kamatni račun i limese, jest švicarski matematičar Jacob Bernoulli. Prema [19] tek je Leonhard Euler, kroz dopisivanje s njemačkim matematičarom Christianom Goldbachom, uveo posebnu oznaku za tu konstantu i aproksimirao je s točnošću na 73 decimale. Zbog toga, konstanta e naziva se još i Eulerovim brojem. Euler je 1937. godine dokazao da je broj e iracionalan. William Shanks je stoljeće nakon Eulera aproksimirao broj e s točnošću na 137 decimala, a Nemirnoff i Bonnel su izračunali prvih milijun decimala. Godine 1873., francuski matematičar Charles Hermite (1822.–1901.) dokazao je da je broj e transcendentan.

2.2 Broj e u srednjoj školi

Treći razred

Broj e u srednjoj se školi spominje tek u trećem razredu unutar cjeline ,*Eksponencijalna i logaritamska funkcija*. Prema [8], najpoznatije eksponencijalne funkcije su realne funkcije realne varijable zadane s $f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = 2^x$ te $f_3(x) = e^x$. Funkcija f_3 ima široku primjenu u svakodnevnom životu u našem okruženju. Primjene su moguće u fizici, kemiji, biologiji, ekonomiji, tehnici itd. Zbog velike važnosti pojavljuje se i na svim znanstvenim džepnim računalima. Na džepnim računalima možemo dobiti približnu vrijednost broja e zaokruženu na devet decimala tako da u isto vrijeme pritisnemo tipke $\boxed{SHIFT}$ + $\boxed{ln}$, zatim kao eksponent uvrstimo broj 1, ili pak kombinacijom tipki $\boxed{ALPHA}$ + $\boxed{\times 10^x}$. Tada će džepno računalo pokazati rezultat $e \approx 2.718281828$.

Eksponencijalna funkcija i njen graf.

Prema [22], funkciju $f(x) = a^x$, gdje je baza realan broj a, takav da je $a > 0$ i $a \neq 1$, definiranu za svaki realni broj x, nazivamo (općom) eksponencijalnom funkcijom. Slijedi nekoliko tipičnih zadataka u kojima se pojavljuje broj e.

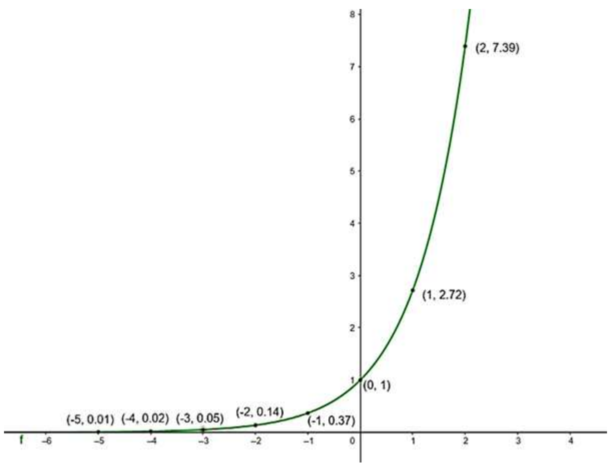
Zadatak 1. Pomoću džepnog računala izračunajte približne vrijednosti funkcije u točkama –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2 te skicirajte graf funkcije $f(x) = e^x$.

Rješenje: U tablicu podataka upisat ćemo argumente funkcije i izračunati vrijednosti funkcije.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	0.01	0.02	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39

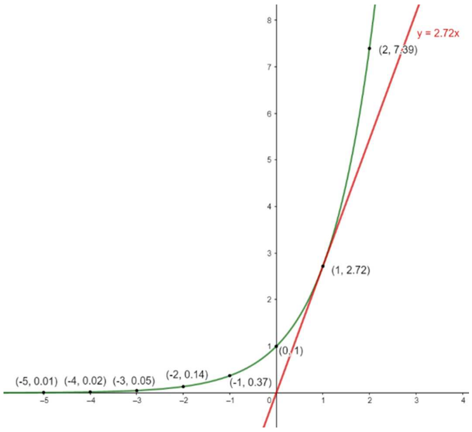
Tablica 2.1: Tablica podataka za skiciranje grafa funkcije f.

Graf funkcije $f(x) = e^x$ prikazan je na slici 2.1:



Slika 2.1: Graf funkcije $f(x) = e^x$.

Funkcija $f(x) = e^x$ jedina je funkcija sa svojstvom da je koeficijent smjera tangente na njen graf u točki x_0 upravo jednak vrijednosti funkcije u točki x_0 za svaki realni broj x_0. Upravo ta situacija prikazana je na slici 2.2.



Slika 2.2: Koeficijent smjera tangente u $x_0 = 1$ jednak je $e^{x_0} = e$.

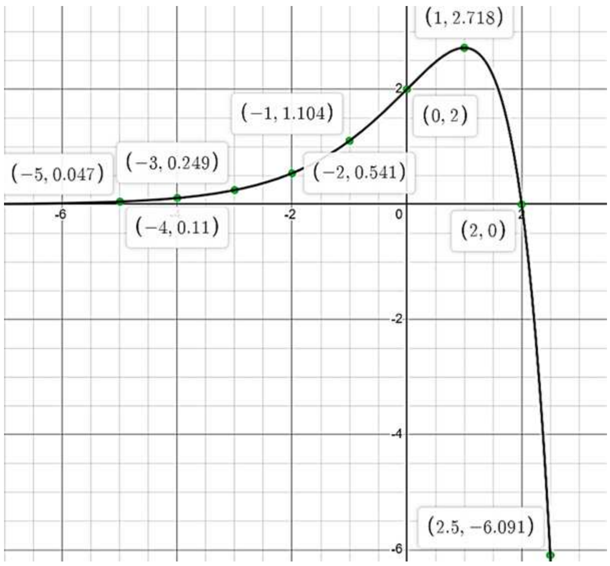
Zadatak 2. Pomoću džepnog računala izračunajte približne vrijednosti funkcije u točkama 0.01, 0.02, 0.05, 0.14, 0.37, 1, 2.72, 7.39 te skicirajte graf funkcije $f(x) = (2 - x) \cdot e^x$.

Rješenje: U tablicu podataka upisat ćemo argumente funkcije i izračunati vrijednosti funkcije.

x	0.01	0.02	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39
f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2

Tablica 2.2: Tablica podataka za skiciranje grafa funkcije f.

Graf funkcije f s točkama iz tablice prikazana je na slici 2.3.



Slika 2.3: Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = (2 - x)\, e^x$.

Logaritamska funkcija i njen graf.

Prema [22], logaritam pozitivnog broja y po bazi a, pri čemu je $a > 0$ i $a \neq 1$, eksponent je kojim treba potencirati zadanu bazu a da bi se dobila potencija y. Dakle, vrijedi:

$$a^x = y \quad \Rightarrow \quad \log_a y = x.$$

Domena logaritamske funkcije skup je pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. Skup njezinih vrijednosti jest cijeli skup $\mathbb{R}$. Logaritamsku funkciju s bazom 10 zapisujemo kao $f(x) = \log x$, a logaritamsku funkciju s bazom e zapisujemo $g(x) = \ln x$. Tri su najčešća izbora za bazu logaritama; baza 2 za binarni logaritam, baza 10 za dekadski logaritam i baza e za prirodni logaritam. U visokoškolskoj matematici češće se koristi baza logaritma e. Logaritam kojemu je baza Eulerov broj e naziva se prirodni logaritam ili Napierov logaritam i označavamo ga s $\ln x$. Primjenjujući recipročnost logaritama

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

i vezu s dekadskim logaritmom

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a},$$

prirodni logaritam možemo zapisati pomoću logaritma s bazom 10

$$\ln x := \log_e x = \frac{\log_x x}{\log_e x} \approx \frac{\log_x x}{0.43429} \approx 2.3026 \cdot \log_x x.$$

Funkcija prirodnog logaritma $g(x) = \ln x$ može se definirati kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$. Naime, domena funkcije prirodnog logaritma zaista je kodomena eksponencijalne funkcije. Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ i funkcija prirodnog logaritma $g(x) = \ln x$ povezane su na sljedeći način:

- e^x – količina, tj. iznos koji raste za x vremenskih jedinica
- $\ln x$ – vrijeme koje je potrebno da količina, tj. iznos dosegne x jedinica.

