Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Trstenjak, Anja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Anja Trstenjak

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I SVOJSTVENI VEKTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojoj mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na vodstvu, strpljenju i inspiraciji tijekom istraživanja i pisanja ovog rada.

Hvala svim prijateljima koji su bili uz mene te sa mnom dijelili sreću i izazove ovog putovanja.

Najposebnija zahvalnost mojoj obitelji. Zbog vas sam danas ovdje.

Sadržaj

Uvod

Svojstvene vrijednosti matrice su ključni koncept u linearnoj algebri i široko primjenjiv alat u mnogim područjima matematike te drugih znanosti. Ovaj diplomski rad istražuje dublje razumijevanje svojstvenih vrijednosti matrica, njihovu matematičku interpretaciju, izračunavanje te primjenu u stvarnim problemima. Kroz rad, nastojat ćemo pružiti sveobuhvatno razumijevanje svojstvenih vrijednosti matrice, istražujući njihovu teorijsku osnovu i praktične primjene.

Na početku ćemo se prisjetiti osnovnih matematičkih definicija i terminologije vezane uz matrice, osnovnih matematičkih operacija s matricama te ćemo na primjerima ilustrirati njihovu široku upotrebu u situacijama iz svakodnevnog života. Također, opisat ćemo njihovu ulogu u rješavanju sustava linearnih jednadžbi, primjenu u teoriji grafova te vezu s linearnim operatorima.

Slijedi dio diplomskog rada posvećen svojstvenim vrijednostima matrica. Vidjet ćemo kako ovaj koncept pridonosi boljem razumijevanju raznih matematičkih modela i problema iz stvarnog svijeta. Analizom raznih primjera uvidjet ćemo potrebu za dijagonalizacijom matrice, primjenjujući upravo njezine svojstvene vrijednosti. Pokazat ćemo kako pristupiti situaciji u kojoj realna matrica nema realnih svojstvenih vrijednosti, odnosno bavit ćemo se kompleksnim svojstvenim vrijednostima kompleksne matrice te načinima na koje ih možemo primijeniti u problemu dijagonalizacije.

Za kraj izdvajamo četiri široke primjene svojstvenih vrijednosti matrica, a to su Markovljevi lanci, Google matrica, diferencijalne jednadžbe te linearne rekurzije.

Poglavlje 1

Svojstvene vrijednosti matrica

1.1 Matrice

Matrice imaju ključnu ulogu u različitim područjima matematike i jedan su od osnovnih alata za modeliranje i rješavanje problema koji uključuju velike količine podataka. Prvu apstraktnu definiciju matrice dao je engleski matematičar Cayley 1858. godine. On je opisao i operacije s matricama, a u to je vrijeme njegov prijatelj Sylvester uveo i naziv matrica.

U ovom ćemo se poglavlju prisjetiti osnovnih matematičkih definicija i terminologije vezane uz matrice, kao i osnovnih matematičkih operacija s matricama.

Definicija 1.1.1. ***Matrica tipa*** (m, n) *s koeficijentima iz polja* $\mathbb{F}$ *je preslikavanje*

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F},$$

gdje su m i n prirodni brojevi. Skup svih takvih matrica označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$*. Ako je* $m = n$*, onda kažemo da je A* ***kvadratna matrica reda n****.*

Dakle, matrica tipa (m, n) je funkcija koja uređenom paru prirodnih brojeva (i, j), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ pridružuje skalar a_{ij} iz polja $\mathbb{F}$. Matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ zapisujemo u obliku tablice kao

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Broj m označava broj redaka matrice, a n broj stupaca.

Transponirana matrica $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$ matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ definirana je kao

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji},$$

što znači da su redci matrice A jednaki stupcima matrice A^T.

Navedimo neke istaknute matrice. Matrica $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ je

- **nulmatrica**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Ukoliko je matrica A reda n, kažemo da je ona:

- **dijagonalna**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$,
- **jedinična**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$ i $a_{ij} = 1$ za sve $i = j$,
- **gornjetrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq j < i \leq n$,
- **donjetrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq i < j \leq n$.

Stupce matrice

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

možemo promatrati kao matrice

$$S_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, S_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

tipa $(m, 1)$ pa je **stupčana reprezentacija matrice** A njezin zapis u obliku

$$A = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{bmatrix}.$$

Rang matrice A, u oznaci $r(A)$, je dimenzija vektorskog prostora razapetog skupom $\{S_1, \dots, S_n\}$. Drugim riječima, rang matrice A je maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca u matrici A, a može se pokazati da je taj broj jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka u matrici A.

Skup svih matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, uz operacije zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom definirane na sljedeći način. Neka su dane matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) te skalar $\lambda \in \mathbb{F}$. Zbroj $A + B$ matrica A i B je matrica $[c_{ij}]$ tipa (m, n), gdje je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Umnožak λA matrice A skalarom λ je matrica $[d_{ij}]$ tipa (m, n), pri čemu je $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Uvedimo i množenje matrica A i B. Za razliku od operacija zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom, koje su definirane po elementima, množenje matrica je definirano na drugačiji način.

Definicija 1.1.2. *Neka su dane matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = [b_{ij}] \in M_{np}(\mathbb{F})$. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [c_{ij}] \in M_{mp}(\mathbb{F})$, pri čemu je*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$.

Primijetimo da je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Matrice za koje vrijedi takva veza zovu se **ulančane matrice** i samo je za takve matrice definiran njihov umnožak. Također, množenje matrica općenito nije komutativno, stoga je bitan poredak faktora. Na primjer, umnožak matrice A tipa $(5, 2)$ i matrice B tipa $(2, 3)$ je matrica C tipa $(5, 3)$. No, umnožak matrice B i matrice A nije definiran jer je broj redaka matrice B različit od broja stupaca matrice A.

Neka je dana matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ i broj $k \in \mathbb{N}$. **Potencije matrice** A definiramo rekurzivno s:

$$A^0 = I, \quad A^{k+1} = AA^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Slijede tri jednostavna primjera koji ilustriraju široku upotrebu matrica u situacijama iz svakodnevnog života.

Primjer 1. *Iva, Tin, Filip i Sara pričaju strane jezike. Iva priča francuski i njemački jezik, Tin francuski, engleski i talijanski jezik, Filip engleski, talijanski i španjolski, a Sara sve navedene jezike osim francuskog.*

Dane podatke prikažimo matricom $A = [a_{ij}]$ čiji redci predstavljaju osobu, a stupci strani jezik tako da Iva predstavlja prvi redak, Tin drugi, Filip treći i Sara četvrti redak matrice, a francuski jezik prvi stupac, njemački drugi, engleski treći, talijanski četvrti te španjolski jezik peti stupac matrice. U matrici A se na mjestu a_{ij} nalazi 1 ukoliko osoba i govori jezik j. U suprotnom je $a_{ij} = 0$. Slijedi da je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Interpretirajmo značenje matrica AA^T i A^TA. Transponirana matrica A^T matrice A jednaka je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa računamo

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz definicije množenja matrica slijedi da je element $[AA^T]_{ii}$ jednak je ukupnom broju jezika koje govori osoba koja predstavlja i-ti redak matrice A. Element $[AA^T]$ za $i \neq j$ jednak je broju jezika koje govore i osoba iz i-tog i osoba iz j-tog retka matrice A.

Element $[A^T A]_{ii}$ jednak je ukupnom broju osoba koje govore jezik koji predstavlja i-ti stupac matrice A. Element $[A^T A]$ za $i \neq j$ jednak je broju osoba koje govore i jezik iz i-tog i jezik iz j-tog stupca matrice A.

Primjer 2. *Na nekom se parkiralištu parkiraju automobili i autobusi. Automobil zauzme jedno mjesto, a autobus dva mjesta. Zanima nas na koliko se načina može popuniti parkiralište od 25 mjesta, pri čemu automobile međusobno ne razlikujemo, kao ni autobuse.*

Označimo s a_n broj načina na koji se može popuniti parkiralište od n mjesta. Budući da parkiralište od jednog mjesta možemo popuniti jednim automobilom, a parkiralište od dva mjesta dvama automobilima ili jednim autobusom, zaključujemo da je $a_1 = 1$ te $a_2 = 2$. Ako parkiralište ima $n \geq 3$ mjesta, onda postoje 2 mogućnosti:

(1) na prvom je mjestu automobil - preostalih $n-1$ mjesta možemo popuniti na a_{n-1} načina,

(2) na prvom je mjestu autobus - preostalih $n-2$ mjesta možemo popuniti na a_{n-2} načina.

Odavde slijedi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Time je rekurzivno zadani niz (a_n) potpuno određen pa slijedi $a_{25} = 121393$.

Problem možemo riješiti i primjenom matrica. Definiramo matricu X_n za $n \geq 1$ kao

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Zbog gornjih je razmatranja jasno da je $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Iz definicije matrice X_n slijedi

$$X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

pa je matrica $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_n + a_{n-1} \end{bmatrix}$ *jednaka*

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X_{n-1}.$$

Dalje slijedi

$$X_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 X_{n-2} = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1} X_1$$

pa imamo

$$X_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{24} X_1 = \begin{bmatrix} 121393 \\ 196418 \end{bmatrix},$$

iz čega ponovno slijedi $a_{25} = 121393$. *Dakle, zaključujemo da se parkiralište od* 25 *mjesta može na* 121393 *različita načina popuniti automobilima i autobusima koji redom zauzimaju jedno i dva mjesta.*

Primjer 3. *Neka tvrtka iznajmljuje automobile na jedan dan i to na tri različite lokacije A, B i C. Korisnik koji je unajmio auto može ga vratiti na bilo koju od te tri lokacije. Možemo pretpostaviti sljedeće:*

- *od svih automobila na lokaciji A, njih* 20% *vraćeno je na istu lokaciju A, njih* 40% *vraćeno je na lokaciju B i* 40% *na lokaciju C,*
- *od svih automobila na lokaciji B, njih* 30% *vraćeno je na lokaciju A, njih* 20% *vraćeno je na istu lokaciju B i* 50% *na lokaciju C,*
- *od svih automobila na lokaciji C, njih* 40% *vraćeno je na lokaciju A, njih* 30% *vraćeno je na lokaciju B i* 30% *na istu lokaciju C.*

Označimo li s a_n, b_n *i* c_n *redom brojeve vozila na lokacijama A, B i C nakon n dana, onda za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} a_n &= 0.2a_{n-1} + 0.3b_{n-1} + 0.4c_{n-1} \\ b_n &= 0.4a_{n-1} + 0.2b_{n-1} + 0.3c_{n-1} \\ c_n &= 0.4a_{n-1} + 0.5b_{n-1} + 0.3c_{n-1}, \end{aligned}$$

što možemo zapisati matrično kao

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Vidimo da možemo izračunati raspodjelu vozila po lokacijama A, B i C u nekom danu ukoliko znamo tu raspodjelu za prethodni dan. No, raspodjelu vozila u nekom danu možemo izračunati i koristeću početnu raspodjelu vozila po lokacijama. Stoga označimo s a_0*,* b_0 *i* c_0 *redom početne brojeve automobila na lokacijama A, B i C. Slijedi*

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

U nastavku se prisjećamo regularnih matrica, ključnog alata u rješavanju mnogih matematičkih problema.

Definicija 1.1.3. *Za matricu* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *kažemo da je* ***regularna****, odnosno* ***invertibilna****, ako postoji matrica* $B \in M_n(\mathbb{F})$ *takva da je*

$$AB = BA = I,$$

gdje je $I \in M_n(\mathbb{F})$ *jedinična matrica. Matricu B zovemo* ***inverzom*** *matrice A. Ako za matricu A ne postoji takva matrica B, kažemo da je ona* ***singularna****.*

Ako postoji inverz B matrice A, onda je on jedinstven, što se lako dokazuje. U tu svrhu, pretpostavimo da su B_1 i B_2 inverzne matrice od A takve da je $B_1 \neq B_2$. Tada vrijedi $AB_1 = B_1A = I$ i $AB_2 = B_2A = I$. Slijedi

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $B_1 \neq B_2$. Dakle, ukoliko inverz B matrice A postoji, on je zaista jedinstven pa možemo uvesti oznaku $B = A^{-1}$.

Neka je dana matrica $A \in M_2(\mathbb{F})$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Vrijedi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc)I \tag{1.1}$$

pa zaključujemo da je inverz matrice A za koju je $ad - bc \neq 0$ jednak

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Broj definiran s $ad - bc$ naziva se **determinanta** matrice reda 2 i označava s $\det A$.

Prema (1.2), ako je $\det A \neq 0$, onda je matrica $A \in M_2(\mathbb{F})$ regularna. Vrijedi i obrat. Zaista, pretpostavimo da je $\det A = 0$ i tvrdimo da ne postoji inverz matrice A. Označimo matricu $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ iz (1.1) s B. Tada vrijedi

$$AB = (ad - bc)I = 0.$$

Pretpostavimo da postoji inverz A^{-1} matrice A i pomnožimo njime jednakost $AB = 0$ slijeva. Dobivamo

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B = 0,$$

odnosno B je nulmatrica, iz čega direktno slijedi da je i A nulmatrica, a to je u kontradikciji s postojanjem inverza A^{-1}. Dakle, inverz matrice A ne postoji ako je $\det A = 0$.

