SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihaela Bahun

NAPREDNE TEME IZ GEOMETRIJE PROSTORA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Maja Starčević

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami i tati

Sadržaj

Sadržaj iv

Uvod 1

1 Teme iz stereometrije u redovnoj nastavi matematike 2

1.1 Osnovna škola 2

1.2 Srednja škola 7

2 Stereometrija na natjecanjima 13

3 Sferna geometrija 34

3.1 Sferni trokut 34

3.2 Sferna trigonometrija 41

3.3 Pravokutni sferni trokut 44

4 Dodatne teme iz stereometrije 47

4.1 Presjeci pravaca i ravnina 47

4.2 Nestandardna geometrijska tijela 52

4.3 Geometrijska mjesta točaka 54

4.4 Primjena Menelajevog teorema u prostoru 57

Bibliografija 62

Uvod

Na početku ovog rada opisat ćemo dio nastavnog sadržaja matematike koji se bavi geometrijom prostora koju još nazivamo i stereometrija. Geometrija prostora veoma je delikatan dio gradiva matematike te bismo joj zbog toga trebali posvetiti puno više vremena u samoj obradi. Nerijetko se taj dio gradiva zapravo svede na računanje oplošja i volumena geometrijskih tijela. Tome u prilog ne ide ni nastavni program u kojem se razdvajanjem cjelina *Geometrija prostora* na kraju osmog razreda i *Geometrijska tijela* u drugom razredu srednje škole radi prevelika stanka između ta dva gradiva. U drugom poglavlju cilj nam je prikazati različite tipove zadataka po temi i težini koji se pojavljuju na natjecanjima iz matematike te vidjeti koliko odudaraju od gradiva redovne nastave. U trećem i četvrtom poglavlju dat ćemo prijedlog nekih tema iz stereometrije koje se mogu obraditi na dodatnoj nastavi matematike. Teme su nešto zahtjevnije, ali su ipak prilagođene predznanju stečenom kroz redovnu nastavu. U trećem poglavlju predstavljene su teme iz sferne geometrije. Definirat ćemo sferu, sferni trokut te iskazati i dokazati teoreme koji opisuju svojstva sfernog trokuta i površinu sfernog trokuta. U potpoglavlju o sfernoj trigonometriji iskazat ćemo i dokazati poučke o kosinusu i sinusu za kutove sfernog trokuta. Na kraju ovog poglavlja opisat ćemo pravokutni sferni trokut te iskazati Napierovo pravilo. Diplomski rad završava poglavljem o dodatnim temama iz stereometrije, koje je podijeljeno u četiri potpoglavlja. U prvom su iskazane i dokazane tvrdnje o pravcima i ravninama koje se sijeku u jednoj točki. U drugom potpoglavlju riješit ćemo zadatak u kojem ćemo zadano nestandardno tijelo rastaviti na neka poznata tijela te tako odrediti volumen zadanog tijela. Treće potpoglavlje se bavi geometrijskim mjestima točaka u prostoru, dok ćemo rad završiti s iskazom i dokazom Menelajevog teorema i njegovom primjenom u zadatku iz stereometrije.

Poglavlje 1

Teme iz stereometrije u redovnoj nastavi matematike

1.1 Osnovna škola

U ovom poglavlju opisat ćemo pojmove koje će učenici usvojiti na redovnoj nastavi tijekom osnovne i srednje škole. U osnovnoj školi, kao uvod u geometriju prostora, učenici promatraju odnos pravaca i ravnina na početnoj razini. Taj dio gradiva usvajaju konkretno na primjeru kocke i kvadra, promatrajući odnos njihovih vrhova, bridova i strana. Nadalje, promatraju međusobne položaje pravaca i ravnine, odnosno okomitost pravaca i ravnine. Uvodnu cjelinu završavamo obradom ortogonalne projekcije točke na ravninu i udaljenosti točke od ravnine. Kako bismo učenike uveli u to za njih vrlo novo područje, pomažu nam školski modeli geometrijskih tijela koje će klasificirati na razini prepoznavanja. Učenici će prepoznati kocku, kvadar, piramidu, valjak, stožac i kuglu te opisati geometrijsko tijelo. Geometrijsko tijelo je dio prostora omeđen plohama, a sastoji se od točaka koje ne pripadaju istoj ravnini. Kako u svakodnevnom životu susrećemo mnoge predmete koji imaju oblik nekog geometrijskog tijela, zadajemo učenicima da razvrstaju slike tih objekata prema zadanom kriteriju. Nadalje, učenici uočavaju da geometrijska tijela mogu imati ravne i/ili zaobljene plohe te zaključuju da geometrijska tijela koja su omeđena ravnim plohama nazivamo uglata tijela, a tijela koja su omeđena plohama od kojih su neke zaobljene nazivamo obla tijela. Tijela koja se detaljno obrađuju u osmom razredu su: prizme (samo uspravne iako se u nekim udžbenicima može naći i paralelepiped), piramide, uspravni valjak, uspravni stožac i kugla. Usvajaju se opisne definicije tih tijela te njihovi elementi: vrh, brid, osnovka, strana, pobočka, visina, pobočje, plošne i prostorne dijagonale, dijagonalni presjeci. Od numeričkih veličina objašnjavaju se oplošje i volumen. Obrada geometrijskih tijela ne smije se svesti na računanje, već treba osmisliti neke probleme pomoću kojih bismo mogli detaljnije obraditi važne osobine geometrijskih tijela. S druge strane, ne smijemo zaboraviti da je obrada geometrijskog prostora veoma složena za neke učenike koji nemaju dobro razvijeni prostorni zor. Svaki učenik ima više ili manje razvijenu tu sposobnost, ali njenom razvijanju svakako će pomoći postavljanje jednostavnih i zanimljivih problema, koje može rješavati i u grupnom radu. Takvim načinom obrade učenicima omogućujemo da razvijaju svoju kreativnost, ali i da otkrivaju važne pojmove vezane uz geometrijska tijela. Jedan od primjera su i mreže geometrijskih tijela. Učenici će prvo izraditi geometrijsko tijelo (od papira ili plastičnih modela), zatim ga rastavljaju, odnosno sve njegove strane polože u jednu ravninu. Time dobivaju mrežu geometrijskog tijela te uočavaju da dobivena mreža ovisi o načinu rastavljanja. Nakon mreže potrebno je obraditi oplošje koje predstavlja zbroj površina svih strana koje omeđuju geometrijsko tijelo. Zapravo možemo reći da je oplošje geometrijskog tijela površina mreže tog tijela. Na uvodnom satu obrade volumena kocke potrebno je učenicima pokazati kocke brida duljine 1 cm, 1 dm i 1 m. Time će uočiti kako se povećava volumen s obzirom na povećanje duljine brida kocke. Zanimljivo je kako su kocke volumena 1 cm^3 malene i možemo ih više staviti u ruku, a u kocku volumena 1 m^3 stane nekoliko učenika. Učenici praktičnom aktivnošću otkrivaju kako računamo volumen kocke. Podijelimo im drvene jedinične kockice kojima je duljina brida 1 cm, a volumen 1 cm^3. Učenici grade kocku brida duljine 2 cm te prebrojavanjem kockica koje su im bile potrebne da izgrade kocku sa zadanom duljinom brida uočavaju da taj broj odgovara volumenu kocke jer je volumen jedne kockice jednak 1 cm^3. Nakon još nekoliko tako izgrađenih kocka učenici zaključuju da je volumen kocke jednak umnošku duljina bridova iz jednog njezinog vrha. Analogno će doći i do formule za računanje volumena kvadra. Upravo bi tako trebao izgledati način uvođenja formula, odnosno ne bi se trebao sastojati samo od ispisivanja, bez podrobnijeg objašnjavanja zašto one vrijede.

Učenici do pojma (uspravne) prizme dolaze sustavno. Prvo na modelima uočavaju da se barem dvije strane nalaze u paralelnim ravninama, a zatim ocrtavanjem jedne strane i prislanjanjem druge zaključuju da su te strane sukladne. Preostale strane su pravokutnici koji se u parovima nalaze u paralelnim ravninama ako su osnovke pravilni mnogokuti s parnim brojem stranica. Učenici u osnovnoj školi dolaze do opisne definicije prizme.

Definicija 1.1.1. *Prizme su geometrijska tijela omeđena dvama sukladnim mnogokutima koji pripadaju paralelnim ravninama i paralelogramima kojima jedna stranica pripada jednom od tih mnogokuta, a druga drugom.*

Nakon što su opisali prizmu, uvodimo nazive za osnovne elemente prizme. Dvije strane prizme koje se nalaze u paralelnim ravninama, i za koje je uočeno da su uvijek sukladne, nazivamo bazama (osnovkama) prizme. Baza prizme može biti bilo koji mnogokut te ovisno o njemu prizmu nazivamo trostrana, četverostrana, peterostrana,..., n-terostrana prizma. Preostale strane su paralelogrami, odnosno pobočke prizme, a sve pobočke prizme čine pobočje prizme. Bridove prizme koji spajaju odgovarajuće vrhove baza nazivamo pobočnim bridovima prizme. Prizme kojima su pobočni bridovi okomiti na ravnine baza nazivamo uspravnim prizmama, a ostale kosim prizmama. Pobočke uspravne prizme su pravokutnici. Uspravnu prizmu kojoj su baze pravilni mnogokuti nazivamo pravilnom prizmom, njezine su pobočke međusobno sukladni pravokutnici. Kao što smo i napomenuli na početku, u osnovnoj školi rade se samo uspravne prizme. U mnogim literaturama možemo pronaći nepravilnosti u kojoj prizmu opisuju kao pravilnu i uspravnu, ali dovoljno je reći da je pravilna prizma.

Kod prizmi već u osnovnoj školi možemo obraditi *Eulerovu formulu*. Promatranjem modela i prebrojavanjem lako dolazimo do tražene jednakosti.

Eulerova formula: Ako s V označimo broj vrhova neke prizme, sa S broj strana, a s B broj bridova te prizme, onda vrijedi: $V + S - B = 2$.

Volumen prizme pokazuje koliki dio prostora zauzima ta prizma. Kako ne bismo samo zapisali formulu i rekli da volumen prizme ovisi o površini baze i o visini, učenici se u to mogu uvjeriti sami praktičnom aktivnošću. Na primjer ako su nam na raspolaganju kocka i trostrana prizma jednake visine kojoj baza ima površinu jednaku površini jedne strane kocke, učenici mogu presipati rižu iz kocke u prizmu i uočiti da su volumeni jednaki. Mjerenjem se uvjeravaju da su površine baza i visine jednake te zaključuju da se u ovom slučaju volumen prizme računa kao umnožak površine baze i visine promatrane prizme. Nakon toga im otkrivamo da formula vrijedi i općenito. Važno je da više vremena posvetimo otkrivanju važnih pojmova uz učeničke aktivnosti, a ne da samo zapisujemo formule te ih primjenjujemo u rješavanju zadataka. Kasnije učenici zaborave sve formule ili se ne mogu sjetiti koja oznaka šta označava, ali ako nešto sami otkriju, lakše se prisjete.

Sljedeće geometrijsko tijelo koje se radi u osnovnoj školi je piramida, odnosno pravilna piramida. Kao i kod prizmi, uvodi se prepoznavanjem školskih modela te se pokazuju slike poznatih svjetskih građevina koje imaju oblik piramide. Nakon definicije učenici će prepoznati osnovne elemente piramide: bazu (osnovku), vrh, osnovni brid, pobočni brid, visinu. Promatranjem modela opisuju pravilnu piramidu kojoj je osnovica pravilan mnogokut, a svi pobočni bridovi jednake duljine. Prema broju stranica osnovke, piramide mogu biti trostrane, četverostrane, peterostrane,..., n- terostrane. Prije oplošja i volumena s učenicima obrađujemo mreže piramida koje dobiju tako da sve strane piramide polože u jednu ravninu. Rastavljanjem papirnatih ili plastičnih modela uočavaju da piramide možemo rastvoriti u mreže različitih oblika. Oplošje piramide sada mogu opisati kao površinu mreže piramide. Kako površine mnogokuta koje omeđuju piramidu znaju izračunati, lako dobivaju i oplošje koje je zbroj tih površina. Volumen piramide učenici otkrivaju praktičnim radom, potrebni su plastični modeli prizme i piramide jednake površine baze i jednake duljine visine. Učenici se u to uvjeravaju tako da prislone bazu prizme uz bazu piramide i uoče da se podudaraju. Zatim pune piramidu vodom ili rižom te ju presipavaju u prizmu i zaključuju da je taj postupak potrebno ponoviti tri puta. Dakle, volumen prizme tri puta je veći od volumena piramide. Drugim riječima, volumen piramide jednak je trećini volumena prizme jednake površine baze i jednake visine.

Nakon piramide prelazimo na obradu valjka kojeg učenici prepoznaju kao oblo geometrijsko tijelo na slikama koje prikazuju stvari i građevine iz svakodnevnog života. Prepoznaju osnovne elemente, osnovke ili baze su dva sukladna kruga, a zakrivljena ploha je plašt valjka. Opisuju valjak, razlikuju uspravni i kosi valjak, ali u osnovnoj školi detaljnije izučavamo samo uspravne valjke. Kod valjka postoje još dva nova pojma, to su os valjka i izvodnica valjka. Rastavljanjem valjka u jednu ravninu uočava se da se mreža valjka sastoji od pravokutnika i para sukladnih krugova, pri čemu je opseg svakog od njih jednak duljini jedne stranice pravokutnika. Oplošje valjka jednako je površini mreže valjka. Praktičnim radom učenici otkrivaju vezu između volumena valjka i prizme. Presipavanjem riže iz prizme koja ima jednaku površinu baze kao valjak i jednaku visinu zaključuju da su im volumeni jednaki. Dakle, volumen valjka jednak je umnošku površine baze valjka i visine valjka.

Od oblih tijela preostali su stožac i kugla. Učenici se upoznaju s osnovnim elemetima stošca, a to su osnovka ili baza (krug), plašt stošca (zakrivljena ploha), vrh, os i izvodnica stošca. Kao i kod prethodnih tijela, u osnovnoj školi obrađujemo samo uspravni stožac. Važan detalj kod stošca je mreža za koju će većina učenika pretpostaviti da se sastoji od trokuta i kruga. Pokušaju li od trokuta napraviti stožac, neće uspjeti te rastavljanjem stošca u jednu ravninu otkrivaju da se mreža sastoji od kružnog isječka i jednog kruga. Mjerenjem zaključuju da je duljina kružnog luka jednaka opsegu kruga. Oplošje stošca jednako je površini mreže stošca. Analogno kao i kod piramida učenici otkrivaju kako računamo volumen stošca. Ovdje će koristiti valjak i stožac sukladnih baza i jednakih visina. Presipavanjem riže ili vode zaključuju da je volumen valjka tri puta veći od volumena stošca, odnosno volumen stošca jednak je trećini volumena valjka jednake površine baze i jednake duljine visine.