Svugdje u prirodi gdje imamo kontinuirani rast (pad), imamo i Eulerov broj u primjeni. Jedan od modela za izračun kontinuiranog rasta ili pada populacije N u vremenu t je Malthusov[1] model, gdje je t duljina vremenskog intervala, k je stopa rasta za $k > 0$, a za $k < 0$ riječ je o stopi pada:

$$N(t) = N_0\, e^{kt}, \qquad N_0 = N(0)\,. \tag{2.1}$$

[1]Thomas Malthus (1766.–1834.) – engleski demograf, 1798. godine je modelirao rast populacije bez migracija.

Slijedi nekoliko primjera zadataka iz samo nekih primjena eksponencijalne i logaritamske funkcije s bazom e koja može biti u biologiji, ekonomiji, geografiji, fizici itd., a da se obrađuje u drugom razredu srednje škole. Najčešći zadatci su u kontekstu raspada radioaktivnog otpada, neprekidnog (kontinuiranog) ukamaćivanja (o tome se nešto više radi u četvrtom razredu), rast populacije (prirast stanovništva), rast šume, tov stoke itd.

Zadatak 1. Imamo 300 kg čarobnog kristala. Čaroban je jer kontinuirano raste tijekom cijelog dana. Ako je njegova stopa rasta 1, koliko kilograma čarobnog kristala ćemo imati nakon 10 dana?

Rješenje: S obzirom na to da kristali rastu kontinuirano, primijenit ćemo formulu 2.1 iz Malthusovog modela. Dakle, za $t = 1$ duljinu vremenskog intervala u danima i za $k = 1$ stopu rasta vrijedi:

$$N(10) = 300 \cdot e^{1 \cdot 10} \approx 6\,607\,939.$$

Dakle, nakon 10 dana imat ćemo približno 6 607 939 kilograma čarobnog kristala.

Zadatak 2. Nakon osam godina, količina mase drveća se povećala za 294%. Koliko u postotku iznosi prosječno godišnje povećanje količine mase drveća?

Rješenje: Označimo s C_0 početnu količinu, a s C_n količinu drveća nakon n godina te s k označimo stopu rasta. Tada imamo sljedeće poznate podatke:
$n = 8$ godina,
$C_8 = C_0 + 2.94C_0 = 3.94C_0$,
$k =?$
Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u formulu 2.1 dobivamo:

$$\begin{aligned} 3.94C_0 &= C_0 \cdot e^{\frac{8 \cdot k}{100}} \;/ : C_0 \\ 3.94 &= e^{0.08k} \;/\; \ln \\ \ln 3.94 &= 0.08k \;/ : 0.08 \\ k &= 17.14. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je prosječno godišnje povećanje količine mase drveća iznosi 17.14%.

Zadatak 3. Prije 4 godine, na malom su se otoku nastanili zečevi. Uz godišnju stopu rasta 0.52, u ovom trenutku na otoku živi 2500 zečeva. Koliko ih je bilo prije 4 godine? Koliko će zečeva biti za 18 godina?

Rješenje: Poznati su nam sljedeći podatci:
$N_0 = 2500$
$k = 0.52$

$t = -4$
$N(-4) = ?$

Iako broj zečeva ne raste kontinuirano već diskretno (tj., drugim riječima, broj zečeva je uvijek cjelobrojan), Malthusov model kontinuiranog rasta ga dobro aproksimira te se često koristi u ovakvim situacijama. Uvrštavanjem u formulu 2.1 dobivamo:

$$N(-4) = 2500 \cdot e^{0.52\cdot(-4)}$$
$$N(-4) = 312.33.$$

Zaključujemo da je prije 4 godine na otoku živjelo 312 zečeva. Zanima nas još, koliko će zečeva biti za 18 godina. U tom slučaju je $t = 18$, pa imamo:

$$N(8) = 2500{\cdot}e^{0.52\cdot 18} \approx 29035971.$$

Zaključujemo da će za 18 godina na otoku živjeti 29035971 zečeva.

Četvrti razred

U četvrtom razredu broje e pojavljuje se prilikom obrade sljedećih cjelina: *Brojevi: Binomni poučak, Nizovi: Limes monotonih nizova, Limes funkcija, Derivacija funkcija: Derivacija logaritamskih funkcija, Derivacija funkcija: Derivacija eksponencijalnih funkcija, Derivacija funkcija: Derivacija opće potencije, Derivacija funkcije: Tijek funkcije, Derivacija funkcije: Primjena diferencijalnog računa (Hiperbolne funkcije), Integral i primitivna funkcija: Neodređeni integral, Integral i primitivna funkcija: Metoda parcijalne integracije.*

Brojevi. Binomni koeficijent. Binomni poučak.

Na samom početku četvrtog razreda, prilikom obrade cjeline *Brojevi*, lekcije *Binomni poučak*, učenici se susreću s pojmom faktorijela koji se definira kao umnožak prvih n prirodnih brojeva i označava se posebnim simbolom:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj $n!$ čita se „en faktorijela“. Također se definira i vrijednost $0! := 1$. Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0 takav da vrijedi $k \leq n$. Binomni koeficijent označava se s $\binom{n}{k}$ i za $k \geq 1$ definira se na sljedeći način:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

dok se za $k = 0$ definira:

$$\binom{n}{0} := 1.$$

Na samom kraju lekcije, u udžbeniku [6], nalazi se sljedeći zanimljiv zadatak koji povezuje sve tri konstante o kojima pišemo u radu.

Zadatak 1. Približnu vrijednost funkcije $n!$ možemo izračunati na računalu pomoću **Stirlingove**[2] formule. Vrijedi sljedeće:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Još preciznije može se odrediti na sljedeći način:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Primjerice, za $n = 100$ ovim postupkom dobivamo ocjenu:

$$9.332615093 \cdot 10^{157} < 100! < 9.332621569 \cdot 10^{157},$$

dok je točna vrijednost (računajući s deset točnih znamenaka) $9.332624544 \cdot 10^{157}$. Izračunajte koristeći Stirlingovu formulu binomni koeficijent $\binom{100}{50}$.

Rješenje: Iskažimo binomni koeficijent pomoću faktorijela:

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{(100-50)!50!} = \frac{100!}{50!50!}.$$

Koristeći znanstveno džepno računalo, posebno ćemo izračunati 100!, a posebno 50! pomoću

[2] James Stirling (1692.–1770.) – škotski matematičar, najpoznatije djelo je Methodus Differentialis

Stirlingove „nepreciznije“ formule:

$$
\begin{aligned}
100! &\approx \sqrt{2\pi\cdot 100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\\
&= \sqrt{200\pi}\left[\left(\frac{100}{e}\right)^{2}\right]^{50}\\
&\approx 25.06628275\cdot(1353.352832)^{50}\\
&\approx 25.06628275\cdot\left(13.533528232\cdot 10^{2}\right)^{50}\\
&\approx 25.06628275\cdot 3.720074716\cdot 10^{56}\cdot 10^{100}\\
&\approx 93.24844468\cdot 10^{156}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
50! &\approx \sqrt{2\pi\cdot 50}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\\
&= \sqrt{100\pi}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\\
&\approx 17.72453851\cdot 1.713073992\cdot 10^{63}\\
&\approx 30.36344594\cdot 10^{63}.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u formulu binomnog koeficijenta dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\binom{100}{50} &= \frac{100!}{(100-50)!50!} = \frac{100!}{50!50!}\\
&\approx \frac{93.24844468\cdot 10^{156}}{30.36344594\cdot 10^{63}\cdot 30.36344594\cdot 10^{63}}\\
&\approx 0.10114385\cdot 10^{30}\\
&\approx 1.0114385\cdot 10^{29}.
\end{aligned}
$$

Nizovi. Limes monotonih nizova.

Uvodni primjer za bolje shvaćanje razumijevanje Eulerovog broja e, tj. baze prirodnog logaritma, prirodnog logaritma i njegove primjene mogao bi biti sljedeći, prema [4].