Odrediti determinantu matrice reda većeg od 2 nije jednostavan postupak, a u većini se slučajeva ona određuje koristeći takozvani Laplaceov razvoj. U nastavku navodimo definiciju determinante kvadratne matrice reda n u kojoj se spominje permutacija skupa pa počinjemo s definicijom permutacije.

Definicija 1.1.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$.* ***Permutacija skupa*** $\{1, \ldots, n\}$ *je svaka bijekcija*

$$p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Permutacije skupa $\{1, \ldots, n\}$ možemo zapisati i kao

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

Definicija 1.1.5. *Neka je*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Inverzija *u permutaciji p je svaki uređeni par (i, j) takav da je $i < j$ i $p(i) > p(j)$. Ukupan broj inverzija permutacije p označavamo s $I(p)$.*

Predznak permutacije $\operatorname{sign} p$ *definira se kao* $\operatorname{sign} p = (-1)^{I(p)}$.

Definicija 1.1.6. ***Determinanta*** *matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ je preslikavanje*

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$

koje matrici A pridružuje skalar $\det A$ *definiran kao*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

gdje je S_n grupa permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$, a $\operatorname{sign} p \in \{-1, 1\}$ *predznak permutacije.*

Uobičajeno je determinantu matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ zapisivati tablično kao

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Još ćemo opisati spomenuti Laplaceov razvoj determinante za koji nam je potreban pojam algebarskog kofaktora elementa a_{ij} matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$.

Definicija 1.1.7. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$ i neka je Δ_{ij} determinanta reda $n-1$ koja se iz determinante matrice A dobije uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca, gdje su $i, j = 1, \dots, n$. Determinanta Δ_{ij} naziva se **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij}. Broj*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

*naziva se **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij}.*

Teorem 1.1.8. *(**Laplaceov razvoj determinante**) Neka je $n \geq 2$ i $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad \forall k = 1, \dots, n \tag{1.3}$$

i

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

Formulu (1.3) nazivamo Laplaceovim razvojem po k-tom retku, a formulu (1.4) po k-tom stupcu matrice A.

U sljedećem primjeru računamo determinantu matrice reda 4 koristeći Laplaceov razvoj.

Primjer 4. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem po trećem stupcu dobivamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Potom primjenjujemo Laplaceov razvoj po trećem retku na obje determinante i dobivamo

$$\det A = -2 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (5) - 28 \cdot 9 = -212.$$

Iskažimo za kraj teorem koji generalizira tvrdnju o postojanju inverza matrice reda 2.

Teorem 1.1.9. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$.

1.2 Neke primjene matrica

Sustavi linearnih jednadžbi

Započinjemo s jednom od najširih, a ujedno i prvih primjena matrica, a to je upravo primjena u rješavanju sustava linearnih jednadžbi. Prva metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi, takozvana fang čeng metoda, pojavila se u prvoj polovici drugog stoljeća nove ere. Opisana u kineskom matematičkom djelu ”Devet poglavlja umijeća računanja”, do tada nepoznata ostatku svijeta, metoda fang čeng vrlo je slična današnjoj Gaussovoj metodi.

Neka je zadan sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ -5x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

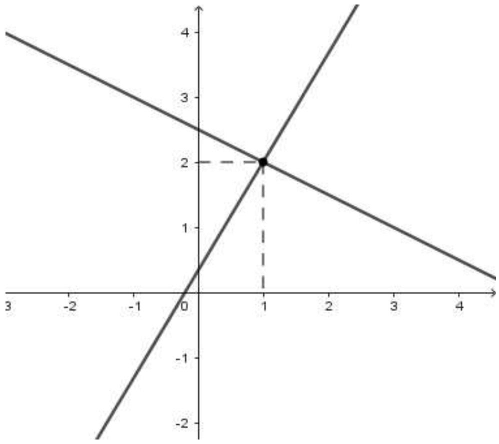
dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Linearna jednadžba s dvije nepoznanice jednadžba je pravca u ravnini. Stoga, riješiti sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice znači pronaći presjek pravaca određenih tim jednadžbama. Znamo da presjek pravaca u ravnini može biti prazan skup, jedna točka ili pravac. U prvom slučaju sustav nema rješenje, u drugom ima jedinstveno rješenje, a u trećem beskonačno mnogo rješenja.

Na isti način možemo promatrati sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Linearna jednadžba s tri nepoznanice jednadžba je ravnine u prostoru pa riješiti sustav znači pronaći presjek ravnina određenih tim jednadžbama, a on može biti prazan skup, jedna točka, pravac ili ravnina. U prvom slučaju sustav nema rješenja, u drugom ima jedinstveno rješenje, dok u trećem i četvrtom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja. Može se dokazati da zaključak o broju rješenja proizvoljnog sustava linearnih jednadžbi (dakle, proizvoljno mnogo jednadžbi s proizvoljno mnogo nepoznanica) vrijedi i općenito, što znači da sustav uvijek ima 0, 1 ili beskonačno mnogo rješenja.

Vratimo se na sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ -5x + 3y &= 1. \end{aligned}$$

Uvjerimo se za početak grafičkim prikazom (slika 1.1) da je rješenje sustava jedinstveno i da je to točka s koordinatama $(1, 2)$.



Slika 1.1: Rješenje sustava

Umjesto rješavanja ovakvog sustava već poznatim metodama poput supstitucije ili komparacije, definirajmo matrice A, X i B kao

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

te polazni sustav zapišimo u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

U matrici A smješteni su koeficijenti polaznog sustava, u (stupčanoj) matrici X nepoznanice, a u (stupčanoj) matrici B slobodni koeficijenti. Intuitivno je matrice A, X i B redom nazvati **matrica sustava, matrica nepoznanica i matrica slobodnih koeficijenata**.

Stupce matrice A označimo s S_1 i S_2. Tada imamo

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B,$$

odnosno

$$xS_1 + yS_2 = B.$$

Zaključujemo da početni sustav ima (jedinstveno) rješenje ako i samo ako vektor B možemo zapisati (na jedinstven način) kao linearnu kombinaciju vektora S_1 i S_2. Lako se provjeri da vrijedi

$$1 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 = B,$$

što odgovara rješenju do kojeg smo došli grafičkom metodom.

Nastavimo s promatranjem sustava, ovaj put od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu su m i n prirodni brojevi. Takav sustav je oblika

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.6}$$

gdje su a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ koeficijenti iz polja $\mathbb{F}$ uz nepoznanice $x_1, \ldots, x_n$, a $b_1, \ldots, b_m$ su slobodni koeficijenti, također iz polja $\mathbb{F}$.

Rješenje sustava (1.6) je svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ koja je rješenje svake jednadžbe sustava.

Ako su svi $b_1, \ldots, b_m$ jednaki 0, onda se sustav (1.6) naziva **homogeni sustav**. Uređena n-torka $(0, \ldots, 0)$ je uvijek rješenje homogenog sustava, odnosno homogeni sustav je uvijek rješiv. Takvo rješenje zove se **trivijalno rješenje**.

Sustav (1.6) također možemo zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B,$$

pri čemu je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $X = [x_j] \in M_{n1}(\mathbb{F})$ i $B = [b_i] \in M_{m1}(\mathbb{F})$.

Može se pokazati da vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1. *Neka je zadan sustav $AX = B$ te neka su $S_1, \ldots, S_n$ stupci matrice A. Stupac $C = [\gamma_1 \ \ldots \ \gamma_n]^T$ je rješenje sustava $AX = B$ ako i samo ako je $B = \gamma_1 S_1 + \ldots + \gamma_n S_n$.*

Osim već navedenih matrica: matrice sustava, nepoznanica i slobodnih koeficijenata, uz ovaj sustav povezujemo još jednu matricu, takozvanu **proširenu matricu sustava** koja je oblika

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Do zaključka o egzistenciji i broju rješenja sustava (1.6) možemo doći uspoređujući rang matrice sustava i rang proširene matrice sustava.

Teorem 1.2.1. *Neka je zadan sustav $AX = B$, pri čemu je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$.*

(1) Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo vrijedi $r(A) = r(A_p)$.

(2) Sustav $AX = B$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $r(A) = r(A_p) = n$.

(3) Sustav $AX = B$ ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $r(A) = r(A_p) < n$.

Sustav $AX = B$ od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica čija je matrica regularna, takozvani **Cramerov sustav**, je uvijek rješiv. Njegovo je rješenje jedinstveno i vrijedi $X = A^{-1}B$. Primjerom takvog sustava započeli smo ovo poglavlje.

Može se pokazati da ako na sustav linearnih jednadžbi primijenimo konačno mnogo elementarnih transformacija, dobivamo njemu ekvivalentan sustav, odnosno sustav čiji je skup rješenja jednak početnom sustavu. Metode eliminacije (Gaussova ili Gauss-Jordanova) najčešće se koriste pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi, no mi ih ovdje nećemo detaljnije opisivati.

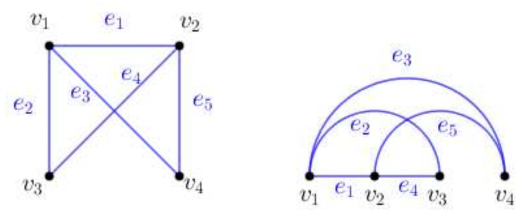
Teorija grafova

Grafovi su strukture koje se koriste za modeliranje različitih situacija iz svakodnevnice, na primjer prometnih mreža, društvenih veza i računalnih algoritama. Oni olakšavaju opisivanje veza između dva konačna skupa elemenata, a koristan alat u tim procesima su i matrice.

Definicija 1.2.2. ***Jednostavan graf*** *G je uređeni par (V, E), pri čemu je V neprazan skup elemenata koje zovemo* ***vrhovi****, a E familija dvočlanih skupova elemenata iz V koje zovemo* ***bridovi****.*

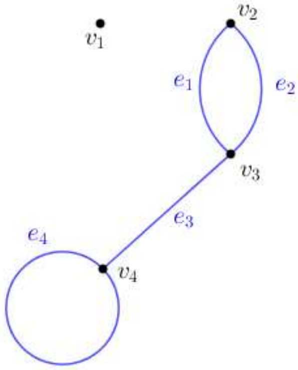
Uobičajeno je vrhove grafa označavati malim tiskanim slovima u ili v, a bridove slovima e ili f. Dva su vrha u i v grafa **susjedna** ako su rubne točke brida e tog grafa, odnosno ako je $e = \{u, v\}$. U tom slučaju kažemo da je brid e **incidentan** s vrhovima u i v.

Uzimajući u obzir isključivo susjednost koju određuju bridovi grafa, grafove na slici 1.2 možemo identificirati kao iste.



Slika 1.2: "Isti" grafovi

U jednostavnom grafu, brid ne mora nužno spajati dva različita vrha. Na primjer, u grafu na slici 1.3 brid e_4 spaja vrh v_4 sa samim sobom.



Slika 1.3: Graf

Osnovne informacije o grafu možemo prikazati matricama. Specijalno, informacije o susjednosti vrhova prikazujemo matricom koju nazivamo matrica susjedstva.

Definicija 1.2.3. *Neka je $G = (V, E)$ graf s n vrhova $\{v_1, \dots, v_n\}$.* ***Matrica susjedstva*** *za graf G je matrica $A(G) = [a_{ij}] \in M_n$, gdje je a_{ij} broj bridova incidentnih s vrhovima v_i i v_j.*

Očito dva grafa na slici 1.2 imaju istu matricu susjedstva $A(G_1)$. Matrice $A(G_1)$ i $A(G_2)$, matrica susjedstva za graf na slici 1.3, su oblika

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znamo kako se računaju potencije matrica, a sada nas zanima imaju li potencije matrica susjedstva neko posebno značenje. Prije nego što odgovorimo na to pitanje, definirat ćemo put u grafu.

Definicija 1.2.4. *Niz $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ u grafu $G = (V, E)$, gdje je brid $e_i = v_{i-1}v_i$ za $i = 1, \dots, n$ nazivamo* ***šetnja****. Šetnju koja kreće iz vrha v_0 i završava u vrhu v_n označavamo s $v_0 W v_n$, a za vrhove v_0 i v_n kažemo da su* ***krajevi šetnje****.*

Duljina šetnje *je broj bridova u nizu $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$.*

Šetnju u kojoj su svi vrhovi različiti (osim eventualno početnog i završnog vrha) nazivamo ***put****, a zatvoreni put nazivamo* ***ciklus****.*

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 1. *Ako je dana matrica susjedstva A za graf G, onda element (i, j) k-te potencije A^k matrice A označava broj putova duljine k između vrhova v_i i v_j.*

Odredimo drugu potenciju matrice susjedstva $A(G_1)$ za grafove na slici 1.2. Ona je jednaka

$$(A(G_1))^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

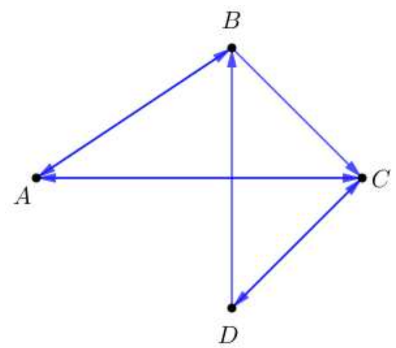
Element na mjestu $(2, 2)$ jednak je 3, što znači da postoje ukupno 3 puta duljine 2 iz vrha v_2 u vrh v_2.