Na kraju osmog razreda učenici će opisati sferu i kuglu. Sfera je u prostoru ono što je kružnica u ravnini, konkretno sfera je skup svih točaka u prostoru koje su jednako udaljene od zadane točke. Kugla je u prostoru ono što je krug u ravnini, odnosno kugla je skup svih točaka u prostoru koje su od zadane točke udaljene manje ili jednako od zadane duljine. Kako se u svakodnevnom životu često nameće potreba za izračunavanjem oplošja kugle, učenici do formule za oplošje dolaze praktičnim radom. Učenicima u grupama podijelimo naranče koje razrezuju duž glavnog presjeka (kruga čiji je polumjer jednak polumjeru kugle). Na papir otisnu taj presjek, pažljivo ogule naranču, ispunjavaju ocrtane krugove narančinom korom te zaključuju da su ispunili četiri otiska. Generaliziraju, oplošje kugle (površina narančine kore) četiri puta je veće od površine njenog glavnog presjeka (kruga). Do zaključka kako izračunati volumen kugle mogu doći mjerenjem promjene visine i zapremnine vode u cilindričnoj posudi, u koju se stavlja kugla jednakog polumjera kao i posuda.

U osnovnoj školi nakon obrade geometrijskih tijela slijedi rješavanje zadataka koji su vezani uz izračunavanje volumena i oplošja. Uobičajeno je i zadati volumen i oplošje te se onda traži neka druga vezana veličina poput duljine nekog brida ili površine strane tijela. Tada se problem zapravo svodi na rješavanje linearnih jednadžbi ili jednostavnih kvadratnih jednadžbi. Treba istaknuti da su jednostavniji zadaci oni u kojima koristimo samo jednu formulu, s kojom smo već upoznati, dok je u složenijim zadacima potrebno povezati veličine iz više (poznatih) formula. Najsloženiji su zadaci u kojima učenici moraju sami, uz pomoć skice, izvesti formule pomoću kojih će doći do traženih veličina. U osnovnoj školi u takvim situacijama u pravilu koriste Pitagorin poučak, sukladnosti i sličnosti trokuta.

1.2 Srednja škola

U srednjoj školi učenici se s geometrijom prostora ponovo susreću u drugom polugodištu drugog razreda. Prisjećaju se što je geometrijsko tijelo te da postoje uglata i obla tijela.

Učenici će naučiti da se obla tijela poput valjka, stošca i kugle mogu dobiti i rotacijom nekog ravninskog lika oko određene osi pa ih stoga možemo zvati i rotacijskim tijelima. Upoznat će se i s pojmom poliedra. Među poliedrima posebno su važne prizme i piramide. Kako iz osnovne škole znaju opisnu definiciju, u srednjoj će ih zanimati kako nastaju.

Radeći u alatu dinamične geometrije *Sketchpadu* otkrit će kako nastaju prizme te doći do formalne definicije prizme.

Definicija 1.2.1. *Neka je dana ravnina π, vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ($\vec{a}$ ne pripada ravnini π) i konveksan mnogokut $A_1A_2A_3\ldots A_n \in \pi$. Uniju svih dužina $\overline{MN}$, $M \in A_1A_2A_3\ldots A_n$, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, nazivamo prizmom s bazom $A_1A_2A_3\ldots A_n$.*

Učenicima dakle pokazujemo nastanak prizme kao translaciju mnogokuta za određen skup vektora. Tako dobivamo beskonačno mnogo mnogokuta navezanih jedan na drugi koji su nastali translacijom početnog mnogokuta za zadani skup vektora. Nadalje, u srednjoj školi učenici se susreću s kosom prizmom i njezinom mrežom. Razrezivanjem papirnatih modela kosih prizmi u ravninu uočavaju da su mreže različite ovisno o načinu razrezivanja. Zaključujemo da se mreža kose n-terostrane prizme sastoji od dva sukladna n-terokuta i n paralelograma koji moraju biti u takvom položaju da se mogu spojiti u kosu n-terostranu prizmu. Budući da se u srednjoj školi više rade kose prizme, uočavaju da takvim prizmama ne znaju računati volumen. No, krenimo redom, prvo se prisjećaju kako računamo volumen kocke i kvadra, zatim volumen uspravne trostrane prizme kojoj je baza pravokutan trokut, kasnije i bilo koji trokut. Dolaze do uspravne prizme kojoj je baza bilo koji mnogokut, kojeg možemo podijeliti na trokute nacrtamo li mu dijagonale iz jednog vrha. Tim dijagonalama položimo ravnine okomite na bazu prizme iz čega učenici zaključuju da je volumen početne prizme jednak zbroju volumena svih dobivenih uspravnih trostranih prizmi. Volumen uspravne n-terostrane prizme jednak je dakle umnošku površine baze i duljine visine te prizme. Za volumen kose prizme potreban nam je *Cavalijerijev princip* koji glasi:

Neka su A i B dva tijela u prostoru. Ukoliko postoji ravnina sa svojstvom da presjeci tijela A i B svima njoj paralelnim ravninama imaju jednake površine, onda su volumeni tijela A i B jednaki.

Cavalijerijev princip možemo zorno predočiti na razne načine, mogu nam pomoći novčići, papir, špil karata, knjige i tako dalje. Primjene li učenici *Cavalijerijev princip* na kosu i uspravnu prizmu, dolaze do zaključka da kosa n-terostrana prizma ima jednak volumen kao i uspravna n-terostrana prizma kojoj je površina baze jednaka površini baze kose prizme, a visina joj je jednaka visini kose prizme. Većina učenika ima slabo razvijeni prostorni zor koji će im biti potreban kod presjeka prizmi i ravnina. Kako bi oni sami otkrivali i što bolje uočili što sve može biti presjek prizme i ravnine, pokazujemo im primjere presjeka u alatu dinamične geometrije, npr. u *Sketchpadu* ili u *Google SketchUpu*. Oba programa omogućuju da učenici sami istražuju koji sve geometrijski likovi mogu biti presjeci.

Kao i u osnovnoj školi, poslije prizmi prelazimo na obradu piramida. U srednjoj školi postavljamo pitanje kako nastaju te radeći u alatu dinamične geometrije dolazimo do formalne definicije.

Definicija 1.2.2. *Neka je dana ravnina π, točka V (V ne pripada ravnini π) i konveksan mnogokut $A_1A_2A_3 \ldots A_n \in \pi$. Uniju svih dužina $\overline{MV}$, $M \in A_1A_2A_3 \ldots A_n$, nazivamo piramidom s bazom $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.*

Piramidu možemo opisati i kao beskonačno mnogo sličnih mnogokuta navezanih jedan na drugi i to od najvećeg do najmanjeg sve dok jedan od mnogokuta ne postane točka. Slijedi obrada numeričkih obilježja piramida, tj. oplošja i volumena. Oplošje ćemo računati kao površinu mreže piramide, a izvod za volumen piramide radimo u tri koraka. U prvom koraku učenici uočavaju da su volumeni dviju piramida koje imaju istu površinu baze i jednake visine jednaki. U drugom koraku povezuju volumen trostrane piramide i trostrane prizme te ako je moguće, pokazujemo im tu vezu na plastičnim modelima ili na računalu. Uočit će da u tom slučaju volumen piramide iznosi trećinu volumena prizme. U zadnjem koraku učenici zaključuju da za sve piramide vrijedi da je volumen jednak trećini umnoška površine baze i duljine visine.

U srednjoj školi nećemo se zadržati samo na pravilnim piramidama, već učenike upoznajemo s krnjom piramidom. Ako piramidu presječemo ravninom paralelnom njezinoj osnovki, nastat će jedna manja piramida koju zovemo dopunjak i preostali dio koji se zove krnja piramida. Krnja piramida ima dvije baze koje su slični mnogokuti, a pobočke su trapezi. Može se općenito reći da je krnja piramida dio prostora omeđen s dva slična n-terokuta, koji se zovu osnovke (baze), i s n trapeza, koji čine pobočje krnje piramide. Baze krnje piramide su slični mnogokuti, s koeficijentom sličnosti $k>1$. Taj koeficijent je jednak i omjeru visine piramide i visine dopunjka.

Sada možemo definirati poliedre i njihove elemente. Strane poliedra su mnogokuti, samo po dvije strane poliedra sastaju se i čine brid poliedra. Krajnje točke bridova su vrhovi poliedra i svaki vrh pripada najmanje trima stranama poliedra. Pitamo se koji sve mnogokuti mogu biti strane poliedra i o čemu to ovisi. Brojevi strana, bridova i vrhova nekog konveksnog poliedra nisu međusobno neovisni. Oni moraju zadovoljavati *Eulerovu formulu* koja neće omogućiti da sami osmislimo poliedar s bilo kojim brojem strana. Još u prošlosti mnogi su matematičari proučavali poliedre i jedan od najvećih uspjeha bilo je opisivanje svih pravilnih poliedara. To je uspjelo Platonu koji ih je prvi opisao i odredio im određeno značenje pa ih često nazivamo i Platonova tijela. Nakon njega grčki matematičar Euklid detaljno ih je opisao i dokazao da ih postoji samo pet. Pravilni poliedri su: heksaedar (kocka), tetraedar, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar. Pravilni tetraedar je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima četiri strane, šest bridova i četiri vrha. Ime dolazi od grčke riječi *tetra* - četiri. Pravilni oktaedar je poliedar sa stranama koje su također sukladni jednakostranični trokuti. Ima osam strana, dvanaest bridova i šest vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *okto* - osam. I pravilni ikosaedar je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima dvadeset strana, trideset bridova i dvanaest vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *ikosi* - dvadeset. Pitamo se zašto su to jedini pravilni poliedri omeđeni jednakostraničnim trokutima. Učenici to mogu zaključiti ako promatraju prostorni kut u jednom vrhu poliedra koji je određen s najmanje tri ravnine u kojima se nalaze strane poliedra. Zbroj ravninskih kutova u jednom vrhu mora biti manji od $360°$. Kako jednakostranični trokut ima sve kutove veličine $60°$, ne postoji poliedar koji ima šest ili više jednakostraničnih trokuta u jednom svom vrhu. Pravilni heksaedar (kocka) je poliedar sa stranama koje su sukladni kvadrati. Ima šest strana, dvanaest bridova i osam vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *heksa* - šest. U ovom slučaju gledamo koliko najviše kvadrata može biti u jednom vrhu pravilnog poliedra te zaključujemo da ne postoji pravilni poliedar koji ima četiri ili više kvadrata u jednom vrhu. Peti pravilni poliedar je dodekaedar sa stranama koje su sukladni pravilni peterokuti. Ima dvanaest strana, trideset bridova i dvadeset vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *dodeka* - dvanaest. Promatrajući koliko se pravilnih peterokuta može sastati u jednom vrhu pravilnog poliedra zaključujemo da ne postoji pravilni poliedar koji u jednom vrhu ima četiri ili više pravilnih peterokuta. Analogno možemo zaključiti da ne postoji pravilni poliedar omeđen šesterokutima, a onda ni pravilni poliedar omeđen pravilnim n-terokutima, gdje je n prirodan broj veći ili jednak od šest.

Pravilne poliedre proučavali su stari Grci, najpoznatiji je bio grčki filozof Platon koji je u svojem djelu Timaeus oko 350.g. prije Krista razvio svojevrsnu atomističku teoriju. Platon je pretpostavio da je svijet građen od sitnih čestica četiriju temeljnih elemenata koje imaju oblik pravilnih poliedara. To su čestica vatre oblika tetraedra, čestica zemlje koju predstavlja kocka, čestica zraka koja je poput oktaedra, dok je čestica vode predstavljena ikosaedarom. Konačno, Svemir ima oblik dodekaedra.

Valjak u srednjoj školi možemo opisati kao beskonačno mnogo krugova nadovezanih jedan na drugog koji su nastali translacijom početnog kruga za neki skup vektora.

Definicija 1.2.3. *Neka je dana ravnina π, vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ($\vec{a}$ ne pripada ravnini π) i krug $K \in \pi$. Uniju svih dužina $\overline{MN}$, $M \in K$, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, nazivamo valjkom s bazom K.*

Također kao i kod prizmi promatramo kosi valjak te ćemo za volumen koristiti *Cavalijerijev princip*. Postavimo po volji odabran kosi valjak i uspravni valjak jednakih polumjera baze i visine tako da im baze pripadaju istoj ravnini. Svi presjeci ovih dvaju valjaka s ravninama paralelnima s ravninom kojoj pripadaju baze sukladni su krugovi istog polumjera. Zato su ti presjeci jednake površine. Primjenjujući *Cavalijerijev princip* zaključujemo da su oba valjka istog volumena. Zamislimo li valjak i prizmu iste visine, s bazama jednakih površina, presjeci valjka i prizme ravninama paralelnima s ravninom kojoj pripadaju baze imaju jednake površine pa je volumen valjka jednak volumenu prizme.

Usporedba slična usporedbi prizme s valjkom može se provesti i za piramidu i stožac. Na neki način stožac možemo promatrati kao piramidu čija je osnovka mnogokut s beskonačno mnogo vrhova. U srednjoj školi promatramo njegov nastanak i dolazimo do formalne definicije stošca.

Definicija 1.2.4. *Neka je dana ravnina π, krug $K \in \pi$ i točka T koja ne pripada toj ravnini. Uniju svih dužina $\overline{MT}$, $M \in K$ nazivamo stošcom s bazom K.*

Presječemo li uspravni i kosi stožac jednakih površina baza i duljina visina ravninom paralelnom s bazom, dobijemo krugove jednakih površina. Ako stožac i piramida imaju baze istih površina i jednake duljine visina, onda i njihovi presjeci s ravninama paralelnim s bazama imaju jednake površine. U oba slučaja primjenjujemo *Cavalijerijev princip* i zaključujemo da su volumeni dva promatrana tijela jednaki. Kao i kod piramida, presijecanjem stošca ravninom paralelnom s ravninom baze dobijemo manji stožac sličan početnom i preostali dio koji nazivamo krnji stožac.

Dosad smo promatrali geometrijska tijela koja nastaju translacijom točaka ravninskog lika (osnovke tijela) za neki skup vektora. U primjerima koje obrađujemo osnovka za prizmu je mnogokut, a za valjak krug. Druga skupina su piramide i stožac, kod kojih se svaka točka osnovke spaja s jednom točkom prostora koju nazivamo vrh. Piramide za osnovke imaju mnogokute, a kod stošca je osnovka krug. U oba slučaja osnovka može biti bilo koji drugi geometrijski lik.

Promotrimo kuglu, ona ne može nastati niti na jedan od ovih dvaju načina. Međutim postoji još jedan način nastajanja geometrijskog tijela. Naime, postoje tijela koja su nastala vrtnjom nekog ravninskog lika oko istaknute osi. Tako nastala geometrijska tijela nazivamo rotacijska tijela. S nekim tako nastalim tijelima smo se već susreli, to su valjak, stožac i kugla. Valjak je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Ako se pravokutnik vrti oko osi koja je paralelna njegovoj stranici, a ne siječe ga, dobivamo šuplji valjak. Stožac je rotacijsko tijelo koje nastaje vrtnjom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Također, vrtnjom bilo kojeg trokuta oko neke njegove stranice dobivamo stožac, ili uniju dva stošca (nastaje vrtnjom šiljastokutnog trokuta oko bilo koje stranice ili vrtnjom tupokutnog trokuta oko najduže stranice), ili jedan stožac iz kojeg je izvađen drugi (nastaje vrtnjom tupokutnog trokuta oko neke od kraćih stranica). Kugla nastaje vrtnjom polukruga oko njegovog promjera. Rotacijom trapeza oko osi kojoj pripada krak koji s osnovicom zatvara pravi kut nastaje krnji stožac. Neki primjeri geometrijskih tijela koja nisu rotacijska su kocka, kvadar i piramida.