Primjer: Zamislimo da smo uložili 1 *kn* u neki projekt čija se vrijednost na kraju svake godine udvostručuje, tj. povećava se za 100%. Dakle, nakon godinu dana imamo tu svoju 1 *kn* i imamo još dobit, tj. zaradu u iznosu 1 *kn*, odnosno, nakon godinu dana, vrijednost projekta iznosi 2 *kn*. Jer se na kraju svake godine vrijednost projekta uvećava za 100%

iznosa, na kraju druge godine poslovanja, imat ćemo 4 *kn*. Na kraju treće godine poslovanja vrijednost projekta nakon uvećanja za 100% bit će 8 *kn*. Analogno bi se vrijednost projekta povećavala, ovisno o duljini vremena poslovanja. Sada zamislimo da se vrijednost našeg projekta uvećavala za 50% svakih pola godine. Tada bismo od prvotno uložene 1 *kn*, nakon pola godine imali uvećanje za 50%, dakle vrijednost projekta nakon prvih pola godine iznosila bi 1.5 *kn*. Nakon opet pola godine (ukupno promatrajući, nakon jedne godine), imali bismo ponovno povećanje vrijednosti projekta za 50% te bi vrijednost projekta bila 2.25 *kn*. Dakle, dvostrukim polugodišnjim uvećanjem trenutne vrijednosti projekta za 50%, vrijednost projekta nakon ukupno jedne godine jest 2.25 *kn*. Pitamo se kolika bi vrijednost projekta, umjesto uvećanja od 100% jednom godišnje ili 50% jednom polugodišnje, bila da se uvećavala za 25% trenutne vrijednosti svaka tri mjeseca (kvartalno). Tada bi na uloženu 1 *kn* i uvećanja od 25% trenutne vrijednosti nakon tri mjeseca, vrijednost projekta iznosila 1.25 *kn*. Nakon sljedeća tri mjeseca (ukupno nakon šest mjeseci) vrijednost projekta bila bi opet uvećana za 25% trenutne vrijednosti te bi projekt tada vrijedio $1.25 + 0.25 \cdot 1.25 = 1.25 + 0.3125 = 1.5625$ *kn*. Nakon sljedeća tri mjeseca (ukupno nakon devet mjeseci) vrijednost projekta bila bi opet uvećana za 25% trenutne vrijednosti te bi projekt tada vrijedio $1.5625 + 0.390625 = 1.953125$ *kn*. Nakon sljedeća tri mjeseca (ukupno nakon jedne godine) vrijednost projekta bila bi opet uvećana za 25% trenutne vrijednosti te bi projekt tada vrijedio $1.953125 \cdot 1.25 = 2.44140625$ *kn*. Slika 2.4 prikazuje primjer u obliku tablice.

<table>
<tr><th>Mjeseci</th><th>Vrijednost projekta nakon godišnjeg uvećanja za 100 % u kunama</th><th>Vrijednost projekta nakon polugodišnjih uvećanja za 50 % u kunama</th><th>Vrijednost projekta nakon kvartalnih uvećanja za 25 % u kunama</th></tr>
<tr><td>Siječanj</td><td rowspan="12">1 + 1 = 2</td><td rowspan="6">1 + 0.5 = 1.5</td><td rowspan="3">1 + 0.25 = 1.25</td></tr>
<tr><td>Veljača</td></tr>
<tr><td>Ožujak</td></tr>
<tr><td>Travanj</td><td rowspan="3">1.5625</td></tr>
<tr><td>Svibanj</td></tr>
<tr><td>Lipanj</td></tr>
<tr><td>Srpanj</td><td rowspan="6">2.25</td><td rowspan="3">1.953125</td></tr>
<tr><td>Kolovoz</td></tr>
<tr><td>Rujan</td></tr>
<tr><td>Listopad</td><td rowspan="3">2.44140625</td></tr>
<tr><td>Studeni</td></tr>
<tr><td>Prosinac</td></tr>
</table>

Slika 2.4: Godišnje, polugodišnje i kvartalno ukamaćivanje.

Općenito, možemo brže i jednostavnije izračunati zaradu u godinu dana, kako raste broj ukamaćivanja u godini dana. Neka je n pozitivni realni broj koji u tablici 2.3 predstavlja broj ukamaćivanja, a $\frac{1}{n}$ predstavlja uvećanje uložene kune nakon n-tog dijela jedne godine. Tada vrijedi:

n	$\boldsymbol{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$
1	2
2	2.25
3	2.370
4	2.441
10	2.594
1000	2.717
1000000	2.718

Tablica 2.3: Tablica vrijednosti za n ukamaćivanja godišnje.

Zaključujemo da, kako nama raste broj ukamaćivanja u godini dana, vrijednost našeg projekta ne raste beskonačno, već se približava nekoj graničnoj vrijednosti, nekom iracionalnom broju, odnosno upravo broju e, tj. Euleorovom broju, čija je približna vrijednost zaokružena na tri decimale, upravo $e \approx 2.718$. Primjenom Bernoullijeve nejednakosti $(1 + h)^{\alpha} \geq 1 + \alpha h$, pri čemu je $h > 0$ i $\alpha > 1$, dokazuje se monotonost i ograničenost niza (x_n) iz čega slijedi da je niz konvergentan. Limes niza (x_n) s općim članom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jednak je e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Međutim, n ne mora biti prirodni broj. O tome će više biti riječi u poglavlju *Limes funkcija*. Također se prethodna formula generalizira tako da za svaki realan broj a vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}. \tag{2.2}$$

Sada uvedemo supstituciju $m = \frac{n}{a}$ i dobivamo:

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^a = e^a. \tag{2.3}$$

Slijedi nekoliko tipičnih zadataka sličnih kao iz udžbenika [7].

Zadatak 1. Izračunajmo limes niza $x_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

Rješenje: Primjenom jednakosti 2.2 i formule 2.3 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$$

Zadatak 2. Izračunajmo limes niza $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Rješenje: Primjenom jednakosti 2.2 i formule 2.3 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Jedna od vrlo važnih primjena geometrijskog niza i eksponencijalne funkcije jest kamatni račun kod neprekinutog ukamaćivanja. Slijedi jedan primjer zadatka sličnog zadatku iz udžbenika [17].

Zadatak 3. Marko je uložio 15 000 € na 8 godina uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 3.5%. Izračunajte konačni iznos i postotak povećanja uloženog iznosa ako je obračun kamata neprekidna.

Rješenje: Koristit ćemo formulu za neprekidno (kontinuirano) ukamaćivanje. Prema udžbeniku [17], konačna vrijednost C_n nakon n razdoblja, uz nominalni kamatnjak p, iznosi:

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n\cdot p}{100}}, \tag{2.4}$$

gdje je složeni dekurzivni obračun kamata takav da se kamate u svakom sljedećem razdoblju računaju na prethodnu vrijednost uvećanu za kamate, tj. računaju se i „kamate na kamate“, a nominalno ukamaćivanje, tj. nominalni kamatnjak jest zakonom propisani osnovni vremenski interval za ukamaćivanje.
$C_0 = 15000$ €
$n = 8$ godina
$p = 3.5\%$
$C_8 = ?$
Uvrštavanjem u formulu 2.4 dobijemo:

$$C_8 = 15000 \cdot e^{\frac{8\cdot 3.5}{100}}$$
$$C_8 = 19846.947 \text{ €}.$$

Dakle, Markov konačni iznos nakon 8 godina je 19846.947 €. Izračunajmo sada postotak povećanja uloženog iznosa po sljedećoj formuli:

$$p \cdot C_0 = C_8$$
$$p = \frac{C_8}{C_0} = \frac{19846.947}{15000} = 1.3231\ .$$

Očito je riječ o povećanju uloženog iznosa od 32.31%.

Limes funkcija.

U ovom poglavlju se dokazuje da vrijedi općenitiji rezultat limesa niza s općim članom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ koji se označava s e. Općenito vrijedi sljedeće:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

gdje x može poprimiti bilo koje realne vrijednosti, a ne samo prirodne kao u prethodnom nizu.

Derivacija funkcija. Derivacija logaritamskih funkcija.