U nekim je primjenama teorije grafova bitno opisati usmjerenost veza vrhova grafa, a ta usmjerenost rezultira usmjerenim bridovima koji povezuju vrhove.

Definicija 1.2.5. *Graf koji ima orijentirane bridove zovemo* ***usmjerenim grafom*** *ili* ***digrafom****. Drugim riječima, bridovi digrafa imaju točno određeni početak i kraj.*

U sljedeća dva primjera ilustriramo primjenu usmjerenih grafova u svakodnevnom životu.

Primjer 5. *Na slici 1.4 grafom su prikazane moguće rute male zrakoplovne kompanije koja nudi letove između četiri grada A, B, C i D. Usmjerenost brida koji spaja vrhove v_i i v_j označava let iz grada i u grad j, pri čemu su $i, j \in \{A, B, C, D\}$.*



Slika 1.4: Letovi

Matrica susjedstva za graf na slici 1.4 jednaka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

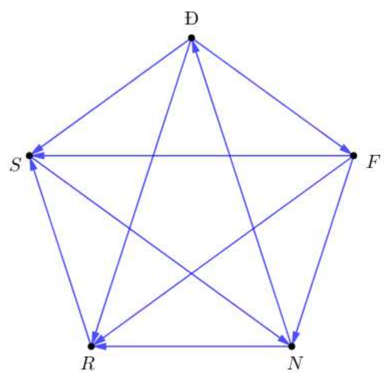
U matrici susjedstva gradovi su poredani abecednim redom pa, na primjer, grad A predstavlja prvi redak i prvi stupac matrice. Iz te se matrice jasnije vidi da zrakoplovna kompanija nudi letove iz grada A u gradove B i C. Pogledajmo što u ovom primjeru reprezentiraju njena druga i treća potencija. Imamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na to da je $(A)_{14} = 0$, $(A^2)_{14} = 1$ *i* $(A^3)_{14} = 1$, *zaključujemo da ne postoji izravan let iz grada A u grad D, ali iz grada A u grad D možemo na jedan način doći uz presjedanje u jednom gradu ili na jedan način uz presjedanje u dva grada. Provjerom zaključaka na grafu na slici 1.4 vidimo:*

- $A \to C \to D$,
- $A \to B \to C \to D$.

Primjer 6. *Pet igrača tenisa (Đoković, Federer, Nadal, Roddick i Safin) igraju turnir po kružnom sistemu, odnosno svaki igrač jednom igra sa svakim. Rezultati turnira prikazani su grafom na slici 1.5.*



Slika 1.5: Teniski turnir

Svaki igrač predstavlja jedan vrh grafa označen prvim slovom prezimena tog igrača. Dakle, $v = \{Đ, F, N, R, S\}$. *Usmjerenost brida označava pobjedu, odnosno brid iz vrha* v_i *u vrh* v_j *označava pobjedu igrača i u meču protiv igrača j, gdje su* $i, j \in \{Đ, F, N, R, S\}$.

Matrica susjedstva za graf na slici 1.5 je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U matrici susjedstva A igrači su poredani abecednim redom pa, na primjer, Federer predstavlja drugi redak i drugi stupac matrice.

Zanima nas pobjednik turnira, a to je osoba s najviše pobjeda. Broj pobjeda pojedinog igrača jednaka je zbroju elemenata u retku tablice koji predstavlja taj igrač pa do tog broja možemo doći tako da pomnožimo matricu A stupčanom matricom $[1\,1\,1\,1\,1]^T$.

Slijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz ovog računa čitamo konačan poredak igrača na turniru. Đoković i Federer dijele prvo mjesto s ukupno tri pobjede, Nadal je na drugom mjestu s dvije pobjede, a Roddick i Safin dijele treće mjesto s jednim osvojenim mečom.

No, jesu li sve pobjede od jednakog značaja? Na primjer, Đoković je pobijedio Federera, kao i Roddick Safina pa možemo reći da, unatoč jednakom broju bodova, Đoković prednjači pred Federerom, kao i Roddick pred Safinom. S druge strane, možemo reći da Safin ima dvije indirektne pobjede budući da je pobijedio Nadala koji ima dvije pobjede.

Spomenute indirektne pobjede zapravo su ekvivalentne postojanju puta duljine dva između igrača u usmjerenom grafu. Kako bismo odredili ukupan broj pobjeda i indirektnih pobjeda pojedinog igrača, računamo sumu $A + A^2$ *matrice susjedstva A i njezine druge potencije, a potom tu sumu množimo sa stupčanom matricom* $[1\,1\,1\,1\,1]^T$, *analogno kao prije.*

Slijedi

$$(A + A^2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, uzimajući u obzir indirektne pobjede, poredali bismo igrače na sljedeći način: Đoković, Federer, Nadal, Safin, Roddick.

Linearni operatori

Još jedna vrlo važna uloga matrica je u prikazivanju linearnih operatora. Najprije se podsjetimo definicije linearnih operatora.

Definicija 1.2.6. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ naziva se* ***linearni operator*** *s V u W ako vrijede svojstva:*

(1) $A(a + b) = A(a) + A(b)$,

(2) $A(\alpha a) = \alpha A(a)$,

za sve $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Svojstva (1) i (2) u gornjoj definiciji nazivamo redom aditivnost i homogenost i ona su ekvivalentna svojstvu

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b), \quad \forall a, b \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

koje nazivamo linearnost.

Lako se pokaže da je, na primjer, osna simetrija s obzirom na pravac $y = x$

$$Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad Z(x, y) = (y, x)$$

primjer linearnog operatora. Naime, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{aligned} Z(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= Z(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= (\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= (\alpha y_1, \alpha x_1) + (\beta y_2, \beta x_2) \\ &= \alpha(y_1, x_1) + \beta(y_2, x_2) \\ &= \alpha Z(x_1, y_1) + \beta Z(x_2, y_2), \end{aligned}$$

čime smo provjerili svojstvo linearnosti, odnosno dokazali da je osna simetrija s obzirom na pravac $y = x$ linearan operator.

Svaka matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ definira preslikavanje $L_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{n1}(\mathbb{F})$ zadano s

$$L_A(X) = AX.$$

Preslikavanje L_A definirano na ovaj način još je jedan primjer linearnog operatora. Naime, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $X, Y \in M_{n1}(\mathbb{F})$ imamo

$$\begin{aligned} L_A(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) \\ &= \alpha A(X) + \beta A(Y) \\ &= \alpha L_A(X) + \beta L_A(Y). \end{aligned}$$

Preslikavanje L_A, odnosno linearan operator L_A zove se **linearan operator pridružen matrici** A ili **linearan operator induciran matricom** A.

Sljedeća će nam trvdnja pomoći u interpretraciji primjera koji slijede.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ čija je baza $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Za svaki vektor $x \in V$ postoje jedinstveni skalari $x_1, \ldots, x_n$ iz polja $\mathbb{F}$ takvi da je

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

pa svakom vektoru $x \in V$ možemo pridružiti stupčanu matricu

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F}).$$

Preslikavanje

$$\phi : V \to M_{n1}(\mathbb{F}), \quad \phi(x) = x(e)$$

je izomorfizam, odnosno bijektivan linearan operator. Zato vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2.7. *Svaki vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ izomorfan je prostoru $\mathbb{F}^n$.*

Primjer 7. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

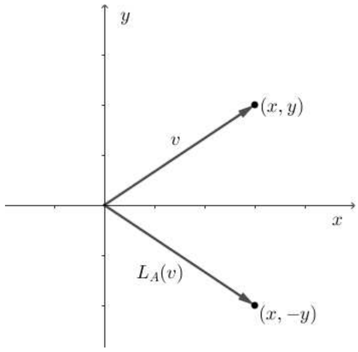
Preslikavanje $L_A : M_{21}(\mathbb{R}) \to M_{21}(\mathbb{R})$ definirano je s

$$L_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Stupčanu matricu $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in M_{21}(\mathbb{R})$ identificiramo s uređenim parom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, odnosno vektorom $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \in V^2(O)$, gdje je $V^2(O) = \{\overrightarrow{OA} : A \in E^2\}$ skup svih radijvektora, odnosno vektora čiji je početak O fiksna točka ravnine E^2 (ishodište), a kraj A neka točka iste ravnine. Zaključujemo da je L_A osna simetrija s obzirom na x-os (slika 1.6).

Primjer 8. *Neka je $\phi \in \mathbb{R}$ te neka je*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

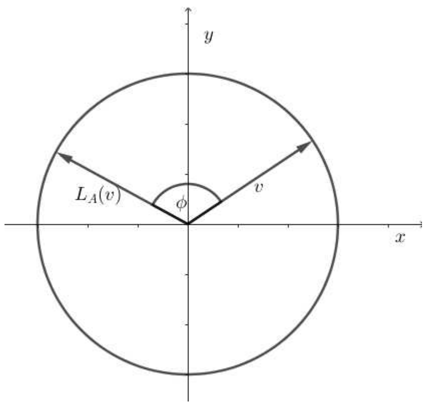


Slika 1.6: Osna simetrija s obzirom na x-os

Preslikavanje $L_A : M_{21}(\mathbb{R}) \to M_{21}(\mathbb{R})$ *definirano je s*

$$L_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}.$$

Analogno kao prije zaključujemo da je L_A *rotacija ravnine oko ishodišta pravokutnog koordinatnog sustava za kut* ϕ *u pozitivnom smjeru, odnosno suprotno od kretanja kazaljke na satu (slika 1.7).*



Slika 1.7: Rotacija

1.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice

U nastavku ćemo promatrati isključivo kvadratne matrice. Vratimo se na trenutak na primjer 7 iz prethodnog odjeljka, primjer preslikavanja $L_A : M_{21}(\mathbb{F}) \to M_{21}(\mathbb{F})$ zadanog s

$$L_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ovako definirana matrica A identificirala je preslikavanje L_A kao osnu simetriju s obzirom na x-os pravokutnog koordinatnog sustava. U dvodimenzionalnom su vektorskom prostoru od velikog značaja vektori kolinearni sa svojom slikom s obzirom na zadano preslikavanje, odnosno vektori koji pomnoženi matricom A ne mijenjaju svoj smjer. Drugim riječima, slike takvih vektora od svog se originala razlikuju samo za neki skalarni faktor. Matematičkim rječnikom možemo reći da su u linearnoj algebri od posebnog značaja oni vektori $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$ koji pomnoženi matricom $A \in M_n(\mathbb{F})$ daju vektor $\lambda X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, za neki skalar $\lambda \in \mathbb{F}$. Takvi se vektori nazivaju svojstvenim vektorima matrice A, a pripadni skalari λ nazivaju se svojstvenim vrijednostima matrice A. U primjeru osne simetrije s obzirom na x-os pravokutnog koordinatnog sustava, svojstveni vektori matrice A su vektori $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ jer osna simetrija L_A neće promijeniti njihov smjer. Zaista,

$$L_A(E_1) = AE_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot E_1,$$

$$L_A(E_2) = AE_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot E_2.$$

Dakle, vrijedi

$$AE_1 = 1E_1, \; AE_2 = -1E_2$$

pa su svojstvene vrijednosti pridružene svojstvenim vektorima E_1 i E_2 redom 1 i -1.

Svojstvene se vrijednosti prvi put pojavljuju u kontekstu nebeske mehanike, odnosno grane astonomije koja se u globalu bavi matematičkim opisivanjem gibanja nebeskih tijela. Početkom 19. stoljeća, astronomi i matematičari detaljno su proučavali gibanja nebeskih tijela kako bi ispitali matematičke modele gibanja iz doba Keplera i Newtona.

Francuski matematičar Cauchy je 1829. godine dokazao da simetrična matrica ima realne svojstvene vrijednosti, a 1840. godine je opisao metodu rješavanja sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda koristeći svojstvene vrijednosti matrica, ekvivalentnu modernoj metodi kojom ćemo se mi baviti u drugom poglavlju ovog rada.

Sylvester, kojeg smo spominjali i ranije, se 1852. godine bavio matricama u smislu kvadratnih formi, a ono što mi danas poznajemo kao svojstvene vrijednosti, nazivao je "korijenima jednadžbe determinante". U radovima poznatog njemačkog matematičara Hilberta, koji se tiču rješavanja sustava linearnih jednadžbi, prvi put se pojavljuje naziv svojstvene vrijednosti. Neumann, matematičar koji je većinu svog života proveo u Americi, 1933. godine u svojim radovima, koristeći engleski prijevod njemačkog naziva za svojstvene vrijednosti, piše o takozvanim karakterističnim vrijednostima.

Vidimo, dakle, da se oba naziva - svojstvene, odnosno karakteristične vrijednosti koriste od sredine 20. stoljeća pa sve do danas, a njihova je primjena vrlo široka.

Definicija 1.3.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je* ***svojstvena vrijednost*** *matrice A ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $X \neq 0$ takav da je*

$$AX = \lambda X. \tag{1.7}$$

Odgovarajući vektor X naziva se ***svojstveni vektor*** *matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se* ***spektar*** *matrice A i označava sa $\sigma(A)$.*

Primijetimo da definicija zahtijeva $X \neq 0$. To je zato jer za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$ pa bi bez uvjeta $X \neq 0$ svaki skalar bio svojstvena vrijednost svake matrice, što nam naravno nije u interesu.