U srednjoj školi učenicima kod rješavanja zadataka iz geometrije prostora pomažu neka nova znanja. Ono što je novo je svakako trigonometrija. U osnovnoj školi zadaju se zadaci s kutovima, ali oni se uvijek moraju nekako moći svesti na korištenje znanja o jednakostraničnim trokutima. Sada u srednjoj školi učenicima možemo zadati zadatke s proizvoljnim kutovima. U drugom razredu se može koristiti trigonometrija pravokutnog trokuta, a opća trigonometrija se radi u trećem razredu. Nakon toga se stečeno znanje primjenjuje u zadacima iz stereometrije. Treba spomenuti da se u srednjoj školi obrađuje i homotetija te se detaljnije izučavaju izometrije ravnine. Usvojeno gradivo iz tih cjelina također pomaže učenicima u rješavanju prostornih zadataka. Neki zadaci mogu se riješiti uvođenjem koordinata, odnosno koristeći analitičku geometriju. Na redovnoj nastavi trećeg razreda uvodi se koordinatni sustav u prostoru i kanonska baza. Pravokutni koordinatni sustav u prostoru definiramo na potpuno analogan način kao i koordinatni sustav u ravnini. Njega čine tri međusobno okomite osi koje se sijeku u ishodištu O koordinatnog sustava. Nazivamo ih os apscisa, os ordinata i os aplikata. Odaberimo neku točku T u prostoru. Učenici će odrediti koordinate točake T tako da nacrtaju okomice na osi koordinatnog sustava. Pritom im može pomoći činjenica da se točka T nalazi u vrhu kvadrata kojemu tri brida pripadaju koordinatnim osima. Stranice tog kvadrata su okomite na koordinatne osi. Vrlo često koristimo još jedan postupak. Da bismo ga opisali, nužno nam je spomenuti da svake dvije osi prostornog sustava definiraju ravninu koju nazivamo koordinatna ravnina. Vezu između točke T u prostoru i njezinih koordinata možemo odrediti tako da nacrtamo ortogonalnu projekciju T' točke T na neku koordinatnu ravninu. Pritom je jedna koordinata točke T' jednaka 0, a druge dvije ćemo odrediti tako da tu točku projiciramo na koordinatne osi ravninskog sustava. Učenici dakle mogu pogodno smjestiti geometrijsko tijelo u koordinatni sustav u prostoru te očitavanjem koordinata vrhova i primjenom analitičke geometrije riješe zadatak iz stereometrije. U četvrtom razredu gimnazijskog programa obrađuje se primjena integrala u računanju volumena tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi. Takvom rotacijom nastaje rotacijsko tijelo omeđeno plohom (pobočjem) i bazama. Volumen nastalog tijela računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih elemenata volumena.

Poglavlje 2

Stereometrija na natjecanjima

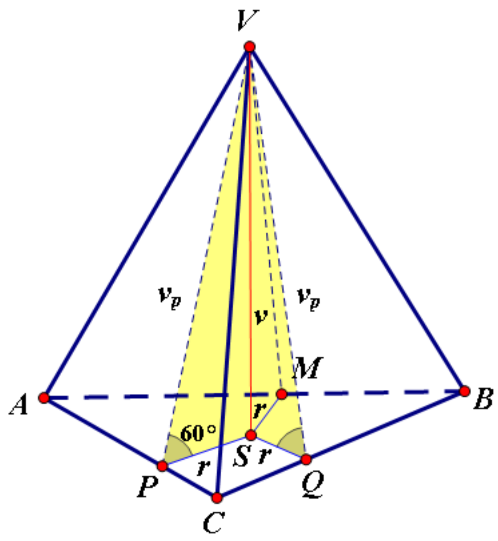
Natjecanja iz matematike provode se u osnovnoj i srednjoj školi. Provode se natjecanja na razini škole/grada, županije i države. U osnovnoj školi učenici istih razreda rješavaju iste zadatke, dok se u srednjoj školi napravila razlika u A i B varijanti. A varijanta podrazumijeva složenije zadatke i namijenjena je učenicima prirodoslovno - matematičke gimnazije, ali i ostali učenici mogu se samoinicijativno opredijeliti za tu varijantu. Ako se učenik jednom opredijeli za jednu varijantu, kasnije svoju odluku više ne može promijeniti. Zadaci B varijante namijenjeni su svim učenicima srednje škole osim učenika iz prirodoslovno - matematičke gimnazije. Od ostalih matematičkih natjecanja u Hrvatskoj spomenimo *Festival matematike*. To je ekipno natjecanje za učenike osnovnih i srednjih škola te smotra projektnih radova. Organizator je Matematičko društvo "Istra". Popularni *Klokan bez granica* je još jedno natjecanje na kojem mogu sudjelovati učenici koji žele. Cilj tog natjecanja je motivirati učenike da se bave matematikom izvan redovnih školskih programa. Postoje i natjecanja koja su na višoj razini, poput *Međunarodne matematičke olimpijade* na kojoj su zadaci često dosta teži nego na ostalim natjecanjima. Također postoje i neka druga međunarodna natjecanja poput *Mediteranskog natjecanja* na kojem se okupljaju učenici od drugog do četvrtog razreda koji su prethodne godine osvojili nagradu na državnom natjecanju iz matematike. Ovo natjecanje održava se u svakoj državi koja sudjeluje i onda se rezultati šalju u Španjolsku odakle stižu službene nagrade. Države koje mogu sudjelovati na natjecanju su one koje imaju izlaz na Sredozemno more i one koje imaju susjeda koji ima izlaz na Sredozemno more.

U ovom poglavlju cilj nam je promatrati kakvi se sve tipovi zadataka iz geometrije prostora (stereometrije) po temi i težini mogu pojaviti na natjecanjima iz matematike u srednjoj školi. Komentirat ćemo jesu li primjereni uzrastu i predznanju učenika te koje su težine.

Zadatak 1. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2011., 3. razred - srednja škola - B varijanta)

Osnovka trostrane piramide je pravokutan trokut s katetama duljine 12 cm i 35 cm. Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60°. Odredite oplošje i volumen piramide.

Rješenje:



Slika 2.1: Skica za zadatak 1.

Baza piramide je trokut ABC, a vrh ćemo označiti s V (Slika 2.1). Primjenom Pitagorina poučka izračunamo hipotenuzu osnovke trostrane piramide:

$$c = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37\,\text{cm}.$$

Označimo sa S nožište visine piramide. Točke M, P, Q su nožišta visina iz vrha V na stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$. Primijetimo da su trokuti SMV, SQV i SPV pravokutni s pravim kutom kod vrha S.

Trokuti SMV, SQV i SPV su međusobno u parovima sukladni. Naime, u svakom trokutu imamo pravi kut i kut od 60° pa je treći kut u svakom trokutu 30°. Trokuti imaju i jednu stranicu jednake duljine pa koristimo KSK teorem o sukladnosti. Konačno zaključujemo da su dužine $\overline{MS}$, $\overline{PS}$ i $\overline{QS}$ okomite na stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ te su jednakih duljina. Time smo dokazali da je nožište S visine piramide ujedno i središte trokutu ABC upisane kružnice. Označimo radijus te kružnice s r.

Kako je trokut ABC pravokutan, četverokut $PCQS$ ima tri prava kuta pa je ujedno i kvadrat. Iz toga slijedi da je $|CP| = |CQ| = r$.

Zbog sukladnosti trokuta AMS i APS, te trokuta BMS i BQS vrijedi

$$c = |AM| + |BM| = |AP| + |BQ|,$$

odnosno

$$c = (|AC| - |PC|) + (|BC| - |CQ|).$$

Označimo $|AC| = b$ i $|BC| = a$. Kako smo zaključili da je $|CP| = |CQ| = r$, slijedi

$$c = (b - r) + (a - r).$$

Tada je radijus upisane kružnice $r = \frac{a+b-c}{2} = 5$ cm.

Napomena: Površina trokuta ABC može se izračunati i kao zbroj površina trokuta BAS, ACS i CBS i pomoću umnoška kateta. Sada radijus upisane kružnice r možemo izračunati izjednačavanjem dviju formula za površinu $r \cdot s = \frac{ab}{2}$, gdje je s poluopseg trokuta ABC te ga računamo po formuli $s = \frac{a+b+c}{2}$. Uvrštavanjem u izjednačene formule dobivamo da je radijus upisane kružnice $r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$. Dobivamo $r = 5$ cm.

Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60° pa slijedi da visine svih pobočki (označimo ih s v_p) imaju iste duljine. Iz trokuta SPV primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu slijedi

$$\cos 60^\circ = \frac{r}{v_p},$$

odnosno

$$v_p = \frac{r}{\cos 60^\circ}.$$

Konačno imamo

$$v_p = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}.$$

Visina cijele piramide, v iznosi

$$v = \sin 60^\circ \cdot v_p,$$

iz čega slijedi

$$v = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Oplošje je površina mreže piramide koja se sastoji od trokuta ABC (osnovka piramide) i tri trokuta ABV, ACV, BCV (pobočje piramide).

Površinu osnovke označimo s B i računamo po formuli za površinu trokuta

$B = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trokuta ABC.

Površinu pobočja označimo s P i računamo kao zbroj površina tri trokuta:

$$P = P_{ABV} + P_{ACV} + P_{BCV} = \frac{c \cdot v_p}{2} + \frac{b \cdot v_p}{2} + \frac{a \cdot v_p}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot v_p}{2}.$$

Konačno imamo

$$O = B + P = \frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10 \cdot (35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 630 \text{ cm}^2.$$

Volumen iznosi:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{210 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = 350\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

Oplošje trostrane piramide je 630 cm^2, a volumen je $350\sqrt{3}$ cm^3.

Ovo je primjer jednog vrlo jednostavnog zadatka kojeg je moguće riješiti i na redovnoj nastavi. Primjeren je učenicima na kraju drugog razreda srednje škole. Ključan dio vezan uz stereometriju je prepoznavanje što je to kut između ravnina i kako on utječe na okomitost određenih dužina vezanih uz piramidu. Koristimo uz to još samo opće poznate formule za volumen i oplošje. Učenici tada znaju da je oplošje jednako površini svih strana koje omeđuju zadano tijelo. U ovom slučaju to su četiri trokuta kojima znaju odrediti površine. Volumen piramide jednak je trećini umnoška površine baze i visine piramide. Predznanje koje je potrebno je trigonometrija pravokutnog trokuta kako bi odredili visinu piramide.

Zadatak 2. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2012., 3. razred - srednja škola - A varijanta)

Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Njenim vrhovima A i C_1 te polovištem brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Izračunajte površinu presjeka kocke tom ravninom.

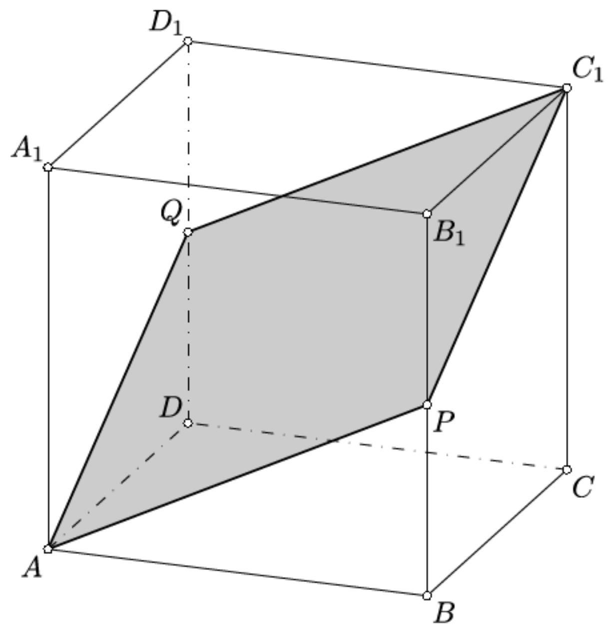
Rješenje:

Neka je P polovište brida $\overline{BB_1}$, a Q polovište brida $\overline{DD_1}$. Budući da je $AP \parallel QC_1$,

$PC_1 \parallel AQ$, zaključujemo da je APC_1Q paralelogram pa Q mora ležati u istoj ravnini kao i točke A, P i C_1. Dakle, zbog toga je točka Q presjek ravnine koja prolazi točkama A, P i C_1 i brida $\overline{DD_1}$ (Slika 2.2.).

Iz toga onda znamo da je taj paralelogram presjek kocke i zadane ravnine. Lako se vidi da su pripadne stranice paralelograma jednake pa iz toga zaključujemo da je taj paralelogram ujedno i romb zbog čega mu površinu možemo izračunati i kao pola umnoška dijagonala. Površina romba iznosi $P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |PQ|$.

Dijagonala romba APC_1Q, tj. dužina $\overline{AC_1}$ ujedno je i prostorna dijagonala kocke te je $|AC_1| = a\sqrt{3}$, gdje je a duljina brida zadane kocke. Druga dijagonala romba $\overline{PQ}$ jednaka je dijagonali strane kocke pa joj je duljina $|PQ| = a\sqrt{2}$.



Slika 2.2: Skica za zadatak 2.

Tada je površina romba $P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{6}$.

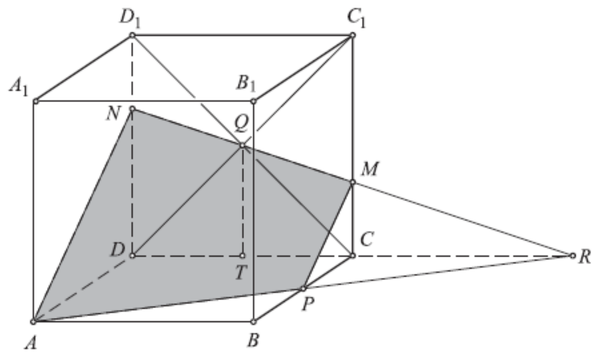
Zaključili smo da je površina presjeka kocke zadanom ravninom romb i njegova je površina $\frac{1}{2}a^2\sqrt{6}$.

Ovaj zadatak je specifičan po tome što računski dio nije toliko težak koliko je problem određivanje koji geometrijski lik je zapravo presjek kocke i zadane ravnine. Takvi zadaci često se pojavljuju na natjecanjima. Ovaj zadatak primjeren je školskom/gradskom natjecanju učenika trećih razreda i nije zahtjevniji od zadataka koji se pojavljuju u redovnoj nastavi. Najzahtjevniji dio je obrazloženje zašto ravnina prolazi polovištem bočnog brida. Iz te činjenice zaključujemo da je presjek ravnine i kocke romb. Odredimo li duljine dijagonala romba, možemo izračunati traženu površinu.

Zadatak 3. (Državno natjecanje iz matematike 2008., 3. razred - srednja škola - B varijanta)

U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka P je polovište brida $\overline{BC}$, a točka Q je središte kvadrata CC_1D_1D. Ravnina kroz točke A, P i Q dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih volumena?

Rješenje:



Slika 2.3: Skica za zadatak 3.