Sve logaritamske funkcije mogu se prikazati pomoću logaritamske funkcije jedne određene baze. Iz tog razloga, kao temeljnu logaritamsku funkciju biramo funkciju $f(x) = \ln x$, čija je baza broj e. Iz prethodnih poglavlja, znamo da je broj e već definiran kao limes niza $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Primjenjujući supstituciju $u_n = \frac{1}{n}$, a što je već dokazano u prethodno obrađenim poglavljima četvrtog razreda, primjećujemo da u_n teži nuli kad n teži u beskonačnost: $e = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$. Sada ćemo derivirati funkciju $y = f(x) = \ln x$ po definiciji derivacije funkcije. Računamo prvo kvocijent diferencija:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\ln(x + \triangle x) - \ln x}{\triangle x}.$$

Primjenom pravila logaritmiranja (razlika logaritama jednakih baza jednaka je logaritmu kvocijenta njihovih logaritmanada) sređujemo brojnik, a preostali razlomak $\frac{1}{\triangle x}$ proširujemo s x te dobivamo sljedeće:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\triangle x}\cdot\ln\left(\frac{x+\triangle x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}} = \frac{1}{x}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}.$$

Kad $\triangle x$ teži nuli, onda u teži nuli, pa slijedi:

$$(\ln x)' = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}. \tag{2.5}$$

Općenito se derivacija logaritma po bilo kojoj drugoj bazi računa iz veze logaritamskih funkcija:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

stoga je:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

Zadatak 4. Izračunaj derivaciju funkcije $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Rješenje: Primjenom formule 2.5 dobivamo:

$$(f(x))' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Derivacija funkcija. Derivacija eksponencijalnih funkcija.

Prema [7], eksponencijalna funkcija inverzna je logaritamskoj:

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Prema tome, derivacija eksponencijalne funkcije oblika a^x računa se na sljedeći način:

$$a^x = e^{x\ln a} \Rightarrow (a^x)' = e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' = a^x \cdot \ln a.$$

Derivacija funkcija. Derivacija opće potencije.

Sada se može provjeriti valjanost sljedeće formule za svaki realni broj r različit od nule:

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Iz jednakosti $x^r = e^{r\ln x}$ i pravila za derivaciju eksponencijalne i složene funkcije, slijedi:

$$(x^r)' = e^{r\ln x} \cdot (r\ln x)' = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Zadatak 5. Izračunaj derivaciju funkcije $f(x) = 2x \cdot e^{2x+2}$.

Rješenje: Primjenom pravila derivacije umnoška funkcija, derivacije eksponencijalne funkcije i složene funkcije, dobivamo sljedeće:

$$(f(x))' = (2x)' \cdot e^{2x+2} + 2x \cdot \left(e^{2x+2}\right)' = 2e^{2x+2} + 2x \cdot e^{2x+2} \cdot 2 = 2e^{2x+2} \cdot (1+2x).$$

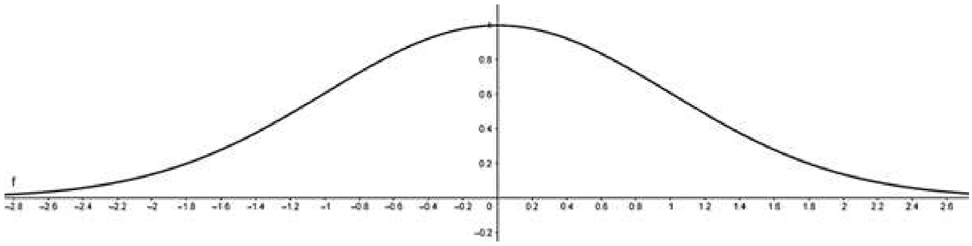
Derivacija funkcija. Tijek funkcija.

U ovom dijelu gradiva, skreće se pozornost na broj e jer se, prema [7], upravo pomoću eksponencijalne funkcije s bazom e opisuje poznata Gaussova (zvonolika) krivulja[3]. U sljedećem primjeru će se to i pokazati.

[3]Gaussova (zvonolika) krivulja – krivulja simetričnog oblika, nema nultočaka. Naziv je dobila po njemačkom matematičaru Carlu Friedrichu Gaussu (1777.–1855.). Zbog primjene u teoriji vjerojatnosti naziva se još i krivuljom vjerojatnosti. Ona prikazuje funkciju raspodjele neovisnih slučajnih varijabli i često je upotrebljavana u statističkim izvješćima.

Primjer 5. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rješenje:



Slika 2.5: Gaussova krivulja.

1. Funkcija je definirana na čitavom skupu realnih brojeva. Parna je. Vrijedi $f(x) \to 0$ kad $x \to \infty$. Nema nul–točaka jer je za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija pozitivna, to jest vrijednosti funkcije su veće od nule.

2. Prva derivacija iznosi $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Stacionarna točka je $x_0 = 0$. Za $x < 0$ derivacija je pozitivna pa funkcija raste, a za $x > 0$ funkcija je negativno pa funkcija pada. Zato je x_0 maksimum, $M = f(0) = 1$.

3. Druga derivacija je $f''(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Jednaka je nuli u točkama $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Funkcija je konveksna na intervalima $\langle -\infty\ , -1\rangle$ i $\langle 1\ , +\infty\rangle$, a konkavna je na intervalu $\langle -1\ , -1\rangle$.

Na temelju ovih podataka možemo nacrtati njezin graf. Ovu krivulju nazivamo Gaussovom krivuljom i prikazana je na slici 2.5.

Derivacija funkcija. Primjena diferencijalnog računa. Hiperbolne funkcije.

Eksponencijalna funkcija nije ni parna ni neparna funkcija. Međutim, svaka se funkcija može zapisati kao zbroj parne i neparne funkcije:

$$f = f_p + f_n,$$

pri čemu su parna funkcija f_p i neparna funkcija f_n dane s:

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\ f_n(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Funkcije realne varijable sinus hiperbolni (oznaka sh), kosinus hiperbolni (oznaka ch), tangens hiperbolni (oznaka th) i kontangens hiperbolni (oznaka cth) definiraju se formulama koje uključuju broj e:

$$\begin{aligned}
\text{sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\
\text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\
\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\
\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} &= \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.
\end{aligned}$$

U četvrtom razredu srednjih škola s 4 i 5 sati nastave matematike tjedno jedino se za funkciju sinus hiperbolni spominje da je rastuća, definirana na čitavom $\mathbb{R}$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}$.

Derivacija hiperbolnih funkcija.

Broj e spominje se i u pravilima derivacije hiperbolnih funkcija:

$$\begin{aligned}
(\text{sh } x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x, \\
(\text{ch } x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x, \\
(\text{th } x)' &= \left(\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\right)' = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch } x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \\
(\text{cth } x)' &= \left(\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}\right)' = \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh } x} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.
\end{aligned}$$

Integral i primitivna funkcija. Neodređeni integral.

Broj e spominje se i prilikom obrade integrala i primitivne funkcije. Prema [7], za računanje neodređenog integrala (primitivne funkcije) nema posebnih pravila poput onih za računanje derivacija. Većina primitivnih funkcije koje su poznate izvedene su iz tablice derivacija, koju čitamo u suprotnom smjeru, pa je tako i primitivna funkcija eksponencijalne funkcije izvedena. Stoga je neodređeni integral eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$ jednak:

$$\int f(x)\,dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Iz definicije integrala kao limesa integralnih suma slijede ova dva njegova svojstva, koja zajedno nazivamo **linearnost integrala**:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{2.6}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{2.7}$$

Slijedi tipičan primjer zadatka za računanje neodređenih integrala eksponencijalne funkcije.

Zadatak 6. Izračunaj neodređeni integral funkcije $f(x) = \frac{e^{3x}+2}{e^x}$.

Rješenje: Primjenom svojstva linearnosti integrala 2.6 i 2.7 dobivamo:

$$\int f(x)dx = \int \frac{e^{3x}+2}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{3x}}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)dx = \int\left(e^{2x} + 2e^{-x}\right)dx = \int e^{2x}dx + 2\int e^{-x}dx.$$

Uvođenjem supstitucije $u = 2x$ dobivamo $du = 2dx$, stoga je $dx = \frac{1}{2}du$. Također uvođenjem još jedne supstitucije $v = -x$ dobivamo $dv = -dx$, odnosno $dx = -dv$. Primjenom supstitucija u zadatku, slijedi:

$$\int e^u \cdot \frac{1}{2}du + 2\int e^v \cdot (-1)dv = \frac{1}{2}\int e^u du - 2\int e^v dv = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Integral i primitivna funkcija. Metoda parcijalne integracije.