Primjer 9. *Vektor $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ svojstveni je vektor matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -1. Naime, vrijedi

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot X.$$

Nakon što smo definirali svojstvene vrijednosti matrice, zanima nas kako ih odrediti. Definicija svojstvenih vrijednosti matrice govori da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $X \neq 0$ takav da vrijedi (1.7). Uočimo da matričnu jednadžbu (1.7) možemo zapisati kao $(A - \lambda I)X = 0$. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.3.2. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je λ rješenje jednadžbe*

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.8}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda \in \sigma(A)$, odnosno da λ zadovoljava (1.7), gdje je X pripadajući svojstveni vektor. Tvrdimo da je tada $\det(A - \lambda I) = 0$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $\det(A - \lambda I) \neq 0$. Tada je, po teoremu 1.1.9, matrica $A - \lambda I$ regularna, što znači da postoji njen inverz $(A - \lambda I)^{-1}$. Imamo:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)X = (A - \lambda I)^{-1}0 \Leftrightarrow IX = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

a to je u kontradikciji s definicijom svojstvenog vektora koja govori da je svojstveni vektor različit od nulvektora. Dakle, naša pretpostavka je bila kriva pa mora biti $\det(A - \lambda I) = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\det(A - \lambda I) = 0$. Tada je $A - \lambda I$ singularna matrica pa je $r(A - \lambda I) < n$. Prema teoremu 1.2.1, sustav $(A - \lambda I)X = 0$ ima netrivijalno rješenje, iz čega slijedi da je λ svojstvena vrijednost matrice A. □

Jednadžba (1.8) naziva se **karakteristična jednadžba** matrice A. Nenul polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se **karakteristični polinom** matrice A. Raspisom determinante dobivamo njegov opći oblik

$$k_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0,$$

za neke skalare $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{F}$.

Primjer 10. *Nađimo, primjenom teorema 1.3.2, svojstvene vrijednosti matrice iz primjera 9. Kako bi $\lambda \in \mathbb{F}$ bila svojstvena vrijednost matrice A, ona mora biti rješenje jednadžbe* (1.8). *Dobivamo* $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$*, a nultočke od k_A su* -1 *i* 4 *pa su to svojstvene vrijednosti matrice A.*

Na ovom primjeru možemo uočiti da je koeficijent uz λ u karakterističnom polinomu matrice A jednak -3, što je suprotna vrijednost traga matrice A (trag kvadratne matrice A je zbroj vrijednosti na njezinoj dijagonali), dok je slobodni koeficijent -4 jednak determinanti matrice A. Ova opažanja vrijede i za proizvoljnu matricu reda 2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Direktnim računom dobijemo da je

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{tr} A + \det A.$$

Sljedeći problem kojim se bavimo jest određivanje svojstvenih vektora matrice. Sjetimo se definicije koja kaže da je nenul vektor $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$ svojstveni vektor matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda \in \mathbb{F}$ ako vrijedi $AX = \lambda X$, odnosno vektor X mora zadovoljavati jednadžbu (1.7). Dakle, za pronalazak svojstvenih vektora matrice A pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ dovoljno je riješiti matričnu jednadžbu $(A - \lambda I)X = 0$, ekvivalentnu jednadžbi (1.7).

Primjer 11. *Odredimo svojstvene vektore matrice A iz primjera 9. Njezine su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. *Svojstveni vektor X zadovoljava jednadžbu* $(A - \lambda I)X = 0$, *odnosno*

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odredimo prvo svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -1$. *Za* $\lambda_1 = -1$ *gornja je matrična jednadžba ekvivalentna sustavu*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dvije linearne jednadžbe s dvije nepozanice. Odavde slijedi $x_1 + x_2 = 0$, *odnosno* $x_2 = -x_1$ *pa je opće rješenje sustava* $x_1 = t, x_2 = -t$, *za neki skalar t. Zapišimo rješenje u matričnom obliku:*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Po definiciji slijedi da je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *jedan svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti* -1.

Za $\lambda_1 = 4$ *dobivamo sustav*

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

pa analogno kao i prije dobivamo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Po definiciji slijedi da je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ *jedan svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti* 4.

Prije nego što u sljedećem primjeru odredimo svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice reda 3, definirajmo i svojstveni potprostor.

Definicija 1.3.3. ***Svojstveni potprostor*** *matrice* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *pridružen svojstvenoj vrijednosti* $\lambda \in \mathbb{F}$ *definira se kao*

$$V_\lambda(A) = \{X \in M_{n1}(\mathbb{F}) : AX = \lambda X\}.$$

Primjer 12. *Neka je dana matrica $A \in M_3(\mathbb{F})$,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo za početak svojstvene vrijednosti matrice A. Tražimo rješenja jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$*, odnosno*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Laplaceovim razvojom determinante dobivamo jednadžbu $-(\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$. U svrhu određivanja pripadajućih svojstvenih vektora rješavamo jednadžbu $(A - \lambda_1 I)X = 0$, odnosno $(A - \lambda_2 I)X = 0$.

Za $\lambda_1 = 1$ imamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa Gaussovom metodom eliminacija dobivamo niz ekvivalentnih matrica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$x_1 + x_3 = 0,\ x_2 = 0,$$

odnosno

$$x_1 = t,\ x_2 = 0,\ x_3 = -t,$$

za neki skalar t. Dakle,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i on čini bazu za $V_A(1)$, svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$.

Sasvim analogno, za $\lambda_2 = 5$ imamo

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa Gaussovom metodom eliminacija dobivamo niz ekvivalentnih matrica:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$-x_1 + x_3 = 0, \; -x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_1, \; x_2 = x_3 = x_1,$$

odnosno

$$x_1 = x_2 = x_3 = t,$$

za neki skalar t. Dakle,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kao i prije, zaključujemo da je vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 5$ i on čini bazu za $V_A(5)$, svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 5$.

1.4 Dijagonalizacija

Dosad smo već ustanovili da račun s matricama velikog reda nije uvijek jednostavan, kao ni određivanje svojstvenih vrijednosti, odnosno svojstvenih vektora matrica. Jasno, navedeni su postupci lakše provedivi u slučaju dijagonalnih matrica.

Svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice upravo su vrijednosti na njezinoj dijagonali. Prisjetimo se teorema 1.3.2 koji govori da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je λ rješenje jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$. Za dijagonalnu matricu $A = [a_{ij}]$ imamo jednadžbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanta dijagonalne matrice jednaka je umnošku vrijednosti na dijagonali pa direktno slijedi da su upravo vrijednosti $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ svojstvene vrijednosti matrice A.

U nastavku se pitamo može li se kvadratna matrica na neki način "poistovjetiti" s dijagonalnom matricom. Pokazat ćemo da je ovaj problem povezan sa svojstvenim vektorima matrice. Uvedimo najprije definiciju sličnih matrica.

Definicija 1.4.1. *Kažemo da je matrica A **slična** matrici B, pri čemu su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, ako postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $B = P^{-1}AP$.*

Relacija "biti sličan" je relacija ekvivalencije na skupu svih kvadratnih matrica istog reda. Nadalje, svojstvene vrijednosti invarijante su sličnosti matrica. Zaista, neka su $A,\ B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice, odnosno neka je $P \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica takva da je $B = P^{-1}AP$ te neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je $\lambda \in \mathbb{F}$ i $\det(A - \lambda I) = 0$. Sada je

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = 0$$

pa je $\lambda \in \sigma(B)$.

Svojstvene se vrijednosti dijagonalne matrice nalaze na njezinoj dijagonali pa se prirodno nameće pitanje, u kojem je slučaju matrica A slična dijagonalnoj matrici.

Definicija 1.4.2. *Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **dijagonalizabilna** ako je slična dijagonalnoj matrici istog reda, odnosno ako postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.*

Teorem 1.4.3. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Matrica A je dijagonalizabilna ako i samo ako A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ dijagonalizabilna. Tada, po definiciji 1.4.2, slijedi da postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica. Označimo $D = P^{-1}AP$. Iz te jednakosti slijedi $PD = AP$. Neka je

$$P = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \end{bmatrix}$$

stupčana reprezentacija matrice P i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vrijednosti na dijagonali matrice D. Tada je

$$AP = A\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AS_1 & AS_2 & \ldots & AS_n \end{bmatrix},$$

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 S_1 & \lambda_2 S_2 & \ldots & \lambda_n S_n \end{bmatrix}.$$

Iz $AP = PD$ slijedi

$$AS_1 = \lambda_1 S_1, \quad AS_2 = \lambda_2 S_2, \ldots, \quad AS_n = \lambda_n S_n. \tag{1.9}$$

Kako je P regularna matrica, niti jedan od $S_1, \dots, S_n$ nije nulstupac i oni čine linearno nezavisan skup. Zato iz (1.9) slijedi da su $S_1, \dots, S_n$ svojstveni vektori matrice A.

Dokažimo suprotan smjer. Pretpostavimo da matrica A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora i neka su to vektori $S_1, \dots, S_n$. Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti pridružene tim svojstvenim vektorima. Označimo:

$$P = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{bmatrix},$$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Imamo:

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AS_1 & AS_2 & \dots & AS_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 S_1 & \lambda_2 S_2 & \dots & \lambda_n S_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

Znamo da su stupci matrice P linearno nezavisni pa slijedi da je P regularna matrica. Zato iz $AP = PD$ slijedi $P^{-1}AP = D$, što po definiciji znači da je A dijagonalizabilna. □

Opisat ćemo još dva bitna pojma vezana uz svojstvene vrijednosti matrice.

Definicija 1.4.4. *Neka je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

- ***Geometrijska kratnost*** *$g(\lambda)$ svojstvene vrijednosti λ je dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda)$.*
- ***Algebarska kratnost*** *$a(\lambda)$ svojstvene vrijednosti λ je kratnost nultočke λ karakterističnog polinoma k_A matrice A.*

Može se pokazati da je geometrijska kratnost pojedine svojstvene vrijednosti matrice manja ili jednaka njezinoj algebarskoj kratnosti.

Primjer 13. *Promotrimo sljedeće dvije matrice u $M_3(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 5 & -11 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 9 & 12 & -5 \end{bmatrix}.$$

Matrice A i B imaju isti karakteristični polinom i on je jednak

$$k_A(\lambda) = k_B(\lambda) = -(\lambda + 2)^2(\lambda + 3).$$

Dakle, svojstvene vrijednosti matrica A i B su $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$. Iz karakterističnog polinoma vidimo da je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -3$ jednaka 1, što *znači da je geometrijska kratnost najviše* 1*, odnosno ona je jednaka točno* 1*. Lako vidimo da je svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 jednak svojstvenom vektoru matrice B pridruženom istoj svojstvenoj vrijednosti i on je oblika* $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Algebarska je kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_2 = -2$ jednaka 2 *pa njezina geometrijska kratnost može biti* 1 *ili* 2*. Pokaže se da je svojstveni potprostor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2 generiran vektorom* $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$*, što znači da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_2 jednaka* 1*. Dodatno, prema teoremu 1.4.3 zaključujemo da matrica A nije dijagonalizabilna. Svojstveni potprostor matrice B pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2 generiran je vektorima* $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *i* $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$*, što znači da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_2 jednaka* 2*. Prema teoremu 1.4.3, matrica B je dijagonalizabilna. Dakle, iako matrice A i B imaju iste karakteristične polinome, a njihove svojstvene vrijednosti iste algebarske kratnosti, geometrijske su kratnosti njihovih svojstvenih vrijednosti različite pa su različiti i zaključci o dijagonalizaciji.*

Sljedeće tvrdimo da je skup svojstvenih vektora pridružen različitim svojstvenim vrijednostima matrice linearno nezavisan skup.

Teorem 1.4.5. *Ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti matrice A i $X_1, \dots, X_k$ redom svojstveni vektori pridruženi tim svojstvenim vrijednostima, onda je skup $\{X_1, \dots, X_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ svojstvene vrijednosti matrice A i $X_1, \dots, X_k$ pridruženi svojstveni vektori. Pretpostavimo da su vektori $X_1, \dots, X_k$ linearno zavisni. Po definiciji, znamo da je svojstveni vektor X_1 različit od nulvektora pa slijedi da je $\{X_1\}$ linearno nezavisan skup.

Neka je r najveći mogući indeks takav da je skup $\{X_1, \dots, X_r\}$ linearno nezavisan. Pretpostavili smo da je skup $X_1, \dots, X_k$ linearno zavisan pa očito vrijedi $1 \leq r < k$. Osim toga, onda je i skup $\{X_1, \dots, X_r, X_{r+1}\}$ linearno zavisan. Po definiciji linearne zavisnosti, onda postoje skalari $c_1, \dots, c_{r+1}$ koji nisu svi nula takvi da je

$$c_1X_1 + \ldots + c_rX_r + c_{r+1}X_{r+1} = 0. \tag{1.10}$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu jednadžbe (1.10) matricom A i iskoristimo činjenicu da je $AX_i = \lambda_i X_i, i = 1, \dots, k$. Slijedi

$$c_1\lambda_1X_1 + \ldots + c_r\lambda_rX_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}X_{r+1} = 0. \tag{1.11}$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu jednadžbe (1.10) skalarom λ_{r+1}. Slijedi

$$c_1\lambda_{r+1}X_1 + \ldots + c_r\lambda_{r+1}X_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}X_{r+1} = 0. \tag{1.12}$$

Oduzmemo (1.12) od (1.11) i dobivamo

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})X_1 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})X_r = 0.$$

Iz linearne nezavisnosti skupa $\{X_1, \ldots, X_r\}$ slijedi

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

Kako su λ_i, $i = 1, \ldots, k$ različite svojstvene vrijednosti slijedi

$$c_1 = \ldots = c_r = 0. \tag{1.13}$$

Uvrstimo (1.13) u (1.10) i dobivamo

$$c_{r+1}X_{r+1} = 0.$$

Kako je $X_{r+1} \neq 0$, mora biti $c_{r+1} = 0$. No, činjenica da je $c_{r+1} = 0$ i (1.13) su u kontradikciji s pretpostavkom da nisu svi $c_1, \ldots, c_{r+1}$ nula. Dakle, naša je pretpostavka bila kriva, što znači da je skup $\{X_1, \ldots, X_k\}$ linearno nezavisan. □

Direktna posljedica prethodna dva teorema je i sljedeća tvrdnja, a teorem nakon nje pomoći će nam u sintezi koraka dijagonalizacije matrice reda n.