Presjek zadane ravnine i kocke je četverokut $APMN$. Presjek pravca CD i zadane ravnine je točka R, a T je polovište brida $\overline{CD}$ (Slika 2.3.). Duljinu brida kocke označimo s a, njezin volumen s V, volumen krnje piramide $ADNPCM$ s V_1, a volumen preostalog dijela kocke s V_2.

Trokuti ARD i PRC su slični pa vrijedi

$$\frac{|RD|}{|RC|} = \frac{|DA|}{|CP|} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

odakle je $|RD| = 2\,|RC|$ pa slijedi $|RC| = |CD| = a$.

Iz sličnosti trokuta QTR i MCR dobivamo

$$\frac{|QT|}{|CM|} = \frac{|RT|}{|RC|} = \frac{a + \frac{a}{2}}{a} = \frac{3}{2},$$

odakle je $|CM| = \frac{2}{3}\,|QT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

Analogno se dobije $|DN| = 2\,|CM| = \frac{2a}{3}$.

Tada je

$$V_1 = V_{ADNR} - V_{PCMR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|DA| \cdot |DN|}{2} \cdot |DR| - \frac{1}{3} \cdot \frac{|CP| \cdot |CM|}{2} \cdot |RC| = \frac{7a^3}{36}.$$

Konačno imamo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{7a^3}{36}}{a^3 - \frac{7a^3}{36}} = \frac{7}{29}.$$

Omjer volumena zadanih dijelova kocke je $\frac{7}{29}$.

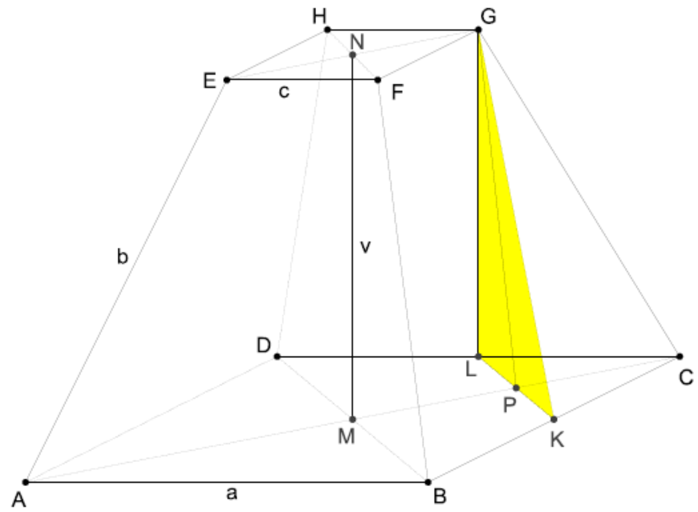
Ovo je još jedan primjer zadatka za učenike trećeg razreda, ali s državnog natjecanja. Ovaj zadatak je najčešći primjer zadataka vezanih uz geometriju tijela koji se zapravo svodi na ravninsku geometriju, odnosno pri rješavanju su potrebne tehnike i znanja kao što je sličnost trokuta. U ovom zadatku potrebno je uočiti da je presjek kocke i zadane ravnine četverokut (trapez) koji zadanu kocku dijeli na krnju piramidu i preostali dio kocke. Potrebno je izračunati volumene tih nastalih dijelova pri čemu će učenici koristiti sličnost trokuta. Volumen krnje piramide izračunat će tako da izračunaju volumen cijele piramide i oduzmu volumen dopunjka. Volumen preostalog dijela kocke jednak razlici volumena kocke i krnje piramide. Kako bi učenici uspješno riješili ovaj zadatak, trebali bi pohađati dodatne pripreme.

Zadatak 4. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2010., 3. razred - srednja škola - B varijanta)

Pravilnu četverostranu krnju piramidu čiji su osnovni bridovi $a = 12$ cm, $c = 8$ cm, a svi bočni bridovi $b = 20$ cm presjeca ravnina koja prolazi kroz krajnju točku dijagonale manje osnovke okomito na tu dijagonalu. Koliko je oplošje manjeg dijela piramide koji je nastao tim presijecanjem?

Rješenje:

Neka je visina krnje piramide v, te neka je $d = |AC|$, $d_1 = |EG|$, $x = |PK|$, $y = |PC|$ (Slika 2.4.).



Slika 2.4: Skica za zadatak 4.

Traženo oplošje nastale piramide $KLCG$ (s vrhom u G i osnovkom KLC) računamo kao zbroj površina:

$$O = P_{KLG} + 2 \cdot P_{KCG} + P_{KCL}.$$

Da bismo mogli izračunati površinu presjeka zadane piramide i ravnine, trokuta KLG, odredimo:

$$y = \frac{d - d_1}{2} = \frac{12\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Primjenom Pitagorina poučka odredimo visinu krnje piramide

$$v = \sqrt{b^2 - y^2} = \sqrt{400 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Iz sličnosti trokuta MBC i PKC slijedi

$$\frac{|MB|}{|PK|} = \frac{|MC|}{|PC|} = \frac{\frac{d}{2}}{x} = \frac{\frac{d}{2}}{y},$$

odnosno $x = y = 2\sqrt{2}$ cm i

$$\frac{|KC|}{|BC|} = \frac{|PC|}{|MC|} = \frac{|KC|}{a} = \frac{y}{\frac{d}{2}},$$

odnosno $|KC| = 4$ cm.

Površinu trokuta KLG računamo kao polovinu umnoška osnovice $\overline{KL}$ i visine $\overline{PG}$. Stoga je površina trokuta KLG jednaka

$$P_{KLG} = \frac{|KL| \cdot |PG|}{2}.$$

Kako je visina trokuta KLG jednaka visini krnje piramide v imamo

$$P_{KLG} = \frac{2 \cdot |PK| \cdot v}{2}$$

$$= \frac{2xv}{2} = 56\,\text{cm}^2.$$

Osnovica nastale piramide je trokut KLC, a njegova je površina jednaka polovini umnoška osnovice $\overline{KL}$ i visine $\overline{PC}$.

Stoga je površina trokuta KLG jednaka

$$P_{KLC} = \frac{|KL| \cdot |PC|}{2} = \frac{2\,|PK| \cdot |PC|}{2} = \frac{2xy}{2} = 8\,\text{cm}^2.$$

Bočne strane piramide su sukladni trokuti KCG i LCG s osnovicom duljine $|KC| = 4$ cm i visinom jednakom visini jednakokračnog trapeza $BCGF$ koju označimo s h. Stoga je površina trokuta KCG jednaka polovini umnoška tih dviju veličina

$$P_{KCG} = \frac{|KC| \cdot h}{2}.$$

Visinu trokuta KCG izračunamo primjenom Pitagorina poučka

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{|BC| - |FG|}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{400-4} = 6\sqrt{11} \text{ cm}.$$

Konačno površina trokuta KCG iznosi

$$P_{KCG} = \frac{4 \cdot 6\sqrt{11}}{2} = 12\sqrt{11} \text{ cm}^2.$$

Traženo oplošje nastale piramide računamo kao

$$O = P_{KLG} + 2 \cdot P_{KCG} + P_{KCL}$$

$$= 56 + 2 \cdot 12\sqrt{11} + 8 = 64 + 24\sqrt{11} \text{ cm}^2.$$

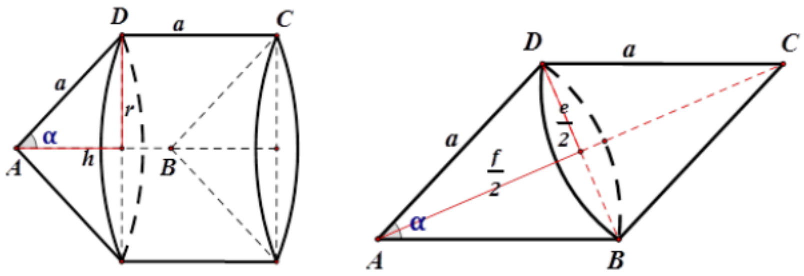
Oplošje manjeg dijela piramide koji je nastao zadanim presjecanjem iznosi $64 + 24\sqrt{11}$ cm^2.

Odabrali smo ovaj zadatak kao jedan od težih primjera koji se pojavio na školskom/gradskom natjecanju iz matematike za učenike trećih razreda. Potrebne su dodatne pripreme kako bi ga učenici riješili. Svrstali smo ga u teže zadatke budući da se radi o krnjoj piramidi koja je presječena ravninom. Potrebno je uočiti da zadana ravnina krnju piramidu dijeli na manju piramidu i preostali dio krnje piramide. Iako je potrebno izračunati oplošje nastale piramide, pojavit će se potreba za primjenom Pitagorinog poučka, sličnosti trokuta te sukladnosti trokuta, odnosno znanjima iz ravninske geometrije. Preostaje računski dio, izračunavanje površine svih strana piramide kako bi odredili oplošje manjeg dijela krnje piramide koji je nastao zadanim presijecanjem.

Zadatak 5. (Državno natjecanje iz matematike 2013., 3. razred - srednja škola - B varijanta)

Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi a. Romb prvo rotira oko pravca kojem pripada stranica $\overline{AB}$, a zatim oko pravca kojem pripada dijagonala $\overline{AC}$. Tim rotacijama dobivamo dva rotacijska tijela. Omjer njihovih volumena je $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$. Odredite šiljasti kut romba i omjer oplošja nastalih rotacijskih tijela.

Rješenje:



Slika 2.5: Skica za zadatak 5.

Rotacijom romba oko pravca AB nastaje rotacijsko tijelo koje se sastoji od stošca i šupljeg valjka kojem taj isti stožac nedostaje iznutra (Slika 2.5.).

Volumen tog tijela je

$$V_1 = V_{stošca} + V_{valjka} - V_{stošca} = V_{valjka}.$$

Šiljasti kut romba označit ćemo s α.

Primjećujemo da je

$$V_1 = r_{valjka}^2 \pi v_{valjka},$$

gdje je $r_{valjka} = v_{romba} = a \sin \alpha$, $v_{valjka} = a$ pa slijedi $V_1 = a^3 \pi \sin^2 \alpha$.

Ako romb rotira oko pravca AC, nastaje rotacijsko tijelo koje se sastoji od dva jednaka stošca, a njegov je volumen

$$V_2 = 2V_{stošca} = \frac{2}{3} r_{stošca}^2 \pi v_{stošca}.$$

Veću dijagonalu romba označimo s f, a manju s e.

Kako je $r_{stošca} = \frac{e}{2} = a \sin \frac{\alpha}{2}$, a $v_{stošca} = \frac{f}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2}$, volumen je

$$V_2 = \frac{2}{3} a^3 \pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Iz danog omjera $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$ slijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{\sqrt{3}},$$

odnosno

$$\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{\sqrt{3}}.$$

Odatle je $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pa je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$, a $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Odredimo omjer oplošja. Oplošje prvog tijela je

$$O_1 = 2 \cdot P_{stošca} + P_{valjka} = 2 \cdot v_{romba} \cdot \pi \cdot a + 2 \cdot v_{romba} \cdot \pi \cdot a$$

$$= 4v_{romba}a\pi = 4a\sin\alpha \cdot a\pi = 4\pi a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi\sqrt{3}a^2.$$

Oplošje drugog tijela je $O_2 = 2r_{stošca}\pi a = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\pi a = a^2\pi$.

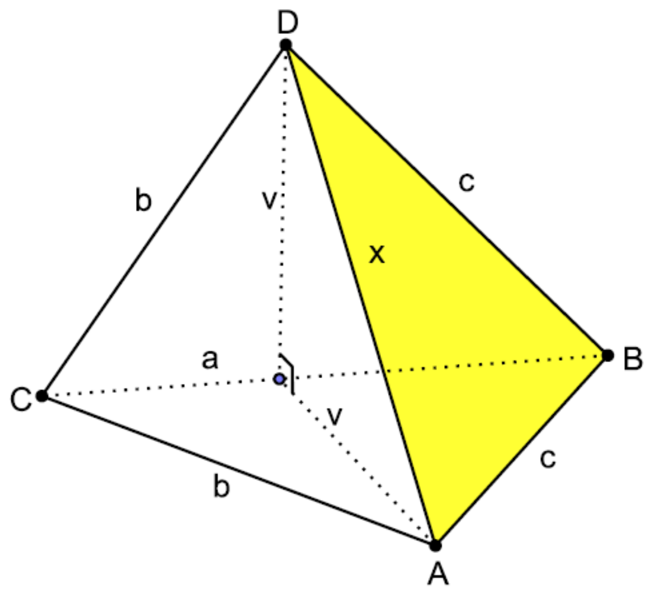
Omjer tih oplošja je $O_1 : O_2 = 2\sqrt{3} : 1$.

U ovom primjeru zadatka s državnog natjecanja pojavljuju se rotacijska tijela koja se mogu opisati pomoću poznatih geometrijskih tijela. Potrebno je uočiti koja geometrijska tijela nastaju rotacijom romba. Za ovaj zadatak potrebno je imati dobro razvijeni prostorni zor kako bi se otkrilo što nastaje kojom rotacijom. Prvom rotacijom nastaju stožac i valjak kojem taj isti stožac nedostaje iznutra, a rotacijom oko drugog pravca nastaje tijelo koje se sastoji od dva jednaka stošca. Učenici trebaju odrediti volumene kako bi iz omjera odredili šiljasti kut romba. Odredivši oplošja nastalih rotacijskih tijela mogu odrediti njihov omjer. Zadatak možemo svrstati u teže primjere jer se radi o rotacijskim tijelima, ali nije računski zahtjevan.

Zadatak 6. (Županijsko natjecanje iz matematike 2011., 4. razred - srednja škola - B varijanta)

Baza trostrane piramide je trokut sa stranicama a, b i c. Duljina stranice c je 7 cm, $a-b=5$ cm, a kut nasuprot stranici c, $\gamma = 60°$. Pobočka koja sadrži najdulji osnovni brid okomita je na ravninu baze i sukladna bazi. Izračunajte volumen piramide i površinu najveće pobočke piramide.

Rješenje:



Slika 2.6: Skica za zadatak 6.

Iz poučka o kosinusu imamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

iz čega slijedi

$$49 = (b+5)^2 + b^2 - 2(b+5)b \cdot \frac{1}{2},$$

odnosno

$$b^2 + 5b - 24 = 0.$$

Konačno dobivamo $b = 3$ cm, $a = 8$ cm. Sada možemo napraviti skicu (Slika 2.6.).

Kako je pobočka CBD sukladna bazi i okomita na nju, visina piramide jednaka je visini baze iz vrha A. Visinu piramide označit ćemo s v. Tada je $\sin\gamma = \frac{v}{b}$, odnosno $v = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

Površina baze je

$$B = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Tada je volumen piramide

$$V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = 9\,\text{cm}^3.$$

Površina pobočke CBD jednaka je površini baze. Kako je duljina stranice b manja od duljine stranice c, pobočka ABD je veća od pobočke CAD pa ćemo računati njezinu površinu.