Ne mogu se sve primitivne funkcije određivati pomoću metode supstitucije, to jest metode zamjene varijabli. U takvim situacijama, ponekad se primjenjuje metoda parcijalne integracije. U jednom od najčešćih uvodnih primjera za primjenu parcijalne integracije, spominje se upravo eksponencijalna funkcija. Pomoću parcijalne integracije, riješit ćemo jedan takav primjer iz udžbenika [7].

Zadatak 7. Izračunaj neodređeni integral $\int xe^x dx$.

Rješenje: Neka su u i v funkcije varijable x. Formulu $(uv)' = u'v + uv'$ za derivaciju umnoška dviju funkcija možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$uv = \int (u'v + uv')\,dx = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

Tako dobivamo:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx. \tag{2.8}$$

Formulu 2.8 nazivamo formulom parcijalne integracije.
Sada ćemo izračunati zadani neodređeni integral. Uzmimo za funkciju $u = x$, a za funkciju $v' = e^x$. Tada je $du = dx$, to jest $u' = 1$, a $v = \int v'dx = \int e^x dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem tih vrijednosti u formulu 2.8 dobivamo:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Poglavlje 3

Broj $\sqrt{2}$

3.1 Povijest broja $\sqrt{2}$

Dijagonala jediničnog kvadrata ima duljinu $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$ Prema [3], konstanta $\sqrt{2}$ vrlo je dobro aproksimirana prije otprilike 4000 godina. Naime, u to vrijeme, na području Mezopotamije koristilo se klinasto pismo te su sačuvane mnoge glinene pločice iz tog razdoblja. Na stotinjak njih su matematički sadržaji, najčešće tablice i zadatci. Najviše takvih pločica porijeklom je iz starobabilonskog carstva (1900.–1600. pr. Kr.). Jedna od najpoznatijih glinenih pločica je YBC 7289[1] s vrlo dobrom aproksimacijom na šest decimala $\sqrt{2} \approx 1.414214$. Starobabilonska metoda je zapravo Heronova metoda[2], nazvana po starogrčkom matematičaru Heronu[3] koji nije znao da su ga starobabilonci preduhitrili u tom računu.

Primjer 1. Heronovom metodom aproksimirajte broj $\sqrt{2}$.

Rješenje: Elementi niza (a_i) približavaju se $\sqrt{2}$ kako i ide u beskonačnost. Aproksimirat ćemo $\sqrt{2}$ Heronovom metodom, gdje je n broj čiji korijen želimo izračunati, u ovom slučaju $n = 2$, a a_{i+1} je aproksimacija broja $\sqrt{n}$, to jest aproksimacija broja $\sqrt{2}$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right) \to \sqrt{n}. \tag{3.1}$$

Broj a_1 definiramo kao $a_1 = 1$, a sljedeće aproksimacije dobivamo primjenjujući gornju formulu 3.1 i one su navedene u tablici 3.1.

[1] YBC 7289 (Yale Babylonian Collection) – budući da ima puno glinenih pločica, njihova imena su najčešće kodovi muzeja i kolekcija u kojima se one nalaze.

[2] Heronova metoda - metoda kojom se računa kvadratni korijen nekog broja.

[3] Heron od Aleksandrije (10.–75.) – grčki matematičar koji je tu metodu opisao u svom djelu Metrica.

i	a_i	$a_{i+1} \approx \sqrt{n}$	aproksimacija
1	1	$a_{1+1} = a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$	1.5
2	$\frac{3}{2}$	$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$	$1.41\dot{6}$
3	$\frac{17}{22}$	$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$	$1.13169642857\ldots$
4	$\frac{577}{408}$	$a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = \frac{665857}{470832}$	$1.41421356237\ldots$

Tablica 3.1: Heronova metoda za $\sqrt{2}$.

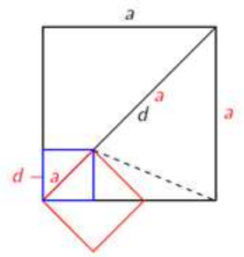
Prema [3] pogrešno je reći da su pitagorejci[4] otkrili iracionalne brojeve jer $\sqrt{2}$ oni ne bi ni smatrali brojem. Naime, prema njihovom i starogrčkom vjerovanju, brojevi su isključivo prirodni brojevi, stoga čak ni razlomke nisu smatrali brojevima. Posljedica tog njihovog vjerovanja je bila da su svake dvije istovrsne veličine – sumjerljive, to jest za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina (zajednička mjera[5]) kojom su mjerljive. Istovrsne veličine su primjerice dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena itd. Upravo zbog pitagorejaca broj $\sqrt{2}$ ima još i naziv Pitagorina konstanta. U današnje vrijeme bismo to iskazali na sljedeći način: za sve $a, b > 0$ postoji $m > 0$ te $k, l \in \mathbb{N}$ tako da je $a = km$ i $b = lm$, odnosno $a : b = k : l$. Svake dvije pozitivne istovrsne veličine imaju omjer kao prirodni brojevi. Jedan od pitagorejaca (pretpostavlja se da je riječ o Hipasusu iz Metaponta oko 450. godine pr. Kr.) dokazao je da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici. To bi bilo ekvivalentno današnjoj tvrdnji „$\sqrt{2}$ nije racionalan broj“. Takav dokaz je u ondašnje vrijeme bio geometrijski.

Na slici 3.1 je suvremena ilustracija dokaza da dijagonala d kvadrata nije sumjerljiva stranici a kvadrata. Primjenjujemo Euklidov algoritam[6] na stranicu a kvadrata i njegovu dijagonalu d. Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a duljina njegove dijagonale iznosi $a - (d - a) = 2a - d$. Dakle, u svakom sljedećem koraku Euklidovog algoritma, duljina stranice novodobivenog kvadrata a_{n+1} dobiva se razlikom duljine dijagonale prethodnog kvadrata d_n i duljine stranice prethodnog kvadrata a_n. Duljina dijagonale tog istog novodobivenog kvadrata d_{n+1} dobiva se razlikom dvostruke duljine stranice a_n i duljine dijagonale d_n prethodnog kvadrata, što možemo ovako matematički zapisati:

[4]Pitagora sa Samosa (570.–490. pr. Kr.) – grčki matematičar koji je osnovao znanstveno-vjersko-mističku školu Pitagorejsku školu. Njeni članovi nazivaju se pitagorejci.

[5]Zajednička mjera dvaju ili više cijelih brojeva - broj koji je zajednički djelitelj tih dvaju ili više brojeva.

[6]Euklidov algoritam - postupak pronalaženja najvećeg zajedničkog djelitelja ili najveće zajedničke mjere dvaju prirodnih brojeva.



Slika 3.1: Nesumjerljivost dijagonale kvadrata i stranice kvadrata.

$a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Kada bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom, onda bi u svakom koraku a_n i d_n (odnosno a_{n+1} i d_{n+1}) bile sumjerljive, u isto vrijeme postajući proizvoljno male, a u nekom trenu čak i manje od svoje zajedničke mjere.
Teodor iz Kirene (465.–398. pr. Kr.) dokazao je iracionalnost brojeva $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$, to jest dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17. To se spominje u Platonovom[7] dijalogu Teetet. Ne spominje se za 2 jer je to očito već bilo opće poznato. Prema [25], mnogi matematičari 20. stoljeća vjeruju da je grčki filozof i sljedbenik pitagorejaca Hippasus iz Metaponta (530.–450. pr.Kr.) prvi otkrio iracionalnost broja $\sqrt{2}$, a zbog toga je čak i smrtno stradao. Prve četiri definicije u desetoj knjizi Euklidovih Elemenata[8] govore o sumjerljivim veličinama.

1. Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive.

2. Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi.

3. Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

4. Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

Od velike je važnosti bila Eudoksova[9] teorija omjera i razmjera zbog upotrebe nekih iracionalnih brojeva u geometrijskim analizama. Na primjer, drugi korijen $x = \sqrt{ab}$ može se prikazati kroz dvostruke omjere, odnosno razmjere (proporcije) $a : x = x : b$. Načine

[7] Platon (387. pr. Kr.) – grčki filozof i matematičar.