Korolar 1.4.6. *Kvadratna matrica reda n s n različitih svojstvenih vrijednosti je dijagonalizabilna.*

Teorem 1.4.7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Neka su $B_1, \ldots, B_k$ redom baze za svojstvene potprostore $V_A(\lambda_1), \ldots, V_A(\lambda_k)$. Tada je skup $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Označimo $g_i = g(\lambda_i)$ za $i = 1, \ldots, k$. Neka je

$$B_i = \{X_{i1}, \ldots, X_{ig_i}\}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Tvrdimo da je skup

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \{X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1g_1}, X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2g_2}, \ldots, X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kg_k}\}$$

linearno nezavisan. Neka je

$$\sum_{j=1}^{g_1} \alpha_{1j}X_{1j} + \sum_{j=1}^{g_2} \alpha_{2j}X_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{g_k} \alpha_{kj}X_{kj} = 0.$$

Označimo s Y_i vektor $\sum_{j=1}^{g_i} \alpha_{ij}X_{ij}$ za svaki $i = 1, \ldots, k$. Tada je $Y_i \in V_A(\lambda_i)$ za svaki $i = 1, \ldots, k$ i vrijedi

$$Y_1 + \ldots + Y_k = 0. \tag{1.14}$$

Tvrdimo da je $Y_1 = \ldots = Y_k = 0$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da nisu svi vektori jednaki nulvektoru. Neka su $Y_1, \ldots, Y_p$ različiti od nulvektora, a $Y_{p+1} = \ldots = Y_k = 0$. Tada su $Y_1, \ldots, Y_p$ svojstveni vektori od A pridruženi svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ i oni su prema teoremu 1.4.5 linearno nezavisni. Dodatno, iz (1.14) slijedi

$$Y_1 + \ldots + Y_p = 0,$$

što znači da je skup $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ linearno zavisan. Dakle, pretpostavka je bila kriva i time smo dokazali da je $Y_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, odnosno

$$\sum_{j=1}^{g_i} \alpha_{ij}X_{ij} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Skup $\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ig_i}\}$ je baza za $V_A(\lambda_i)$ za svaki $i = 1, \ldots, k$ pa slijedi $\alpha_{ij} = 0$ za svaki $j = 1, \ldots, g_i$. □

Navedene tvrdnje možemo sintetizirati u tri glavna koraka dijagonalizacije kvadratne matrice:

1. Neka je zadana matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$. Odredimo njen spektar te baze za svaki svojstveni potpostor. Ako unija baza ima n elemenata, matrica A je dijagonalizabilna, u suprotnom nije.

2. Ukoliko smo ustanovili da je matrica A dijagonalizabilna, od dobivenih n vektora iz prethodnog koraka formiramo matricu P čiji su stupci upravo ti vektori.

3. Matrica $P^{-1}AP$ je dijagonalna matrica čije su vrijednosti na dijagonali svojstvene vrijednosti matrice A koje odgovaraju stupcima matrice P.

Primjer 14. *Za matricu A iz primjera 9 odredili smo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$ i njima pripadne svojstvene vektore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ova dva vektora čine bazu za $M_{21}(\mathbb{F})$ pa je, prema teoremu 1.4.7, matrica A dijagonalizabilna. Zato za matricu*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primjer 15. *Svojstvene vrijednosti matrice iz primjera 12 su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$, a pridruženi svojstveni vektori su redom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Prema teoremu 1.4.3, matrica A nije dijagonalizabilna.*

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma(A)$ i odgovarajući svojstveni vektor vrijedi $AX = \lambda X$. Tada je

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X,$$

što pokazuje da je λ^2 svojstvena vrijednost matrice A^2 i X njoj pripadni svojstveni vektor. Generalizacijom tog rezultata dolazimo do sljedećeg teorema.

Teorem 1.4.8. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i $k \in \mathbb{N}$. Ako je λ svojstvena vrijednost matrice A i X pripadni svojstveni vektor, onda je λ^k svojstvena vrijednost matrice A^k i X njoj pripadni svojstveni vektor.*

Pretpostavimo da smo dijagonalizirali matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$, odnosno neka je matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ regularna i takva da je matrica $P^{-1}AP$ dijagonalna. Označimo $D = P^{-1}AP$. Računamo:

$$D^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AAP = P^{-1}A^2P.$$

Općenito, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP.$$

Odavde slijedi

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Dakle, ista matrica P dijagonalizira i sve matrice A^k, $k \in \mathbb{N}$.

1.5 Kompleksne svojstvene vrijednosti i kompleksni svojstveni vektori

Matrica rotacije u ravnini za kut $0 < \phi < 2\pi$, $\phi \neq \pi$ je oblika

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Njezin je karakteristični polinom jednak

$$k_{R_\phi}(\lambda) = (\cos\phi - \lambda)^2 + \sin^2\phi \tag{1.15}$$

i on nema realnih nultočaka. Svojstvene smo vrijednosti matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ definirali kao skalare $\lambda \in \mathbb{F}$ pa zaključujemo da matrica $R_\phi \in M_2(\mathbb{R})$ nema (realnih) svojstvenih vrijednosti. Prema tome, ne postoji regularna matrica $P \in M_2(\mathbb{R})$ takva da je matrica $P^{-1}R_\phi P$ dijagonalna matrica. Ta je činjenica i inutitivno jasna, s obzirom na to da rotacijom vektora u ravnini za kut $0 < \phi < 2\pi$, $\phi \neq \pi$, ne dobivamo njemu kolinearan vektor.

Elementi kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$ su vektori $z = (z_1, \ldots, z_n)$ koje možemo zapisati kao $z = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z$, pri čemu je

$$\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n) \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\, z = (\mathrm{Im}\, z_1, \ldots, \mathrm{Im}\, z_n).$$

Uvedimo sada i kompleksno konjugiran vektor $\bar{z}$ vektoru z, kao $\bar{z} = \mathrm{Re}\, z - i\mathrm{Im}\, z$. Polinom (1.15) ima kompleksne nultočke i one su jednake

$$\lambda_{1,2} = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = \cos\phi \pm i \sin\phi = e^{\pm i\phi}.$$

Analogno identifikaciji realnih i kompleksnih brojeva (realan broj je kompleksan s imaginarnim dijelom jednakim 0), i realne matrice, odnosno elemente prostora $M_n(\mathbb{R})$ možemo promatrati kao kompleksne matrice, odnosno elemente prostora $M_n(\mathbb{C})$. Dakle, promatramo li matricu rotacije R_ϕ kao kompleksnu matricu, ona ima dvije različite kompleksne svojstvene vrijednosti pa zaključujemo da postoji regularna matrica $P \in M_2(\mathbb{C})$ takva da je $PR_\phi P^{-1}$ dijagonalna matrica.

Dvije kompleksne svojstvene vrijednosti matrice rotacije $R_\phi \in M_2(\mathbb{C})$ čine par kompleksno konjugiranih brojeva. U nastavku dokazujemo da to vrijedi za bilo koju realnu matricu promatranu kao element prostora $M_n(\mathbb{C})$, a osim svojstvenih vrijednosti, kao kompleksno konjugirani par pojavljuju se i svojstveni vektori.

Teorem 1.5.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ svojstvena vrijednost matrice A promatrane kao element prostora $M_n(\mathbb{C})$ te $X \in M_{n1}(\mathbb{C})$ pridruženi svojstveni vektor. Tada je $\overline{\lambda}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $\overline{X}$ pripadajući svojstveni vektor.*

Dokaz. Prema pretpostavci vrijedi $AX = \lambda X$. Konjugiramo obje strane jednakosti i dobivamo $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$. Iz definicije množenja matrica, načina na koji smo definirali konjugirane vektore te činjenice da je $A \in M_n(\mathbb{R})$ slijedi $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, a to po definiciji znači da je $\overline{\lambda}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, a $\overline{X} \neq 0$ pripadni svojstveni vektor. □

Promotrimo detaljnije karakterističnu jednadžbu realne matrice A reda 2. Ona je oblika

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\, A + \det A = 0.$$

Prisjetimo se, diskriminanta kvadratne algebarske jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

je broj $D = b^2 - 4ac$. O njezinom predznaku ovisi broj realnih rješenja kvadratne jednadžbe i to na sljedeći način:

- Ako je $D < 0$, kvadratna jednadžba nema realnih rješenja (ali ima par kompleksno konjugiranih rješenja).
- Ako je $D = 0$, kvadratna jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje.
- Ako je $D > 0$, kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja.

Ovaj zaključak o broju realnih rješenja kvadratne jednadžbe možemo primijeniti na broj realnih svojstvenih vrijednosti matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, u ovisnosti o predznaku izraza $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$ i to na sljedeći način:

- Ako je $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$, matrica A nema (realnih) svojstvenih vrijednosti, no kao element prostora $M_2(\mathbb{C})$ ima par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti.
- Ako je $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0$, matrica A ima jednu dvostruku realnu svojstvenu vrijednost.
- Ako je $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A > 0$, matrica A ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti.

Primjer 16. *Pogledajmo može li se dijagonalizirati matrica $A \in M_2(\mathbb{R})$ zadana kao*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Njezin je karakteristični polinom jednak $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. Kako k_A nema realnih nultočaka, slijedi da A nema realnih svojstvenih vrijednosti. No, promatramo li matricu A kao element prostora $M_2(\mathbb{C})$, tada ona ima dvije kompleksne svojstvene vrijednosti jednake $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Matrična se jednadžba $(A - \lambda I)X = 0$ za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1 + 2i$ svodi na

$$(2 - 2i)x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = (1 - i)x_1,$$

pa je jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 dan s $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix}$. Prema teoremu 1.5.1, jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 1 - 2i$ je $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix}$. Skup $\{X_1, X_2\}$ se sastoji od svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pa slijedi da je linearno nezavisan u $M_{21}(\mathbb{C})$. Zato postoji regularna matrica $P \in M_2(\mathbb{C})$ takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica. Matrica P i dijagonalna matrica $P^{-1}AP$ jednake su

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 - i & 1 + i \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{bmatrix}.$$

Nastavljamo s teoremom koji govori da matricu $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ možemo interpretirati kao kompoziciju rotacije i homotetije.

Teorem 1.5.2. *Neka je dana realna matrica*

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $C \in M_2(\mathbb{C})$ su $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Ako su a i b oba različita od 0, onda matricu C možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

gdje je ϕ argument kompleksnog broja $a + bi$.

Dokaz. Nultočke karakterističnog polinoma

$$k_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = (a - \lambda)^2 + b^2 = (a - bi - \lambda)(a + bi - \lambda)$$

matrice C su $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, odakle slijedi prva tvrdnja.

Iz trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja $a + bi = |\lambda|(\cos\phi + i\sin\phi)$ direktno slijedi druga tvrdnja. □

Primjer 17. *Promotrimo matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako se pokaže da su svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ jednake $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Vrijedi $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ pa slijedi

$$A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}.$$

Matrica A prvo rotira vektor suprotno od smjera kazaljke na satu za 45°, a potom rotirani vektor skalira za faktor $\sqrt{2}$.

Sljedeći teorem govori da ako realna matrica reda 2 promatrana kao element prostora $M_2(\mathbb{C})$ ima kompleksne svojstvene vrijednosti, onda je ona slična matrici iz teorema 1.5.2.

Teorem 1.5.3. *Neka je A realna matrica reda 2 koja, promatrana kao element prostora $M_2(\mathbb{C})$, ima kompleksne svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, gdje je $b \neq 0$. Neka je vektor X svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = a - bi$. Tada je matrica $P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(X) & \mathrm{Im}(X) \end{bmatrix}$ regularna i vrijedi*

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Dokaz. Prvo dokazujemo da su vektori $\mathrm{Re}(X)$ i $\mathrm{Im}(X)$ linearno nezavisni u $M_{21}(\mathbb{R})$ jer je tada matrica $P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(X) & \mathrm{Im}(X) \end{bmatrix}$ regularna. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoje neki realni brojevi α i β, različiti od 0, takvi da vrijedi

$$\alpha \mathrm{Re}(X) + \beta \mathrm{Im}(X) = 0. \tag{1.16}$$

Znamo da svojstveni vektor nije jedinstven, tj. ako je X svojstveni vektor matrice A, onda je i njegov skalarni višekratnik $(\beta - \alpha i)X$ također svojstveni vektor matrice A. Imamo:

$$\begin{aligned} (\beta + \alpha i)X &= (\beta + \alpha i)(\mathrm{Re}(X) + i\mathrm{Im}(X)) \\ &= \beta \mathrm{Re}(X) - \alpha \mathrm{Im}(X) + i(\beta \mathrm{Im}(X) + \alpha \mathrm{Re}(X)) \\ &= \beta \mathrm{Re}(X) - \alpha \mathrm{Im}(X) \in M_{21}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi zbog (1.16). Dakle, svojstveni vektor $(\beta + \alpha i)X$ je realan, što znači da je i pripadna svojstvena vrijednost λ_2 realna, a to je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Zaključujemo da su vektori $\mathrm{Re}(X)$ i $\mathrm{Im}(X)$ linearno nezavisni.