Izračunajmo duljinu nepoznatog brida x. On je hipotenuza u jednakokračnom pravokutnom trokutu s katetom duljine v pa zato slijedi

$$x = v\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,\text{cm}.$$

Duljina visine pobočke ABD iznosi

$$y = \sqrt{c^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{730}}{4}\,\text{cm}$$

i njezina je površina

$$P = \frac{y \cdot x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{730}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{16} \cdot \sqrt{4380} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{1095}\,\text{cm}^2.$$

Sada je potrebno usporediti površine trokuta CBD i ABD da bi se uvjerili koja je veća. Površina trokuta CBD je $6\sqrt{3}$ cm^2, tj. približno 10.39 cm^2. Površina trokuta ABD je $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{1095}$ cm^2, tj. približno 12.41 cm^2. Zaključujemo da veću površinu ima trokut ABD.

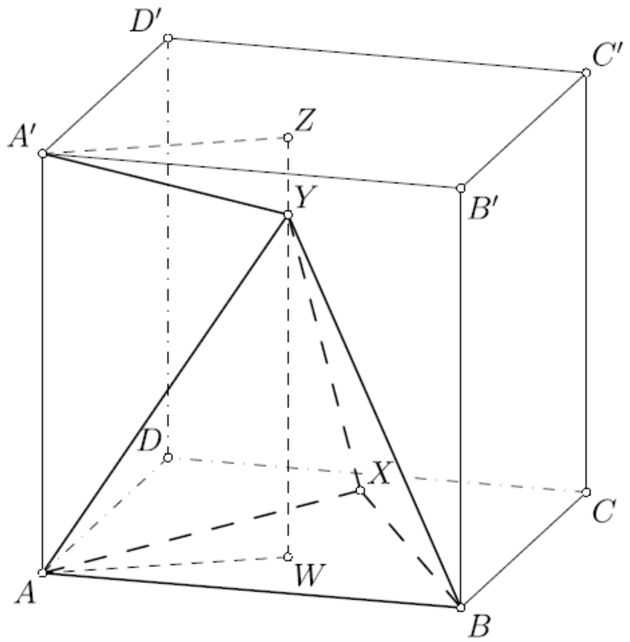
Volumen piramide iznosi 9 cm^3, a površina najveće pobočke iznosi $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{1095}$ cm^2.

Ovo je primjer jednog lakšeg zadatka na županijskom natjecanju za učenike četvrtog razreda u kojem se zapravo problem stereometrije svodi na problem u ravnini. Iako je potrebno izračunati volumen piramide i površinu pobočke, učenici prvo trebaju primijeniti poučak o kosinusu kako bi izračunali stranice osnovke piramide. Za računanje ostalih veličina potrebno im je znanje trigonometrije za općeniti trokut te sukladnosti trokuta. Ovaj zadatak primjeren je navedenom uzrastu učenika, ali bi ga mogli riješiti i učenici trećeg razreda te nije puno zahtjevniji od zadataka koji se rade na redovnoj nastavi.

Zadatak 7. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2011., 4. razred - srednja škola - A varijanta)

Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 tako da točka X pripada ravnini $ABCD$. Odredite udaljenost točaka Y i A'.

Rješenje:



Slika 2.7: Skica za zadatak 7.

Prvo rješenje:

Neka je Z nožište okomice iz točke Y na ravninu $A'B'C'D'$, a W nožište okomice iz točke Y na ravninu $ABCD$. Vrijedi da je $|ZA'| = |WA|$ (Slika 2.7.).

Točka W je težište jednakostraničnog trokuta ABX pa je $|WA| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Trokut AWY je pravokutan s pravim kutom u vrhu W pa po Pitagorinom poučku vrijedi

$$|WY| = \sqrt{|AY|^2 - |AW|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Iz toga dobivamo

$$|ZY| = |ZW| - |YW| = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}.$$

Konačno, iz činjenice da je trokut $A'YZ$ pravokutan s pravim kutom u vrhu Z, imamo

$$|A'Y| = \sqrt{|A'Z|^2 + |YZ|^2}$$

$$= \sqrt{|AW|^2 + |YZ|^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

Drugo rješenje:

Postavimo kocku u koordinatni sustav u prostoru tako da su koordinate vrhova

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A'(0, 0, 1)$.

Koordinate točke X su $X\left(\frac{1}{2}, x, 0\right)$ i vrijedi $|AX| = |AB| = 1$, pa je $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $X\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Koordinate težišta trokuta ABX, odnosno točke W, su

$$W\left(\frac{0 + 1 + \frac{1}{2}}{3}, \frac{0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \frac{0 + 0 + 0}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right).$$

Ta točka je ortogonalna projekcija vrha Y na ravninu $ABCD$, pa je $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)$.

Vrijedi $|AY| = |AB| = 1$ pa iz

$$|AY| = \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)\right| = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} + y^2 = 1$$

dobivamo $y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i konačno $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Sada možemo odrediti traženu udaljenost $|A'Y|$:

$$|A'Y| = \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36} + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

Udaljenost točaka Y i A' iznosi $\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

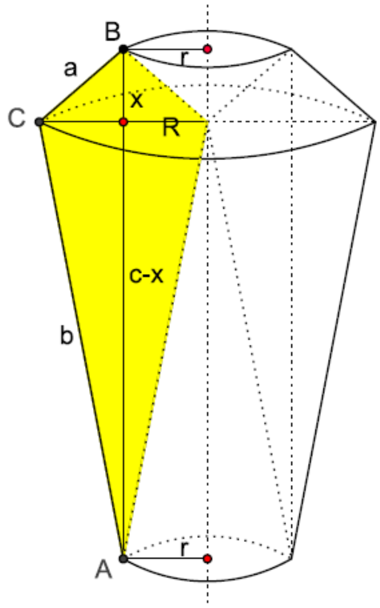
Ovaj zadatak je specifičan po tome što se može riješiti na dva načina. Prvi način se svodi na problem u ravnini, primjenom Pitagorina poučka i znanja o težištu trokuta učenici mogu doći do rješenja. Drugi način rješavanje je pomoću koordinatnog zapisa bez nekog većeg znanja analitičke geometrije u prostoru jer je potrebno znati samo kako se očitavaju koordinate točaka i kako se računa udaljenost dviju točaka zadanih svojom trojkom koordinata.

Zadatak 8. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2011., 4. razred - srednja škola - B varijanta)

Deltoid rotira oko pravca koji prolazi jednim njegovim vrhom, a paralelan je s osi simetrije deltoida. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom ako su duljine stranica deltoida $a = 2$ cm, $b = 8$ cm, a kut među njima $\alpha = 120°$.

Rješenje:

Tijelo koje se dobije danom rotacijom je sastavljeno od dva krnja stošca kojima nedostaju dva stošca (Slika 2.8.).



Slika 2.8: Skica za zadatak 8.

Oba krnja stošca imaju polumjere manje baze r, a veće (zajedničke baze) R.

Polumjer r je jednak polovici manje dijagonale deltoida ili visini na stranicu c trokuta ABC, a $R = 2r$.

Označimo s V_{ks1} volumen manjeg krnjeg stošca i neka mu je visina jednaka x. Nadalje, neka je V_{ks2} volumen većeg krnjeg stošca. Njegova visina je dakle $c - x$. S V_1 označimo volumen stošca koji nedostaje manjem krnjem stošcu, a s V_2 volumen stošca koji nedostaje većem krnjem stošcu. Njihove visine su redom jednake x i $c - x$.

Traženi volumen je $V = V_{ks1} + V_{ks2} - V_1 - V_2$.

Stoga je

$$V = \frac{x\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) + \frac{(c-x)\pi}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) - \frac{r^2\pi x}{3} - \frac{r^2\pi(c-x)}{3}$$

$$= \frac{\pi(R^2 + r^2 + Rr)}{3} \cdot (x + c - x) - \frac{r^2\pi}{3}(x + c - x)$$

$$= \frac{c\pi}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr - r^2)$$

$$= \frac{c\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr).$$

Tada je uz $R = 2r$

$$V = 2r^2\pi c.$$

Izračunajmo r i c primjenom poučka o kosinusu. Vrijedi

$$c^2 = 2^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cos 120^\circ = 84,$$

odnosno

$$c = 2\sqrt{21} \text{ cm}.$$

Polumjer baze r računamo tako da površinu trokuta ABC izrazimo na dva različita načina. Imamo

$$\frac{r \cdot c}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \sin 120^\circ$$

pa dobivamo

$$r = \frac{2 \cdot 8 \sin 120^\circ}{2\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \text{ cm}.$$

Tada je traženi volumen

$$V = 2 \cdot \frac{16}{7} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \pi = \frac{64\sqrt{21} \cdot \pi}{7} \text{ cm}^3.$$

Kao posljednji primjer odabrali smo zadatak s rotacijskim tijelima koji je bio namijenjen učenicima četvrtih razreda, ali mogao bi biti zadan i učenicima trećih razreda. Najveći problem kod rješavanja ovakvih tipova zadataka je uočavanje što nastaje rotacijom zadanog lika. U ovom primjeru, rotacijom deltoida nastaju dva krnja stošca kojima je potrebno izračunati volumen. Njihove volumene izračunat ćemo tako da od volumena punih stožaca oduzmemo volumene pripadnih dopunjaka. Kod računa je potrebno znanje poučka o kosinusu i poznavanje formula za površinu trokuta ako znamo dvije stranice i kut.

Poglavlje 3

Sferna geometrija

3.1 Sferni trokut

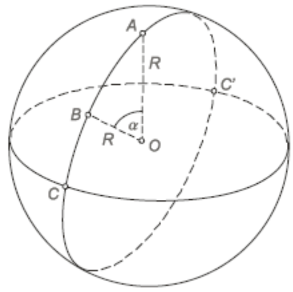
U ovom poglavlju opisat ćemo osnovne pojmove sferne geometrije. To je tema koja je pogodna za obrađivanje na dodatnoj nastavi matematike jer su učenici već upoznati detaljnije s pojmovima kao što su kružnica, sfera, kružni lukovi. Znaju izračunati duljinu luka pomoću kuta te površinu kružnog isječka. S druge strane, u trećem razredu srednje škole učenici se upoznaju s trigonometrijom za opće trokute pa je zanimljivo vidjeti kako izgledaju analogne formule i svojstva kad trokut nije ravninski.

Sferna geometrija je geometrija na kuglinoj površini (sferi). Zanimljivo je da se sferna trigonometrija počela razvijati prije ravninske trigonometrije jer je bila potrebna za navigaciju i astronomiju. Danas je potrebna u pomorskoj, zrakoplovnoj i satelitskoj navigaciji, astronomiji i geofizici.

Prvo ćemo definirati neke osnovne pojmove kao što su sfera, glavna kružnica sfere, sferni dvokut, sferni trokut i polarni trokut.

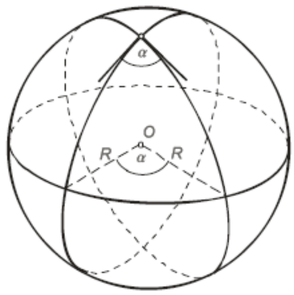
Definicija 3.1.1. *Sfera $S(O,R)$ je skup svih točaka prostora koje su za R udaljene od točke O koju zovemo središte sfere, dok je R radijus sfere.*

Definicija 3.1.2. *Glavna ili velika kružnica sfere je kružnica koja je presjek sfere i ravnine kroz njezino središte. Njezin radijus jednak je radijusu sfere (Slika 3.1.).*



Slika 3.1: Dvije glavne kružnice sfere

Dvije glavne kružnice dijele površinu sfere na četiri dijela, preciznije na četiri dvokuta, od kojih su dva i dva nasuprotna međusobno jednaka. Drugim riječima, dvokut je dio sfere među dvjema glavnim polukružnicama (Slika 3.2.).

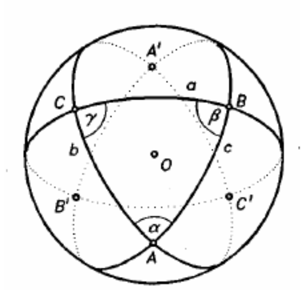


Slika 3.2: Sferni dvokut

Vrhovi dvokuta su točke u kojima se sijeku glavne kružnice koje omeđuju dvokut. Kut dvokuta α $(0 < \alpha < \pi)$ je kut između tangenti u vrhu dvokuta na polukružnice koje ga određuju.

Definicija 3.1.3. *Antipodalne točke sfere su točke koje su jedna drugoj centralno simetrične s obzirom na središte sfere.*

Definicija 3.1.4. *Neka su $A, B, C \in S(O, R)$ tri točke koje ne pripadaju istoj glavnoj kružnici sfere i nikoje dvije nisu antipodalne točke. Spojimo li te točke trima lukovima glavnih kružnica, onda se dio sfere omeđen tim lukovima zove sferni trokut s vrhovima A, B i C (Slika 3.3.).*



Slika 3.3: Sferni trokut ABC

Napomena: u definiciji 3.1.4 podrazumijevamo da su glavne kružnice orijentirane jer bi u protivnom mogli promatrati osam sfernih trokuta. Također, ako imamo dvije točke na sferi koje nisu antipodalne, onda one zajedno sa središtem sfere na jedinstven način određuju ravninu. Ta ravnina u presjeku sa sferom određuje glavnu kružnicu na kojoj se nalazi stranica sfernog trokuta kojoj su dane dvije točke krajnje.

Stranice sfernog trokuta su lukovi na glavnim kružnicama pa pod duljinom stranica podrazumijevamo duljinu luka. S druge strane, ako imamo dvije stranice sfernog trokuta, onda se one nalaze na dvjema glavnim kružnicama. Ako u pripadnom vrhu sfernog trokuta nacrtamo tangente na te kružnice, kut između danih stranica je zapravo kut između tih tangenti. Kutove ćemo izražavati u radijanima.

Definicija 3.1.5. *Neka je $\overset{\frown}{AB}$ luk na pozitivno orijentiranoj glavnoj kružnici k sfere. Točka K sfere koja se nalazi na promjeru sfere koji je okomit na ravninu te glavne kružnice, u pozitivnom smjeru, zove se pol luka $\overset{\frown}{AB}$, odnosno pol kružnice k.*

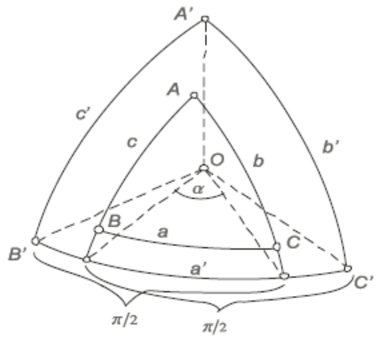
Definicija 3.1.6. *Neka je trokut ABC sferni trokut i neka su redom: A' pol luka $\overset{\frown}{BC}$, tj. stranice a, B' pol luka $\overset{\frown}{CA}$, tj. stranice b i C' pol luka $\overset{\frown}{AB}$, tj. stranice c. Spojimo li te točke lukovima dobivamo polarni trokut $A'B'C'$ (Slika 3.4.).*

Teorem 3.1.7. *Neka su stranice sfernog trokuta $\overset{\frown}{AB}= c$, $\overset{\frown}{BC}= a$ i $\overset{\frown}{CA}= b$, a α, β i γ su kutovi među stranicama. Onda vrijede sljedeća svojstva sfernog trokuta:*

1. $a + b > c$, $|a - b| < c$;
2. $\alpha + \beta < \gamma + \pi$;

3. *Vrijede nejednakosti za zbroj kutova u sfernom trokutu:* $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$,

   te vrijede nejednakosti za zbroj stranica u sfernom trokutu: $0 < a + b + c < 2R\pi$.



Slika 3.4: Polarni trokut $A'B'C'$

Dokaz. Prvu tvrdnju ćemo dokazati tako da pogledamo jedan trobrid određen središtem sfere i s tri ravnine od kojih svaka sadrži središte sfere i po jednu stranicu zadanog sfernog trokuta. Pretpostavimo da su kutovi tog trobrida jednaki $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$.

Tada računamo duljine stranica sfernog trokuta, tj. duljine lukova s $a = R \cdot \overline{\alpha}$, $b = R \cdot \overline{\beta}$ i $c = R \cdot \overline{\gamma}$.

Sada znamo da za trobrid i njegove kutove vrijedi da su svaka dva u zbroju veća od preostalog, tj. imamo

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} + \overline{\beta} &> \overline{\gamma}, \\ \overline{\alpha} + \overline{\gamma} &> \overline{\beta}, \\ \overline{\beta} + \overline{\gamma} &> \overline{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \frac{a}{R}, \\ \overline{\beta} &= \frac{b}{R}, \\ \overline{\gamma} &= \frac{c}{R}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnih jednakosti u (3.1) dobivamo tri nejednakosti

$$a + b > c,$$
$$a + c > b,$$
$$b + c > a.$$

Iz dosad dokazanog da je $b + c > a$ i $a + c > b$ slijedi $c > a - b$ i $c > b - a$. To odmah povlači napisanu nejednakost $|a - b| < c$.

Uzmimo sferni trokut $A_1B_1C_1$ koji je homotetičan trokutu ABC s obzirom na središte sfere i nalazi se na koncentričnoj jediničnoj sferi. Označimo njegove stranice s a_1, b_1, c_1. Trokut ABC i $A_1B_1C_1$ imaju jednake kutove. Neka je $A_1'B_1'C_1'$ polarni trokut trokuta $A_1B_1C_1$, sa stranicama a_1', b_1', c_1'. Tada vrijede jednakosti:

$$\alpha + a_1' = \pi,$$
$$\beta + b_1' = \pi,$$
$$\gamma + c_1' = \pi,$$
$$\alpha' + a_1 = \pi,$$
$$\beta' + b_1 = \pi,$$
$$\gamma' + c_1 = \pi.$$

Primijenimo prvu tvrdnju teorema na polarni trokut $A_1'B_1'C_1'$, tj. vrijedi $a_1' + b_1' > c_1'$. Onda primjenom relacije između početnog i polarnog trokuta dobivamo

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) > \pi - \gamma,$$

odnosno

$$\alpha + \beta < \gamma + \pi.$$

Dokažimo sada treću tvrdnju. Neka je trokut $A_1B_1C_1$ definiran kao prije. Vrijedi $a = R \cdot a_1$, $b = R \cdot b_1$ i $c = R \cdot c_1$. Sferni trokut $A_1B_1C_1$ nadopunimo preko svake njegove stranice na pripadni dvokut. Ova nadopuna daje nam tri nova sferna trokuta na kojima ćemo primijeniti prvu tvrdnju ovog teorema, tj. vrijedi

$$\pi - c_1 + \pi - b_1 > a_1 > 0,$$
$$\pi - a_1 + \pi - c_1 > b_1 > 0,$$
$$\pi - b_1 + \pi - a_1 > c_1 > 0.$$

Zbrojimo li ove tri nejednakosti dobivamo

$$0 < a_1 + b_1 + c_1 < 2\pi. \tag{3.2}$$

Uvrstimo sljedeće jednakosti $a_1 = \frac{a}{R}$, $b_1 = \frac{b}{R}$ i $c_1 = \frac{c}{R}$ u (3.2).

Konačno dobivamo

$$0 < a + b + c < 2R\pi.$$

Da bismo dokazali da vrijedi nejednakost za zbroj kutova u trokutu ABC, primijenimo tvrdnju (3.2) na polarni trokut $A_1'B_1'C_1'$. Dobivamo $0 < a_1' + b_1' + c_1' < 2\pi$. Sada koristimo vezu između sfernog trokuta na jediničnoj sferi i njegovog polarnog trokuta i dobivamo

$$0 < \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi.$$

Iz toga slijedi

$$0 < 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi,$$

odnosno

$$-3\pi < -(\alpha + \beta + \gamma) < -\pi.$$

Konačno slijedi

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

□

Sada ćemo definirati jednu veličinu ovisnu o kutovima sfernog trokuta pomoću koje možemo izraziti njegovu površinu.

Definicija 3.1.8. *Razlika zbroja kutova sfernog trokuta i π je kut koji se zove sferni eksces i označava s ϵ, tj. $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Tada vrijedi:

Teorem 3.1.9. *Površina P sfernog trokuta ABC jednaka je umnošku sfernog ekscesa i kvadrata radijusa sfere, tj. $P = \epsilon \cdot R^2$.*

Dokaz. Neka su točke A', B', C' antipodalne točkama A, B, C redom (Slika 3.3.). Tada vrijedi

$$P + P_{A'BC} = 2R^2\alpha,$$

$$P + P_{B'AC} = 2R^2\beta,$$

$$P + P_{C'BA} = 2R^2\gamma.$$

Zbrojimo li ove tri jednakosti, dobivamo

$$3P + P_{A'BC} + P_{B'AC} + P_{C'BA} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \tag{3.3}$$

Trokuti ABC, $A'BC$, $B'AC$ i $C'BA$ čine polusferu pa je zbroj njihovih površina jednak polovini površine sfere, tj.

$$P + P_{A'BC} + P_{B'AC} + P_{C'BA} = 2R^2\pi.$$

Uvrstimo li prethodnu jednakost u (3.3) dobivamo

$$2P + P + P_{A'BC} + P_{B'AC} + P_{C'BA} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma),$$

odnosno

$$2P + 2R^2\pi = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$2P = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Konačno dobivamo

$$P = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \epsilon.$$

□

3.2 Sferna trigonometrija

U ovom potpoglavlju, iako se radi o sfernoj trigonometriji, i dalje možemo koristiti formule za kutove koje standardno vrijede (za koje nije važno radimo li s ravninskim ili sfernim trokutom). Neke takve poznate formule su

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

te adicijske formule

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

Trigonometrijske formule koje povezuju stranice i kutove u sfernom trokutu općenito se razlikuju od analognih formula za ravninski trokut. Kao primjer ćemo navesti sljedeći poučak.

Teorem 3.2.1 (Poučak o kosinusu za stranice). *Neka je zadan sferni trokut ABC na jediničnoj sferi, sa stranicama a, b, c. Tada vrijedi*

1. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$;
2. $\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos\beta$;
3. $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$.

Pomoću prethodnog teorema se lako dokazuje:

Teorem 3.2.2 (Poučak o sinusu). *Neka je zadan sferni trokut ABC na jediničnoj sferi, sa stranicama a, b, c. Tada vrijedi da se sinusi kutova sfernog trokuta ABC odnose kao sinusi nasuprotnih stranica, tj. vrijedi*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Drugi zapis poučka o sinusu je:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$$

Dokaz. Primijenimo poučak o kosinusu za stranice trokuta ABC, odnosno vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

Upotrijebimo tu jednakost kako bismo izračunali $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}$.

Tada imamo

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}}{\sin^2 a}$$

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c)}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - (1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c)}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - 1 + \sin^2 b + \sin^2 c - \sin^2 b \cdot \sin^2 c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{-\cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - 1 + 1 - \cos^2 b + 1 - \cos^2 c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}.$$

Analogno, uz

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos c \cdot \cos a}{\sin c \cdot \sin a},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

dobivamo

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{1 - \cos^2\beta}{\sin^2 b} = \ldots = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c} = \frac{1 - \cos^2\gamma}{\sin^2 c} = \ldots = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}.$$

Zbog jednakosti desnih strana slijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c},$$

odnosno

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

$\square$

Teorem 3.2.3 (Poučak o kosinusu za kutove). *Neka je zadan sferni trokut ABC na jediničnoj sferi, sa stranicama a, b, c. Tada vrijedi*

1. $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$;
2. $\cos\beta = -\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos b$;
3. $\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c$.

Dokaz. Neka je trokut $A'B'C'$ polarni trokut trokuta ABC.

Iz poučka o kosinusu za stranice trokuta $A'B'C'$ slijedi

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos\alpha',$$

tj.

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \cdot \sin(\pi - \gamma) \cdot \cos(\pi - a).$$

Kako je

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma,$$

slijedi

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a.$$

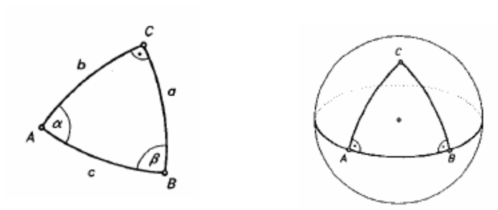
Analogno se dokazuju preostale dvije tvrdnje. □

3.3 Pravokutni sferni trokut

Pravokutni sferni trokut je sferni trokut koji ima bar jedan pravi kut. Sferni trokut, za razliku od ravninskog, može imati dva, pa i tri prava kuta. Neka je u pravokutnom trokutu ABC kut $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Označimo stranice trokuta s a, b, c, gdje je c hipotenuza trokuta (Slika 3.5.).

Iz poučka o kosinusu za stranice dobivamo

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

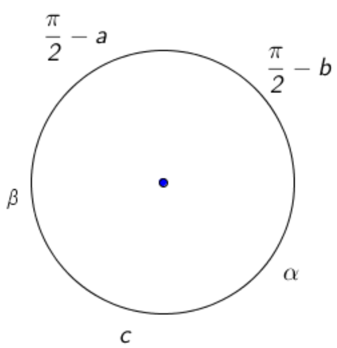


Slika 3.5: Pravokutni sferni trokut

Iz poučka o sinusu imamo

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c},\ \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Za pravokutni sferni trokut formule je lakše pamtiti pomoću matematičkog pravila pod nazivom Napierovo pravilo. Osmislio ga je škotski matematičar John Napier (1550. - 1617.).



Slika 3.6: Napierovo kolo

Shemu na slici 3.6 zovemo Napierovo kolo.

Napierovo pravilo je:

Neka je zadan pravokutan sferni trokut ABC sa stranicama $a,\ b,\ c$ pri čemu je kut γ pravi. Neka su preostala dva kuta α i β. Tada je kosinus svakog elementa na Napierovom kolu jednak produktu kotangensa susjednih elemenata, a jednak je i produktu sinusa nesusjednih elemenata.

Prema tom pravilu čitamo relacije

$$
\begin{gathered}
\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \\
\cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \cdot \cos b, \\
\cos\beta = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c, \\
\cos\beta = \sin\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\alpha \cdot \cos b, \\
\cos\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cdot \operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c, \\
\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin\beta = \cos a \cdot \sin\beta.
\end{gathered}
$$

Poglavlje 4

Dodatne teme iz stereometrije

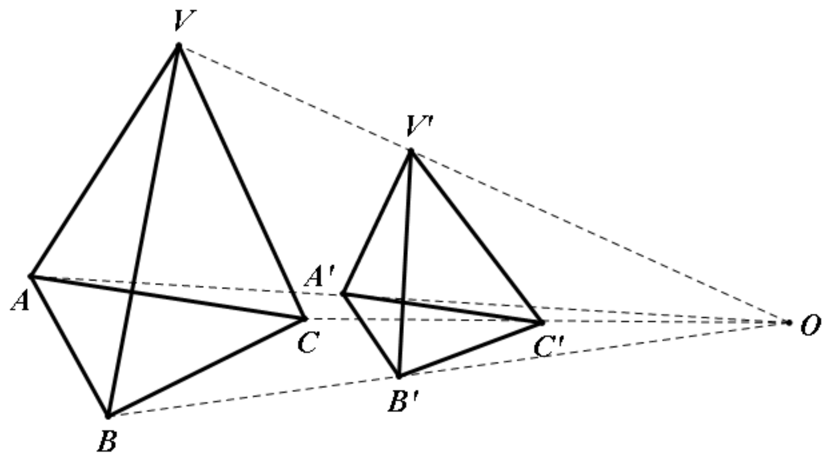
4.1 Presjeci pravaca i ravnina

U ovom potpoglavlju proći ćemo kroz jedan tip zadataka u kojima se dokazuje da je presjek pravaca točka ili da se zadane ravnine sijeku u jednoj točki. Za rješavanje takvih zadataka nije potrebno neko novo znanje, ali je potrebno shvatiti princip po kojem se provodi dokaz. Kako takvi zadaci nisu standardni tipovi zadataka s redovne nastave, potrebno je s učenicima riješiti nekoliko različitih primjera. Na primjer, jedan od načina na koji se mogu riješiti zadaci u kojima se dokazuje što je presjek pravaca je da se uzme točka koja je presjek neka dva zadana pravca i točka koja je presjek neka druga dva pravca od zadanih te se dokazuje da su te točke jednake. Ako se to može dokazati za bilo koji par pravaca, onda je dokaz gotov. Promotrimo sada nekoliko poznatih rezultata o presjecima pravaca i presjecima ravnina.

Propozicija 4.1.1. *Ako dva slična tetraedra s koeficijentom sličnosti k, $k \neq 1$, postavimo tako da su im odgovarajući bridovi paralelni, onda se pravci koji spajaju odgovarajuće vrhove sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. Označimo zadane tetraedre s $ABCV$ i $A'B'C'V'$. Znamo da su smješteni tako da su im odgovarajući bridovi paralelni (Slika 4.1.).

Kako su tetraedri slični, vrijedi



Slika 4.1: Dva slična tetraedra

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|VA|}{|V'A'|} = \frac{|VB|}{|V'B'|} = \frac{|VC|}{|V'C'|} = k,$$

gdje je k koeficijent sličnosti.

Promotrimo pravce u prostoru VV' i AA'. Kako su pravci VA i $V'A'$ paralelni, onda točke V, A, V', A' pripadaju istoj ravnini pa i pravci VV' i AA' pripadaju istoj ravnini. Znači nisu mimoilazni. Ako bi pravci VV' i AA' bili paralelni, onda bi četverokut $V'VAA'$ bio paralelogram pa bi vrijedilo $|VA| = |V'A'|$, odnosno koeficijent k bi bio 1. U tom slučaju dolazimo do kontradikcije pa pravci VV' i AA' nisu paralelni. Zaključili smo da pripadaju istoj ravnini pa se moraju sjeći. Točku sjecišta tih dvaju pravaca označimo s O. Na isti način ćemo dokazati i da se pravci BB' i AA' sijeku.

Iz sličnosti trokuta VAO i $V'A'O$ slijedi

$$\frac{|AO|}{|A'O|} = \frac{|VA|}{|V'A'|}.$$

Analogno iz sličnosti trokuta ABO' i $A'B'O'$ slijedi

$$\frac{|AO'|}{|A'O'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

Zbog sličnosti tetraedra vrijedi

$$\frac{|VA|}{|V'A'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

Konačno imamo

$$\frac{|AO|}{|A'O|} = \frac{|AO'|}{|A'O'|}.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je O' dalje od A i A' nego točka O pa vrijedi

$$|AO'| = |AO| + |OO'|,$$

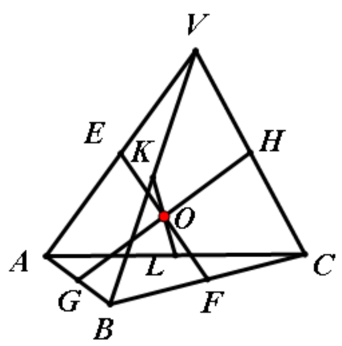
$$|A'O'| = |A'O| + |OO'|.$$

Uvrstimo u jednakost i dobivamo

$$\frac{|AO|}{|A'O|} = \frac{|AO| + |OO'|}{|A'O| + |OO'|}.$$

Sada uočavamo da mora biti $|OO'| = 0$, odnosno točke O i O' se podudaraju. Isti postupak ponovimo i npr. s kombinacijom pravaca AA', BB', CC' te konačno možemo reći da se sva četiri pravca sijeku u jednoj točki. □

Propozicija 4.1.2. *Dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih bridova tetraedra sijeku se u jednoj točki i međusobno se raspolavljaju.*



Slika 4.2: Slika za propoziciju 4.1.2

Dokaz. Neka je $ABCV$ tetraedar. Točke E, F, G, H, K i L su polovišta bridova $\overline{VA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VB}$ i $\overline{AC}$ (Slika 4.2.). Tada je $\overline{EH}$ srednjica trokuta ACV, odnosno pravac EH je paralelan s pravcem AC i vrijedi $|EH| = \frac{1}{2}|AC|$. Analogno je $\overline{GF}$ srednjica trokuta ABC, odnosno pravac GF je paralelan s pravcem AC i vrijedi $|GF| = \frac{1}{2}|AC|$. Zaključujemo da je $|EH| = |GF|$ te da su pravci EH i GF paralelni. Četverokut $GFHE$ je dakle paralelogram i njegove su dijagonale $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$. One se sijeku u točki O. Svojstvo dijagonala paralelograma je da se međusobno raspolavljaju. Dakle, točka O raspolavlja $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$. Slično se pokaže da su $\overline{GH}$ i $\overline{KL}$ dijagonale paralelograma $GLHK$ te se međusobno sijeku u svojem polovištu. Kako je polovište dužine $\overline{GH}$ točka O, sve zadane dužine se sijeku u točki O.

Konačno zaključujemo da se dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih bridova tetraedra sijeku u jednoj točki i međusobno se raspolavljaju. □

Sada ćemo na vrlo sličan način kao u prethodnoj propoziciji dokazati da se zadane ravnine sijeku u jednoj točki.

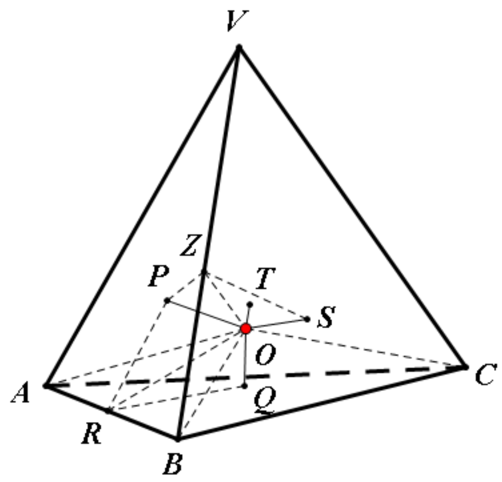
Korolar 4.1.3. *Šest ravnina, od kojih svaka sadrži brid tetraedra i raspolavlja nasuprotni brid, sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Promotrimo Sliku 4.2.

Neka je prva ravnina ona koja sadrži brid $\overline{VA}$ i prolazi točkom F, odnosno sadrži dužinu $\overline{EF}$. Druga ravnina je ona koja sadrži brid $\overline{VB}$ i prolazi točkom L, odnosno sadrži dužinu $\overline{KL}$. Treća ravnina sadrži brid $\overline{VC}$ i prolazi točkom G, odnosno sadrži dužinu $\overline{GH}$. Preostale tri zadane ravnine prolaze kroz bridove $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ i sadrže dakle redom dužine $\overline{GH}$, $\overline{EF}$ i $\overline{KL}$. Sada uočavamo da od šest promatranih ravnina svaka sadrži dužinu koja spaja polovišta nasuprotnih bridova tetraedra. Dakle, iz propozicije 4.1.2 zaključujemo da se navedene dužine sijeku u točki O. Odnosno, šest zadanih ravnina se siječe u jednoj točki. □

Propozicija 4.1.4. *Šest ravnina koje raspolavljaju kutove između strana tetraedra sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je $ABCV$ zadani tetraedar. Pogledajmo tri ravnine koje raspolavljaju kutove između ravnine kojoj pripada osnovka tetraedra ABC i ravnina ABV, BCV i CAV redom. Možemo zaključiti da se one sve sijeku u jednoj točki, nazovimo ju O (Slika 4.3.).



Slika 4.3: Slika za propoziciju 4.1.4

Neka su P i Q nožišta okomica iz točke O na ravnine VAB i ABC. Neka ravnina POQ siječe brid $\overline{AB}$ u točki R. Tada je ravnina POQ okomita na ravninu VAB jer sadrži pravac OP koji je okomit na nju. Slično, ravnina POQ je okomita na ravninu CAB jer je sadrži pravac OQ koji je okomit na tu ravninu. Kut $\angle PRQ$ predstavlja kut između ravnina ABC i ABV. Pravac OR je simetrala kuta $\angle PRQ$.

Trokuti POR i QOR su sukladni. Naime, trokuti imaju jednu zajedničku stranicu $\overline{OR}$, vrijedi $\angle OPR = \angle OQR$ i $\angle ORP = \angle ORQ$ pa koristimo KSK teorem o sukladnosti dva trokuta. Konačno zaključujemo da vrijedi $|OP| = |OQ|$.

Neka su S i T nožišta okomica iz O na ravnine BCV i CAV. Analogno se pokaže da je točka O jednako udaljena od bilo koje druge strane tetraedra. Dakle, dokazali smo da je $|OS| = |OT| = |OP| = |OQ|$.

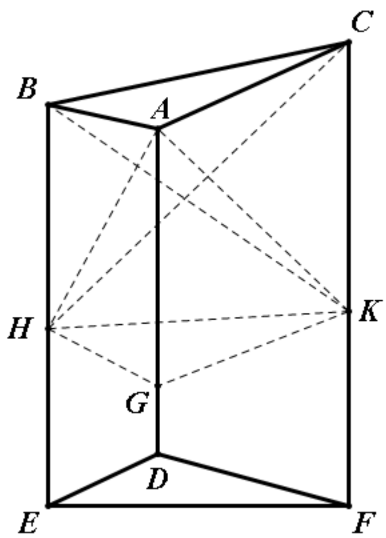
Zasad imamo da tri od zadanih šest ravnina prolaze kroz točku O. Analogno tvrdnju možemo dokazati i za preostale tri ravnine. Ravnina OPS je okomita na brid $\overline{VB}$ i siječe ga u točki Z. Pravokutni trokuti OPZ i OSZ imaju zajedničku hipotenuzu i još vrijedi $|OP| = |OS|$. Dakle ti trokuti su sukladni pa je $\angle PZO = \angle SZO$, odnosno O pripada ravnini koja raspolavlja kut između ravnina ABV i BCV. Na analogan način dokazujemo da O leži na preostale dvije zadane ravnine.

Zaključujemo, šest ravnina koje raspolavljaju kutove između strana tetraedra sijeku se u jednoj točki. □

4.2 Nestandardna geometrijska tijela

U redovnoj nastavi najčešće promatramo neka standardna tijela, kao što su kvadar, kocka, trostrana prizma, trostrana i četverostrana piramida. Učenici koji žele znati više bi mogli riješiti problem određivanja volumena i ostalih veličina vezanih uz neka nestandardna tijela te bi bilo dobro obraditi što više takvih primjera. Često je najveći problem u zadatku napraviti dobru dekompoziciju zadanog tijela. Sada možemo proći kroz jedan primjer u kojem se pojavljuje nestandardno tijelo.

Propozicija 4.2.1. *Zadana je trostrana prizma i dvije ravnine koje nemaju presječnih točaka unutar prizme. Dio prizme koji se nalazi između tih ravnina određuje jedno geometrijsko tijelo. Volumen tog tijela jednak je trećini umnoška površine presjeka tijela s ravninom koja siječe sve bočne bridove tijela i okomita je na njih i zbroja duljina bočnih bridova tijela.*



Slika 4.4: Slika za propoziciju 4.2.1

Dokaz. Neka su ABC i DEF baze zadanog tijela. Primijetimo da trokuti ABC i DEF općenito nisu paralelni ni sukladni (Slika 4.4.). Neka je trokut GHK presjek zadanog tijela i ravnine koja siječe sve njegove bočne bridove i okomita je na njih. Označimo njegovu površinu s P. Duljine dužina $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ označimo s l, l' i l''.

Označimo duljine dužina $\overline{AG}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CK}$ s h, h' i h''.

Prvo računamo volumen tijela $ABC - GHK$ koje se nalazi iznad ravnine GHK. Ravnina AHK dijeli geometrijsko tijelo $ABC-GHK$ na trostranu piramidu $A-GHK$ i četverostranu piramidu $A - BHKC$. Volumen trostrane piramide je $\frac{1}{3} \cdot h \cdot P$.

Četverostranu piramidu $A - BHKC$ možemo podijeliti ravninom ABK na dvije trostrane piramide $A-BHK$ i $A-BKC$. Budući da je pravac AG paralelan s ravninom BHK, volumen piramide $A - BHK$ jednak je volumenu piramide $G - BHK$. Promatrane piramide imaju istu bazu BHK i jednake visine.

Piramidu $G - BHK$ možemo gledati i kao piramidu s bazom GHK i vrhom B pa joj je volumen $\frac{1}{3} \cdot h' \cdot P$, tj. volumen piramide $A - BHK$ je $\frac{1}{3} \cdot h' \cdot P$.

Konačno promotrimo piramide $A-BCK$ i $G-HCK$. Kako je $BH \| CK$, trokuti BCK i HCK imaju visine jednakih duljina, na stranicu $\overline{CK}$, pa su im površine jednake. S obzirom da pripadaju istoj ravnini, volumen piramide $A-BCK$ je jednak volumenu piramide $A-HCK$. Kako je pravac AG paralelan s ravninom HCK, volumen piramide $A - HCK$ jednak je volumenu piramide $G - HCK$ za koji je lako vidjeti da je jednak $\frac{1}{3} \cdot h'' \cdot P$. Zaključujemo, volumen piramide $A - BCK$ je $\frac{1}{3} \cdot h'' \cdot P$.

Dakle, zbrajanjem, volumen gornjeg tijela $ABC - GHK$ je $\frac{1}{3} \cdot (h + h' + h'') \cdot P$.

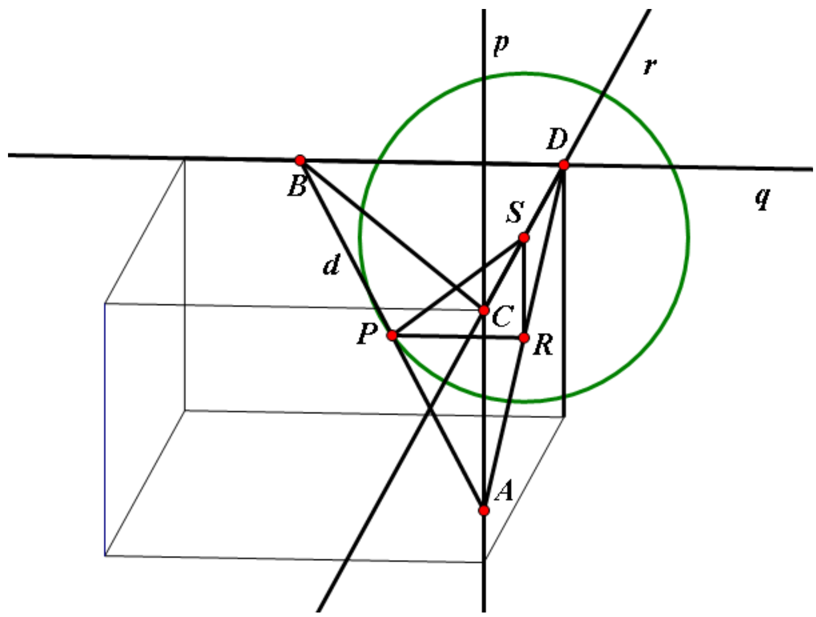
Analogno se izračuna volumen tijela $DEF - GHK$ koje se nalazi ispod ravnine GHK. Označimo li duljine dužina $\overline{GD}$, $\overline{HE}$ i $\overline{KF}$ s k, k' i k'', tada je volumen tijela $DEF - GHK$ $\frac{1}{3} \cdot (k + k' + k'') \cdot P$.

Konačno zbrajanjem volumena gornjeg tijela $ABC - GHK$ koji iznosi $\frac{1}{3} \cdot (h + h' + h'') \cdot P$ i volumena donjeg tijela $DEF - GHK$ koji iznosi $\frac{1}{3} \cdot (k + k' + k'') \cdot P$ dobivamo da je volumen cijelog tijela $\frac{1}{3} \cdot (l + l' + l'') \cdot P$. □

4.3 Geometrijska mjesta točaka

U ovom potpoglavlju ćemo proći kroz zadatke u kojima se zadaje neki geometrijski uvjet na točke i želimo opisati karakteristike skupa kojem te točke pripadaju, odnosno opisati taj skup na drugi, jednostavniji način. Takvi zadaci se zadaju i u ravnini i smatraju se zahtjevnijima, jer se najčešće svode na to da učenik mora sam pogoditi o kojem se skupu točaka radi što naravno zahtjeva veći geometrijski zor. Kod analognih zadataka u prostoru je to još teže. U svakom slučaju, kao i kod ostalih tipova zadataka dobro je riješiti barem nekoliko primjera kako bi učenici shvatili princip određivanja geometrijskog mjesta. Potrebno im je objasniti kako se precizno dokazuje da je skup kojeg smo naslutili uistinu to mjesto.

Zadatak 1. Dana su dva mimoilazna pravca koji su međusobno okomiti. Treba naći geometrijsko mjesto točaka koja su polovišta svih dužina koje imaju zadanu duljinu d. Pritom im jedan rub mora biti na jednom od zadanih pravaca, a drugi na drugom. Dokažite da je to geometrijsko mjesto točaka kružnica kojoj je središte u točki koja je polovište najkraće dužine kojoj su rubovi svaki na jednom od danih pravaca.



Slika 4.5: Skica za zadatak 1.

Dokaz. Neka su dana dva mimoilazna pravca koji su međusobno okomiti, označimo ih s p i q. Uzmimo proizvoljnu dužinu duljine d koja zadovoljava geometrijski opis zadatka. Ona ima rubove A na pravcu p i B na pravcu q. Označimo s r pravac koji je okomit i na p i na q i siječe oba pravca. Dužina koja ima rubove na p i q, a najmanje je duljine je dužina $\overline{CD}$, ona pripada pravcu r i neka je C na pravcu p i D na pravcu q (Slika 4.5.).

Kako točke A, B, C i D ne pripadaju istoj ravnini, uočimo da čine tetraedar. Pritom je trokut ACD pravokutan, s pravim kutom u vrhu C. Isto tako je i trokut ADB pravokutan s pravim kutom u vrhu D. Označimo s P polovište dužine $\overline{AB}$. Sad zapravo tražimo geometrijsko mjesto točaka P. Označimo s S polovište dužine $\overline{CD}$. Potrebno je izračunati udaljenost točaka P i S te uočiti da ne ovisi o izboru dužine s rubovima u točkama A i B.

Nacrtat ćemo okomicu iz točke P na ravninu kojoj pripada trokut ACD. Neka je nožište te okomice točka R. Točka R ujedno je polovište brida $\overline{AD}$ i trokut PSR je pravokutan s pravim kutom u vrhu R. Tada primjenom Pitagorinog poučka imamo

$$|SP|^2 = |SR|^2 + |PR|^2 .$$

Dužine $\overline{SR}$ i $\overline{PR}$ su srednjice u trokutima ACD i ADB pa imamo

$$\begin{aligned} |SP|^2 &= \frac{|AC|^2}{4} + \frac{|BD|^2}{4} \\ &= \frac{|AD|^2 - |CD|^2}{4} + \frac{|BD|^2}{4} \\ &= \frac{\left(|AD|^2 + |BD|^2\right)}{4} - \frac{|CD|^2}{4} \\ &= \frac{|AB|^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4} \\ &= \frac{d^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4}. \end{aligned}$$

Kako $|CD|$ ovisi samo o zadanim pravcima, a d je zadana konstanta, vidimo da sve točke P pripadaju sferi sa središtem u točki S i radijusom $\sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{|CD|^2}{4}}$.

Točka P pripada ravnini koja prolazi točkom S i okomita je na pravac r. Konačno, presjek te ravnine i dobivene sfere daje traženu kružnicu.

Analogno se dokazuje da ako se točka P nalazi na prethodno opisanoj kružnici, onda se kroz nju može nacrtati dužina duljine d kojoj su rubovi redom na pravcima p i q i točka P je pritom polovište te dužine.

□

Zadatak 2. Zadana su dva proizvoljna trokuta u prostoru koja se ne sijeku i nalaze se u ravninama koje se sijeku. Neka je P točka prostora koja se ne nalazi ni u jednoj od ravnina u kojima se nalaze trokuti. Spojimo li vrhove svakog trokuta s točkom P, dobivamo dva tetraedra. Pronađite sve moguće točke P za koje će zbroj volumena ta dva tetraedra biti neka zadana konstanta V.

Rješenje:

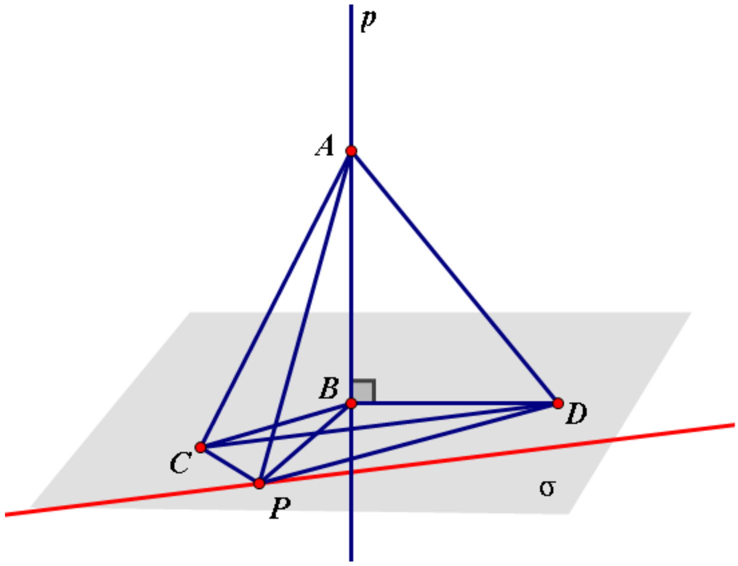
Neka se ravnine trokuta sijeku u pravcu p. Uzmimo neku ravninu σ koja je okomita na pravac p i neka se ravnina σ i pravac p sijeku u točki B. S obzirom da volumeni tetraedra ovise samo o površini baze, a ne o obliku baze, onda trokute možemo zamijeniti i nekim drugima koji imaju jednake površine, ali su nam jednostavniji za promatranje. Uzmimo stoga umjesto početnih trokuta pravokutne trokute ABC s pravim kutom kod vrha B i ABD s pravim kutom kod vrha B koji imaju iste površine kao i zadani trokuti i pritom je $\overline{AB}$ podskup pravca p. Ti trokuti moraju pripadati odgovarajućim ravninama kojima pripadaju zadani trokuti.

Uzmimo neku točku P prostora koja zadovoljava zadani geometrijski opis i koja se ne nalazi ni u jednoj od ravnina u kojima se nalaze zadani trokuti, ali pripada ravnini BCD (to je upravo ravnina σ) (Slika 4.6.).

Sada možemo izračunati volumene:

$$V = V_{ABCP} + V_{ABDP} = \frac{1}{3} \cdot P_{BCP} \cdot |AB| + \frac{1}{3} \cdot P_{BDP} \cdot |AB|$$
$$= \frac{1}{3} \cdot |AB| \cdot P_{BCPD}.$$

Kako je $|AB|$ konstantna veličina, i površina četverokuta $BCPD$ je konstantna, odnosno površina trokuta CPD je konstantna s obzirom da je trokut BCD konstantan. Dakle konačno, visina iz P na $\overline{CD}$ u trokutu CPD mora biti uvijek iste duljine pa P mora pripadati pravcu koji je paralelan s $\overline{CD}$. Dakle, taj pravac se nalazi u odabranoj ravnini σ i točke na tom



Slika 4.6: Skica za zadakak 2.

pravcu su jedine točke iz te ravnine koje zadovoljavaju uvjet zadatka. Na isti način možemo uzeti bilo koju drugu ravninu okomitu na pravac p, analogno postaviti trokute ABC i ABD s pravim kutovima kod vrha B i opet dolazimo do pravca u toj ravnini koji je paralelan s $\overline{CD}$.

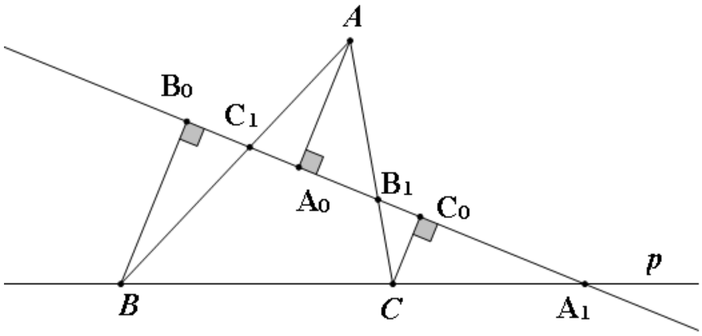
Konačno zaključujemo da je skup svih točaka s traženim svojstvom ravnina koja je paralelna pravcu p.

4.4 Primjena Menelajevog teorema u prostoru

Menelajev teorem jedan je od manje poznatih teorema jer se ne radi na redovnoj nastavi, ali se učenici koji pohađaju dodatnu nastavu upoznaju s njime te se kao i mnoge druge tvrdnje koje vrijede u ravnini može primijeniti i na probleme u prostoru. Na redovnoj nastavi učenici neće dokazivati taj teorem iako ne zahtjeva dodatno znanje. Sada ćemo ga iskazati i dokazati.

Teorem 4.4.1 (**Menelajev teorem**). *Neka su točke B_1 i C_1 na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka A_1 na produžetku stranice $\overline{BC}$, trokuta ABC. Točke A_1, B_1, C_1 su kolinearne ako i samo ako* *vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 4.7: Skica za Menelajev teorem

Dokaz. Neka su točke A_1, B_1, C_1 kolinearne te neka pripadaju pravcu p. Neka su A_0, B_0, C_0 točke na pravcu p sa svojstvom da su pravci AA_0, BB_0, CC_0 okomiti na p (Slika 4.7.).

Prema KKK teoremu trokuti AC_1A_0 i BC_1B_0 su slični pa imamo

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AA_0|}{|BB_0|}.$$

Također imamo da su trokuti CC_0B_1 i AA_0B_1 slični, pa je

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CC_0|}{|AA_0|}.$$

Još imamo dva slična trokuta BA_1B_0 i CA_1C_0 za koje vrijedi

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BB_0|}{|CC_0|}.$$

Odavde slijedi

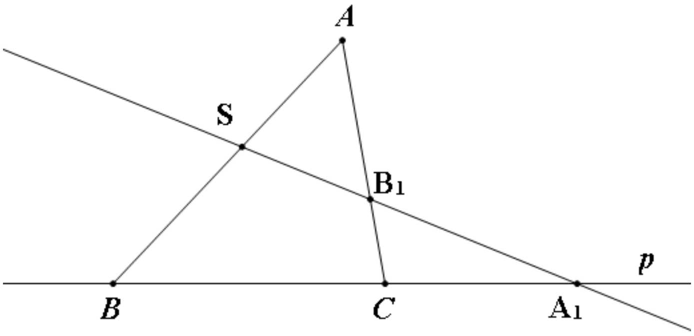
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AA_0|}{|BB_0|} \cdot \frac{|CC_0|}{|AA_0|} \cdot \frac{|BB_0|}{|CC_0|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1.$$

Obratno, neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 4.8: Skica za obrat Menelajeva teorema

Sa S označimo točku presjeka pravaca A_1B_1 i AB (Slika 4.8.). Prema već dokazanom vrijedi

$$\frac{|AS|}{|SB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AS|}{|SB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

pa je

$$\frac{|AS|}{|SB|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{|AB| - |BS|}{|SB|} = \frac{|AB| - |BC_1|}{|C_1B|},$$

pa je

$$\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|AB|}{|C_1B|}.$$

Dakle, $|SB| = |C_1B|$ pa se točke C_1 i S podudaraju.

Zaključujemo da su točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne. $\square$

Sada možemo primijeniti Menelajev teorem u sljedećem zadatku.

Zadatak 1. Zadana je ploha u prostoru koja se dobiva tako da se ravninski četverokut $ABCD$ svine po dijagonali $\overline{BD}$. Tu plohu presiječemo s ravninom koja redom siječe bridove $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ u točkama P, Q, R i S, tako da $\overline{RQ}$ i $\overline{SP}$ nisu paralelni. Dokažite da vrijedi

$$\frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CR|}{|RD|} \cdot \frac{|DS|}{|SA|} = 1.$$

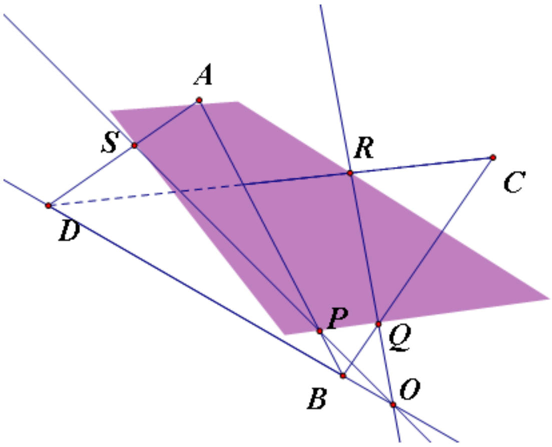
Rješenje:

Uočimo da nam je potrebna još jedna točka kako bismo primijenili Menelajev teorem. To će biti točka O koja je sjecište pravca RQ i SP. Oni pripadaju istoj ravnini pa nisu mimoilazni. U uvjetu zadatka je zadano da nisu ni paralelni pa zaključujemo da se sijeku (u točki O).

Ako imamo točku O, onda primijenimo prvo Menelajev teorem na trokut ABD, pa zatim na trokut CBD (Slika 4.9.). Primijetimo da su točke S i P na stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$, točka O na produžetku stranice $\overline{BD}$ te da su točke S, P i O kolinearne. Tada prema Menelajevom teoremu vrijedi

$$\frac{|AS|}{|SD|} \cdot \frac{|DO|}{|BO|} \cdot \frac{|BP|}{|AP|} = 1.$$

Analogno, točke R, Q i O su kolinearne, pa primijenimo li Menelajev teorem na trokut BCD i dobivamo



Slika 4.9: Skica za zadatak 1.

$$\frac{|RC|}{|RD|} \cdot \frac{|DO|}{|BO|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} = 1.$$

Podijelimo li tu jednakost s prethodnom, dobivamo traženi identitet

$$\frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|DS|}{|SA|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CR|}{|RD|} = 1.$$

Bibliografija

[1] R. S. Heath, Solid geometry, Rivingtons, London, 1922.

[2] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2, udžbenik i zbirka za 2. razred gimnazije, 2.dio, Element, Zagreb, 2009.

[3] Seminar "Geometrijska tijela (prizme, piramide, poliedri, valjak, stožac)" iz kolegija Metodika nastave matematike 4 kod profesorice Aleksandre Čižmešije, Zagreb, 2014.

[4] D. Palman, Stereometrija, Element, Zagreb, 2005.

[5] S. Barnaki, Repetitorij matematike osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

[6] V. Bajrović, Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole, Element, 2006.

[7] http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm

[8] D. Ilišević, M. Bombardelli, skripta iz Elementarne geometrije, 1. verzija, 9.10.2007., preuzeto s http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf

[9] J. Beban-Brkić, Predavanje iz Matematike 1, 13. Sferna trigonometrija, Geodetski fakultet, preuzeto s http://www2.geof.unizg.hr/ jbeban/M1/13.pdf

Sažetak

U prvom poglavlju ovog rada opisali smo teme iz stereometrije koje se obrađuju u redovnoj nastavi matematike osnovne i srednje škole. U drugom poglavlju napravili smo analizu vrsta zadataka iz stereometrije koji se pojavljuju na natjecanjima različitih razina. U trećem poglavlju opisali smo neke jednostavnije pojmove vezane uz sfernu geometriju i trigonometriju. Posljednje poglavlje opisuje još neke vrste zadataka za dodatan rad s učenicima u matematičkim grupama, prije svega one koji su primjereni predznanju stečenom na redovnoj nastavi. Zadaci su iz područja: presjeci pravaca i ravnina, geometrijsko mjesto točaka, određivanje volumena nestandardnih tijela te primjena Menelajevog teorema u stereometriji.

Summary

In the first section of this graduate work we describe the topics of stereometry covered in the ordinary teaching of mathematics in primary and secondary schools. In the second chapter we made an analysis of the types of stereometry tasks appearing in competitions of different levels. In the third chapter, we describe some simple concepts related to spherical geometry and trigonometry. The last chapter describes the tasks for additional work with students in math groups, especially those that are appropriate to prior knowledge gained in regular classes. Tasks are from areas: intersections of lines and planes, geometric location of points, determining the volume of non-standard bodies and applications of Menelaus theorem in stereometry.

Životopis

Zovem se Mihaela Bahun. Rođena sam 20.12.1990. u Varaždinu. Završila sam VI. Osnovnu školu u Varaždinu, zatim Prvu gimnaziju Varaždin. Trenutno završavam Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, smjer nastavnički.