[8] Euklid Aleksandrijski (330.–275. pr. Kr.) – grčki matematičar koji je djelovao u doba helenizma. Najznačajnije djelo su mu Elementi, svezak od 13 knjiga veličina poglavlja u kojima je bila sva dotadašnja matematika.

[9] Eudoks s Knida (408.–355. pr. Kr.) – utemeljitelj teorije omjera i razmjera sadržanu u petoj knjizi Euklidovog Elementa, i precizirao je Antifontovu metodu ekshaustije.

za računanje korijena imali su i Kinezi. Prema [3], u knjizi komentara *Devet poglavlja* kineskog matematičara Liu Huia (3. st.), nalazi se metoda za računanje drugog korijena. Također su i Indijci razvijali svoje metode računanja korijena, većinom temeljene na binomnoj formuli, no zapravo se radi o ranoj verziji Newtonove metode. Najčešće korištene racionalne aproksimacije broja:

$$\sqrt{2} \text{ su } \frac{99}{70} \approx 1.414285714, \frac{140}{99} \approx 1.414141414\ldots \text{ i } \frac{239}{169} \approx 1.414201183\ldots$$

3.2 Broj $\sqrt{2}$ u osnovnoj školi

Osmi razred

U osnovnoj školi konstanta $\sqrt{2}$ spominje se tek u osmom razredu prilikom obrade cjelina *Kvadriranje, potenciranje i korjenovanje*, *Pitagorin poučak*, *Geometrija prostora: Prizme, Piramide i obla geometrijska tijela.* U nastavku rada bit će istaknuta samo najvažnija svojstva broja $\sqrt{2}$ unutar navedenih cjelina.

Kvadriranje, potenciranje i korjenovanje.

Prema [15], kvadratni korijen (drugi korijen) nenegativnog racionalnog broja b je broj a takav da vrijedi $a^2 = b$. Nadalje, postoji točno jedan takav nenegativan broj a i označavamo ga $\sqrt{b}$. Odrediti drugi korijen pozitivnog racionalnog broja b znači pronaći pozitivan broj koji kvadriran daje taj broj b. Broj $\sqrt{2}$ određuje se pomoću džepnog računala tijekom školskog sata te se bilježi njegova aproksimacija $\sqrt{2} = 1.414213562$. Postupak djelomičnog korjenovanja opisano je, prema [15], tako da neke racionalne brojeve možemo rastaviti na takav umnožak da je jedan faktor kvadrat nekog racionalnog broja, a drugi faktor nije. Često se u zadatcima djelomičnog korijena kao radikand pojavljuje višekratnik broja 2.

Zadatak 1. Djelomično korjenujte $\sqrt{8}$.

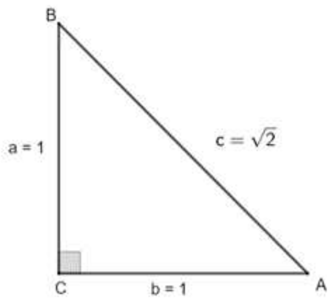
Rješenje: Ako prirodni broj u svojemu rastavu na faktore ima potpuni kvadrat, možemo ga djelomično korjenovati. Rastav na faktore broja 8 može izgledati ovako: $8 = 4 \cdot 2$. U njegovom rastavu na faktore pronalazimo potpuni kvadrat broj 4, stoga broj 8 možemo djelomično korjenovati. Primjenom rastava na faktore i pravila da je korijen umnoška jednak umnošku korijena, dobivamo sljedeće:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Racionalizacija nazivnika je postupak kojim se uklanja korijen iz nazivnika (jer je teško dijeliti s tako dugačkim decimalnim brojem) na način da se razlomak proširi korijenom iz nazivnika. Pa je tako razlomak $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nakon proširivanja korijenom iz nazivnika jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zadnji dio cjeline pripada proširenom sadržaju. Prema [13], prošireni sadržaj nije obavezan i učitelji ih mogu odabrati na osnovu vlastite procjene primjerenosti i relevantnosti za ostvarivanje odgojno–obrazovnih ishoda u specifičnom školskom i razrednom okruženju. Riječ je o vrstama decimalnog zapisa racionalnog broja. Brojeve koji imaju beskonačni neperiodični decimalni zapis nazivamo iracionalnim brojevima. Oznaka za iracionalne brojeve jest $\mathbb{I}$. Jedan od važnijih primjera iracionalnih brojeva je broj $\sqrt{2}$ i pišemo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Pitagorin poučak.

Pitagorin poučak može se iskazati na nekoliko načina. Površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta. Ili pak, kvadrat duljine hipotenuze (najdulje stranice pravokutnog trokuta) jednak je zbroju kvadrata duljina kateta pravokutnog trokuta. Iako je broj $\sqrt{2}$ iracionalan, to jest ima beskonačni neperiodični decimalni zapis, možemo ga konstruirati i geometrijski precizno računati s njim. Pitagorin poučak pomaže nam da ga konstruiramo. Primjer takvog trokuta je na slici 3.2. Naime upravo zbroj kvadrata jediničnih kateta daje kvadrat duljine hipotenuze jednak 2.

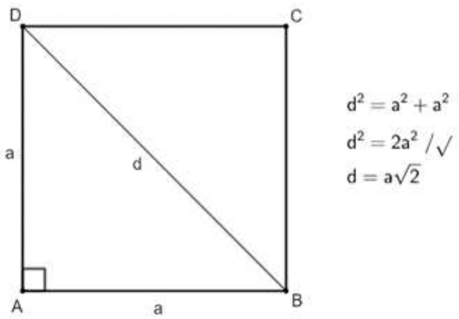


Slika 3.2: Konstrukcija broja $\sqrt{2}$.

Osim primjene Pitagorina poučka na pravokutnom trokutu, moguća je primjena i na kvadratu, prilikom koje je broj $\sqrt{2}$ od velike važnosti jer se baš pomoću njega iskazuje dijagonala kvadrata. Stoga je dijagonala duljine d kvadrata sa stranicama duljine a jednaka $d = a\sqrt{2}$. (Vidi sliku 3.3.)

Geometrija prostora: Prizme. Piramide i obla geometrijska tijela.

U ovom dijelu gradiva, broj $\sqrt{2}$ koristi se u formuli duljine dijagonale kvadrata i u formuli površine dijagonalnog presjeka kocke i opsega dijagonalnog presjeka kocke. S obzirom na to da je dijagonalni presjek kocke s bridom duljine a zapravo pravokutnik sa stranicama duljina a i $a\sqrt{2}$, njegova površina dana je s $P_{dp} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$. Opseg dijagonalnog



Slika 3.3: Dijagonala kvadrata.

presjeka kocke brida duljine a je zapravo opseg σ_{dp} pravokutnika sa stranicama duljina a i $a\sqrt{2}$ i dan je s

$$\sigma_{dp} = 2a + 2a\sqrt{2} = 2a\left(1 + \sqrt{2}\right). \tag{3.2}$$

Zadatak 2. Izračunajte duljinu d plošne dijagonale, površinu P_{dp} i opseg dijagonalnog presjeka O_{dp} kocke s bridom duljine $a = 5\ cm$.

Rješenje: Uvrstimo poznate podatke u formulu za plošnu dijagonalu kocke (to je zapravo dijagonala kvadrata s obzirom da su strane kocke kvadrati):

$$d = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Duljina plošne dijagonale je $d = 5\sqrt{2}\ cm$. Izračunajmo sad površinu dijagonalnog presjeka kocke:

$$P_{dp} = a^2\sqrt{2} = 5^2\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.$$

Površina dijagonalnog presjeka kocke je $P_{dp} = 25\sqrt{2}\ cm^2$. Preostalo je izračunati još opseg dijagonalnog presjeka prema formuli 3.2:

$$\sigma_{dp} = 10\left(1 + \sqrt{2}\right) = 10 + 10\sqrt{2}.$$

Opseg dijagonalnog presjeka kocke duljine brida $a = 5\ cm$ iznosti $\sigma = (10 + 10\sqrt{2})\ cm$.