Stavimo:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Za svojstvenu vrijednost λ_2 i pridruženi svojstveni vektor X vrijedi $AX = \lambda_2 X$. Raspišimo obje strane te jednakosti.

$$AX = A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + iA \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\mathrm{Re}(X) + iA\mathrm{Im}(X),$$

$$\lambda_2 X = (a - bi) \begin{bmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} ay_1 - bx_1 \\ ay_2 - bx_2 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova slijedi

$$A\mathrm{Re}(X) = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix}, \quad A\mathrm{Im}(X) = \begin{bmatrix} ay_1 - bx_1 \\ ay_2 - bx_2 \end{bmatrix}.$$

Označimo još matricu $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ s B. Dalje računamo:

$$PBP^{-1}(X) = PBP^{-1}\mathrm{Re}(X) + iPBP^{-1}\mathrm{Im}(X).$$

Iz oblika matrice P sijedi

$$PE_1 = \mathrm{Re}(X) \quad \mathrm{i} \quad PE_2 = \mathrm{Im}(X),$$

gdje su E_1 i E_2 vektori kanonske baze prostora $M_{21}(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned} PBP^{-1}\mathrm{Re}(X) &= PBP^{-1}PE_1 = PBE_1 = P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\mathrm{Re}(X) + b\mathrm{Im}(X) = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix} = A\mathrm{Re}(X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PBP^{-1}\mathrm{Im}(X) &= PBP^{-1}PE_2 = PBE_2 = P\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = -b\mathrm{Re}(X) + a\mathrm{Im}(X) = -b\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -bx_1 + ay_1 \\ -bx_2 + ay_2 \end{bmatrix} = A\mathrm{Im}(X). \end{aligned}$$

Slijedi

$$PBP^{-1}\mathrm{Re}(X) = A\mathrm{Re}(X),$$

$$PBP^{-1}\mathrm{Im}(X) = A\mathrm{Im}(X).$$

Budući da su vektori $\mathrm{Re}(X)$ i $\mathrm{Im}(X)$ linearno nezavisni u $M_{21}(\mathbb{R})$, oni čine bazu za $M_{21}(\mathbb{R})$ pa proizvoljan vektor $Z \in M_{21}(\mathbb{R})$ možemo zapisati kao

$$Z = z_1\mathrm{Re}(X) + z_2\mathrm{Im}(X),$$

za neke skalare z_1 i z_2. Pomnožimo vektor Z matricom A:

$$\begin{aligned} AZ &= A(z_1\mathrm{Re}(X) + z_2\mathrm{Im}(X)) \\ &= z_1A\mathrm{Re}(X) + z_2A\mathrm{Im}(X) \\ &= z_1PBP^{-1}\mathrm{Re}(X) + z_2PBP^{-1}\mathrm{Im}(X) \\ &= PBP^{-1}(z_1\mathrm{Re}(X) + z_2\mathrm{Im}(X)) \\ &= PBP^{-1}Z, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$A = PBP^{-1}. \quad \square$$

Sljedeći teorem koji iskazujemo je analogon teorema 1.5.3 za matrice reda n.

Teorem 1.5.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ i neka su $a \pm ib \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada postoji linearno nezavisan skup $\{X, Y\}$ u $M_{n1}(\mathbb{R})$ takav da je*

$$AX = aX + bY \quad i \quad AY = -bX + aY.$$

Na sljedećem primjeru ilustriramo primjenu prethodnog teorema. Kako bismo što ljepše zapisali matricu A, nadopunit ćemo skup $\{X, Y\}$ do baze $\{X, Y, X_3, \dots, X_n\}$ za $M_{n1}(\mathbb{R})$ te ćemo definirati matricu

$$P = \begin{bmatrix} X & Y & X_3 & \dots X_n \end{bmatrix}.$$

Time ćemo dobiti blok-dijagonalnu matricu $P^{-1}AP$.

Primjer 18. *Karakteristični polinom matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

je $k_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda-2i)(1-\lambda+2i)$. Nultočke od k_A su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1-2i$ i $\lambda_3 = 1+2i$. Matrica $A \in M_3(\mathbb{R})$ ima jednu (realnu) svojstvenu vrijednost λ_1 s pridruženim svojstvenim vektorom $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}^T$, no matrica $A \in M_3(\mathbb{C})$ ima tri svojstvene vrijednosti, nultočke polinoma k_A. Dobije se da je vektor $X_2 = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2 pa je, prema teoremu 1.5.1, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ pridružen svojstveni vektor $\overline{X_2}$. Vrijedi

$$\mathrm{Re}(X_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathrm{Im}(X_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A\mathrm{Re}(X_2) = \mathrm{Re}(X_2) + 2\mathrm{Im}(X_2) \quad i \quad A\mathrm{Im}(X_2) = -2\mathrm{Re}(X_2) + \mathrm{Im}(X_2).$$

Budući da je skup $\{X_1, X_2, \overline{X_2}\}$ skup svojstvenih vektora matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima, on je prema teoremu 1.4.5 linearno nezavisan u $M_{31}(\mathbb{C})$. Pokaže se da je i skup $\{X_1, \mathrm{Re}(X_2), \mathrm{Im}(X_2)\}$ linearno nezavisan u $M_{31}(\mathbb{C})$, a onda i u $M_{31}(\mathbb{R})$. Slijedi da je matrica $P = \begin{bmatrix} X_1 & \mathrm{Re}(X_2) & \mathrm{Im}(X_2) \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ regularna. Vrijedi

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} AX_1 & A\mathrm{Re}(X_2) & A\mathrm{Im}(X_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2X_1 & \mathrm{Re}(X_2) + 2\mathrm{Im}(X_2) & -2\mathrm{Re}(X_2) + \mathrm{Im}(X_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & \mathrm{Re}(X_2) & \mathrm{Im}(X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 2

Primjene svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice

2.1 Markovljevi lanci

U ovom ćemo se poglavlju baviti dinamičkim sustavima. Jednostavno rečeno, dinamički sustav je sustav koji opisuje promjene varijabli u vremenu. Zamislimo sljedeću situaciju: neka tvrtka ima urede na tri različite lokacije, označimo ih s $1, 2$ i 3. Svaki zaposlenik mjesec dana radi na jednoj od te tri lokacije, a sljedeći mjesec može seliti na neku od druge dvije ili ostati na istoj. Neka je dana matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix},$$

gdje a_{ij} označava vjerojatnost da je zaposlenik s lokacije j sljedeći mjesec premješten na lokaciju i, gdje su $i, j = 1, 2, 3$. Dakle, element a_{23} govori da je vjerojatnost da zaposlenik koji je jedan mjesec radio na lokaciji 3 sljedeći mjesec radi na lokaciji 2 jednaka 30%. Drugi redak matrice govori da je među ljudima koji rade na lokaciji 2 njih 20% prošli mjesec radilo na lokaciji 1, 50% na lokaciji 2 i 30% na lokaciji 3.

Uvodimo redom oznake $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ za broj zaposlenika koji rade na lokacijama 1, 2 i 3 u mjesecu t. Interpretacijom prvog i trećeg retka tablice na isti način kao gore, dobivamo

$$A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2x_1(t) + 0.3x_2(t) + 0.3x_3(t) \\ 0.2x_1(t) + 0.5x_2(t) + 0.3x_3(t) \\ 0.6x_1(t) + 0.2x_2(t) + 0.4x_3(t) \end{bmatrix},$$

što kraće možemo zapisati kao

$$AX(t) = X(t+1), \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Ovo je primjer diskretnog dinamičkog sustava, što znači da se varijable mijenjaju u diskretnim vremenskim intervalima. Ako vektor $X(t)$ označava broj zaposlenika na pojedinoj lokaciji u mjesecu t, onda vektor $X(t+1)$ označava taj broj sljedeći mjesec. Dodatno, vektor $X(t)$ nazivamo vektorom stanja sustava u trenutku (mjesecu) t.

Promotrimo do kojih zaključaka o radnom mjestu tijekom narednih 6 mjeseci možemo doći za zaposlenika koji je s radom počeo na lokaciji 1. Tada je $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i računamo:

$$X(1) = AX(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad X(2) = AX(1) = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.32 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad X(3) = AX(2) = \begin{bmatrix} 0.272 \\ 0.336 \\ 0.392 \end{bmatrix},$$

$$X(4) = AX(3) = \begin{bmatrix} 0.2728 \\ 0.34 \\ 0.3872 \end{bmatrix}, X(5) = AX(4) = \begin{bmatrix} 0.27272 \\ 0.34072 \\ 0.38656 \end{bmatrix}, X(6) = AX(5) = \begin{bmatrix} 0.272728 \\ 0.340872 \\ 0.3864 \end{bmatrix}.$$

Uočavamo da se vektori stanja stabiliziraju, odnosno približavaju se vektoru $Q \approx \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.34 \\ 0.39 \end{bmatrix}$. Kad sustav dođe u stanje Q, on se više ne mijenja. Zaključujemo da vjerojatnost da će zaposlenik ostati na lokaciji 1 iznosi otprilike 27%, vjerojatnost da će preseliti na lokaciju 2 otprilike 34%, a vjerojatnost da će preseliti na lokaciju 3 otprilike 39%.

Možemo promatrati što se događa u još daljoj budućnosti, odnosno kako izgleda $X(t)$ za $t \to \infty$. Očito je

$$X(t) = AX(t-1) = AAX(t-2) = \ldots = A^t X(0).$$

Za lakši račun, matricu A možemo dijagonalizirati. Dobivamo

$$A = \begin{bmatrix} \frac{12}{17} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{15}{17} & -\frac{1}{4} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{44} & \frac{17}{44} & \frac{17}{44} \\ -\frac{32}{33} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} =: PDP^{-1}.$$

Tada je

$$X(t) = A^t X(0) = PD^t P^{-1} X(0).$$

Ovakav dinamički sustav u kojemu se vrijednosti varijabla izražavaju kao vjerojatnosti naziva se Markovljev lanac, a odgovarajuća matrica A je takozvana stupčano stohastička matrica. Zapažanja iz ovog primjera vrijede i općenito, što dokazujemo u sljedećih nekoliko tvrdnji.

Definicija 2.1.1. ***Markovljev lanac*** *je niz stanja sustava u kojem stanje u nekom trenutku ovisi samo o stanju u prethodnome trenutku. Uvjetna vjerojatnost da se proces u nekome trenutku u budućnosti nalazi u određenome stanju, ako se u sadašnjosti i prošlosti nalazio u određenome nizu stanja, jednaka je uvjetnoj vjerojatnosti istoga budućeg stanja uz uvjet samo sadašnjeg stanja, tj.*

$$P(X_{n+m} = x_{n+m} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+m} = x_{n+m} | X_n = x_n),$$

gdje je X_n slučajni proces čiji elementi $n \in \mathbb{N}_0$ i $m \in \mathbb{N}$ poprimaju vrijednosti u prebrojivome skupu stanja $x_0, x_1, \dots, x_{n+m} \in S$. [1]

Definicija 2.1.2. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je* ***stupčano stohastička matrica*** *ako su svi njezini elementi nenegativni, a zbroj elemenata u svakom stupcu iznosi* 1.

Teorem 2.1.3. *Ako je $A \in M_n(\mathbb{R})$ stupčano stohastička matrica, tada je* 1 *svojstvena vrijednost od A.*

Dokaz. Zbroj elemenata u svakom stupcu stohastičke matrice jednak je 1, što znači da je zboj svih redaka matrice $A - I$ jednak nulretku. Slijedi da je skup svih redaka matrice $A - I$ linearno zavisan skup pa je rang matrice $A - I$ manji od n. Dakle, matrica $A - I$ je singularna pa je $\det(A - I) = 0$ iz čega po definiciji slijedi da je 1 svojstvena vrijednost matrice A. □

Sljedeći teorem govori da je svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 stupčano stohastičke matrice jednodimenzionalan. Dokazat ćemo i da svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 ima ili sve pozitivne ili sve negativne komponente.

Teorem 2.1.4. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ stupčano stohastička matrica čiji su svi elementi pozitivni.*

(1) Svojstveni vektori matrice A pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1 *imaju ili sve pozitivne ili sve negativne komponente.*

(2) Svojstveni potprostor $V_A(1)$ je jednodimenzionalan.

[1] Markovljev lanac. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje.* Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=70392

Dokaz. (1) Označimo s $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 matrice A. Vrijedi $AX = X$, odnosno $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Pretpostavimo da X ima i pozitivnih i negativnih komponenata. Tada vrijedi

$$|x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Zbrajanjem dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

a to je kontradikcija. Dakle, ili je $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ ili je $x_i \leq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Pretpostavimo da je $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ i neka je $x_1 = 0$. Tada iz $AX = X$ slijedi $x_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j$, što je ekvivalentno s $\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j = 0$. Kako su svi elementi matrice A pozitivni i $x_j \geq 0$ za svaki $j = 2, \dots, n$, slijedi da je $x_j = 0$ za svaki $j = 2, \dots, n$, što je u kontradikciji s činjenicom da je X svojstveni vektor matrice A. Dakle, niti jedna komponenta vektora X nije nula. Analogno se analizira slučaj $x_i \leq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

(2) Pretpostavimo da su $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ i $Y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1 matrice A. Tvrdimo da su linearno zavisni. Zbog (1) možemo pretpostaviti da je $x_i > 0$ i $y_i > 0$, za svaki $i = 1, \dots, n$. Pretpostavimo da su X i Y linearno nezavisni. Tada je

$$\frac{x_i}{y_i} \neq \frac{x_j}{y_j}$$

za neke međusobno različite indekse i i j. Odavde slijedi da postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha x_i + \beta y_i = 1$ i $\alpha x_j + \beta y_j = -1$. No, tada je $\alpha X + \beta Y$ svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 koji ima i pozitivne i negativne komponente, što je u kontradikciji s prvom tvrdnjom. □

Dokazali smo da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti 1 stupčano stohastičke matrice jednaka 1. Također, postoji svojstveni vektor čije su sve komponente pozitivne, a može se pokazati da je on jedinstven ukoliko zahtijevamo da je zbroj njegovih komponenata jednak 1, odnosno da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ stupčano stohastička matrica. Postoji jedinstven vektor $Q = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ i $AQ = Q$..*

Vektor Q iz prethodnog korolara naziva se vektor stacionarnih vjerojatnosti.

Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

iz uvodnog primjera ima tri svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{10}$ i $\lambda_3 = \frac{1}{5}$. Jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 je $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{15}{17} \\ 1 \end{bmatrix}$ i on je baza svojstvenog potprostora $V_A(1)$. Kako bi X_1 bio vektor stacionarnih vjerojatnosti, zbroj njegovih komponenata mora biti 1, što znači da ga je potrebno skalirati. Tada će komponente vektora Q biti vjerojatnosti raspodjele zaposlenika na pojedinim lokacijama. Dobivamo vektor

$$Q = \frac{1}{\frac{12}{17} + \frac{15}{17} + 1} \begin{bmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{15}{17} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{17}{44} \begin{bmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{15}{17} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{15}{44} \\ \frac{17}{44} \end{bmatrix}.$$

U kontekstu primjera, pretpostavimo da je na početku bilo 30 zaposlenika na lokaciji 1, 50 na lokaciji 2 i 20 na lokaciji 3. Računamo broj zaposlenika na pojedinoj lokaciji u narednim mjesecima, pri čemu za usporedbu rezultata ostavljamo decimalne brojeve.

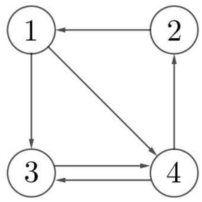
t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	30	50	20
1	27	37	36
2	27.3	34.7	38
3	27.27	34.21	38.52
4	27.273	34.115	38.612
5	27.2727	34.0957	38.6316
6	27.27273	34.09187	38.6354

Vektor Q govori da će zaposlenici biti raspodijeljeni po lokacijama 1, 2 i 3 redom u postotcima $\frac{3}{11} \approx 27\%$, $\frac{15}{44} \approx 34\%$ i $\frac{17}{44} \approx 39\%$, što se očito poklapa s računom prikazanom u gornjoj tablici te opažanjima do kojih smo došli na početku, računajući vektore stanja sustava u različitim trenutcima t. Također, dobivena raspodjela ne ovisi o početnoj raspodjeli zaposlenika.

2.2 Google matrica

Od 1998. godine Google se pretraživanje temelji na PageRank algoritmu koji je dobio ime po jednom od svoja dva osnivača, Larryju Pageu. Page je, uz Sergeyja Brina, osmislio algoritam koji prilikom pretraživanja nekog pojma na tražilici, osim pretraženog pojma, u obzir uzima i važnost pojedine web stranice. Važnije se stranice, odnosno one stranice s većim rangom, pojavljuju na vrhu popisa web stranica koje dobijemo nakon pretraživanja pojma. Prema PageRank algoritmu, važna je stranica ona na koju vodi velik broj drugih stranica. No, osim broja, PageRank algoritam u obzir uzima i važnost tih stranica. Rang stranice određuje se prema osnovnom pravilu koje glasi: Ako stranica A ima poveznice na n drugih stranica, svaka od tih n stranica nasljeđuje $\frac{1}{n}$ ranga stranice A.

Zamislimo da imamo mali sustav od 4 internet stranice koje označimo s $1, 2, 3$ i 4. Korisnici interneta s pojedine od tih stranica mogu doći na drugu prateći poveznice i to na način prikazan na slici 2.1.



Slika 2.1: Internet s četiri stranice

Označimo s x_1, x_2, x_3 i x_4 redom rangove stranica $1, 2, 3$ i 4. Vidimo da na primjer stranica 1 ima poveznice na stranice 3 i 4 koje prema gornjem pravilu nasljeđuju polovinu njezinog ranga. Rangovi svih stranica zadovoljavaju sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \tfrac{x_4}{2} \\ x_3 &= \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_4}{2} \\ x_4 &= \tfrac{x_1}{2} + x_3 \end{aligned}$$

što možemo prikazati matričnom jednadžbom $X = AX$, gdje je

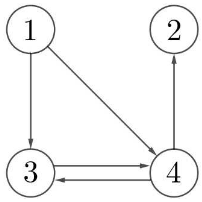
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica A je takozvana **rang-matrica**. Uočimo da je vektor X svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Također, matrica A je stupčano stohastička matrica, no to nije uvijek slučaj. Promotrimo sustav s četiri stranice dan na slici 2.2.

Rang-matrica tog sustava je oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i ona nema svojstvenu vrijednost 1. S obzirom na to da ne postoji poveznica na stranicu 1, možemo zaključiti da je korisnik nikad neće posjetiti ukoliko to nije početna stranica. No,



Slika 2.2: Internet s četiri stranice

takvu situaciju želimo izbjeći. Zato je ideja pretpostaviti da će korisnik interneta povremeno započeti pretraživanje od početka, odnosno da će nasumično odabrati stranicu koju posjećuje, ne prateći poveznice. Ako realan broj p označava vjerojatnost da korisnik prati poveznicu sa stranice na kojoj se nalazi, onda je $1 - p$ vjerojatnost da korisnik nasumično odabere neku stranicu. U većini se slučajeva uzima $p = 0.85$, odnosno $1 - p = 0.15$.

Pogledajmo što to znači za primjer sustava s četiri stranice na slici 2.1. Za tako definiran p i uz činjenicu da je u sustavu od četiri stranice vjerojatnost nausmičnog odabira jedne od njih jednaka $\frac{1}{4}$ početni se sustav

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \tfrac{x_4}{2} \\ x_3 &= \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_4}{2} \\ x_4 &= \tfrac{x_1}{2} + x_3 \end{aligned}$$

modificira u

$$\begin{aligned} x_1 &= px_2 + (1-p)\tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 &= p\tfrac{x_4}{2} + (1-p)\tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_3 &= p\left(\tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_4}{2}\right) + (1-p)\tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_4 &= p\left(\tfrac{x_1}{2} + x_3\right) + (1-p)\tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Definiramo li matricu B s

$$B := pA + (1-p)\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gornji sustav možemo zapisati kao

$$BX = X.$$

Matrica B je stupčano stohastička matrica pa ima svojstvenu vrijednost 1 i poznatija je kao **Google matrica**. Prema teoremu 2.1.4, svojstveni potprostor razapet vektorom pridruženim svojstvenoj vrijednosti 1 je jednodimenzionalan.

Normirani svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 (vektor stacionarnih vjerojatnosti) matrice B za sustav na slici 2.1 približno je jednak $X_1 \approx \begin{bmatrix} 0.19 & 0.19 & 0.27 & 0.35 \end{bmatrix}^T$. U kontekstu važnosti stranica, to znači da je stranica 4 najvažnija, s rangom od približno 0.35, dok su stranice 1 i 2 najmanje važne, s rangovima od približno 0.19.

Uočimo da je za sustav od četiri stranice sa slike 2.2 rang-matrica jednaka

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

te da ona nema svojstvenu vrijednost 1. U ovom se slučaju rang-matrica modificira tako da se svaki nulstupac zamijeni stupcem s vrijednostima $\frac{1}{n}$, pri čemu je n broj stranica (ovdje je $n = 4$), a onda se nastavlja kao u prethodnom slučaju.

2.3 Diferencijalne jednadžbe

Američki matematičar Lotka i talijanski matematičar Volterra su početkom 20. stoljeća, neovisno jedan o drugom, razvili matematički model koji opisuje dinamički odnos populacija grabežljivca i plijena. Takozvani Lotka-Volterra model zapravo je sustav dviju nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned} \tag{2.1}$$

prvog reda, pri čemu je x broj jedinki grabežljivca, y broj jedinki plijena, $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ brzine rasta populacija grabežljivca i plijena u vremenu t te α, β, γ i δ pozitivni parametri koji opisuju vezu veličina tih populacija. Lotka-Volterra model samo je jedan od mnogih primjera primjene diferencijalnih jednadžbi u drugim znanostima. Diferencijalne jednadžbe povezuju funkciju i njenu derivaciju. Obje jednadžbe sustava (2.1) su diferencijalne jednadžbe prvog reda jer je prva derivacija funkcija $x = x(t)$ i $y = y(t)$ najviša derivacija u jednadžbama. Općenito, red diferencijalne jednadžbe definiramo upravo kao najvišu derivaciju funkcije u toj jednadžbi.

U nastavku ćemo se baviti sustavima diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdje su y_i, $i = 1, \ldots, n$ tražene funkcije, a a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ koeficijenti. Analogno kao i do sad, sustav (2.2) možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ili skraćeno

$$Y' = AY.$$

Kažemo da je sustav (2.2):

- s konstantnim koeficijentima, jer su koeficijenti a_{ij} konstantni,
- linearan, jer su sve funkcije $f_i = f(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ linearne,
- homogen, jer je $y_1 = \ldots = y_n = 0$ njegovo rješenje neovisno o danim koeficijentima,
- prvog reda, jer je prva derivacija funkcija $y_1, \ldots, y_n$ najviša derivacija.

Slijede dva primjera rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 19. *Zadan je sustav*

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 \\ y_2' &= -3y_2 \\ y_3' &= 2y_3 \end{aligned}$$

uz početne uvjete

$$\begin{aligned} y_1(0) &= -3 \\ y_2(0) &= 2 \\ y_3(0) &= 1 \end{aligned} \; .$$

Zapišemo li sustav u matričnom obliku, dobivamo

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$Y' = DY,$$

gdje je

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uočimo, matrica D je dijagonalna matrica, odnosno svaka jednadžba sustava sadrži samo jednu nepoznatu funkciju, pa direktnom integracijom slijedi

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5x} \\ c_2 e^{-3x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}.$$

Uz početni uvjet dobivamo partikularno rješenje

$$Y = \begin{bmatrix} -3e^{5x} \\ 2e^{-3x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}.$$

Na ovaj način lako rješavamo sustave oblika $Y' = DY$, gdje je D dijagonalna matrica. Pretpostavimo sada da je zadan sustav $Y' = AY$, pri čemu je matrica A dijagonalizabilna. Tada postupamo na sljedeći način.

1. Pronađemo matricu P koja dijagonalizira matricu A.

2. Uvodimo supstituciju $Y = PU$. Tada vrijedi

   $$Y' = AY \Leftrightarrow PU' = A(PU) \Leftrightarrow U' = (P^{-1}AP)U \Leftrightarrow U' = DU.$$

   Dobili smo novi sustav $U' = DU$ čija je pripadajuća matrica dijagonalna, gdje je $D = P^{-1}AP$.

3. Riješimo sustav $U' = DU$.

4. Odredimo Y iz $Y = PU$.

Primjer 20. *Zadan je sustav*

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + y_2 \\ y_2' & = & 4y_1 - 2y_2 \end{array}.$$

Zapišimo sustav u matričnom obliku.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Dakle, matrica A jednaka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Provedimo postupak dijagonalizacije matrice A. Iz

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice A jednake $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$. Standardnim računom pokažemo da je jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 2$ jednak $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ te da je jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -3$ jednak $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$. Tada za matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

vrijedi $D = P^{-1}AP$.

Uvodimo supstituciju $Y = PU$ i $Y' = PU'$ te rješavamo sustav $U' = DU$, to jest sustav

$$\begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{-3x}. \end{aligned}$$

Iz $Y = PU$ dobivamo

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \tfrac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned},$$

za neke konstante c_1 i c_2.

2.4 Linearne rekurzije i sustavi linearnih rekurzija

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrica važnu ulogu imaju i u rješavanju linearnih rekurzija te sustavima linearnih rekurzija. Primjena svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora olakšava razumijevanje rekurzivnih procesa te njihovu analizu.

Jedan od najpoznatijih rekurzivno zadanih nizova je takozvani Fibonaccijev niz brojeva F_n. Svaki član niza, osim prva dva, definiran je kao zbroj prethodna dva člana. Preciznije, Fibonaccijev je niz zadan s

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 3,$$

iz čega lako dobivamo njegove članove

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ \ldots$$

Općenito, za niz brojeva $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ kažemo da je zadan **rekurzivno** ako je svaki njegov član jednoznačno određen pomoću svojih prethodnika. Specijalno, ako je broj prethodnika pomoću kojih je zadan član niza jednak k, onda kažemo da je rekurzivna relacija **reda** k. Pritom su vrijednosti prvih k članova niza poznate i zovemo ih početnim uvjetima. Mi ćemo se u ovom poglavlju baviti linearnih rekurzijama i njihovim sustavima pa definirajmo za početak linearnu rekurziju.

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je rekurzija reda k* ***linearna*** *ako postoje brojevi $c_1, \ldots c_k$ takvi da je*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n, \quad \forall n \geq 1. \tag{2.3}$$

Iz jednostavnog primjera rekurzivne relacije prvog reda

$$a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

lako slijedi formula za računanje člana niza a_n pomoću prvog člana a_1. Naime, imamo

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & 2a_1 \\ a_3 & = & 2a_2 = 2 \cdot 2a_1 = 2^2 a_1 \\ a_4 & = & 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2a_1 = 2^3 a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & = & 2^{n-1} a_1. \end{array}$$

Za općenitu linearnu rekurziju prvog reda

$$a_n = c a_{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

sa zadanim prvim elementom a_1 vrijedi

$$a_n = c^{n-1} a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pogledajmo kako pomoću matrica možemo na lakši način riješiti rekurziju, odnosno eksplicitno odrediti opći član rekurzivno zadanog niza a_n, pod uvjetom da je matrica dijagonalizabilna. Za svaki $n \geq 1$ definirajmo stupčanu matricu

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-2} \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da matrica X_n sadrži k susjednih članova niza a_n, od kojih posljednji a_{n+k-1} možemo primjenom formule (2.3) zapisati kao

$$a_{n+k-1} = c_1 a_{n+k-2} + c_2 a_{n+k-3} + \ldots + c_k a_{n-1}$$

pa imamo

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-2} \\ c_1 a_{n+k-2} + c_2 a_{n+k-3} + \ldots + c_k a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Definiramo li matricu $A \in M_k(\mathbb{F})$ kao

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \ldots & c_1 \end{bmatrix},$$

možemo zaključiti da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$X_n = AX_{n-1}.$$

Matricu A zovemo **matricom rekurzije**.

Primijetimo i da je stupčana matrica X_1 poznata jer su poznate vrijednosti početnih članova $a_1, \ldots, a_k$. Analogno prethodnom primjeru rekurzivne relacije prvog reda i ovdje slijedi

$$X_n = A^{n-1} X_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, kako bismo eksplicitno odredili opći član a_n rekurzivno zadanog niza (a_n), moramo odrediti n-tu potenciju matrice A. Znamo od prije da je potenciranje matrica pojednostavljeno u slučaju dijagonalnih matrica pa smo se zato ograničili na slučajeve u kojima je matrica A dijagonalizabilna.

Ako je matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, tada je $A = PDP^{-1}$ i $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ pa slijedi

$$X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1. \tag{2.4}$$

U sljedećem primjeru rješavamo linearnu rekurzivnu relaciju drugog reda.

Primjer 21. *Riješimo linearnu rekurziju*

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ -2a_{n-1} + 3a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = AX_{n-1}.$$

Iz početnih uvjeta slijedi

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Potrebno je dijagonalizirati matricu A. Njene svojstvene vrijednosti su nultočke karakterističnog polinoma, $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, *i jednake su* $\lambda_1 = 1$ *i* $\lambda_2 = 2$, *a pripadni svojstveni vektori su redom* $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *i* $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Zato je*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad i \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema formuli (2.4) *matrica* X_n *je jednaka*

$$X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} + 1 \\ 2^n + 1 \end{bmatrix}$$

iz čega slijedi

$$a_n = 2^{n-1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Na prethodnom primjeru možemo uočiti da su koeficijent uz λ i slobodni koeficijent u karakterističnom polinomu matrice A

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

jednaki koeficijentima u zapisu člana niza $a_{n+1} = c_1 a_n + c_2 a_{n-1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Također, primijetimo da su svojstveni vektori pripadni svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ jednaki

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Općenito vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2. *Karakteristični polinom matrice $A \in M_k(\mathbb{F})$ definirane kao*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{bmatrix}$$

je

$$k_A(\lambda) = (-1)^k(\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \ldots - c_{k-1}\lambda - c_k).$$

Ako je λ_0 svojstvena vrijednost matrice A, onda je

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_0^{k-1} \end{bmatrix}$$

jedan pripadni svojstveni vektor.

Dokaz. Tvrdnju o karakterističnom polinomu matrice A dokazujemo matematičkom indukcijom po redu k matrice.

Baza indukcije: Tvrdnja je trivijalna za $k = 1$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k - 1 \in \mathbb{N}$, odnosno da je karakteristični polinom matrice $A \in M_{k-1}(\mathbb{F})$ jednak

$$k_A(\lambda) = (-1)^{k-1}(\lambda^{k-1} - c_1\lambda^{k-2} - \ldots - c_{k-1}).$$

Korak indukcije: Dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja $k - 1$, odnosno za $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem determinante po prvom stupcu dobivamo

$$k_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{k+1}c_k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Na prvu determinantu primijenimo pretpostavku indukcije, a druga determinanta jednaka je umnošku elemenata na dijagonali, odnosno broju 1 jer je pripadna matrica donjetrokutasta. Slijedi

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= -\lambda(-1)^{k-1}(\lambda^{k-1} - c_1\lambda^{k-2} - \ldots - c_{k-1}) + (-1)^{k+1}c_k \\ &= (-1)^{k-1}(\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \ldots - c_{k-1}\lambda - c_k). \end{aligned}$$

Po aksiomu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Ako je λ_0 svojstvena vrijednost matrice A, onda je ona nultočka karakterističnog polinoma, odnosno vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$, odakle slijedi

$$\lambda_0^k = c_1\lambda_0^{k-1} + \ldots + c_{k-1}\lambda_0 + c_k.$$

Sada direktnim množenjem matrica dobijemo

$$AX_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \ldots & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ \lambda_0^2 \\ \vdots \\ \lambda_0^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_0^2 \\ \lambda_0^3 \\ \vdots \\ \lambda_0^k \end{bmatrix} = \lambda_0 X_0.$$

Time je dokazana i druga tvrdnja propozicije. □

U primjeru 2 imali smo rekurzivno zadani niz. Riješit ćemo dobivenu rekurziju, ovaj put primjenom propozicije 2 i to za proizvoljan broj mjesta na parkiralištu.

Primjer 22. *Na nekom se parkiralištu parkiraju automobili i autobusi. Automobil zauzme jedno mjesto, a autobus dva mjesta. Zanima nas na koliko se načina može popuniti parkiralište od n mjesta, pri čemu automobile međusobno ne razlikujemo, kao ni autobuse.*

Uz oznaku a_n za broj načina na koji se može popuniti parkiralište od n mjesta, imali smo

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3,$$

s početnim uvjetima $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Definiramo matrice X_n i A kao

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pa slijedi

$$X_n = A^{n-1}X_1,$$

gdje je $X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Prema propoziciji 2 karakteristični polinom matrice A jednak je

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Svojstvene vrijednosti su nultočke karakterističnog polinoma i jednake su $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *i* $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Pripadni svojstveni vektori su jednaki*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Radi lakšeg zapisa, nećemo uvrštavati konkretne vrijednosti za λ_1 *i* λ_2. *Imamo*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad i \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Tada je

$$X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Prvi element matrice X_n *jednak je*

$$\frac{-\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{n-1} + 2\lambda_1^{n-1} - 2\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n-1}(-\lambda_2 + 2) + \lambda_2^{n-1}(\lambda_1 - 2)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{2.5}$$

Jer je

$$-\lambda_2 + 2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \lambda_1 \quad i \quad \lambda_1^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = 1 + \lambda_1$$

slijedi

$$-\lambda_2 + 2 = \lambda_1^2. \tag{2.6}$$

Također,

$$\lambda_1 - 2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = -(1 + \lambda_2) \quad i \quad \lambda_2^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 1 + \lambda_2$$

pa je

$$\lambda_1 - 2 = -\lambda_2^2. \tag{2.7}$$

Uvrstimo (2.6) *i* (2.7) *u* (2.5) *i dobivamo da je prvi element matrice A jednak*

$$a_n = \frac{\lambda_1^{n-1}\lambda_1^2 + \lambda_2^{n-1}(-\lambda_2^2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *i* $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *i dobivamo da je broj načina na koji se može popuniti parkiralište od n mjesta jednak*

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{\sqrt{5} \cdot 2^{n+1}}.$$

Na sličan način možemo rješavati i određene sustave linearnih rekurzija, kao što pokazujemo u sljedećem primjeru.

Primjer 23. *Nuklearni reaktor sadrži dvije vrste čestica, neka su to x-čestice i y-čestice. Svake se sekunde svaka x-čestica razdijeli u tri y-čestice, a svaka y-čestica u jednu x-česticu i dvije y-čestice. U trenutku $t = 0$ u reaktoru je bila samo jedna x-čestica. Odredimo broj x-čestica i y-čestica u trenutku $t = n$.*

Slika 2.3: Dijeljenje čestica

Na slici 2.3 prikazano je dijeljenje čestica. Označimo s a_n i b_n redom brojeve x-čestica i y-čestica u trenutku $t = n$. Početni uvjeti ovog problema su $a_0 = 1$ i $b_0 = 0$. Vrijedi

$$a_n = b_{n-1}, \quad b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}.$$

Definiramo matrice X_n i A kao

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

i dobivamo

$$X_n = AX_{n-1}.$$

Analogno kao do sad, vrijedi

$$X_n = A^n X_0,$$

gdje je $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Potrebno je dijagonalizirati matricu A (ako je to moguće). Svojstveni vektori pripadni svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$ su redom $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *i* $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ *pa je*

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} \frac{3\cdot(-1)^n+3^n}{4} \\ \frac{-3\cdot(-1)^n+3\cdot 3^n}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}((-1)^n + 3^{n-1}) \\ \frac{3}{4}((-1)^{n+1} + 3^n) \end{bmatrix}.$$

Odavde slijedi da je broj x-čestica i y-čestica u trenutku $t = n$

$$a_n = \frac{3}{4}((-1)^n + 3^{n-1}), \quad b_n = \frac{3}{4}((-1)^{n+1} + 3^n).$$

Bibliografija

[1] Anton, H., Rorres C.: *Elementary Linear Algebra.* Wiley, 2014.

[2] Arambašić, Lj.: *Linearna algebra.* Element, 2022.

[3] Franušić, Z., Šiftar J.: *Linearna algebra.* Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2022.

[4] Karlović, L.: *Homogene linearne rekurzije.* diplomski rad, Sveučilište u Zagebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2022. https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A10722/datastream/PDF/view.

[5] Lay, D., Lay S. McDonald J.: *Linear algebra and its applications.* Pearson, 2016.

[6] Margalit, D., Rabinof J. Williams B.: *Interactive Linear Algebra (UBC edition).* University of British Columbia, 2022.

[7] Mišković, B.: *Sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda.* diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2011. http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/MI%C5%A104.pdf.

[8] Poole, D.: *Linear Algebra (A Modern Introduction).* Cengage Learning, 2011.

[9] Prkačin, B.: *Primjene teorije grafova.* diplomski rad, Sveučilište u Zagebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2021. https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A10189/datastream/PDF/view.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice te njihove primjene. Prvo je poglavlje posvećeno matricama te njihovim svojstvenim vrijednostima. Nakon kratkog podsjetnika na matrice, terminologiju vezanu uz matrice te operacije s matricama, slijedi definicija svojstvenih vrijednosti te opis i analiza metoda za dijagonalizaciju matrice.

U drugom se poglavlju fokusiramo na široke primjene svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice. Analizom raznih primjera iz svakodnevnog života pokazujemo kako svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrica igraju veliku ulogu u dinamičkim sustavima, preciznije Markovljevim lancima, PageRank algoritmu na kojem se od 1998. godine temelji Google pretraživanje, diferencijalnim jednadžbama i linearnim rekurzijama te njihovim sustavima.

Summary

In this master's thesis, we explore the eigenvalues and eigenvectors of matrices and their applications. The first chapter is dedicated to matrices and their eigenvalues. After a brief recapitulation of matrices, terminology related to matrices, and matrix operations, we proceed with the definition of eigenvalues, as well as a description and analysis of methods for matrix diagonalization.

In the second chapter, we focus on the extensive applications of matrix eigenvalues and eigenvectors. Through the analysis of various real-life examples, we demonstrate how eigenvalues and eigenvectors of matrices play a significant role in dynamic systems, specifically in Markov chains, the PageRank algorithm that has been the foundation of Google Search since 1998, differential equations and linear recursions and their systems.

Životopis

Rođena sam 26.11.1998. godine u Čakovcu. Završila sam Osnovnu školu Gornji Mihaljevec nakon koje upisujem prirodoslovno matematički smjer u Gimnaziji Josipa Slavenskog u Čakovcu. Nakon završenog preddiplomskog studija Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2021. godine, upisujem diplomski studij Matematika, smjer: nastavnički na istom fakultetu.