3.3 Broj $\sqrt{2}$ u srednjoj školi

Konstanta koja se najčešće koristi u nastavi matematike tijekom osnovne i srednje škole je broj $\sqrt{2}$. Osim što služi kao najčešći primjer iracionalnog broja, on je važan dio formula u geometriji i stereometriji te se često pojavljuje u zadatcima djelomičnog korjenovanja i racionalizacije nazivnika. U srednjoj školi, broj $\sqrt{2}$ pojavljuje se u svakom razredu u istim „ulogama" kao i u osnovnoj školi te kao sastavni dio računskih zadataka. Već usvojeno znanje se produbljuje te se tako dodatno upoznaju svojstva broja $\sqrt{2}$.

Prvi razred

Prema [21], u prvom razredu srednje škole, prilikom obrade cjeline Skup realnih brojeva, učenici dokazuju da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan te da su svi brojevi oblika $a + \sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$ iracionalni uz uvjet da su $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Učenici također aproksimiraju iracionalan broj $\sqrt{2}$. Broj $\sqrt{2}$ ima važnu ulogu prilikom obrade cjeline *Trigonometrija pravokutnog trokuta*.

Skup realnih brojeva.

1. Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

   Želimo dokazati gornju tvrdnju. Riječ je o dokazu koji se provodi svođenjem na kontradikciju. Naime, promatrajući pravokutni trokut s katetama duljine 1, prema Pitagorinom poučku za duljinu hipotenuze c tog trokuta, slijedi:

   $$c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c^2 = 2.$$

   Broj koji kvadriran daje broj 2 označavamo s $\sqrt{2}$. Time smo pokazali da taj broj postoji jer je to duljina hipotenuze pravokutnog trokuta s katetama duljine 1. No, ako pretpostavimo suprotno, to jest da je broj $\sqrt{2}$ racionalan broj, to bi značilo da se može zapisati u sljedećem obliku:

   $$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

   Za broj $\sqrt{2}$ vrijedi $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, to jest:

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

   U petom razredu osnovne škole učenici se upoznaju s prostim i složenim brojevima te rastavljaju brojeve na proste faktore, a višestruk umnožak istih faktora zapisuju u obliku potencije. Dakle, zbog činjenice da se svaki prirodni broj na jedinstven način može zapisati kao umnožak prostih brojeva, možemo provesti sljedeći postupak. Rastavimo li broj a^2 na proste faktore, svi bi se faktori pojavili paran broj puta pa bi se i faktor 2 pojavio paran broj puta ili ga uopće ne bi bilo. U rastavu na proste faktore broja $2b^2$, faktor 2 pojavio bi se neparan broj puta, no to je onda nemoguća situacija, to jest to bi bila kontradikcija. Dakle, pretpostavka da je broj $\sqrt{2}$ racionalan broj dovela nas je do nemoguće situacije stoga pretpostavku odbacujemo. Zaključujemo da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan, odnosno broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

2. Svi brojevi oblika $a + \sqrt{2}$ su iracionalni brojevi uz uvjet $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

   Pretpostavimo suprotno, to jest da je $x = a + \sqrt{2}$ racionalan broj. Tada je $x - a$ racionalan broj jer je razlika dvaju racionalnih brojeva. Primijetimo da je ta razlika jednaka $x-a = \sqrt{2}$ iz čega slijedi da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, a to nije istina (prethodno se dokazalo da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan broj). Zaključujemo da je početna pretpostavka da je $x = a + \sqrt{2}$ racionalan broj pogrešna. Došli smo u kontradikciju, stoga vrijedi da je broj $x = a + \sqrt{2}$ iracionalan broj pri čemu je $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

3. Svi brojevi oblika $b\sqrt{2}$ su iracionalni brojevi uz uvjet $b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

   Pretpostavimo suprotno, to jest da je $x = b\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada je broj $\frac{x}{b}$ također racionalan broj jer je kvocijent dvaju racionalnih brojeva, pri čemu je djelitelj različit od nule. Primijetimo da je taj količnik jednak $\frac{x}{b} = \sqrt{2}$ iz čega slijedi da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, a to nije točno. Došli smo u kontradikciju s početnom pretpostavkom te vrijedi da je broj $x = b\sqrt{2}$ iracionalan, pri čemu je $b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

4. Aproksimacija iracionalnog broja $\sqrt{2}$.

   Izračunat ćemo pet aproksimacija, odnosno približnih vrijednosti broja $\sqrt{2}$ na način da pronađemo niz decimalnih brojeva kojima će kvadrat biti manji od 2. Pritom, brojeve biramo tako da svaki sljedeći ima jednu decimalu više i da budu najveći s traženim svojstvom.

$$\begin{aligned}
\text{Iz} \quad 1^2 < 2 < 2^2 \quad &\text{slijedi} \quad 1 < \sqrt{2} < 2. \\
\text{Iz} \quad 1.4^2 < 2 < 1.5^2 \quad &\text{slijedi} \quad 1.4 < \sqrt{2} < 1.5. \\
\text{Iz} \quad 1.41^2 < 2 < 1.42^2 \quad &\text{slijedi} \quad 1.41 < \sqrt{2} < 1.42. \\
\text{Iz} \quad 1.414^2 < 2 < 1.415^2 \quad &\text{slijedi} \quad 1.414 < \sqrt{2} < 1.415. \\
\text{Iz} \quad 1.4142^2 < 2 < 1.4143^2 \quad &\text{slijedi} \quad 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143.
\end{aligned}$$

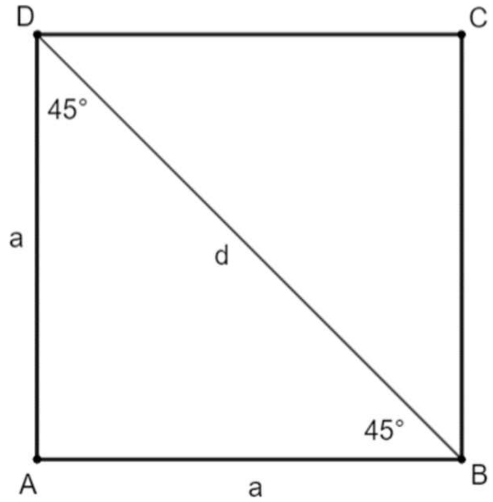
   Za brojeve $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142$ kažemo da su aproksimacije odozdo broja $\sqrt{2}$, a za brojeve $2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143$ da su aproksimacije odozgo broja $\sqrt{2}$.

Trigonometrija pravokutnog trokuta.

U ovoj cjelini učenici definiraju sinus kuta α kao omjer duljine a nasuprotne katete i duljine c hipotenuze pravokutnog trokuta te zapisuju $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Kosinus kuta α definiraju kao omjer duljine b priležeće katete i duljine c hipotenuze te zapisuju $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Zatim određuju vrijednost sinusa i kosinusa kuta mjere 45° kroz sljedeći primjer.

Primjer. Odredite vrijednosti sljedećih trigonometrijskih funkcija: $\sin 45°$, $\cos 45°$.

Rješenje:



Slika 3.4: Sinus i kosinus kuta mjere 45°.

Nacrtajmo kvadrat $ABCD$ duljine stranica a i povucimo dijagonalu $\overline{BD}$. Dijagonala dijeli kvadrat na dva sukladna jednakokračna pravokutna trokuta čiji su šiljasti kutovi imaju mjeru 45°. Prisjetimo se formule za duljinu d dijagonale kvadrata sa stranicama duljine a, koju su učenici već susreli u osmom razredu, $d = a\sqrt{2}$. U trokutu ABD vrijedi sljedeće:

$$\sin 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Drugi razred

U drugom razredu srednjih škola, broj $\sqrt{2}$ spominje se prilikom obrade gotovo svih nastavnih cjelina, najčešće kao koeficijent u računskim zadatcima i kao dio formula u geometriji i stereometriji kao posljedica izvoda pomoću dijagonale kvadrata. Prilikom obrade cjeline *Opseg i površina kruga*, prema [5] kao zanimljivost spominje se rezultat procjene broja π pomoću broja $\sqrt{2}$. Naime, Francois Viete[10] dao je procjenu $3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$. On je među prvima i dao formulu kojom se može računati broj π:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$$

Ova formula utemeljena je na promatranju površina niza 2^n–terokuta upisanih krugu polumjera 1. Povećanjem faktora u ovom umnošku poboljšavat će se i aproksimacija broja π.

Treći razred

U trećem razredu srednjih škola, broj $\sqrt{2}$ spominje se prilikom obrade gotovo svih nastavnih cjelina, najčešće kao koeficijent u računskim zadatcima, vrijednost eksponencijalnih funkcija s bazom 2 i vrijednost trigonometrijskih funkcija. Prilikom obrade cjeline *Eksponencijalna i logaritamska funkcija* skreće se pozornost na broj $\sqrt{2}$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

Prema [22] najposebnije baze kod eksponencijalnih i logaritamskih funkcija su 10, e i 2. Primjenom svojstva $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, istaknut ćemo neke vrijednosti eksponencijalne funkcije $f(x) = 2^x$ i logaritamske funkcije $g(x) = \log_2 x$ koje će biti redom biti prikazane u tablicama 3.2 i 3.3 koje slijede.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	8

Tablica 3.2: Neke vrijednosti eksponencijalne funkcije f.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	8
$\boldsymbol{g(x) = \log_2 x}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3

Tablica 3.3: Neke vrijednosti eksponencijalne funkcije g.

[10]Francois Viete (1540.–1603.) – francuski matematičar.

Četvrti razred

Kao i u prethodnim razredima i u četvrtom razredu srednjih škola, broj $\sqrt{2}$ spominje se prilikom obrade gotovo svih nastavnih cjelina, najčešće kao koeficijent u računskim zadatcima i u geometriji i stereometriji kao posljedica upotrebe duljine dijagonale kvadrata.. Prilikom obrade cjeline *Limes monotonih nizova* skreće se pozornost na broj $\sqrt{2}$.

Limes monotonih nizova.

Prema [6], za niz (x_n) kažemo da je padajući ako za svaki n vrijedi $x_n \geq x_{n+1}$ i niz je odozdo omeđen ako postoji broj m takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $m \leq x_n$. Pokazat ću da je niz određen s $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_1 = 2$ padajući i izračunat ću njegov limes. Prvo promotrimo razliku:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \cdot x_n + \frac{1}{x_n} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}.$$

Niz je padajući ako je $2 - x_n^2 < 0$, to jest ako je $x_n^2 > 2$. To je istina zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva koja vrijedi:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_n - 1}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2},$$

stoga je $x_n^2 > 2$. Također, ovime je dokazano da je niz omeđen odozdo i zbog toga postoji njegov limes koji označimo s a. Iz $x_n \to a$ slijedi:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

Popis slika

Sljedeće slike izrađene su u programu dinamičke geometrije GeoGebra 6:
Slika 1.1, Slika 1.3, Slika 1.4, Slika 1.5, Slika 1.10, Slika 1.11, Slika 1.12, Slika 1.13, Slika 1.14, Slika 1.15, Slika 1.17, Slika 1.18, Slika 1.19, Slika 1.20, Slika 1.21, Slika 1.22, Slika 2.1, Slika 2.2, Slika 2.3, Slika 2.5, Slika 3.1, Slika 3.2, Slika 3.3, Slika 3.4.

Slika 1.16 i Slika 2.4 izrađene su u programu Word MS Office-a.

Slika 1.2 preuzeta je s: `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta.pdf`. (14.10.2022.)

Slika 1.6, Slika 1.7, Slika 1.8, Slika 1.9 preuzete su s:
`https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10743_Kugla.html`. (15.09.2022.)

Bibliografija

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, *Matematika 7*, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[2] D. Brozović, M. Čobanov, *Broj π i vjerojatnost*, MIŠ, godište II, br. 9 (2001.), 158-161; http://mis.element.hr/fajli/560/09-04.pdf. (siječanj 2023.)

[3] F. M. Brückler, *Povijest matematike*, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Matematički odsjek, 2022., https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta.pdf. (siječanj 2023.)

[4] Better Explained, https://betterexplained.com/articles/an-intuitive-guide-to-exponential-functions-e/. (prosinac 2022.)

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2*, 1.dio: udžbenik za 2. razred gimnazije i strukovnih škola, Element, Zagreb, 2019.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, 1.dio: udžbenik za 2. razred gimnazije i strukovnih škola, Element, Zagreb, 2019.

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, 2.dio: udžbenik za 2. razred gimnazije i strukovnih škola, Element, Zagreb, 2019.

[8] Edutorij, https://edutorij.e-skole.hr/share/page/home-page. (srpanj 2022.)

[9] Encyclopædia Britannica, https://www.britannica.com/science/pi-mathematics. (srpanj 2022.)

[10] Famous scientists, https://www.famousscientists.org/archimedes/. (studeni 2022.)

[11] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia od Mathematics and Its Applications 94, Cambridge University Press, New York, 2003.

[12] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Publikacije/Predmetni/Kurikulumi%20nastavnih%20predmeta%20Matematika%20za%20osnovne%20skole%20i%20gimnazije%20i%20Matematika%20za%20srednje%20strukovne%20skole%20na%20razini%204.2..pdf. (srpanj 2022.)

[13] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Nacionalni dokument nastavnog predmeta matematika*, https://mzo.gov.hr/UserDocsImages//dokumenti/Obrazovanje/NacionalniKurikulum/PredmetniKurikulumi//Matematika%20nakon%20recenzije,%20o%C5%BEujak%202018..pdf. (prosinac 2022.)

[14] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 7*, drugi dio, Alfa, Zagreb, 2020.

[15] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 8*, prvi dio, Alfa, Zagreb, 2021.

[16] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 8*, drugi dio, Alfa, Zagreb, 2021.

[17] M. Papić, *Poslovna matematika (uz primjenu MS Excela)*, Zoro/Likarija, Zagreb, 2014.

[18] Ž. Pauše, Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[19] T. Strmečki, B. Kovačić: *Matematičke konstante*, 1. dio, *Poučak*, vol. 15, br. 58, 2014., str. 37-48.

[20] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac, *Matematika 7*, 2. svezak, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[21] S. Varošanec, *Matematika 1*, udžbenik za 1. razred gimnazije i strukovnih škola (3 ili 4 sata nastave tjedno), Element, Zagreb, 2019.

[22] S. Varošanec, *Matematika 3*, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola (3 ili 4 sata nastave tjedno), Element, Zagreb, 2020.

[23] Wolfram MathWorld, https://mathworld.wolfram.com. (kolovoz 2022.)

[24] Wikipedia, https://bs.wikipedia.org/wiki/Prirodni_logaritam. (studeni 2022.)

[25] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Hippasus. (prosinac 2022.)

Sažetak

Neke konstante poput π, e i $\sqrt{2}$ poznatije su od drugih brojeva jer se češće spominju u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. Stoga smo u ovom radu proučili ulogu tih konstanti u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike. Diplomski rad sastoji se od tri poglavlja i svako poglavlje posvećeno je jednoj od ovih konstanti. Na početku se ukratko osvrćemo na njihovu povijest i dajemo motivaciju za njihovo uvođenje. Naposljetku, raznim primjerima i problemima detaljno prikazujemo njihove uloge i primjene u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.

Summary

Some constants such as π, e and $\sqrt{2}$ are better known than others because they are mentioned more often in the elementary and high school education. Thus, in this thesis, we investigated their role in the education of mathematics. The thesis consists of three chapters and each chapter is dedicated to one of these constants. We start by briefly recalling their history and providing a motivation for its introduction. Finally, we use a variety of examples and problems to demonstrate in detail its role and application in teaching of mathematics in elementary and high school classes.

Životopis

Rođena sam 30. svibnja 1991. godine u Zagrebu. Završila sam opću gimnaziju Tituša Brezovačkog u Zagrebu. Po završetku srednje škole upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike 2010. godine na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu i stekla naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.). 2016. godine upisala sam stručni studij informatike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu te sam 2020. godine stekla naziv stručne prvostupnice inženjerke informacijske tehnologije (bacc. ing. techn. inf.). Godine 2020. upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika: nastavnički smjer, na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu.