Vjerojatnosne i funkcionalne varijante Szemerédijeve leme o regularnosti

Bosnić, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Bosnić

VJEROJATNOSNE I FUNKCIONALNE VARIJANTE SZEMERÉDIJEVE LEME O REGULARNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Dokazat ćemo dvije varijante poznate Szemerédijeve leme o regularnosti [4, 5]. Jedna varijanta je funkcionalno analitička i za njenu formulaciju je prvenstveno zaslužan W. T. Gowers [1], a druga je vjerojatnosna i nju je razradio T. Tao u svojim radovima [6, 8, 9]. Dokaz funkcionalne varijante bazira se na Hahn-Banachovom teoremu o separaciji, dok su nam za dokaz vjerojatnosne varijante dovoljni samo osnovni pojmovi i rezultati iz teorije vjerojatnosti. Nakon što proučimo obje varijante, pokazat ćemo kako se vjerojatnosna varijanta može iskoristiti da bi se dokazao Rothov teorem o aritmetičkim progresijama za kojeg je zaslužan K. F. Roth [2].

Prvo poglavlje sadrži osnovne pojmove i rezultate koji su nam potrebni da bismo dokazali funkcionalnu varijantu leme o regularnosti. Poglavlje je podijeljeno u tri međusobno nezavisna dijela. U prvom dijelu uvest ćemo pojmove konveksnog skupa i norme te dokazati nekoliko jednostavnih ali tehničkih propozicija koje će nam kasnije trebati. U drugom dijelu dokazat ćemo Hahn-Banachov teorem o separaciji na normiranim prostorima. Na kraju, u trećem dijelu dat ćemo kratak uvod u Fourierovu analizu na konačnim Abelovim grupama. Pokazat ćemo da je dualna grupa izomorfna polaznoj grupi i da vrijede poznate formule iz Fourierove analize, poput formule inverzije, Plancherelovog identiteta i Fourierove transformacije konvolucije.

U drugom poglavlju dokazat ćemo funkcionalnu varijantu leme o regularnosti. Započet ćemo s kratkom motivacijom oko proučavanja dekompozicija objekata na strukturirani i pseudoslučajni dio. Vidjet ćemo da su leme o regularnosti posebne vrste ovakvih dekompozicija. Nakon toga ćemo dati jedan primjer takve dekompozicije koristeći Fourierovu analizu na konačnim grupama. Definirat ćemo Gowersovu normu uniformnosti za funkcije na konačnoj Abelovoj grupi i pokazati da ona zadovoljava sva svojstva norme. Tu normu ćemo generalizirati do Gowersove norme uniformnosti za grafove, a zatim i do box-norme koja je definirana za funkcije na vjerojatnosnim prostorima. Slijedi glavni rezultat ovog poglavlja tj. funkcionalna varijanta leme o regularnosti. Prije nego što dokažemo ovu lemu, radi usporedbe ćemo iznijeti i pojednostavljenu verziju iste leme. Za kraj ćemo kratko komentirati ponašanje ocjena koje se javljaju u iskazima tih dviju verzija.

Treće poglavlje započet ćemo proučavanjem konačnih σ-algebri na vjerojatnosnim prostorima. Dokazat ćemo da se svaka konačna σ-algebra može atomizirati i pomoću atomizacije definirati uvjetno očekivanje na konačnim σ-algebrama. Nakon toga dokazat ćemo neka jednostavna svojstva uvjetnog očekivanja koja ćemo često koristiti. Vratit ćemo se na proučavanje prije spomenute box-norme i pokazati da ona zadovoljava sva svojstva norme. Također, dat ćemo i dvije važne nejednakosti vezane za tu normu. Zatim ćemo dokazati vjerojatnosnu varijantu leme o regularnosti i usporediti ju s funkcionalnom varijantom iz prethodnog poglavlja. Koristeći vjerojatnosnu lemu regularnosti, preciznije njenu malo modificiranu verziju, dokazat ćemo vjerojatnosnu lemu o uklanjanju trokuta. Ona je osnova za dokaz Rothovog teorema, kojim ćemo se baviti u sljedećem poglavlju.

U završnom, četvrtom poglavlju bavimo se dokazom Rothovog teorema o aritmetičkim progresijama. Navest ćemo nekoliko vezanih rezultata među kojima su Szemerédijev i Green-Tao teorem, uz vrlo kratak povijesni pregled. Dat ćemo alternativnu formulaciju Rothovog teorema na konačnim cikličkim grupama i pokazati da je ona ekvivalentna originalnoj formulaciji. Dokazat ćemo kombinatornu verziju leme o uklanjanju trokuta na grafovima koristeći vjerojatnosnu verziju iz prošlog poglavlja i pokazati kako tu kombinatornu verziju možemo iskoristi za dokaz cikličke verzije Rothovog teorema.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

Kako bismo dokazali funkcionalnu varijantu leme o regularnosti potrebni su nam određeni pripremni rezultati i njima ćemo se baviti u ovom poglavlju. Dat ćemo kratak uvod u konveksne skupove i norme, dokazati Hahn-Banachov teorem o separaciji i malo se detaljnije pozabaviti Fourierovom analizom na konačnim Abelovim grupama. Čitatelj može, ako želi, preskočiti ovo poglavlje i vratiti se na rezultate koji su ovdje dokazani kada se oni pojave u poglavljima koja slijede.

Napomena 1.0.1. Radit ćemo samo s realnim i kompleksnim vektorskim prostorima. Dakle, pod pojmom vektorski ili normiran prostor implicitno podrazumijevamo da je pripadno polje ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

1.1 Konveksni skupovi i norme

Definicija 1.1.1. *Za podskup K vektorskog prostora V kažemo da je* konveksan *ako je dužina $\overline{xy}$ sadržana u K za svaki par točaka x i y iz K. Preciznije, K je konveksan ako za svaki par točaka x i y iz K vrijedi*

$$(1-t)x + ty \in K \qquad \text{za svaki } t \in [0,1].$$

Definicija 1.1.2. *Neka su $S_1, S_2, \ldots S_m$ podskupovi od V.* Suma *skupova $S_1, S_2, \ldots S_m$ je skup*

$$\left\{ s_1 + s_2 + \ldots + s_m \ : \ s_i \in S_i \text{ za i} = 1, 2 \ldots, m \right\}$$

i označavamo ga sa $S_1 + S_2 + \ldots + S_m$ ili $\sum_{i=1}^m S_i$.

Propozicija 1.1.3. Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveksni podskupovi od V. Suma tih skupova $\sum_{i=1}^m K_i$ je također konveksan skup.

Dokaz. Neka su x, y dva elementa iz $\sum_{i=1}^m K_i$. Tada je

$$x = \sum_{i=1}^m x_i \quad \text{za neke } x_i \in K_i \qquad \text{i} \qquad y = \sum_{i=1}^m y_i \quad \text{za neke } y_i \in K_i.$$

Želimo pokazati da je segment $(1-t)x + ty$ za t iz $[0, 1]$ u skupu $\sum_{i=1}^m K_i$. Kako je svaki od skupova $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveksan, za svaki t iz $[0, 1]$ je

$$(1-t)x_i + ty_i \in K_i \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Zbrajanjem ovih izraza vidimo da je

$$(1-t)x + ty = (1-t)\sum_{i=1}^m x_i + t\sum_{i=1}^m y_i = \sum_{i=1}^m ((1-t)x_i + ty_i)$$

iz čega je jasno da je $(1-t)x + ty$ element skupa $\sum_{i=1}^m K_i$. □

Definicija 1.1.4. *Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveksni podskupovi vektorskog prostora V. Najmanji konveksan skup koji sadrži sve ove skupove naziva se* konveksna ljuska *tih skupova.*

Propozicija 1.1.5. Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveksni skupovi. Konveksna ljuska tih skupova jednaka je skupu

$$\left\{\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \quad : x_i \in K_i;\ \alpha_i \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\right\}.$$

Dokaz. Označimo skup iz gornje formule sa S_m i primijetimo da je taj skup konveksan. Zaista, uzmimo dvije točke x i y iz S_m. Tada je

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \qquad \text{za neke } x_i \in K_i \text{ i } \alpha_i \in [0, 1]\ (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ takve da je } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

$$y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \qquad \text{za neke } y_i \in K_i \text{ i } \beta_i \in [0, 1]\ (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ takve da je } \sum_{i=1}^m \beta_i = 1.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ne postoji indeks i takav da je $\alpha_i = \beta_i = 0$. U suprotnom bi se x i y nalazili u nekom skupu $S_{m'}$ za $m' < m$ i ta pretpostavka bi vrijedila. Izaberimo t iz $[0, 1]$. Uz malo računa dobivamo da je

$$\begin{aligned}(1-t)x + ty &= (1-t)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + t\sum_{i=1}^m \beta_i y_i = \sum_{i=1}^m (1-t)(\alpha_i x_i + t\beta_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \Big((1-t)\alpha_i + t\beta_i\Big)\Big(\frac{(1-t)\alpha_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} x_i + \frac{t\beta_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} y_i\Big). \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Kako je
$$\frac{(1-t)\alpha_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} + \frac{t\beta_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} = 1 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots m,$$
vidimo da je
$$z_i = \frac{(1-t)\alpha_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} x_i + \frac{t\beta_i}{(1-t)\alpha_i + t\beta_i} y_i \in K_i \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m.$$
Ako se sada vratimo u jednakost (1.1) slijedi da je
$$(1-t)x + ty = \sum_{i=1}^{m} \Big((1-t)\alpha_i + t\beta_i\Big) z_i \in S_m$$
zato što je
$$\sum_{i=1}^{m} (1-t)\alpha_i + t\beta_i = (1-t)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + t\sum_{i=1}^{m} \beta_i = (1-t) + t = 1.$$
Prema tome, S_m je konveksan skup pa sadrži konveksnu ljusku skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$.

S druge strane, indukcijom po broju skupova m pokazat ćemo da konveksna ljuska skupova $K_1, K_2, \dots K_m$ sadrži S_m. Baza je trivijalna jer je $S_1 = K_1$. Pretpostavimo da smo pokazali da za neki prirodan broj n konveksna ljuska skupova $K_1, K_2, \dots K_n$ sadrži S_n. Neka je x neki element iz S_{n+1} i neka je $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$ za neke $x_i \in K_i$, $\alpha_i \in [0, 1]$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$. Ako je $\alpha_{n+1} = 1$, onda je $x = x_{n+1}$ pa se x nalazi u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_{n+1}$. U suprotnom je $\alpha_{n+1} \neq 1$ pa možemo zapisati
$$x = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_i. \tag{1.2}$$
Iz pretpostavke indukcije znamo da je vektor
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i$$
u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_n$ (jer je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1}$). Vratimo se u jednakost (1.2) iz koje vidimo da se x nalazi u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_{n+1}$. Tvrdnja sada slijedi primjenom principa matematičke indukcije.

Dakle, zaključujemo da je S_m konveksan skup koji je sadržan u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$. Zbog definicije konveksne ljuske kao najmanjeg konveksnog skupa koji sadrži $K_1, K_2, \dots, K_m$ ta dva skupa su jednaka. □

Sada smo obradili sve rezultate o konveksnim skupovima koji će nam trebati. Nastavit ćemo s proučavanjem tvrdnji vezanih uz norme na konačnodimenzionalnim prostorima.

Definicija 1.1.6. Norma *na vektorskom prostoru V je svaka funkcija* $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ *koja zadovoljava sljedeća četiri svojstva:*

- *(Pozitivnost)* $\|v\| \geq 0$ *za svaki* v *iz* V.
- *(Apsolutna homogenost)* $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *za svaki* v *iz* V *i svaki* α *iz* $\mathbb{R}$ *odnosno* $\mathbb{C}$.
- *(Nejednakost trokuta)* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *za sve* v *i* w *iz* V.
- *(Definitnost)* $\|v\| = 0$ *samo ako je* $v = 0$.

Propozicija 1.1.7. Neka je V vektorski prostor, $\|\cdot\|$ norma na V i $C \geq 0$ neka konstanta. Praslika skupa $[0, C]$ po normi $\|\cdot\|$, tj. skup

$$S = \|\cdot\|^{\leftarrow}([0, C]) = \{v \in V : \|v\| \leq C\}$$

je konveksan (koristimo oznaku $^{\leftarrow}$ za prasliku). Ako je uz to V i konačnodimenzionalan onda je S dodatno i kompaktan skup u topologiji koju generira bilo koja norma na V.

Dokaz. Ako su v i w iz S, primjenjujući apsolutnu homogenost i nejednakost trokuta dobivamo

$$\|(1-t)v + tw\| \leq (1-t)\|v\| + t\|w\| \leq (1-t)C + tC = C \qquad \text{za svaki } t \in [0, 1].$$

Prema tome, $(1-t)v + tw$ je u S za svaki $t \in [0, 1]$ pa je S konveksan skup. Pretpostavimo sada da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Sve norme na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne pa svaka norma generira istu topologiju na V. Zato je S ograničen i zatvoren. No u slučaju konačnodimenzionalnog prostora zatvoreni i ograničeni skupovi su kompaktni pa je S kompaktan skup. □

Definicija 1.1.8. *Neka je* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *konačnodimenzionalan Hilbertov prostor i* $\|\cdot\|$ *neka norma na* H*. Dualnu normu norme* $\|\cdot\|$ *označavamo s* $\|\cdot\|^*$ *i definiramo s*

$$\|\phi\|^* = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, \phi\rangle| \qquad \text{za } \phi \in H.$$

Napomena 1.1.9. Konačnadimenzionalnost nam osigurava da je gornji supremum konačan, jer je u slučaju konačnodimenzionalnog prostora jedinična kugla norme $\|\cdot\|$ kompaktna.

Propozicija 1.1.10. Neka je $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ konačnodimenzionalan Hilbertov prostor i $\|\cdot\|$ norma na H. Dualna norma $\|\cdot\|$ je također norma na H.

Dokaz. Treba samo provjeriti da su zadovoljena svojstva norme.

- Pozitivnost vrijedi jer uzimamo supremum po nenegativnom skupu.

- Apsolutna homogenost lako slijedi iz linearnosti skalarnog produkta.
- Da bismo dokazali nejednakost trokuta, primijetimo da za vektore ϕ i ψ iz H vrijedi

$$||\phi + \psi||^* = \sup_{||v|| \leq 1} |\langle v, \psi + \phi \rangle| \leq \sup_{||v|| \leq 1} |\langle v, \psi \rangle| + \sup_{||v|| \leq 1} |\langle v, \phi \rangle| = ||\phi||^* + ||\psi||^*.$$

- Ako je $||\phi||^* = 0$, onda za svaki $v \in H$ vrijedi $\langle v, \phi \rangle = 0$ što implicira da je $\phi = 0$ i dokazuje definitnost. □

Sljedeća nejednakost slična je Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti.

Propozicija 1.1.11. Neka je $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Za bilo koju normu $|| \cdot ||$ na H vrijedi

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq ||v|| \cdot ||\phi||^* \qquad \text{za sve } v \text{ i } \phi \text{ iz } H.$$

Dokaz. Za $v = 0$ je tvrdnja očigledna, dok za $v \neq 0$ imamo:

$$|\langle v, \phi \rangle| = ||v|| \cdot |\langle \frac{v}{||v||}, \phi \rangle| \leq ||v|| \sup_{||w|| \leq 1} |\langle w, \phi \rangle| = ||v|| \cdot ||\phi||^* \qquad \text{za sve } v \text{ i } \phi \text{ iz } H.$$ □

Propozicija 1.1.12. Neka je $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalan Hilbertov prostor i $|| \cdot ||$ bilo koja norma na H. Tada je dva puta dualna norma od polazne norme jednaka polaznoj normi tj. $|| \cdot ||^{**} = || \cdot ||$.

Dokaz. Neka je $v \neq 0$ vektor iz H (tvrdnja $||v||^{**} = ||v||$ očigledno vrijedi ako je $v = 0$). Pokazali smo da za bilo koji drugi vektor ϕ iz H vrijedi

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq ||v|| \cdot ||\phi||^*.$$

Iz toga slijedi da je

$$||v||^{**} = \sup_{||\phi||^* \leq 1} |\langle \phi, v \rangle| \leq \sup_{||\phi||^* \leq 1} ||v|| = ||v||.$$

Ostaje nam još pokazati obratnu nejednakost. Označimo s $\mathbb{K}$ polje ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) u pozadini vektorskog prostora H. Neka je V jednodimenzionalan potprostor generiran vektorom v tj.

$$V = \left\{ \alpha v \ : \ \alpha \in \mathbb{K} \right\}.$$

Definirajmo linearan funkcional $f \colon V \to \mathbb{K}$ tako da je $f(v) = ||v||$. Koristeći Hahn-Banachov teorem o proširenju funkcionala možemo naći linearan funkcional f' na H koji proširuje f takav da vrijedi $f'(w) \leq ||w||$ za svaki vektor w iz H. Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionalu f' pridružen je vektor ϕ takav da je $f(w) = \langle w, \phi \rangle$ za svaki $w \in H$ i za koji je

$$|\langle w, \phi \rangle| \leq ||w|| \qquad \text{za svaki } w \text{ iz } H,$$

što pokazuje da je dualna norma od ϕ najviše 1. No jednakost

$$\left|\left\langle \frac{v}{||v||}, \phi \right\rangle\right| = \frac{|f'(v)|}{||v||} = 1$$

pokazuje da je ta norma upravo jednaka 1 tj. $||\phi||^* = 1$. Zbog toga sada imamo

$$||v||^{**} = \sup_{||\psi||^* \leq 1} |\langle \psi, v \rangle| \geq |\langle \phi, v \rangle| = ||v||$$

i dokazali smo propoziciju. □

1.2 Hahn-Banachov teorem o separaciji

Dokazat ćemo Hahn-Banachov teorem o separaciji. Formulacija koju dajemo ekvivalentna je analitičkoj formulaciji Hahn-Banachovog teorema koja se puno češće spominje. Zainteresiranom čitatelju preporučujemo knjigu [3] iz koje je preuzeta većina teorema i dokaza koji slijede.

Definicija 1.2.1. *Neka je V vektorski prostor. Skup $M \subseteq V$ zovemo* linearna mnogostrukost *u V ako postoj potprostor W od V i vektor x iz V takvi da je $M = x + W$. Pri tome je potprostor W jedinstveno određen.*

Definicija 1.2.2. *Neka je V normiran prostor i H linearna mnogostrukost u V s pripadnim potprostorom W. Za H kažemo da je hiperravnina u V ako kvocijentni prostor V/W postoji i ako mu je dimenzija jednaka 1.*

Lema 1.2.3. *Neka je V realan normiran prostor dimenzije barem 2 i K otvoren konveksan skup u V koji ne sadrži 0. Tada postoji netrivijalan potprostor M od V koji ne siječe K.*

Dokaz. Neka je L proizvoljan dvodimenzionalan potprostor od V. Onda je L izomorfan s $\mathbb{R}^2$. Ako L ne siječe K, našli smo potprostor od V koji ne siječe K i dokaz je gotov. Pretpostavimo stoga da L siječe K. Tada je $K_1 = K \cap L$ otvoren u L i konveksan kao presjek konveksnih skupova. Identificirajmo L s $\mathbb{R}^2$ i preslikajmo skup K_1 na jediničnu kružnicu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ koristeći neprekidnu funkciju $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ danu formulom

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \qquad \text{za } (x, y) \text{ iz } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \text{ pri čemu je } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ovdje je bitno da K_1 ne sadrži 0 tj. da je $K \cap L \subseteq L \setminus \{0\}$.

Slika od K_1 je otvoren skup u relativnoj topologiji na S^1. Da to provjerimo, dovoljno je primijetiti da je slika svake otvorene kugle po funkciji f otvoren skup u relativnoj topologiji na S^1. K_1 je unija otvorenih kugli pa tvrdnja jednostavno slijedi. Preciznije

$$f(K_1) = f\Big(\bigcup_{\substack{B \subseteq K_1 \\ B \text{ je otv. kugla}}} B \Big) = \bigcup_{\substack{B \subseteq K_1 \\ B \text{ je otv. kugla}}} f(B),$$

što pokazuje da je $f(K_1)$ otvoren kao unija otvorenih skupova.

Skup $f(K_1)$ ne može sadržavati dijametralno suprotne točke. Kada bi ih sadržavao, postojao bi pravac kroz 0 na kojem bi postojale dvije točke iz K_1 s različitih strana točke 0 pa bi K_1 zbog konveksnosti sadržavao točku 0, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Primijetimo da je svaki konveksan skup povezan putevima pa je posebno K_1 povezan. Budući da je skup $f(K_1)$ povezan (kao slika povezanog skupa po neprekidnoj funkciji), to znači da on ne može pokrivati kružni luk kuta većeg od π tj. on mora biti sadržan u nekoj otvorenoj polukružnici. Stoga možemo naći dvije dijametralno suprotne točke na S^1 koje nisu u $f(K_1)$. Pravac koji prolazi kroz te dvije točke je potprostor od L koji ne siječe K_1 pa ne siječe ni polazni skup K. Dakle, taj pravac je potprostor koji tražimo. □

Teorem 1.2.4. *Neka je V normiran prostor, M linearna mnogostrukost u V i K neprazan otvoren i konveksan skup u V koji ne siječe M. Tada postoji hiperravnina H koja sadrži M i ne siječe K.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je V realan vektorski prostor. Translacijom možemo postići da je M potprostor od V (pa sadrži 0) i da K ne sadrži 0. Pogledajmo familiju svih zatvorenih potprostora od V koji ne sijeku K,

$$\mathcal{F} = \Big\{ E \leq V \ : \ E \text{ je zatvoren i } E \cap K = \emptyset \Big\}.$$

Najveći takav potprostor naći ćemo primjenom Zornove leme. Uredimo familiju $\mathcal{F}$ operacijom $\subseteq$. Neka je $\mathcal{L}$ bilo koji lanac u $\mathcal{F}$. Tvrdimo da je zatvarač skupa $\bigcup_{E \in \mathcal{L}} E$ gornja međa lanca $\mathcal{L}$. Zaista, taj skup je u $\mathcal{F}$ jer je potprostor koji ne siječe K (K je otvoren skup) i jer je nadskup svakog od elemenata iz $\mathcal{L}$, budući da je nadskup od unije svih tih elemenata. Prema tome, možemo primijeniti Zornovu lemu i naći maksimalan zatvoren potprostor H od V koji ne siječe K. Kako je H zatvoren, dobro je definiran kvocijentni vektorski prostor V/H. Poanta je da taj kvocijentni prostor ne može imati dimenziju veću od 1. Kada bi on imao dimenziju barem 2 onda bismo koristeći prethodnu lemu mogli naći potprostor W od V/H koji ne siječe sliku od K po kvocijentnom preslikavanju. To bi značilo da je praslika potprostora W po kvocijentnom preslikavanju zatvoren potprostor od V koji sadrži M i ne siječe K. No, ovo je kontradikcija s maksimalnošću skupa H. Prema tome, V/H mora biti jednodimenzionalan potprostor što znači da je H hiperravnina. Ona sadrži M i ne siječe K pa je to upravo hiperravnina koju tražimo.

Neka je sada V kompleksan vektorski prostor. Na V možemo gledati kao na realan vektorski prostor i naći hiperravninu H kao u prošlom odjeljku. M je kompleksan potprostor od V pa je $M = iM$. Stoga je $H \cap iH$ zatvorena hiperravnina u L koja sadrži M i ne siječe K. $\square$

Lema 1.2.5. *Neka je V normiran prostor nad poljem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i H hiperravnina u V koja ne sadrži 0. Tada postoji neprekidan linearan funkcional f na V takav da je $f = 1$ na H i taj funkcional je jedinstven.*

Dokaz. Neka je W potprostor paralelan s hiperravninom H. Kvocijentni prostor V/W je jednodimenzionalan, a slika hiperravnine H po kvocijentnom preslikavanju jednaka je vektoru različitom od 0. Označimo taj vektor s $h \in V/W$. Kako je h različit od 0, vrijedi

$$V/W = \left\{\alpha h \ : \ \alpha \in \mathbb{K}\right\}.$$

Neka je $\zeta \colon V/W \to \mathbb{K}$ neprekidan linearan funkcional koji svakom vektoru v iz V/W pridružuje jedinstveni skalar α takav da je $v = \alpha h$. Definirajmo linearan funkcional $f \colon V \to \mathbb{K}$ formulom

$$f(v) = \zeta(\pi(v)) \quad \text{za svaki } v \text{ iz } V,$$

pri čemu smo s $\pi \colon V \to V/W$ označili kvocijentno preslikavanje s V na V/W, koje je neprekidno. Na ovaj način dobili smo neprekidan linearan funkcional takav da je $f(h') = 1$ za svaki h' iz H.

Pretpostavimo da postoji još jedan linearan funkcional g s istim svojstvom. Budući da je $g = 1$ na cijeloj hiperravnini H, potprostor W je u jezgri funkcionala g pa faktorizacijom kroz W dobivamo linearan funkcional ξ na V/W takav da je $g = \xi \circ \pi$. Znamo da vrijedi $\xi(h) = \zeta(h) = 1$ iz čega slijedi da se ξ i ζ podudaraju na V/W (jer je V/W jednodimenzionalan). Onda se i g i f moraju podudarati na V, što pokazuje da je traženi funkcional f jedinstven. $\square$

Nastavljamo s formulacijom Hahn-Banachovog teorema na koju ćemo se poslije referencirati.

Teorem 1.2.6 (Hahn-Banachov teorem o separaciji)**.** *Neka je $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ realan Hilbertov prostor, v vektor iz H i $K \subseteq H$ otvoren konveksan skup koji ne sadrži v. Tada postoje konstanta $\beta \in \mathbb{R}$ i ne nul vektor ϕ iz H takvi da je*

$$\langle v, \phi\rangle \geq \beta \quad \text{i} \quad \langle w, \phi\rangle < \beta \quad \text{za svaki } w \text{ iz } K.$$

Dokaz. Primjenom teorema 1.2.4 možemo naći hiperravninu P koja sadrži v i ne siječe K. Translacijom hiperravnine P, ako je potrebno, možemo dobiti novu hiperravninu P' koja ne sadrži 0. Lema 1.2.5 nam daje neprekidan linearan funkcional f koji je jednak 1 na P'. Polazna hiperravnina P je onda jednaka skupu

$$\{x \in H : \ f(x) = f(v)\}.$$

Zbog povezanosti slike $f(K)$ i činjenice da ona ne sadrži $f(v)$ možemo uzeti $\beta = f(v)$ tako da onda vrijedi jedan od ova dva slučaja:

- $f(v) = \beta < f(w)$ za svaki w iz K.
- $f(w) < \beta = f(v)$ za svaki w iz K.

Zbog zamjene f s $-f$ i β s $-\beta$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi drugi slučaj. Preostaje još primijeniti Rieszov teorem o reprezentaciji da funkcionalu f pridružimo vektor ϕ koji zadovoljava nejednakosti iz teorema. □

1.3 Fourierova analiza na konačnim grupama

Cikličke grupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ prirodno se javljaju pri proučavanju aritmetičkih nizova u $\mathbb{Z}$. Fourierova analiza koristan je alat za proučavanju ovih grupa i ponekad omogućuje elegantnije dokaze raznih tvrdnji. Dat ćemo malo detaljniji pregled ove teorije jer ona nije toliko standardna. Naravno, vrijede analogni rezultati kao u realnoj Fourierovoj analizi, ali dokazi su jednostavniji zato što radimo s konačnim objektima.

Karakteri

Definicija 1.3.1. *Neka je $(G, +)$ Abelova grupa.* Karakter *na grupi G je svaki homomorfizam ψ s grupe $(G, +)$ u grupu $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.*

Propozicija 1.3.2. Neka je G konačna Abelova grupa. Svaki karakter na G poprima vrijednosti na jediničnoj kružnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$.

Dokaz. Kako je G konačna grupa, za bilo koji karakter ψ na G i proizvoljan g iz G imamo

$$|\psi(g)|^{|G|} = |(\psi(g))^{|G|}| = |\psi(|G| \cdot g)| = |\psi(0)| = 1.$$

Prema tome $|\psi(g)| = 1$, tj. karakter ψ poprima vrijednosti na jediničnoj kružnici. □

Na direktnim sumama cikličkih grupa, tj. na grupama oblika $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$ za neke $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ možemo eksplicitno odrediti sve karaktere.

Propozicija 1.3.3. Neka je $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$ za neke $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. Svi karakteri na G dani su formulama

$$\psi_k(g_1, g_2, \ldots, g_m) = \prod_{i=1}^{m} e^{2\pi g_i k_i / n_i} \quad \text{za } k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \text{ iz } \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}.$$

Dokaz. Funkcije dane gornjim formulama su stvarno karakteri jer za $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ i $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ iz G imamo

$$\psi_k(g)\psi_k(h) = \prod_{i=1}^{m} e^{2\pi g_i k_i/n_i} \prod_{i=1}^{m} e^{2\pi h_i k_i/n_i} = \prod_{i=1}^{m} e^{2\pi(g_i+h_i)k_i/n_i} = \psi_k(g+h).$$

Preostaje još pokazati da su to svi karakteri. Stoga, neka je ψ neki karakter na G. Označimo $e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i \text{ elemenata}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$. Za svaki i od 1 do m je $n_i e_i = 0$ pa je $\psi(e_i)^{n_i} = 1$, iz čega vidimo da je $\psi(e_i)$ n_i-ti korijen iz 1. Prema tome, $\psi(e_i) = e^{2\pi k_i/n_i}$ za neki k_i iz $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Ako brojeve k_i složimo u vektor, dobivamo $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}/_{n_1\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{n_2\mathbb{Z}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/_{n_m\mathbb{Z}}$. Tvrdimo da je $\psi = \psi_k$ gdje je ψ_k karakter dan formulom iz iskaza. Zaista, za $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m) \in \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$ jednostavnim računom dobivamo

$$\psi(g) = \psi\Big(\sum_{i=1}^{m} e_i g_i\Big) = \prod_{i=1}^{m} \psi(e_i)^{g_i} = \prod_{i=1}^{m} \left(e^{2\pi k_i/n_i}\right)^{g_i} = \prod_{i=1}^{m} e^{2\pi k_i g_i/n_i} = \psi_k(g). \qquad \square$$

Dualna grupa

Propozicija 1.3.4. Neka je G Abelova grupa. Skup svih karaktera na G s operacijom množenja po točkama je Abelova grupa.

Dokaz. Dovoljno je provjeriti da su zadovoljeni svi aksiomi grupe.

- Umnožak dva karaktera ψ i χ je ponovno karakter jer je

$$\begin{aligned}(\psi \cdot \chi)(g+h) &= \psi(g+h)\chi(g+h) = \psi(g)\chi(g)\psi(h)\chi(h) \\ &= (\psi \cdot \chi)(g)(\psi \cdot \chi)(h) \quad \text{za sve } g \text{ i } h \text{ iz } G.\end{aligned}$$

- Karakter $\psi\colon G \to \mathbb{C}^*$ dan s $\psi(g) = 1$ za svaki $g \in G$ je neutralni element.
- Asocijativnost i komutativnost operacije množenja po točkama slijede iz asocijativnosti i komutativnosti množenja u $\mathbb{C}$.
- Za karakter ψ, inverzni karakter $\psi^{-1}\colon G \to \mathbb{C}^*$ dan je formulom $\psi^{-1}(g) = (\psi(g))^{-1}$ za svaki $g \in G$. Da je ψ^{-1} zaista karakter vidimo iz jednakosti

$$\psi^{-1}(g+h) = (\psi(g+h))^{-1} = (\psi(g)\psi(h))^{-1} = \psi^{-1}(g)\psi^{-1}(h) \quad \text{za sve } g \text{ i } h \text{ iz } G. \qquad \square$$

Ovo nas dovodi do definicije dualne grupe.

Definicija 1.3.5. *Neka je G konačna Abelova grupa. Grupu svih karaktera na G zajedno s operacijom množenja po točkama zovemo* dualna grupa *grupe G i označavamo s* $\widehat{G}$.

Napomena 1.3.6. Neka je $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$. Propozicija 1.3.3 pokazuje da je $\widehat{G}$ izomorfna s G. Posebno, $|\widehat{G}| = |G|$.

Na konačnim grupama koristimo sljedeće dvije mjere.

Definicija 1.3.7. *Neka je G konačna Abelova grupa.*

- Uniformna mjera *na G je vjerojatnosna mjera* $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ *dana formulom*

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|G|} \in [0,1] \qquad \text{za } A \in \mathcal{P}(G).$$

  Kada integriramo funkciju f po mjeri μ, koristimo oznaku $\mathbb{E}_{g\in G} f(g)$ *ili kraće* $\mathbb{E}_g f(g)$ *ako je jasno po kojoj grupi se integrira.*

- Brojeća mjera *na G je konačna mjera* $\nu\colon \mathcal{P}(G) \to [0, |G|]$ *dana formulom*

$$\nu(A) = |A| \qquad \text{za } A \in \mathcal{P}(G).$$

  Integriranje po mjeri ν jednostavno označavamo sumom.

Na polaznoj grupi G gledamo uniformnu, a na dualnoj grupi brojeću mjeru. Uz ovako odabrane mjere vrijede uobičajeni rezultati iz Fourierove analize čije potpune dokaze dajemo u nastavku.

Napomena 1.3.8. Na grupama G i $\widehat{G}$ imamo L^p norme ($1 \le p \le \infty$) za svaku od ove dvije mjere. Da ne bi došlo do zabune, za L^p norme u odnosu na mjeru μ nastavit ćemo koristiti oznaku L^p dok ćemo za iste norme u odnosu na mjeru ν koristiti oznake l^p jer se kod brojeće mjere radi o zbrajanju. Dodatno, ponekad označavamo i grupu na kojoj promatramo L^p ili l^p normu oznakom $L^p(G)$ odnosno $l^p(G)$.

Napomena 1.3.9. Na skupu svih funkcija s G u $\mathbb{C}$ i s $\widehat{G}$ u $\mathbb{C}$ imamo skalarne produkte koji induciraju $L^2(G)$ odnosno $l^2(\widehat{G})$ normu. Oni su dani s

$$\langle f, g\rangle_G = \mathbb{E}_x f(x)\overline{g(x)} \quad \text{za funkcije } f, g\colon G \to \mathbb{C},$$
$$\langle f, g\rangle_{\widehat{G}} = \sum_{\psi\in\widehat{G}} f(\psi)\overline{g(\psi)} \quad \text{za funkcije } f, g\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}.$$

Treba imati na umu da se skalarni produkti na G i $\widehat{G}$ razlikuju za multiplikativnu konstantu $|G|$.

Propozicija 1.3.10. Skup svih karaktera na konačnoj Abelovoj grupi G je ortonormirana baza vektorskog prostora svih funkcija s G u $\mathbb{C}$.

Dokaz. Neka je ψ bilo koji karakter na G. Tada jednakost

$$\langle \psi, \psi \rangle = \mathbb{E}_x \psi(x)\overline{\psi(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\psi(x)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} 1 = 1$$

pokazuje da je ψ normiran.

Neka je $\zeta \neq \psi$ neki drugi karakter na G. Tada je $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ pa je $\psi\overline{\zeta}$ također karakter, označimo ga s ξ. Imamo

$$\langle \psi, \zeta \rangle = \mathbb{E}_x \xi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \xi(x).$$

Kako su ψ i ζ različiti, ξ ne može biti jednak 1 pa postoji g iz G za koji je $\xi(g) \neq 1$. Onda je

$$\xi(g)\mathbb{E}_{x \in G}\xi(x) = \mathbb{E}_{x \in G}\xi(x+g) = \mathbb{E}_{x+g \in G}\xi(x+g) = \mathbb{E}_{x \in G}\xi(x).$$

Zbog $\xi(g) \neq 1$ moramo imati

$$\langle \psi, \zeta \rangle = \mathbb{E}_x \xi(x) = 0.$$

Prema tome, skup svih karaktera na G je ortonormiran skup. Vektorski prostor svih funkcija s G u $\mathbb{C}$ izomorfan je s $\mathbb{C}^{|G|}$ pa mu je dimenzija jednaka $|G|$. No pokazali smo da postoji $|G|$ različitih karaktera na G iz čega slijedi da je skup svih karaktera na G ortonormirana baza tog vektorskog prostora. □

Fourierova pretvorba

Definicija 1.3.11. *Neka je G konačna Abelova grupa, $\widehat{G}$ njoj dualna grupa i $f\colon G \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija na G.* Fourierova pretvorba *od f, koju označavamo s $\hat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$, je funkcija na $\widehat{G}$ definirana formulom*

$$\hat{f}(\psi) = \langle f, \psi \rangle_G = \mathbb{E}_{g \in G}\, f(g)\overline{\psi(g)} \qquad \text{za } \psi \text{ iz } \widehat{G}.$$

Dokažimo za kraj još tri poznate formule iz Fourierove analize.

Propozicija 1.3.12 (Formula inverzije). Neka je G konačna Abelova grupa, $f\colon G \to \mathbb{C}$ funkcija i $\hat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ njezina Fourierova pretvorba. Tada je

$$f = \sum_{\psi \in \widehat{G}} \hat{f}(\psi)\psi.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da je skup svih karaktera na G ortonormirana baza konačnodimenzionalnog vektorskog prostora svih funkcija s G u $\mathbb{C}$. □

Propozicija 1.3.13 (Plancherelova formula). Neka je G konačna Abelova grupa i $\widehat{G}$ njoj dualna grupa. Za svaku funkciju $f\colon G \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$\|f\|_{L^2(G)} = \|\hat{f}\|_{l^2(\widehat{G})}. \tag{1.3}$$

Dokaz. Ovo je još jedna jednostavna posljedica činjenice da je skup svih karaktera ortonormirana baza. Za bilo koju funkciju f koristeći formulu inverzije 1.3.12 dobivamo

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \langle f, f\rangle_G = \Big\langle \sum_{\psi\in\widehat{G}} \hat{f}(\psi)\psi, \sum_{\xi\in\widehat{G}} \hat{f}(\xi)\xi \Big\rangle_G = \sum_{\psi,\xi\in\widehat{G}} \hat{f}(\psi)\overline{\hat{f}(\xi)}\langle\psi,\xi\rangle_G.$$

Iz ortonormiranosti skupa svih karaktera slijedi

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{\psi,\xi\in\widehat{G}} \hat{f}(\psi)\overline{\hat{f}(\xi)}\langle\psi,\xi\rangle_G = \sum_{\psi\in\widehat{G}} |\hat{f}(\psi)|^2\langle\psi,\psi\rangle_G = \sum_{\psi\in\widehat{G}} |\hat{f}(\psi)|^2 = \|\hat{f}\|_{l^2(\widehat{G})}^2$$

pa tvrdnju dobivamo uzimanjem drugog korijena. □

Definicija 1.3.14. *Neka je G konačna Abelova grupa i neka su $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ dvije funkcije na G. Konvolucija funkcija f i g je funkcija na G koju označavamo s $f * g$, a dana je formulom*

$$(f * g)(x) = \mathbb{E}_{y\in G}\, f(y)g(x-y).$$

Propozicija 1.3.15. Neka je G konačna Abelova grupa i $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ dvije funkcije na G. Tada Fourierova pretvorba prevodi konvoluciju funkcija f i g u produkt njihovih Fourierovih transformacija $\hat{f}$ i $\hat{g}$. Drugim riječima, vrijedi formula

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\cdot\hat{g}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Uzmimo neki karakter ψ iz G. Vrijedi

$$(\widehat{f * g})(\psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G} f(x-y)g(y)\right)\overline{\psi(x)} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{x,y\in G} f(x-y)\overline{\psi(x-y)}g(y)\overline{\psi(y)}$$

pa zamjenom varijabli $z = x - y$ dobivamo

$$(\widehat{f * g})(\psi) = \left(\frac{1}{|G|}\sum_{z\in G} f(z)\overline{\psi(z)}\right)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G} g(y)\overline{\psi(y)}\right) = (\hat{f}\cdot\hat{g})(\psi).$$ □

Poglavlje 2

Lema o regularnosti u funkcionalnoj analizi

Szemerédijeva lema o regularnosti rezultat je koji je Endre Szemerédi iskoristio u dokazu svog poznatog teorema o aritmetičkim progresijama [4]. Ta lema je po prirodi kombinatorna, ali njezinu ideju moguće je prenijeti i na druga područja u matematici. Rezultate koji se baziraju na toj ideji zovemo leme o regularnosti. U ovom poglavlju dokazat ćemo jednu lemu o regularnosti u funkcionalnoj analizi, a u sljedećem jednu vjerojatnosnu lemu o regularnosti.

Na vrlo apstraktnoj razini, ideja svih lema o regularnosti je dekomponirati matematički objekt, označimo ga s $\bigstar$, u strukturiran i pseudoslučajan dio. Interpretacija izraza ”strukturiran” i ”pseudoslučajan” ovisi o konkretnom problemu na kojem radimo, ali postoje neke generalne karakteristike koje im pridružujemo. Strukturiran dio trebao bismo sadržavati ona svojstva objekta $\bigstar$ koja su nam iz nekog razloga zanimljiva. Da bi od njega imali koristi, moramo ga razumjeti bolje nego polazni objekt $\bigstar$. S druge strane, pseudoslučajan dio ne bi smio imati veliku korelaciju sa zanimljivim dijelom objekta $\bigstar$. O njemu možemo razmišljati kao o nekoj vrsti šuma koji nam smeta pri proučavanju svojstava koja nas zanimaju. Ipak, treba napomenuti da pseudoslučajan objekt nije slučajan u pravom smislu te riječi jer je, jednom kada provedemo dekompoziciju, taj dio potpuno određen. On samo ima karakteristike koje podsjećaju na slučajne objekte i zbog toga nosi prefiks “pseudo”.

Pokušajmo ovo malo razjasniti na primjeru. Recimo da imamo neki podskup A u cikličkoj grupi $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ i da želimo prebrojati koliko je trojki oblika

$$x, x + d, x + 2d \qquad \text{za proizvoljne } x \text{ i } d \text{ u } \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

sadržano u skupu A. Primijetimo da se u skupu svih takvih trojki nalaze svi aritmetički nizovi duljine 3 koji su sadržani u skupu A, ali i trivijalni aritmetički nizovi kod kojih je $d = 0$ i degenerirani aritmetički nizovi za koje je $2d = N$ (ako je N paran). Aritmetičkim nizovima ćemo se više baviti kasnije. Zasad pretpostavimo samo da su nam trojke oblika (2.1) iz nekog razloga zanimljive. Za brojanje tih trojki možemo iskoristiti izraz

$$N^2 \cdot \mathbb{E}_{x,d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\, 1_A(x) 1_A(x+d) 1_A(x+2d). \tag{2.2}$$

Sada možemo pokušati naći lemu o regularnosti koja će nam omogućiti da dekomponiramo funkciju 1_A u sumu funkcija f i g ($1_A = f + g$) tako da izraz

$$\mathbb{E}_{x,d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\, f(x) f(x+d) f(x+2d) \tag{2.3}$$

bude otprilike jednak izrazu (2.2). To znači da bismo željeli reći da je funkcija (u ovom slučaju g) pseudoslučajna ako ima "mali" utjecaj na vrijednost izraza (2.2) odnosno (2.3). S druge strane, htjeli bismo da za strukturirane funkcije možemo izračunati vrijednost izraza (2.3). Ako znamo vrijednost izraza (2.3) i veličinu greške koju uzrokuje pseudoslučajna funkcija g, možemo približno odrediti broj aritmetičkih progresija duljine tri u skupu A. Na primjer, za skup A takav da se 1_A dekomponira u $1_A = \delta + g$, pri čemu je $\delta > 0$ konstanta, a g pseudoslučajna funkcija, vrijedi da je

$$N^2 \cdot \mathbb{E}_{x,d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x) 1_A(x+d) 1_A(x+2d) \approx N^2 \cdot \mathbb{E}_{x,d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \delta(x)\delta(x+d)\delta(x+2d) \approx \delta^3 N^2$$

pa u takvim skupovima možemo naći puno trojki s početka (ako je N dovoljno velik u odnosu na δ). Međutim, ovo nam nije korisno dok ne nađemo način kako bismo precizno odredili koliko je pojedina funkcija pseudoslučajna, čime ćemo se uskoro pozabaviti.

Ostavimo sada ovaj primjer (njime ćemo se puno više baviti u poglavlju 4) i vratimo se još malo na apstraktnu razinu. Pokazuje se da su leme o regularnosti puno primjenjivije ukoliko prilikom dekompozicije dozvolimo postojanje "male" greške. Preciznije, ako dopustimo rastavljanje

$$\bigstar = \text{Strukturirani dio} + \text{Kvazislučajni dio} + \text{Greška}.$$

Napomenimo zasad još samo da pod lemama o regularnosti podrazumijevamo dekompozicije koji imaju taj dodatni član, dok dekompozicije kod kojih tog člana nema često zovemo *naivnim* lemama o regularnosti.

Sljedeći primjer trebao bi malo razjasniti sve što smo do sada rekli.

2.1 Primjer dekompozicije

Dekomponirat ćemo kompleksnu funkciju na proizvoljnoj konačnoj Abelovoj grupi. Ako za grupu izaberemo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, ovu dekompoziciju mogli bismo iskoristi za dekomponiranje karakteristične funkcije 1_A o kojoj smo govorili u prošlom odjeljku. Nažalost, ona nam još uvijek neće dati rezultate koje bi mogli iskoristiti za dokaze poznatih kombinatornih teorema o aritmetičkim progresijama, ali je svakako zanimljiva.

Teorem 2.1.1. *Izaberimo konstantu $\varepsilon > 0$ i bilo koju funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Neka je G konačna Abelova grupa i neka je $(m_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ bilo koji rastući niz prirodnih brojeva koji zadovoljava $m_i \geq \Phi(m_{i-1})^2$ za svaki indeks $i \in \mathbb{N}$. Tada za proizvoljnu funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ s L^2 normom manjom od 1 (tj. $\|f\|_{L^2} \leq 1$) postoji prirodan broj $n \leq \lceil \varepsilon^{-2} \rceil$ tako da imamo dekompoziciju*

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

i pri tome vrijedi:

- *(f_1 je strukturirana) f_1 je linearna kombinacija m_n karaktera,*
- *(f_2 je pseudoslučajna) $\|\hat{f_2}\|_{l^\infty(\widehat{G})} \leq 1/\Phi(m_n)$,*
- *(f_3 je greška) $\|f_3\|_{L^2} \leq \varepsilon$.*

Dokaz. $\widehat{G}$ je konačna grupa pa možemo poredati karaktere $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{|\widehat{G}|}$ iz $\widehat{G}$ tako da su apsolutne vrijednosti pripadnih Fourierovih koeficijenta od f u padajućem poretku. Zbog formule inverzije 1.3.12, za svaki indeks $i \in \mathbb{N}$ možemo rastaviti

$$f = \sum_{k=1}^{m_i} \hat{f}(\psi_k)\psi_k + \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \hat{f}(\psi_k)\psi_k + \sum_{k=m_{i+1}+1}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(\psi_k)\psi_k.$$

Pri tome na gornji izraz treba gledati kao na particiju skupa svih karaktera tj. sve sume idu najviše do $|\widehat{G}|$ ili ih uopće nema ako se dogodi da je u sumi početni indeks veći od završnog. Plancherelov identitet 1.3.13 pokazuje da je $\|\hat{f}\|_{l^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)} \leq 1$ pa zaključujemo da postoji najviše $\lfloor \Phi(m_i)^2 \rfloor$ Fourierovih koeficijenata od f koji su veći od $1/\Phi(m_i)$. Označimo

$$f_2^i = \sum_{k=m_{i+1}}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(\psi_k)\psi_k.$$

Niz $m_1, m_2, m_3, \ldots$ smo izabrali tako da uvijek vrijedi $m_{i+1} \geq \Phi(m_i)^2$, zbog čega je

$$\left\| \widehat{f_2^i} \right\|_{l^\infty(\widehat{G})} \leq 1/\Phi(m_i) \qquad \text{za svaki indeks } i \in \mathbb{N},$$

tj. svi Fourierovi koeficijenti funkcije f_2^i su manji od $1/\Phi(m_i)$.

Primijetimo da su $\sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \hat{f}(\psi_k)\psi_k$ $(i = 1, 2, \ldots)$ disjunktni dijelovi sume $\sum_{k=1}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(\psi_k)\psi_k$. Također, kvadrati njihovih L^2 normi tj. sume $\sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \hat{f}(\psi_k)^2$ su disjunktni dijelovi sume $\sum_{k=1}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(\psi_k)^2$ koja je jednaka kvadratu L^2 norme funkcije f pa je po pretpostavci manja od 1. Primjenom Dirichletovog principa zaključujemo da postoji $n \leq \lceil \varepsilon^{-2} \rceil$ takav da

$$\Big\| \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \hat{f}(\psi_k)\psi_k \Big\|_{L^2(G)} \leq \varepsilon.$$

Za ovaj n dobivamo dekompoziciju koju tražimo. Treba samo uzeti

$$f_1 = \sum_{k=1}^{m_n} \hat{f}(\psi_k)\psi_k, \qquad f_2 = \sum_{k=m_{n+1}+1}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(\psi_k)\psi_k, \quad \text{i} \quad f_3 = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \hat{f}(\psi_k)\psi_k. \qquad \square$$

Napomena 2.1.2. Primijetimo da ograda na broj karaktera prvog člana u prethodnoj dekompoziciji *ne ovisi* o grupi G niti o funkciji f koju dekomponiramo. Bez toga tvrdnja ne bi imala smisla jer za $m = |\widehat{G}|$ trivijalno možemo rastaviti

$$f = \sum_{k=1}^{|\widehat{G}|} \hat{f}(k)\psi_k + 0 + 0,$$

čime nismo ništa postigli.

Uzimajući u obzir prethodnu napomenu, f_1 smatramo strukturiranim dijelom jer je suma ograničenog broja karaktera, f_2 interpretiramo kao pseudoslučajan dio, a f_3 kao grešku. Razlog zbog kojega smo $\hat{f}_2$ mjerili $\|\cdot\|_{l^\infty(\widehat{G})}$ normom bit će jasniji nakon sljedećeg podpoglavlja u kojem ćemo se malo detaljnije pozabaviti normama kojima možemo mjeriti pseudoslučajnost (vidi napomenu 2.2.4). Za kraj, primijetimo da su ocjene na strukturirani i pseudoslučajni dio obrnuto proporcionalne pa ako želimo jaku ocjenu za pseudoslučajnost, onda moramo podnijeti slabu ocjenu za strukturiranost.

Dvije leme o regularnosti koje ćemo dokazati vrlo su slične ovom primjeru i njihovi dokazi imaju dosta sličnosti s dokazom kojeg smo upravo dali.

2.2 Norme za pseudoslučajnost

Već smo spomenuli da postoji norma kojom možemo izmjeriti pseudoslučajnost ukoliko želimo da pseudoslučajne funkcije ne mijenjaju značajno izraz (2.2). Radi se o drugoj Gowersovoj normi uniformnosti. Riječ *uniformnost* koristimo kao sinonim za pseudoslučajnost i za pseudoslučajne objekte često kažemo da su uniformni. U ovom odjeljku bavit ćemo se tom normom i dati dvije malo općenitije formulacije koje se zasnivaju na istoj ideji.

Definicija 2.2.1. *Neka je G konačna Abelova grupa i $f\colon G \to \mathbb{C}$ funkcija na G. Formulom*

$$\|f\|_{U^2}^4 = \mathbb{E}_{x,a,b\in G}\, f(x)\overline{f(x+a)f(x+b)}f(x+a+b)$$

dana je norma na skupu svih funkcija s G u $\mathbb{C}$ koju nazivamo druga Gowersova norma uniformnosti *ili U^2-norma.*

Da bismo pokazali kako je U^2-norma zaista norma potrebna nam je sljedeća kratka lema.

Lema 2.2.2. *Neka je G konačna Abelova grupa i $f\colon G \to \mathbb{C}$ funkcija na G. Tada je*

$$\mathbb{E}_{x,a,b}\, f(x)\overline{f(x+a)f(x+b)}f(x+a+b) = \mathbb{E}_{x_1,x_2,x_3,x_4;x_1+x_4=x_2+x_3} f(x_1)\overline{f(x_2)f(x_3)}f(x_4). \quad (2.4)$$

Dokaz. Dovoljno je vidjeti da i na lijevoj i na desnoj strani imamo očekivanje po istom skupu tj. da vrijedi sljedeća jednakost među skupovima uređenih četvorki

$$\Big\{(x, x+a, x+b, x+a+b) \in G^4 \colon x, a, b \in G\Big\} = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G^4 \colon x_1 + x_4 = x_2 + x_3\Big\}.$$

Za svaku četvorku x_1, x_2, x_3, x_4 elemenata iz G takvu da je $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ imamo

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1), \qquad x_3 = x_1 + (x_3 - x_1),$$
$$x_4 = x_2 + x_3 - x_1 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1)$$

pa substitucijom

$$x = x_1, \qquad a = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad b = x_3 - x_1$$

dobivamo oblik četvorke iz lijevog skupa.

Obrnuto, pretpostavimo da imamo četvorku $(x, x+a, x+b, x+a+b)$ za neke x, a i b iz G. Jednostavnom substitucijom

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + a, \quad x_3 = x + b \quad \text{i} \quad x_4 = x + a + b$$

vidimo da vrijedi $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ pa se polazna četvorka nalazi u desnom skupu. □

Propozicija 2.2.3. U^2-norma na konačnoj Abelovoj grupi G je zaista norma na vektorskom prostoru svih funkcija s G u $\mathbb{C}$. Dodatno, za $f\colon G \to \mathbb{C}$ vrijedi $\|f\|_{U^2} = \|\hat{f}\|_{l^4(\widehat{G})}$.

Dokaz. Poslužit ćemo se Fourierovom analizom iz podpoglavlja 1.3. Neka je $f\colon G \to \mathbb{C}$ bilo koja funkcija. Koristeći jednakost (2.4) dobivamo

$$\begin{aligned}\|f\|_{U^2}^4 &= \mathbb{E}_{x_1,x_2,x_3,x_4;x_1+x_4=x_2+x_3}\, f(x)\overline{f(x_2)f(x_3)}f(x_4)\\ &= \mathbb{E}_{r\in G}\Big[\mathbb{E}_{x_1} f(x_1)f(r-x_1)\,\overline{\mathbb{E}_{x_2} f(x_2)f(r-x_2)}\Big] = \mathbb{E}_{r\in G}\,(f*f)(r)\overline{(f*f)(r)}\\ &= \langle f*f, f*f\rangle.\end{aligned}$$

Primjenom Plancherelovog identiteta 1.3.13 i formule za Fourierovu transformaciju konvolucije 1.3.15 slijedi

$$\|f\|_{U^2}^4 = \langle f*f, f*f\rangle = \langle \widehat{f*f}, \widehat{f*f}\rangle = \langle \hat{f}^2, \hat{f}^2\rangle = \|\hat{f}\|_{l^4(\widehat{G})}^4$$

pa uzimanjem četvrtog korijena vidimo da se $U^2(G)$-norma funkcije i $l^4(\widehat{G})$ norma njene Fourierove pretvorbe podudaraju. Ovo implicira da U^2-norma zadovoljava sve aksiome norme. Da pojasnimo, zbog formule inverzije Fourierova transformacija je linearna injekcija pa je $\|f\| = \|\hat{f}\|_{l^4(\widehat{G})}$ stvarno norma na prostoru svih kompleksnih funkcija na G. $\square$

Može se pokazati da funkcije koje su male u U^2-normi ne utječu na izraz 2.2 i da je U^2-norma prava norma za mjerenje pseudoslučajnosti o kojoj smo prije pričali. Mi to ovdje nećemo pokazati, ali slična stvar je pokazana u sljedećem poglavlju za normu koja generalizira U^2-normu (vidi teorem 3.2.6 i definiciju koja mu prethodi).

Napomena 2.2.4. U primjeru 2.1.1 iz prethodnog poglavlja smo za mjerenje pseudoslučajnosti umjesto U^2-norme iskoristili $\|\cdot\|_{l^\infty(\widehat{G})}$ normu. Zapravo, za funkcije $f\colon G \to \mathbb{C}$ s L^2 normom manjom od 1 vrijedi

$$\|f\|_{U^2(G)}^2 = \|\hat{f}\|_{l^4(\widehat{G})}^2 \leq \|\hat{f}\|_{l^\infty(\widehat{G})}\|\hat{f}\|_{l^2(\widehat{G})} \leq \|\hat{f}\|_{l^\infty(\widehat{G})}.$$

Zbog toga je U^2-norma pseudoslučajnog dijela (tj. funkcije f_2 iz teorema 2.1.1) manja od $\Phi(m_n)^{-1/2}$.

Oznaka U^2 sugerira da postoje i druge Gowersove norme uniformnosti. To je zaista tako; osim U^2-norme postoje i Gowersove norme uniformnosti višeg reda kojima možemo, na sličan način, mjeriti pseudoslučajnost funkcija kada nas zanimaju aritmetički nizovi duljine veće od tri. Ovdje ćemo ih samo navesti.

Definicija 2.2.5. *Neka je G konačna Abelova grupa i $f\colon G \to \mathbb{C}$ funkcija na G. Za svaki prirodan broj k veći od 2, formulom*

$$\|f\|_{U^k}^{2^k} = \mathbb{E}_{x,a_1,a_2,\ldots,a_k \in G}\left\{\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^k} C^{|\varepsilon|} f(x + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i)\right\}$$

dana je norma koju nazivamo k-ta Gowersova norma uniformnosti *ili U^k*-norma. *(Pri tome smo s C označili operator kompleksnog konjugiranja).*

Pokazuje se da za ideju koja stoji iza ovih normi struktura grupe tj. operacija zbrajanja nije potrebna. Generalizacija ove ideje dana je sljedećom definicijom.

Definicija 2.2.6. *Neka je S konačan skup i $f\colon S \times S \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija. Tada je formulom*

$$\|f\|_{GU^2}^4 = \sum_{x,x',y,y'\in S} f(x,y)\overline{f(x,y')f(x',y)}f(x',y')$$

dana norma na vektorskom prostoru kompleksnih funkcija na $S \times S$ koju zovemo Gowersova norma uniformnosti za grafove *ili GU^2*-norma.

Napomena 2.2.7. Lako je pokazati da je GU^2-norma općenitija od U^2-norme. Pretpostavimo da imamo konačnu Abelovu grupu G i neku funkciju $f\colon G \to \mathbb{C}$ na toj grupi. Jednostavno definiramo funkciju $g\colon G \times G \to \mathbb{C}$ formulom $g(x,y) = f(x+y)$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\|g\|_{GU^2}^4 &= \mathbb{E}_{x,x',y,y'\in G}\, f(x+y)\overline{f(x+y')f(x'+y)}f(x'+y') \\
&= \mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_{x',y,y'\in G}\, f(x+y)\overline{f(x+y')f(x'+y)}f(x'+y')\Big)
\end{aligned}$$

Substitucijom $x_1 = x+y$, $x_2 = x+y'$, $x_3 = x'+y$, $x_4 = x'+y'$ u unutarnjem očekivanju dobivamo

$$\begin{aligned}
\|g\|_{GU^2}^4 &= \mathbb{E}_{x\in G}\left(\mathbb{E}_{x_1,x_2,x_3,x_4;x_1+x_4=x_2+x_3}\, f(x_1)\,\overline{f(x_2)f(x_3)}f(x_4)\right) \\
&= \mathbb{E}_{x\in G}\,\|f\|_{U^2}^4 = \|f\|_{U^2}^4.
\end{aligned}$$

Pri tome smo u predzadnjoj nejednakosti iskoristili formulu (2.4). Uzimanjem četvrtog korijena obiju strana vidimo da je U^2-norma poseban slučaj GU^2-norme.

Kao što ime sugerira, pomoću GU^2-norme možemo mjeriti pseudoslučajnost grafova. Pretpostavimo da imamo neki graf G sa skupom vrhova V i skupom bridovima E. Graf G možemo interpretirati kao funkciju $g\colon V \times V \to \mathbb{C}$ koja paru vrhova pridružuje 1 ako postoji brid između ta dva vrha, a 0 ako ne postoji. Na takvu funkciju g onda možemo primijeniti GU^2-normu i dobiti ocjenu pseudoslučajnosti grafa G. Ideja u pozadini GU^2-norme je sada malo jasnija nego što je bila kod U^2-norme. Ako imamo graf G kojemu pridružujemo funkciju g kao maloprije, onda izraz

$$\sum_{x,x',y,y'\in V} g(x,y)\overline{g(x,y')g(x',y)}g(x',y')$$

broji "četverokute" u grafu G. Zaista, naša funkcija g je simetrična i nenegativna pa je

$$g(x,y)\overline{g(x,y')g(x',y)}g(x',y') = g(x,y)g(y,x')g(x',y')g(y',x). \tag{2.5}$$

Odavde vidimo da je izraz 2.5 jednak 1 za vrhove x, y, x', y' iz V ako i samo ako u grafu G postoje bridovi $\overline{xy}$, $\overline{yx'}$, $\overline{x'y'}$ i $\overline{y'x}$ koji čine "četverokut" u G.

Na sličan način moguće je generalizirati i U^k-norme i dobiti pripadne GU^k-norme, ali njih u ovom radu nećemo obraditi.

GU^2-normu ponovno možemo generalizirati tako da smanjimo zahtjeve na domenu funkcija koje mjerimo.

Definicija 2.2.8. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_x)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_y)$ vjerojatnosni prostori. Tada je formulom*

$$\|f\|_{\square^2(X\times Y)}^4 = \int_X\int_Y\int_X\int_Y f(x,y)f(x,y')f(x',y)f(x',y')\,dP_Y(y')dP_X(x')dP_Y(y)dP_X(x) \tag{2.6}$$

definirana norma na vektorskom prostoru svih ograničenih izmjerivih funkcija s $X \times Y$ u $\mathbb{R}$. Tu normu zovemo druga box-norma *i označavamo s* $\|\cdot\|_{\square^2(X\times Y)}$ *ili kraće s* $\|\cdot\|_{\square^2}$ *ako su prostori X i Y jasni iz konteksta.*

Ovime smo proširili domenu funkcija s konačnih skupova na proizvoljne vjerojatnosne prostore. Zbog toga se javljaju tehnički zahtjevi za ograničenošću i izmjerivošću tih funkcija bez kojih integral iz izraza (2.6) ne bi imao smisla.

Pažljiviji čitatelj će primijetiti da smo kodomenu funkcija ograničili s $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$. Kompleksnim konjugiranjem drugog i trećeg faktora slično kao kod dvije prethodne norme mogli bismo normu definirati za kompleksne funkcije. Malo smo pojednostavili stvari jer su nam zapravo zanimljive samo realne funkcije što će se ubrzo vidjeti. Naime malo prije smo vidjeli da funkcije grafova poprimaju vrijednosti čak u intervalu $[0, 1]$. Kompleksnu verziju prirodno je dati kada radimo s Fourierovom pretvorbom, koja je prirodno vezana uz kompleksne funkcije.

Box normom ćemo se više baviti u trećem poglavlju, gdje ćemo isključivo nju koristiti za mjerenje pseudoslučajnosti. Na početku tog poglavlja pokazat ćemo i da je box-norma definirana formulom (2.6) stvarno norma. Pokažimo za kraj još samo da je druga box-norma uistinu generalizacija GU^2-norme, barem što se tiče realnih funkcija. Isti račun pokazao bi i kompleksan slučaj da smo box-normu definirali za kompleksne funkcije.

Napomena 2.2.9. Bilo koji konačan skup S s brojećom mjerom iz definicije 1.3.7 na σ-algebri $\mathcal{P}(S)$ je vjerojatnosni prostor $(S, \mathcal{P}(S), \nu)$. Za proizvoljnu funkciju $f\colon S \times S \to \mathbb{R}$ (koja je automatski izmjeriva i ograničena jer je S konačan skup) imamo

$$\begin{aligned}\|f\|^4_{\square(S\times S)} &= \int_S \int_S \int_S \int_S f(x,y)f(x,y')f(x',y)f(x',y')\,d\nu(x')d\nu(y')d\nu(x)d\nu(y)\\ &= \sum_{x,x',y,y'\in S} f(x,y)f(x,y')f(x',y)f(x',y') = \|f\|^4_{GU^2(S)}.\end{aligned}$$

Zato uzimanjem četvrtog korijena vidimo da je GU^2 samo poseban slučaj $\square^2$-norme.

Prema tome, jednom kad dokažemo da je druga box-norma zaista norma (ovo je dokazano u propoziciji 3.2.4)) slijedit će da je i GU^2-norma također norma (barem u slučaju realnih funkcija).

2.3 Varijante Hahn-Banachovog teorema

Spremamo se iskazati funkcionalnu varijantu leme o regularnosti na $\mathbb{R}^n$. Slična lema imala bi smisla i na proizvoljnom Hilbertovom prostoru, ali pojavile bi se određene tehničke poteškoće. Za dokaz koji ćemo ovdje dati bitno je osigurati zatvorenost konveksne ljuske i sume nivo-skupova raznih normi. Te dvije činjenice ćemo u $\mathbb{R}^n$ dokazati koristeći kompaktnost koja nam generalno nije dostupna u Hilbertovom prostoru. Ova dekompozicija će lijepo ilustrirati način na koji se Hahn-Banachov teorem može iskoristiti za dokaz leme o regularnosti. S druge strane, vjerojatnosna lema o regularnosti koju ćemo iskazati u sljedećem poglavlju je nešto snažnija i primjenjivija.

Propozicija 2.3.1. Neka su $K_1, K_2, \dots, K_m$ kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}^n$. Njihova suma $\sum_{i=1}^m K_i$ je zatvoren skup.

Dokaz. Neka je v neki vektor iz $\mathbb{R}^n$ i $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u $\sum_{i=1}^m K_i$ koji konvergira k v. Za svaki indeks i imamo

$$v_i = x_i^1 + x_i^2 + \cdots + x_i^m \quad \text{za} \quad x_i^1 \in K_1, x_i^2 \in K_2, \dots, x_i^m \in K_m. \tag{2.7}$$

Zbog kompaktnosti skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$ možemo naći rastuću funkciju $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da su svi podnizovi $(x^k_{p(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ za $1 \le k \le m$ konvergentni. Naime, tih nizova ima konačno mnogo. Označimo limese ovih podnizova s $x^k \in K_k$ za $1 \le k \le m$. Prelaskom na limes tim podnizovima p u jednakosti (2.7) slijedi da je

$$v = x^1 + x^2 + \ldots + x^m,$$

što pokazuje da je v u $\sum_{i=1}^m K_i$. $\square$

Propozicija 2.3.2. Neka su $K_1, K_2, \dots, K_m$ kompaktni i konveksni podskupovi od $\mathbb{R}^n$. Konveksna ljuska skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$ je zatvoren skup.

Dokaz. Neka je v neki vektor iz $\mathbb{R}^n$ i $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$ koji konvergira k v. Za svaki indeks i imamo (vidi propoziciju 1.1.5)

$$v_i = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k x_i^k \qquad \text{za neke } x_i^k \in K_k \text{ i } \alpha_i^k \in [0,1]\ (k = 1, 2, \dots, m) \quad \text{takve da je } \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1. \tag{2.8}$$

Zbog kompaktnosti skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$ i $[0,1]$ možemo naći rastuću funkciju $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da su svi podnizovi $(x^k_{p(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ i $(\alpha^k_{p(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ za $1 \le k \le m$ konvergentni. Naime, tih nizova ponovno ima konačno mnogo. Označimo limese ovih podnizova s $x^k \in K_k$ i $\alpha^k \in [0,1]$ za $1 \le k \le m$. Zbog jednakosti $\sum_{k=1}^m \alpha_i^k$ koja vrijedi za svaki indeks i prelaskom na limes po podnizu p vidimo da je $\sum_{k=1}^m \alpha^k = 1$. Još jednim prelaskom na limes po odgovarajućim podnizovima u jednakosti (2.8) slijedi da je

$$v = \sum_{k=1}^m \alpha^k x^k \quad \text{pri čemu je } \sum_{k=1}^m \alpha^k = 1,$$

što pokazuje da je v u konveksnoj ljusci skupova $K_1, K_2, \dots, K_m$. $\square$

Propozicija 2.3.3. Neka je $\|\cdot\|$ bilo koja norma na $\mathbb{R}^n$ i $C > 0$ konstanta. Tada je nivo skup

$$S = \|\cdot\|^{\leftarrow}([0,C]) = \{v \in V : \|v\| \leq C\}$$

kompaktan i konveksan. (Koristimo oznaku $^{\leftarrow}$ za prasliku)

Dokaz. Ovo smo već dokazali u propoziciji 1.1.7. Dovoljno je primijetiti da je $\mathbb{R}^n$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. □

Sada smo osigurali da su sume i konveksne ljuske nivo skupova normi zatvoreni i konveksni skupovi (za konveksnost sume vidi propoziciju 1.1.3). Potrebne su nam još dvije formulacije Hahn-Banachovog teorema (teorem 1.2.6) nakon kojih prelazimo na dokaz leme o regularnosti. Dokazi ovih formulacija su vrlo slični pa je zajednički dio izdvojen u posebnu lemu.

Lema 2.3.4. *Neka je K konveksan i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži 0 i neka je $v \in \mathbb{R}^n$ vektor koji nije u K. Tada postoji vektor $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\langle v, \phi\rangle > 1$ i da je $\langle w, \phi\rangle < 1$ za svaki w iz K.*

Dokaz. Dovoljno je prilagoditi tvrdnju Hahn-Banachovog teorema o separaciji (teorema 1.2.6). Kada bi K bio otvoren mogli bismo naći konstantu $\beta \in \mathbb{R}$ i ne nul vektor $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\langle v, \phi\rangle \geq \beta \quad \text{i} \quad \langle w, \phi\rangle < \beta \quad \text{za svaki } w \in K.$$

Moramo modificirati tri stvari:

- Želimo omogućiti da je K zatvoren skup.
- Želimo dobiti strogu nejednakost $\langle v, \phi\rangle > \beta$.
- Želimo postići da je $\beta = 1$.

S tim ciljem ćemo skup K malo povećati da dobijemo otvoreni skup a vektor v ćemo malo smanjiti da postignemo strogu nejednakost iz druge točke.

Da bismo ovo mogli izvesti, ključno je da je K zatvoren skup, zbog čega je udaljenost vektora v od skupa K veća od 0. Zato možemo naći $0 < \varepsilon < 1$ i $\delta > 0$ takve da $\varepsilon v \notin K + B(0,\delta)$. Primijetimo da je $K + B(0,\delta)$ otvoren i konveksan skup koji sadrži 0. Primjenom teorema 1.2.6 na vektor εv i $K + B(0,\delta)$ slijedi da postoje konstanta $\beta \in \mathbb{R}$ i ne nul vektor ϕ takvi da vrijedi

$$\langle \varepsilon v, \phi\rangle \geq \beta \quad \text{i} \quad \langle w, \phi\rangle < \beta \quad \text{za svaki } w \in K + B(0,\delta).$$

Iz činjenice $\varepsilon < 1$ slijedi stroga nejednakost $\langle v, \phi \rangle > \beta$. Odabirom $w = \delta \frac{\phi}{2\|\phi\|} \in K + B(0, \delta)$ (ovdje je $\| \cdot \|$ euklidska norma) dobivamo da je

$$0 < \frac{\delta}{2}\|\phi\| = \left\langle \phi, \delta \frac{\phi}{2\|\phi\|} \right\rangle < \beta.$$

Dakle, vrijedi $\beta > 0$ pa skaliranjem $\phi' = \frac{\phi}{\beta}$ možemo postići

$$\langle v, \phi' \rangle > 1 \qquad \langle w, \phi' \rangle < 1 \quad \text{za svaki } w \in K,$$

kao što smo željeli. □

Slijede dvije formulacije o kojima smo govorili.

Korolar 2.3.5. *Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktni konveksni skupovi koji sadrže 0 i $c_1, c_2, \ldots, c_m > 0$ pozitivne konstante. Neka je $v \in \mathbb{R}^n$ vektor takav da $v \notin \sum_{i=1}^m c_i K_i$. Tada postoji vektor ϕ takav da vrijedi $\langle v, \phi \rangle > 1$ i $\langle w_i, \phi \rangle \leq c_i^{-1}$ za svaki $w_i \in K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.*

Dokaz. U prethodnoj lemi dovoljno je uzeti skup $K = \sum_{i=1}^m c_i K_i$, za kojeg znamo da je konveksan (lema 1.1.3) i zatvoren (propozicija 2.3.1), i naći vektor $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\langle v, \phi \rangle > 1 \quad \text{i} \quad \langle w, \phi \rangle \leq 1 \quad \text{za svaki } w \in K.$$

Kako su svi $c_i K_i$ sadržani u K, vidimo da je

$$\langle c_i w_i, \phi \rangle \leq 1 \quad \text{za svaki } w_i \in K_i$$

iz čega slijedi da je $\langle w_i, \phi \rangle \leq c_i^{-1}$ za svaki $w_i \in K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. □

Korolar 2.3.6. *Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ zatvoreni konveksni skupovi koji sadrže 0. Neka je $v \in \mathbb{R}^n$ vektor koji se ne može prikazati kao konveksna kombinacija elemenata tih skupova tj. ne postoje konstante $c_1, c_2, \ldots c_m \in [0, 1]$ takve da vrijedi*

$$v = \sum_{i=1}^m c_i w_i \quad \text{pri čemu je } \sum_{i=1}^m c_i = 1 \ \text{ i } \ w_i \in K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Tada postoji $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\langle v, \phi \rangle > 1$ i $\langle w_i, \phi \rangle \leq 1$ za svaki $w_i \in K_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dokaz. Ponovno ćemo iskoristiti istu lemu, samo što će ovaj put K biti konveksna ljuska skupova $K_1, K_2, \ldots K_m$, za koju znamo da je zatvorena (lema 2.3.2), a po definiciji je konveksna. Pretpostavka je upravo $v \notin K$ (vidi propoziciju 1.1.5) pa postoji vektor $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\langle v, \phi \rangle > 1 \quad \text{i} \quad \langle w, \phi \rangle \leq 1 \quad \text{za svaki } w \in K.$$

$K_1, K_2, \ldots, K_m$ su podskupovi od K pa je $\langle w_i, \phi \rangle \leq 1$ za svaki $w_i \in K_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. □

Korolari 2.3.5 i 2.3.6 glavni su alati koje ćemo koristiti za dokaz leme o regularnosti.

2.4 Lema o regularnosti

Započnimo s jednostavnijom verzijom leme o regularnosti. Podsjetimo da dekompozicije ovog oblika (za objašnjenje vidi uvodni dio ovog poglavlja) zovemo "naivnim" dekompozicijama.

Propozicija 2.4.1 (Naivna dekompozicija). Neka je $\|\cdot\|$ bilo koja norma na $\mathbb{R}^n$ i $C > 0$ proizvoljna konstanta. Označimo s $\|\cdot\|^*$ njoj dualnu normu, a s $\|\cdot\|_2$ standardnu euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$. Tada se svaki vektor v iz $\mathbb{R}^n$ s euklidskom normom najviše 1 (tj. $\|v\|_2 \leq 1$) može dekomponirati kao $v = v_1 + v_2$, pri čemu vrijedi

$$\|v_1\| \leq C \qquad \text{i} \qquad \|v_2\|^* \leq C^{-1}.$$

Dokaz. Označimo jedinične kugle normi $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|^*$ oznakama

$$K = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| \leq 1\} \qquad \text{i} \qquad K_* = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|^* \leq 1\}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. $v \notin CK + C^{-1}K_*$. Primjenom korolara 2.3.5 na skupove $K_1 = K$, $K_2 = K_*$ i konstante $c_1 = C^{-1}$ i $c_2 = C$ možemo naći vektor $\phi \in \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi

$$\langle v, \phi\rangle > 1, \qquad \langle w, \phi\rangle \leq C \ \text{ za svaki } w \in K \qquad \text{i} \qquad \langle w, \phi\rangle \leq C^{-1} \ \text{ za svaki } w \in K_*.$$

Iz ovoga slijedi da je $\|\phi\|^* \leq C$ i $\|\phi\|^{**} \leq C^{-1}$. To znači da bismo morali imati (vidi propoziciju 1.1.11)

$$\|\phi\|_2^2 \leq \|\phi\|^*\|\phi\|^{**} \leq C \cdot C^{-1} = 1.$$

S druge strane, $\|v\|_2\|\phi\|_2 \geq \langle v, \phi\rangle > 1$ i $\|v\|_2 \leq 1$ pokazuju da je $\|\phi\|_2 > 1$ što dovodi do kontradikcije. □

Leme o regularnosti iz teorema 2.1.1 i teorema 2.4.1 koje smo do sada dokazali daju dekompozicije samo za objekte koji imaju određenu L^2 normu manju ili jednaku 1. Ove pretpostavke se možemo lako riješiti ako u ocjene ugradimo ovisnost o toj L^2 normi. Pokažimo ovo na dekompoziciji koju smo upravo dokazali. Neka je v iz $\mathbb{R}^n$ bilo koji ne-nul vektor i označimo $\tau = \|v\|_2$. Tada $\frac{v}{\tau}$ ima euklidsku normu jednaku 1 pa na njega možemo primijeniti prethodnu dekompoziciju (za konstantu $C > 0$) i dobiti vektore v_1 i v_2 takve da je

$$\|v_1\| \leq C \quad \text{i} \quad \|v_2\|^* \leq C^{-1}.$$

Sada vidimo da smo dobili dekompoziciju $v = \tau v_1 + \tau v_2$, pri čemu je

$$\|\tau v_1\| \leq C\|v\|_2 \quad \text{i} \quad \|\tau v_2\|^* \leq C^{-1}\|v\|_2.$$

Rezultat je, naravno, intuitivno jasan. Ako za vektor imamo napravljenu dekompoziciju i odlučimo taj vektor skalirati za faktor $\alpha > 0$ onda očekujemo da će se svi dijelovi dekompozicije skalirati za isti taj faktor α. Mi ćemo leme o regularnosti radi jednostavnosti nastaviti iskazivati kao do sad, tj. samo za objekte koji su ograničeni s 1 (u određenoj L^2 normi).

Primijetimo da su, za razliku od leme o regularnosti iz teorema 2.1.1, ovdje članovi v_1 i v_2 potpuno ravnopravni jer su norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|^*$ međusobno dualne (vidi 1.1.12). Posljedica je da se u iskazu leme o regularnosti ne spominje strukturiranost niti pseudoslučajnost članova dekompozicije. Interpretacija članova ovisi isključivo o normi koju izaberemo. Na primjer, ako za normu izaberemo jednu od normi koja mjeri pseudoslučajnost iz prošlog poglavlja, onda član koji je ograničen u toj normi smatramo pseudoslučajnim. Zanimljivo je da kada za polaznu normu izaberemo normu koja mjeri pseudoslučajnost, onda njoj dualna norma daje nekakvu mjeru strukturiranosti objekta, ali nećemo detaljnije precizirati tu tvrdnju.

Dokažimo sada jaku varijantu ove leme o regularnosti koju je formulirao Gowers [1].

Teorem 2.4.2 (Funkcionalna varijanta leme o regularnosti)**.** *Označimo s $\|\cdot\|_2$ euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$. Neka je $\|\cdot\|$ bilo koja norma na $\mathbb{R}^n$ i $\|\cdot\|^*$ njoj dualna norma. Izaberimo konstantu $\varepsilon > 0$ i proizvoljnu padajuću funkciju $\eta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ te označimo $r = \lceil 2\varepsilon^{-2}\rceil$. Definirajmo induktivno niz pozitivnih konstanti $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ formulom $C_i = \max\left\{C_{i-1}, 2\eta(C_{i-1})^{-1}\right\}$ za svaki $i \geq 2$ i početnim elementom C_1 koji smijemo izabrati po volji (npr. možemo uzeti $C_1 = 1$).*

Tada za proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^n$ s euklidskom normom najviše 1 (tj. $\|v\|_2 \leq 1$) postoji prirodan broj k manji ili jednak r takav da v ima dekompoziciju

$$v = v_1 + v_2 + v_3,$$

pri čemu vrijedi

$$C_k^{-1}\|v_1\| + \eta(C_k)^{-1}\|v_2\|^* + \varepsilon^{-1}\|v_3\|_2 \leq 1.$$

Posebno, možemo ocijeniti članove u dekompoziciji s

$$\|v_1\| \leq C_k, \quad \|v_2\|^* \leq \eta(C_k), \quad \|v_3\|_2 \leq \varepsilon.$$

Prvi korak dokaza je prevesti tvrdnju koju želimo dokazati u oblik koji je pogodan za primjenu korolara 2.3.6. Ova reinterpretacija izdvojena je u zasebnu lemu.

Lema 2.4.3. *Neka su $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \ldots, \|\cdot\|_m$ norme na $\mathbb{R}^n$ i $C_1, C_2, \ldots, C_m > 0$ konstante. Sljedeće je ekvivalentno:*

1. *$v \in \mathbb{R}^n$ se može zapisati kao $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_m$, pri čemu je*

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^{-1}\|v_i\|_i \leq 1.$$

2. *v se nalazi u konveksnoj ljusci kugala $S_i = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|_i \leq C_i\}$ za $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da v ima dekompoziciju iz tvrdnje 1. Označimo

$$A = \sum_{i=1}^{m} C_i^{-1} \|v_i\|_i \leq 1.$$

Onda možemo pisati

$$v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\|v_i\|_i}{AC_i} \cdot \frac{AC_i v_i}{\|v_i\|_i},$$

što pokazuje da je v u konveksnoj ljusci skupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Zaista, $\frac{AC_i v_i}{\|v_i\|_i}$ je iz S_i zato što je $A \leq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), a koeficijent A smo upravo izabrali tako vrijedi $\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{m} \frac{\|v_i\|_i}{C_i} = 1$.

Obratno, neka se v nalazi u konveksnoj ljusci skupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Tada je

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \quad \text{za neke } v_i \in S_i, \alpha_i \in [0, 1]\, (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{takve da je} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

To je dekompozicija koju tražimo. Imamo $C_i^{-1} \|v_i\|_i \leq 1$ pa je

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^{-1} \|\alpha_i v_i\|_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{-1} \|v_i\|_i \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \qquad \square$$

Sada se vraćamo na dokaz leme regularnosti (teorem 2.4.2).

Dokaz. Interpretaciju tvrdnje obavili smo u upravo dokazanoj lemi. Za svaki indeks i uvedimo skupove

$$K_1^i = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| \leq C_i\}, \quad K_2^i = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|^* \leq \eta(C_i)\}, \quad K_3 = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|_2 \leq \varepsilon\}.$$

Pretpostavimo da tražena dekompozicija ne postoji niti za jedan i manji od r. Tada se, po prethodnoj lemi v ne bi nalazio u konveksnoj ljusci skupova K_1^i, K_2^i i K_3 niti za jedan indeks i od 1 do r. To bi značilo, primjenom korolara 2.3.6, da za svaki indeks i postoji vektor $\phi_i \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\|\phi_i\|^* \leq C_i^{-1}$, $\|\phi_i\|^{**} \leq \eta(C_i)^{-1}$, $\|\phi_i\|_2 \leq \varepsilon^{-1}$ i $\langle v, \phi_i \rangle > 1$. Primijetimo da $\langle v, \phi_i \rangle > 1$ i $\|v\|_2 \leq 1$ primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti pokazuju da je

$$\begin{aligned} \|\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r\|_2 &\geq \|v\|_2 \|\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r\|_2 \\ &\geq \langle v, \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, \phi_i \rangle > r. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$\|\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r\|_2^2 = \langle \phi_1 + \phi_2 + \ldots \phi_r, \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \phi_i, \phi_i \rangle + 2 \sum_{1 \le i < j \le r} \langle \phi_i, \phi_j \rangle.$$

Konstrukcija niza $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osigurava da za $i < j$ vrijedi (vidi 1.1.11)

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle \le \|\phi_i\|^{**}\|\phi_j\|^{*} \le \eta(C_i)^{-1}C_j^{-1} \le \eta(C_i)^{-1}C_{i+1}^{-1} \le 1/2.$$

Uz to, znamo da je $\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \|\phi_i\|_2^2 \le \varepsilon^{-2}$ pa dobivamo

$$\|\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r\|_2^2 \le \varepsilon^{-2} r + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Kada to sve skupimo slijedi

$$r^2 \le \|\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_r\|_2^2 \le \varepsilon^{-2} r + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Ako je r dovoljno velik, r^2 postaje veće od $r\varepsilon^{-2} + \frac{r(r-1)}{2}$ što dovodi do kontradikcije. Mi smo r upravo izabrali tako da se to dogodi pa je teorem dokazan. Zaista, lako se provjeri da je dovoljno izabrati $r \ge \frac{1}{2\varepsilon^2}$. □

Usporedimo ovu jaku varijantu leme o regularnosti koju smo upravo dokazali s naivnom verzijom koja joj je prethodila. Razlika je u tome što jaka verzija dopušta dodatni član greške. Dodavanje ove greške omogućuje nam da bolje kontroliramo vezu između ocjena na v_1 i v_2 u dekompoziciji. Tu kontrolu postižemo preko funkcije η koja ne postoji u naivnoj verziji. Izborom te funkcije možemo na primjer postići da produkt ocjena na v_1 i v_2 bude proizvoljno malen. Ovo ne možemo postići koristeći naivnu dekompoziciju jer je, bez obzira kako izaberemo konstantu C, produkt ocjena na v_1 i v_2 kod te dekompozicije uvijek 1. Ali i puno više od toga, funkcija η dopušta nam da taj produkt učinimo malim i u odnosu na ocjenu greške tj. u odnosu na konstantu ε. Tako je npr. dopušteno izabrati

$$\varepsilon > 0 \quad \text{i} \quad \eta(x) = \frac{\varepsilon^2}{x},$$

čime nalazimo konstantu $C > 0$ (u dekompoziciji je ova konstanta označena s C_k) takvu da vrijede ocjene

$$\|v_1\| \le C \quad \text{i} \quad \|v_2\|^* \le \frac{\varepsilon^2}{C}.$$

Ovime postižemo da je produkt $C \cdot \frac{\varepsilon^2}{C} = \varepsilon^2$ zanemariv kada ga uspoređujemo s ocjenom greške (za dovoljno mali ε). Dobar primjer korištenja slobode koju nam funkcija η dozvoljava može se naći u dokazu teorema 3.4.3.

S druge strane, u jakoj verziji izgubili smo kontrolu nad konstantom C. Za razliku od naivne dekompozicije, gdje smo tu konstantu mogli eksplicitno odrediti, ovdje možemo samo dati ocjene na njezinu veličinu. Još je veći problem što su te ocjene u stvari jako loše, pogotovo ako imamo velike zahtjeve od funkcije η. Ilustrirajmo malo kako se ocjena na C ponaša za dva primjera izbora funkcije η.

Primjer 2.4.4. Izaberimo u lemi o regularnosti (teorem 2.4.2) bilo koji $\varepsilon > 0$ i neka je $\eta(x) = \frac{1}{2x}$. Ovime ćemo postići da je produkt o kojemu smo govorili manji od $1/2$ što je malo bolje od naivne leme o regularnosti kod koje je taj produkt jednak 1. Jaka verzija leme o regularnosti tvrdi da možemo naći indeks k koji je najviše $r = \lceil 2\varepsilon^{-2} \rceil$ tako da su za $C = C_k$ ocjene zadovoljene. Pretpostavimo recimo da smo izabrali $C_1 = 1$. Iz rekurzivne formule za niz C_k vidimo da je

$$C_k = \frac{2}{\frac{1}{2C_{k-1}}} = 4C_{k-1} = \ldots = 4^k C_1 = 4^k \leq 4^r.$$

iz čega vidimo da smo dobili eksponencijalnu ocjenu za C ovisno o ε.

Ako izaberemo $\eta = \frac{1}{x^2}$ (čime postižemo da je produkt manji od $1/C$) dobivamo (opet za $C_1 = 1$)

$$C_k = \frac{2}{\frac{1}{C_k^2}} = 2C_{k-1}^2 = 2^3 C_{k-2}^4 = \ldots = 2^{1+2+4} C_{k-3}^8 = 2^{\sum_{i=0}^{k-1} 2^i} C_1^{2^k} \leq 2^{2^r}$$

što već jako brzo raste. Prvih par članova niza 2^{2^i} je

$$4, 16, 256, 65536, 4294967296, \ldots$$

Biranjem funkcija koje padaju brže od $1/x^2$ poput e^{-x} dobivam još puno gore ocjene.

Jednako loše ocjene na konstante dobivamo i u ostalim lemama o regularnosti, ali prava snaga lema o regularnosti je u tome što one ipak *daju* nekakve ocjene i to u vrlo općenitim situacijama.

Poglavlje 3

Vjerojatnosni pristup

Na redu je vjerojatnosna varijanta leme o regularnosti. Započnimo s pripremnim rezultatima.

3.1 Uvjetno očekivanje na konačnim σ-algebrama

U ovoj varijanti dekompozicije strukturirani dio ćemo graditi koristeći jednostavne izmjerive funkcije na određenom vjerojatnosnom prostoru. Vidjet ćemo da je baš uvjetno očekivanje alat koji nam za to treba. Zato sada uvodimo pojmove konačne σ-algebre i uvjetnog očekivanja na konačnoj σ-algebri i dokazujemo neka jednostavna svojstva vezana uz njih. Uvjetno očekivanje se može definirati i za proizvoljnu σ-algebru, no to je tehnički nešto zahtjevnije. Za naše potrebe će uvjetno očekivanje na konačnim σ-algebrama biti sasvim dovoljno.

Definicija 3.1.1. *Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor. Za konačnu σ-algebru $\mathcal{B}$ kažemo da je* konačan faktor *od X ako je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{X}$. Ponekad ćemo naziv konačan faktor skratiti samo na* faktor *(jer će u ovom radu svi će faktori biti konačni).*

Napomena 3.1.2. Primijetimo da kada govorimo o konačnom faktoru moramo imati neku σ-algebru u pozadini tog faktora. Iz konteksta je obično jasno koja je to σ-algebra.

Definicija 3.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor, $\mathcal{B}$ konačan faktor na X i m prirodan broj. Kažemo da $\mathcal{B}$ ima složenost najviše m ako se $\mathcal{B}$ može generirati (kao σ-algebra) s najviše m skupova. Ako se faktor $\mathcal{B}$ može generirati s praznim skupom, tj. ako je faktor $\mathcal{B}$ jednak σ-algebri $\{\emptyset, X\}$, onda za $\mathcal{B}$ kažemo da je faktor složenosti* 0.

Propozicija 3.1.4. Neka je $\mathcal{B}$ konačna σ-algebra skupova. Tada postoji prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ i međusobno disjunktni neprazni skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ iz $\mathcal{B}$ koji generiraju $\mathcal{B}$. Ti skupovi su jedinstveni do na poredak.

Dokaz. Neka su $S_1, S_2, \dots, S_M$ svi skupovi iz $\mathcal{B}$ (što implicira $M = |\mathcal{B}|$). Za svaki $\zeta \in \{0,1\}^M$ definirajmo skupove A_ζ s

$$A_\zeta = \bigcap_{k=1}^{M} C^{\zeta_k}(S_k) \qquad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M) \in \{0,1\}^M.$$

Pri tome smo s $C^k(S)$ označili operaciju uzimanja komplementa skupa S k-puta. Da pojasnimo, to znači da je $C^0(S) = S$ i da je $C^1(S) = S^c$. Budući da je $\mathcal{B}$ σ-algebra, svi ovi skupovi su u $\mathcal{B}$. Izaberimo bilo koja dva različita skupa A_ζ, A_ξ za $\zeta \neq \xi$. Tada postoji pozicija k između 1 i M na kojoj se ζ i ξ razlikuju. Stoga je presjek skupova A_ζ i A_ξ prazan jer je jedan on njih podskup od S_k a drugi od S_k^c. Prema tome, skupovi A_ζ za $\zeta \in \{0,1\}^M$ su međusobno disjunktni.

Pokažimo da oni generiraju $\mathcal{B}$. Neka je S bilo koji neprazan skup iz $\mathcal{B}$ i x neka točka iz S. Za svaki k između 1 i M se x nalazi točno u jednom od skupova S_k i S_k^c. Lako se provjeri da ako stavimo $\zeta_k = 1$ kada se x nalazi u S_k, a $\zeta_k = 0$ kada se ne nalazi, dobivamo $\zeta \in \{0,1\}^M$ takav da skup A_ζ sadrži x. Jasno je da je A_ζ podskup od S jer smo u prethodnom postupku, kada smo birali između S i S^c, morali odabrati S. Zaključak je da za svaki S iz $\mathcal{B}$ i svaki x iz S postoji skup A_ζ koji sadrži x i podskup je od S. To onda znači da skupovi A_ζ za $\zeta \in \{0,1\}^M$ generiraju $\mathcal{B}$ jer za bilo koji skup S iz $\mathcal{B}$ imamo $S = \bigcup_{A_\zeta \subseteq S} A_\zeta$. Pri tome je ta unija u $\mathcal{B}$ jer je konačna. Dovoljno je uzeti sve neprazne skupove A_ζ i našli smo skupove koje smo tražili.

Za jedinstvenost, pretpostavimo da su $B_1, B_2 \dots, B_n$ također disjunktni neprazni skupovi koji generiraju $\mathcal{B}$. Izaberimo bilo koji skup A_k. Tada je $A_k = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_l}$ za neki prirodan broj l i neke indekse $i_1, i_2, \dots, i_l$. Skup B_{i_1} je generiran skupovima $A_1, A_2, \dots, A_m$ i sadržan je u skupu A_k pa mora biti jednak skupu A_k. Odavde lako slijedi da je $m = n$ i da su familije $A_1, A_2, \dots, A_m$ i $B_1, B_2, \dots, B_n$ jednake do na poredak članova. □

Definicija 3.1.5. *Skupovi $A_1, A_2, \dots, A_m$ iz prijašnje propozicije nazivaju se* atomi *σ-algebre $\mathcal{B}$.*

Propozicija 3.1.6. Neka je $\mathcal{B}$ σ-algebra s m atoma. Tada $\mathcal{B}$ sadrži točno 2^m skupova. Posebno, svaka konačna σ-algebra sadrži točno 2^m skupova za neki prirodan broj m.

Dokaz. Unija svake kombinacije atoma algebre $\mathcal{B}$ odgovara točno jednom skupu iz $\mathcal{B}$ jer su atomi od $\mathcal{B}$ disjunktni i generiraju $\mathcal{B}$. Prema tome, kardinalitet skupa $\mathcal{B}$ jednak je kardinalitetu partitivnog skupa familije svih atoma algebre $\mathcal{B}$, dakle jednak je 2^m.

Prethodna propozicija pokazuje da se svaka konačna σ-algebra može atomizirati pa stoga mora imati 2^m elemenata pri čemu je m broj atoma te σ-algebre. □

Dokazi iz ovog poglavlja zahtijevat će da radimo na produktima vjerojatnosnih prostora. Sljedeća definicija daje jedan način kako od konačnih faktora na vjerojatnosnim prostorima $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ možemo dobiti konačan faktor na produktnom prostoru $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, P_X \times P_Y)$.

Definicija 3.1.7. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori. Pretpostavimo da imamo konačne faktore $\mathcal{B}_X$ na X i $\mathcal{B}_Y$ na Y. Neka su atomi od $\mathcal{B}_X$ označeni s $A_X^1, A_X^2, \ldots, A_X^{m_X}$, a atomi od $\mathcal{B}_Y$ s $A_Y^1, A_Y^2, \ldots, A_Y^{m_Y}$.* Produkt faktora *$\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$, u oznaci $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, je konačan faktor na produktnom prostoru $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, P_X \times P_Y)$ generiran atomima*

$$A_X^i \times A_Y^j \qquad \text{za } 1 \leq i \leq m_X, 1 \leq j \leq m_Y.$$

Napomena 3.1.8. Ako je $\mathcal{B}_X$ faktor složenosti najviše m_X, a $\mathcal{B}_Y$ faktor složenosti najviše m_Y onda je $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ faktor složenosti najviše $m_X m_Y$.

Činjenica da se konačni faktori mogu atomizirati omogućuje nam da uvjetno očekivanje definiramo na sljedeći način.

Definicija 3.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}$ konačan faktor na X. Tada je uvjetno očekivanje integrabilne funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$ u odnosu na konačan faktor $\mathcal{B}$ integrabilna funkcija $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})\colon X \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\int_{A_k} f(x)\, dP(x)}{P(A_k)} 1_{A_k},$$

pri čemu su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ svi međusobno različiti atomi faktora $\mathcal{B}$ vjerojatnosti veće od 0. Ovime smo uvjetno očekivanje $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ definirali gotovo svuda. Radi određenosti, možemo na ostatku prostora X uvjetno očekivanje proširiti s 0.

Napomena 3.1.10. Uskoro ćemo vidjeti da nam je potreban i skalarni produkt među funkcijama na X. Zbog toga se moramo ograničiti na $L^2(X)$ prostor funkcija. Međutim, vidjet ćemo također da su nam već i ograničene izmjerive funkcije sasvim dovoljne pa ćemo se od sada baviti samo njima. Ograničene izmjerive funkcije na vjerojatnosnom prostoru su u svim L^p prostorima ($p \in [1, \infty]$) pa su na takvim funkcijama dobro definirane sve $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ norme ($p \in [1, \infty]$).

Dakle, ako ne kažemo drugačije, sve funkcije će od sada nadalje biti ograničene i izmjerive.

Važno svojstvo uvjetnog očekivanja je da ono usrednjuje funkciju f. Preciznije, treba imati na umu da vrijede sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 3.1.11. Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor, $f\colon X \to [a, b]$ funkcija koja poprima vrijednosti u segmentu $[a, b]$ i $\mathcal{B}$ konačan faktor na X. Tada uvjetno očekivanje funkcije f u odnosu na faktor $\mathcal{B}$ također poprima vrijednosti u segmentu $[a, b]$ gotovo sigurno.

Dokaz. Kako atomi od $\mathcal{B}$ čine particiju od X i kako je $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ definirano do na skup mjere 0, tvrdnju je dovoljno provjeriti za svaki atom od $\mathcal{B}$ koji ima vjerojatnost veću od 0. Neka je A neki takav atom. Uvjetno očekivanje $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ na skupu A jednako je konstanti

$$\frac{\int_A f(x)\,dP(x)}{P(A)},$$

za koju lako vidimo da je u intervalu $[a, b]$. □

Propozicija 3.1.12. Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ograničena izmjeriva funkcija na X i $\mathcal{B}$ konačan faktor na X. Tada za svaki skup B iz $\mathcal{B}$ vrijedi

$$\int_B f(x)\,dP(x) = \int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\,dP(x).$$

Dokaz. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ atomi faktora $\mathcal{B}$ pozitivne vjerojatnosti koji u uniju daju skup B. Dio integrala funkcije f po atomima vjerojatnosti 0 unutar skupa B je zanemariv pa možemo računati

$$\begin{aligned}
\int_B f(x)\,dP(x) &= \int_{\bigcup_{k=1}^{m} A_k} f(x)\,dP(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} f(x)\,dP(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{\int_{A_k} f(y)\,dP(y)}{P(A_k)} \int_B 1_{A_k}(x)\,dP(x) = \int_B \sum_{k=1}^{m} \frac{\int_{A_k} f(y)\,dP(y)}{P(A_k)} 1_{A_k}(x)\,dP(x) \\
&= \int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\,dP(x).
\end{aligned}$$ □

Još jedno korisno svojstvo uvjetnog očekivanja je njegova ortogonalnost.

Propozicija 3.1.13. Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}$ konačan faktor na X. Tada je operator uzimanja uvjetnog očekivanja $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})$ ortogonalni projektor na prostor svih funkcija koje su ograničene i izmjerive u odnosu na faktor $\mathcal{B}$. Drugim riječima, vrijedi

$$\int_X \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\Big(f(x) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\Big)\,dP(x) = 0.$$

Dokaz. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ svi atomi faktora $\mathcal{B}$ pozitivne vjerojatnosti. Rastavljanjem integrala na dijelove dobivamo

$$\int_X \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\Big(f(x) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\Big)\,dP(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_{A_k} \Big(f(x) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x)\Big)\,dP(x), \tag{3.1}$$

pri čemu smo s c_k označili konstantu

$$c_k = \frac{\int_{A_k} f(y)\, dP(y)}{P(A_k)}.$$

U propoziciji 3.1.12 pokazali smo da za $k = 1, 2, \ldots, m$ imamo

$$\int_{A_k} f(x) dP_X(x) = \int_{A_k} \mathbb{E}(f|\mathcal{B})(x) dP_X(x).$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u jednakost (3.1) lako slijedi tvrdnja. □

Navedimo neke jednostavne posljedice činjenice da je uvjetno očekivanje ortogonalan projektor.

Propozicija 3.1.14. Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ograničena izmjeriva funkcija i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ konačni faktori od X takvi da je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{B}'$. Tada vrijedi

1. $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{B}')$,
2. $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}')|\mathcal{B})$.

Dokaz. Uočimo da je prostor svih funkcija koje su izmjerive u odnosu na faktor $\mathcal{B}$ potprostor prostora funkcija koje su izmjerive u odnosu na faktor $\mathcal{B}'$. Prva tvrdnja slijedi iz činjenice da je $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}')$ ortogonalan projektor i da je funkcije $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ izmjeriva u odnosu na faktor $\mathcal{B}'$. Da bismo dokazali drugu tvrdnju izaberimo bilo koji atom A faktora $\mathcal{B}$ pozitivne vjerojatnosti. Na skupu A vrijedi sljedeća jednakost (vidi propoziciju 3.1.12)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \frac{\int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{B}')\, dP_X(x)}{P(A)} = \frac{\int_A f(x)\, dP_X(x)}{P(A)} = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$$

i ona dokazuje drugu tvrdnju. □

Kombiniranjem prethodne dvije propozicije vidimo da funkciju f možemo na neki način ortogonalno rastaviti ako imamo rastući niz konačnih faktora. Nejednakost koja slijedi podsjeća na Besselovu nejednakost.

Propozicija 3.1.15. Neka je $(X, \mathcal{X}, P)$ vjerojatnosni prostor i f ograničena i izmjeriva funkcija na X. Pretpostavimo da imamo rastući niz $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_3 \subseteq \ldots$ konačnih faktora na X. Tada za svaki prirodan broj m vrijedi

$$\|f\|^2_{L^2(X)} = \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_m)\|^2_{L^2(X)} + \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_k)\|^2_{L^2(X)} + \|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_1)\|^2_{L^2(X)}. \tag{3.2}$$

Posebno,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_k)\|^2_{L^2(X)} \leq \|f\|^2_{L^2(X)}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Zbog ortogonalnosti iz propozicije 3.1.13 primjenom Pitagorinog teorema za bilo koji prirodan broj m slijedi

$$\|f\|^2_{L^2(X)} = \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_m)\|^2_{L^2(X)} + \|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_m)\|^2_{L^2(X)}.$$

Iteriranjem ovog postupka, uzimajući u obzir da vrijedi

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}')|\mathcal{B})$$

kada god je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{B}'$, lako dobivamo jednakost (3.2). □

3.2 Box-norma

Box-normu smo spomenuli u odjeljku 2.2. Ovdje ćemo se detaljnije pozabaviti tom normom. Definiciju druge box-norme, $\|\cdot\|_{\square^2}$, smo već dali u definiciji 2.2.8. Ostali smo dužni pokazati da je $\|\cdot\|_{\square^2}$ stvarno norma.

Definicija 3.2.1. *Ponoviti ćemo formulu kojom je definirana druga box-norma, samo ovaj put u malo drugačijoj notaciji. Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori. Druga box-norma $\|\cdot\|_{\square^2(X\times Y)}$ definirana je formulom*

$$\|f\|^4_{\square^2(X\times Y)} = \mathbb{E}_{x,x'\in X;y,y'\in Y}\, f(x,y)f(x,y')f(x',y)f(x',y').$$

Pri tome je f proizvoljna izmjeriva i ograničena funkcija na $X \times Y$.

Napomena 3.2.2. Da bismo skratili zapis računa koji slijede, uvest ćemo pokratu

$$\xi(f,g,h,l) = \int_{X\times X\times Y\times Y} f(x,y)g(x,y')h(x',y)l(x',y')\, dP_X(x)dP_X(x')dP_Y(y)dP_Y(y').$$

Sljedeća nejednakost podsjeća na klasičnu Cauchy-Schwarzovu nejednakost.

Propozicija 3.2.3. Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori i neka su f_{00}, f_{01}, f_{10} i $f_{11} : X \times Y \to \mathbb{R}$ ograničene izmjerive funkcije. Tada vrijedi

$$\xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}) \leq \|f_{00}\|_{\square^2}\|f_{01}\|_{\square^2}\|f_{10}\|_{\square^2}\|f_{11}\|_{\square^2}.$$

Dokaz. Prvo, primijetimo da vrijedi

$$|\xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11})| \leq$$
$$\int_{X\times X\times Y\times Y} |f_{00}(x, y)||f_{01}(x, y')||f_{10}(x', y)||f_{11}(x', y')| \, dP_X(x)dP_Y(y)dP_X(x')dP_Y(y')$$

pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su sve početne funkcije nenegativne da izbjegnemo stalno pisanje apsolutnih vrijednosti. Označimo još izraz od kojega krećemo s Θ tj. $\Theta = \xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11})$. Računamo

$$\begin{aligned}
\Theta^2 &= \xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11})^2 \\
&= \left[\int_{X\times X}\left(\int_Y f_{00}(x, y)f_{10}(x', y)\, dP_Y(y)\right)\left(\int_Y f_{01}(x, y')f_{11}(x', y')dP_Y(y')\right) dP_X(x)dP_X(x')\right]^2 \\
&\leq \int_{X\times X}\left(\int_Y f_{00}(x_1, y)f_{10}(x_2, y)\, dP_Y(y)\right)^2 dP_X(x_1)dP_X(x_2) \\
&\quad \cdot \int_{X\times X}\left(\int_Y f_{01}(x_1', y')f_{11}(x_2', y')dP_Y(y')\right)^2 dP_X(x_1')dP_X(x_2').
\end{aligned}$$

Pri tome smo primijenili Cauchy-Schwarzovu nejednakost na $X \times X$. Ako ovaj izraz malo presložimo (primjena Fubinijevog teorema je opravdana jer su sve funkcije nenegativne) dobivamo

$$\begin{aligned}
\Theta^2 &\leq \int_{X\times X}\int_{Y\times Y} f_{00}(x_1, y_1)f_{00}(x_1, y_2)f_{10}(x_2, y_1)f_{10}(x_2, y_2)\, dP_Y(y_1)dP_Y(y_2)\, dP_X(x_1)dP_X(x_2) \\
&\quad \cdot \int_{X\times X}\int_{Y\times Y} f_{01}(x_1', y_1')f_{01}(x_1', y_2')f_{11}(x_2', y_1')f_{11}(x_2', y_2')\, dP_Y(y_1')dP_Y(y_2')\, dP_X(x_1')dP_X(x_2') \\
&= \xi(f_{00}, f_{00}, f_{10}, f_{10})\xi(f_{01}, f_{01}, f_{11}, f_{11}).
\end{aligned}$$

Dakle,
$$\xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11})^2 \leq \xi(f_{00}, f_{00}, f_{10}, f_{10})\xi(f_{01}, f_{01}, f_{11}, f_{11})$$
pa još jednom iteracijom ovog postupka dobivamo

$$\begin{aligned}
\Theta^4 &= \xi(f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11})^4 \\
&\leq \xi(f_{00}, f_{00}, f_{00}, f_{00})\xi(f_{01}, f_{01}, f_{01}, f_{01}) \\
&\quad\ \xi(f_{10}, f_{10}, f_{10}, f_{10})\xi(f_{11}, f_{11}, f_{11}, f_{11}).
\end{aligned}$$

Sada je dovoljno primijetiti da je po definiciji

$$\xi(f, f, f, f) = \|f\|_{\square^2}^4$$

pa vrijedi

$$\Theta^4 \leq \|f_{00}\|_{\square^2}^4 \|f_{01}\|_{\square^2}^4 \|f_{10}\|_{\square^2}^4 \|f_{11}\|_{\square^2}^4$$

iz čega tvrdnja slijedi uzimanjem četvrtog korijena. $\square$

Propozicija 3.2.4. Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori. Druga box-norma $\|\cdot\|_{\square^2(X\times Y)}$ je stvarno norma, tj. ona zadovoljava sva svojstva norme.

Dokaz. Provjerimo svojstva norme.

- Pozitivnost slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\int_{X\times X\times Y\times Y} f(x,y)f(x,y')f(x',y)f(x',y')\,dP_X(x)dP_X(x')dP_Y(y)dP_Y(y') \\
&= \int_{X\times X} \left(\int_Y f(x,y)f(x',y)\,dP_Y(y)\right)\left(\int_Y f(x,y')f(x',y')\,dP_Y(y')\right) dP_X(x)dP_X(x') \\
&= \int_{X\times X} \left(\int_Y f(x,y)f(x',y)\,dP_Y(y)\right)^2 dP_X(x)dP_X(x') \geq 0.
\end{aligned}$$

- Apsolutna homogenost se jednostavno provjeri.

- Za nejednakost trokuta potrebna nam je nejednakost iz propozicije 3.2.3. Neka su f i $g\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ ograničene i izmjerive funkcije. Iz

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\square^2}^4 &= \xi(f+g, f+g, f+g, f+g) \\
&= \xi(f,f,f,f) + \xi(f,f,f,g) + \xi(f,f,g,f) + \ldots + \\
&\quad + \xi(g,g,f,g) + \xi(g,g,g,f) + \xi(g,g,g,g) \\
&\leq \|f\|_{\square^2}^4 + 4\|f\|_{\square^2}^3\|g\|_{\square^2} + 6\|f\|_{\square^2}^2\|g\|_{\square^2}^2 + 4\|f\|_{\square^2}\|g\|_{\square^2}^3 + \|g\|_{\square^2}^4 \\
&= (\|f\|_{\square^2} + \|g\|_{\square^2})^4
\end{aligned}$$

  nejednakost trokuta slijedi uzimanjem četvrtog korijena.

- Pretpostavimo da je $\|f\|_{\square^2} = 0$. Za proizvoljne ograničene izmjerive funkcije $g\colon X \to \mathbb{R}$ i $h\colon Y\to\mathbb{R}$ korištenjem propozicije 3.2.3 dobivamo da je

$$\int_{X\times Y} f(x,y)g(x)h(y)\,dP_X(x)dP_Y(y) = \xi(f,g,h,1) \leq \|f\|_{\square^2}\|g\|_{\square^2}\|h\|_{\square^2}\|1\|_{\square^2}.$$

  Pretpostavka $\|f\|_{\square^2} = 0$ implicira da je

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)h(y)\,dP_Y(y)\Big) g(x)\,dP_X(x) = 0.$$

Budući da je g proizvoljna ograničena izmjeriva funkcija, možemo zaključiti da za gotovo svaki $x \in X$ vrijedi

$$\int_Y f(x,y)h(y)\,dP_Y(y) = 0.$$

Za svaki x za koji prethodna jednakost vrijedi isti argument pokazuje da je $f(x,y) = 0$ za gotovo svaki $y \in Y$. Iz ovoga zaključujemo da je $f = 0$ gotovo svuda na $X \times Y$ što dokazuje definitnost. □

Sada ćemo definirati jednu linearnu formu na produktu vjerojatnosnih prostora. Zašto smo izabrali baš ovakvu formu i čemu nam ona služi postat će jasno u poglavlju 4 kada ćemo dokazivati Rothov teorem. Natuknimo samo da na vjerojatnosnom prostoru kojeg dobijemo gledajući brojeću mjeru na grafu ova forma broji trokute.

Definicija 3.2.5. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$, $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ i $(Z, \mathcal{Z}, P_Z)$ vjerojatnosni prostori. Označimo s $B(X \times Y)$ skup svih ograničenih izmjerivih funkcija na $X \times Y$ (analogno za $B(Y \times Z)$ i $B(Z \times X)$). Definirajmo linearnu formu $\Lambda\colon B(X \times Y) \times B(Y \times Z) \times B(Z \times X) \to \mathbb{R}$ formulom*

$$\Lambda(f,g,h) = \int_X \int_Y \int_Z f(x,y)g(y,z)h(z,x)\,dP_Z(z)dP_Y(y)dP_X(x).$$

Važno svojstvo forme Λ je da ju možemo kontrolirati drugom box-normom bilo kojeg člana.

Teorem 3.2.6. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$, $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ i $(Z, \mathcal{Z}, P_Z)$ vjerojatnosni prostori. Pretpostavimo da imamo izmjerive funkcije $f\colon X \times Y \to [-1,1]$, $g\colon Y \times Z \to [-1,1]$ i $h\colon Z \times X \to [-1,1]$. Tada vrijedi nejednakost*

$$|\Lambda(f,g,h)| \le \min\left\{\|f\|_{\square^2(X\times Y)}, \|g\|_{\square^2(Y\times Z)}, \|h\|_{\square^2(Z\times X)}\right\}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
|\Lambda(f,g,h)| &= \int_X \int_Y \int_Z |f(x,y)g(y,z)h(z,x)|\,dP_Z(z)dP_Y(y)dP_X(x)\\
&\le \int_X \int_Y |f(x,y)| \int_Z dP_Z(z)\,dP_Y(y)dP_X(x)\\
&\le \int_X \int_Y \int_X \int_Y |f(x,y)| 1(x,y') 1(x',y) 1(x',y')\,dP_Y(y')dP_X(x')dP_Y(y)dP_X(x)\\
&\le \|f\|_{\square^2} \|1\|_{\square^2} \|1\|_{\square^2} \|1\|_{\square^2} = \|f\|_{\square^2(X\times Y)}.
\end{aligned}$$

U predzadnjoj nejednakosti iskoristili smo nejednakost iz propozicije 3.2.3, a u zadnjoj činjenicu da je $\|1\|_{\square^2} = 1$. Isti račun možemo provesti i za funkcije g i h pa kombiniranjem tri tako dobivene nejednakosti dobivamo nejednakost iz iskaza teorema. □

3.3 Lema o regularnosti

Prelazimo na dokaz vjerojatnosne varijante leme o regularnosti.

Teorem 3.3.1 (Vjerojatnosna varijanta leme o regularnosti)**.** *Neka su* $(X, \mathcal{X}, P_X)$ *i* $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ *vjerojatnosni prostori i* $f\colon X \times Y \to [0, 1]$ *izmjeriva funkcija. Izaberimo* $\varepsilon > 0$ *i rastuću funkciju* $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. Definirajmo induktivno niz prirodnih brojeva* $M_0, M_1, M_2, \ldots$ *formulom* $M_{i+1} = M_i + 16F(M_i)^8$ *s početnim uvjetom* $M_0 = 1$*. Tada postoji nenegativan cijeli broj k najviše jednak* $\lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ *i konačni faktori* $\mathcal{B}_X$ *i* $\mathcal{B}_Y$ *složenosti najviše* M_k *takvi da f ima dekompoziciju* $f = f_1 + f_2 + f_3$*, pri čemu vrijedi:*

- *(f_1 je strukturirana)* $f_1 = E(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$*,*
- *(f_2 je pseudoslučajna)* $\|f_2\|_{\square^2(X\times Y)} \leq 1/F(M_k)$*,*
- *(f_3 je mala greška)* $\|f_3\|_{L^2(X\times Y)} \leq \varepsilon$*,*
- f_1 *i* $f_1 + f_3$ *poprimaju vrijednosti u intervalu* $[0, 1]$.

Pripremni dio dokaza provest ćemo kroz tri leme. Pokažimo prvo da box-norma daje dobru mjeru pseudoslučajnosti. Preciznije, pokazat ćemo da ako imamo funkciju koja nije dovoljno uniformna (mjereći pomoću druge box-norme) onda u toj funkciji možemo naći određenu strukturiranost.

Lema 3.3.2. *Neka su* $(X, \mathcal{X}, P_X)$ *i* $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ *vjerojatnosni prostori i* $f\colon X \times Y \to [-1, 1]$ *izmjeriva funkcija. Pretpostavimo da postoji konstanta* $\eta > 0$ *takva da je*

$$\|f\|_{\square^2(X\times Y)} \geq \eta.$$

Tada postoje izmjerivi skupovi $A \in \mathcal{X}$ *i* $B \in \mathcal{Y}$ *takvi da vrijedi*

$$\left| \int_{X\times Y} 1_A(x) 1_B(y) f(x, y)\, dP_X(x) dP_Y(y) \right| \geq \frac{\eta^4}{4}.$$

Dokaz. Pretpostavka je da vrijedi

$$\mathbb{E}_{x,y,x',y'} f(x, y) f(x, y') f(x', y) f(x', y') = \|f\|^4_{\square^2(X\times Y)} \geq \eta^4.$$

Primjenom Dirichletovog principa možemo naći $x' \in X$ i $y' \in Y$ takve da vrijedi

$$f(x', y') \mathbb{E}_{x,y} f(x, y)\, f(x, y') f(x', y) \geq \eta^4.$$

Ocijenimo $|f(x', y')| \leq 1$ pa dobivamo

$$\left| \int_{X\times Y} f(x, y) f(x', y) f(x, y')\, dP_X(x) dP_Y(y) \right| \geq \eta^4.$$

Primjenom Fubinijevog teorema slijedi

$$\left| \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{X \times Y} \operatorname{sgn}(s)\operatorname{sgn}(t) 1_{A_s}(x) 1_{B_t}(y) f(x,y)\, dP_X(x) dP_Y(y) ds dt \right| \geq \eta^4,$$

pri čemu smo označili

$$A_s = \begin{cases} \{x \in X \colon f(x,y') \geq s\} \text{ ako je } s \in [0,1], \\ \{x \in X \colon f(x,y') \leq s\} \text{ ako je } s \in [-1,0\rangle, \end{cases}$$

a skup B_t je definiran analogno, pomoću vrijednosti od $f(x',y)$. Primijenimo još jednom Dirichletov princip da nađemo skupove $A \in \mathcal{X}$ i $B \in \mathcal{Y}$ takve da je

$$4 \left| \int_{X \times Y} 1_A(x) 1_B(y) f(x,y)\, dP_X(x) dP_Y(y) \right| \geq \eta^4.$$

Tvrdnja sada slijedi dijeljenjem s 4. □

Ideja vjerojatnosne leme o regularnosti je izdvojiti strukturirani dio funkcije f u jednu jednostavnu izmjerivu funkciju $\tilde{f}$. Htjeli bismo strukturu funkcije f toliko dobro aproksimirati funkcijom $\tilde{f}$ da ostatak bude jako uniforman, tj. da bude mali u drugoj box-normi. Do $\tilde{f}$ ćemo doći koristeći konačne faktore i uvjetno očekivanje. Sljedeća lema nam je važna jer pokazuje da aproksimaciju koja nije dovoljno dobra možemo poboljšati.

Lema 3.3.3. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori i $f \colon X \times Y \to [-1,1]$ proizvoljna funkcija. Pretpostavimo da postoje prirodan broj $m \in \mathbb{N}$, konstanta $\eta > 0$ i konačni faktori $\mathcal{B}_X$ na X i $\mathcal{B}_Y$ na Y složenosti najviše m takvi da je*

$$\left\| f - \mathbb{E}(f | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \right\|_{\square^2(X \times Y)} \geq \eta.$$

Tada možemo naći konačne faktore $\mathcal{B}'_X$ na X i $\mathcal{B}'_Y$ na Y složenosti najviše $m+1$ koji proširuju faktore $\mathcal{B}_X$ odnosno $\mathcal{B}_Y$ (tj. $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{B}'_X$ i $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{B}'_Y$) takve da je

$$\left\| \mathbb{E}(f | \mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y) \right\|^2_{L^2(X \times Y)} \geq \left\| \mathbb{E}(f | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \right\|^2_{L^2(X \times Y)} + \eta^8/16.$$

Dokaz. Primijenimo prethodnu lemu na funkciju $f - \mathbb{E}(f | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \colon X \times Y \to [0,1]$ i nađimo skupove $A \in \mathcal{X}$ i $B \in \mathcal{Y}$ za koje je

$$\left| \int_{X \times Y} 1_A(x) 1_B(y) \Big(f(x,y) - \mathbb{E}(f | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)(x,y) \Big) dP_X(x) dP_Y(y) \right| \geq \frac{\eta^4}{4}.$$

Neka je konačan faktor $\mathcal{B}'_X$ jednak σ-algebri generiranoj skupovima iz $\mathcal{B}_X$ i skupom A, tj. $\mathcal{B}'_X = \sigma(\mathcal{B}_X \cup \{A\})$ i neka je konačan faktor $\mathcal{B}'_Y$ jednak $\sigma(\mathcal{B}_Y \cup \{B\})$. Jasno je da su $\mathcal{B}'_X$ i $\mathcal{B}'_Y$ složenosti najviše $m + 1$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} 1_A(x)1_B(y)\Big(f(x,y) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)(x,y)\Big)\, dP_X(x)dP_Y(y) \\
&= \int_{X\times Y} \mathbb{E}\Big(1_A 1_B(f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y))|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y\Big)(x,y)\, dP_X(x)dP_Y(y) \\
&= \int_{X\times Y} 1_A(x)1_B(y)\Big(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y)(x,y) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)(x,y)\Big)\, dP_X(x)dP_Y(y).
\end{aligned}$$

Pri tome smo u prvoj jednakosti iskoristili propoziciju 3.1.12, a u drugoj propoziciju 3.1.14 i činjenicu da su A i B izmjerivi u odnosu na faktor $\mathcal{B}'_X$ odnosno $\mathcal{B}'_Y$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo

$$\|1_A 1_B\|_{L^2(X\times Y)} \Big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y))\Big\|_{L^2(X\times Y)} \geq \frac{\eta^4}{4}.$$

Ocjenjivanjem $\|1_A 1_B\|_{L^2(X\times Y)} \leq 1$ zaključujemo da je

$$\Big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y))\Big\|_{L^2(X\times Y)} \geq \frac{\eta^4}{4}$$

pa kako je $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ okomito na $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ (vidi propoziciju 3.1.13) iz Pitagorinog teorema slijedi

$$\Big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y))\Big\|^2_{L^2(X\times Y)} \geq \Big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)\Big\|^2_{L^2(X\times Y)} + \frac{\eta^8}{16}. \qquad \square$$

Iteriranjem prethodne leme vidimo da strukturu funkcije f možemo proizvoljno dobro aproksimirati jednostavnim izmjerivim funkcijama. Naravno, ako želimo bolju aproksimaciju, aproksimirajuća funkcija bit će kompliciranija tj. imat će veću složenost. Ovo ćemo dokazati u sljedećoj lemi.

Lema 3.3.4. *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori i $f\colon X \times Y \to [-1, 1]$ proizvoljna funkcija. Neka su još $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{Y}$ konačni faktori na X odnosno Y složenosti najviše m i $\eta > 0$ proizvoljna konstanta. Tada možemo proširiti faktore $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$ do faktora $\mathcal{B}'_X$ i $\mathcal{B}'_Y$ složenosti najviše $m + 16/\eta^8$ tako da je*

$$\Big\|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y)\Big\|_{\square^2(X\times Y)} < \eta.$$

Dokaz. Konstruirajmo niz parova konačnih faktora $(\mathcal{B}^0_X, \mathcal{B}^0_Y), (\mathcal{B}^1_X, \mathcal{B}^1_Y), (\mathcal{B}^2_X, \mathcal{B}^2_Y), \ldots$ tako da faktori $\mathcal{B}^i_X$ i $\mathcal{B}^i_Y$ imaju složenost najviše $m + i$, za svaki indeks $i \geq 0$.

Neka je $\mathcal{B}_X^0 = \mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y^0 = \mathcal{B}_Y$. Pretpostavili smo da je složenost tih faktora najviše m. Ostatak niza konstruiramo induktivno koristeći prethodno dokazanu lemu 3.3.3. Pretpostavimo da smo već definirali faktore $\mathcal{B}_X^i$ i $\mathcal{B}_Y^i$ složenosti najviše $m+i$.

Ako je $\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i) \right\|_{\square^2(X\times Y)} < \eta$, onda stajemo s konstrukcijom niza i izabiranjem $\mathcal{B}'_X = \mathcal{B}_X^i$ i $\mathcal{B}'_Y = \mathcal{B}_Y^i$ dobivamo da vrijedi:

- $\mathcal{B}'_Y$ i $\mathcal{B}'_X$ su složenosti najviše $m+i$,
- $\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}'_X \times \mathcal{B}'_Y) \right\|_{\square^2(X\times Y)} < \eta$.

Ovo dokazuje teorem ako je i manji ili jednak od $16/\eta^8$.

U suprotnom je $\|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i)\|_{\square^2(X\times Y)} \geq \eta$ pa primjenom leme 3.3.3 možemo naći faktore $\mathcal{B}_X^{i+1}$ i $\mathcal{B}_Y^{i+1}$ složenosti najviše $m+i+1$ takve da vrijedi

$$\left\| \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{i+1} \times \mathcal{B}_Y^{i+1}) \right\|_{L^2(X\times Y)} \geq \left\| \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i) \right\|_{L^2(X\times Y)} + \frac{\eta^8}{16}.$$

Ponavljamo ovaj postupak, drugi slučaj može se dogoditi najviše $16/\eta^8$ puta. Zaista, uvjetno očekivanje funkcije f nad bilo kojim faktorom uvijek poprima vrijednosti u intervalu $[-1, 1]$ pa je $\left\| \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i) \right\|_{L^2(X\times Y)} \leq 1$ za svaki indeks i. Ako se dogodi drugi slučaj, iz leme 3.3.3 znamo da se L^2-norma mora povećati za $\eta^8/16$. Prema tome, to se može dogoditi najviše $16/\eta^8$ puta, inače bi L^2-norma premašila 1 (vidi nejednakost 3.3). □

Koristeći ovu tehniku aproksimacije lako ćemo dobiti naivnu varijantu leme o regularnosti.

Teorem 3.3.5 (Naivna lema o regularnosti)**.** *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_X)$ i $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ vjerojatnosni prostori, $\eta > 0$ konstanta i $f \colon X \times Y \to [0, 1]$ proizvoljna funkcija. Tada postoje konačni faktori $\mathcal{B}_X$ na X i $\mathcal{B}_Y$ na Y složenosti najviše $16/\eta^8$ takvi da f ima dekompoziciju $f = f_1 + f_2$, pri čemu vrijedi:*

- *(f_1 je strukturirana) $f_1 = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$,*
- *(f_2 je pseudoslučajna) $\|f_2\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \eta$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}_X^0$ σ-algebra generirana samo skupom X i $\mathcal{B}_Y^0$ σ-algebra generirana samo skupom Y. Ti faktori su složenosti 0. Primijenimo prethodnu lemu na ovako izabrane faktore $\mathcal{B}_X^0$ i $\mathcal{B}_Y^0$ i konstantu η iz iskaza teorema. Nalazimo faktore $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$ složenosti najviše $\frac{16}{\eta^8}$ za koje je

$$\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \right\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \eta.$$

Dakle, dovoljno je uzeti $f_1 = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ i $f_2 = f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ i dokazali smo tvrdnju. □

Napomena 3.3.6. Strukturiranost uvjetnog očekivanja mjerimo složenošću faktora nad kojim je to uvjetno očekivanje definirano. Konačan faktor složenosti najviše m ima najviše 2^m atoma, zbog čega je uvjetno očekivanje nad tim faktorom jednostavna izmjeriva funkcija koja poprima najviše 2^m različitih vrijednosti.

Prethodna dekompozicija je, naravno, jako slična naivnoj dekompoziciji iz prošlog poglavlja (teorem 2.4.1), ali primijetimo da smo za razliku od prošlog poglavlja u ovoj dekompoziciji puno konkretniji. Točno smo odredili da strukturiranost mjerimo složenošću faktora, a pseudoslučajnost drugom box-normom. Poanta prošlog poglavlja bila je pokazati kako je ideja u pozadini lema o regularnosti dovoljno općenita da slične dekompozicije možemo dobiti bez obzira koju normu za pseudoslučajnost izaberemo.

Sada se vraćamo na završni dio dokaza leme o regularnosti, tj. teorema 3.3.1.

Dokaz. Konstruirat ćemo niz parova konačnih faktora $(\mathcal{B}_X^i, \mathcal{B}_Y^i)$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$ složenosti najviše M_i koristeći lemu 3.3.4.

Stavimo $\mathcal{B}_X^0 = \sigma(\{\emptyset, X\})$ i $\mathcal{B}_Y^0 = \sigma(\{\emptyset, Y\})$. To su faktori složenosti 0, što je manje od $M_1 = 1$. Pretpostavimo da smo definirali konačne faktore $\mathcal{B}_X^i$ i $\mathcal{B}_Y^i$ složenosti najviše M_i za neki $i \geq 0$. Iskoristimo lemu 3.3.4 s $\eta = F(M_i)^{-1}$ da nađemo faktore $\mathcal{B}_X^{i+1}$ i $\mathcal{B}_Y^{i+1}$ složenosti najviše $M_i + 16F(M_i)^8$ (što je po konstrukciji niza jednako M_{i+1}) tako da vrijedi

$$\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{i+1} \times \mathcal{B}_Y^{i+1}) \right\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \frac{1}{F(M_i)}.$$

Za svaki indeks i imamo dekompoziciju

$$f = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i) + \left[\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{i+1} \times \mathcal{B}_Y^{i+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i)\right] + \left[f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{i+1} \times \mathcal{B}_Y^{i+1})\right].$$

U propoziciji 3.3 dokazali smo da je

$$1 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{l+1} \times \mathcal{B}_Y^{l+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^l \times \mathcal{B}_Y^l) \right\|_{L^2(X\times Y)}^2$$

pa primjenom Dirichletovog principa vidimo da najviše ε^{-2} pribrojnika oblika

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{i+1} \times \mathcal{B}_Y^{i+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^i \times \mathcal{B}_Y^i)$$

može u L^2 normi biti veće od ε. Dakle postoji indeks $0 \leq k \leq \lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ takav da je

$$\left\| \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{k+1} \times \mathcal{B}_Y^{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^k \times \mathcal{B}_Y^k) \right\|_{L^2(X\times Y)} \leq \varepsilon.$$

Sada je dovoljno uzeti

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^k \times \mathcal{B}_Y^k), \\ f_2 &= f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{k+1} \times \mathcal{B}_Y^{k+1}), \\ f_3 &= \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^{k+1} \times \mathcal{B}_Y^{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X^k \times \mathcal{B}_Y^k) \end{aligned}$$

i dobivamo dekompoziciju koju smo željeli. □

Uočimo da smo ovaj koncept dokaza zapravo već vidjeli u dokazima primjera leme o regularnosti (teorem 2.1.1) i u dokazu funkcionalne varijante leme o regularnosti (teorem 2.4.2). Stvar je u tome da smo u sva tri slučaja našli puno dekompozicija kod kojih smo zadovoljni ocjenama na strukturirani i pseudoslučajni dio. Takvih dekompozicija je bilo dovoljno da bismo primijenili Dirichletov princip i našli dekompoziciju kod koje je i ocjena na grešku zadovoljavajuća. Dokaz funkcionalne varijante ipak se donekle razlikuje jer smo tamo, umjesto da iskoristimo Dirichletov teorem, pretpostavili da nam niti jedna dekompozicija ne odgovara i pokazali da tih dekompozicija onda ima previše. Koliko nam dekompozicija stvarno treba ovisi o greški koju dozvoljavamo. Ako dozvolimo veću grešku, dovoljno nam je manje dekompozicija i obratno. Primijetimo da smo u sva tri dokaza dobili istu ocjenu $\lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ na maksimalan broj dekompozicija koje su moguće bez da postoji dekompozicija koju tražimo.

S druge strane, razlozi zbog kojih ne može postojati puno dekompozicija su različiti (često je bitna određena L^2 norma). Također se razlikuju i tehnike kojima konstruiramo dekompozicije kod kojih smo zadovoljni s ocjenama na strukturirani i pseudoslučajni dio.

Za kraj, primijetimo da smo u upravo dokazanoj lemi o regularnosti, za razliku od funkcionalno analitičke varijante 2.4.2, dodatno dobili i da su f_1 i $f_1 + f_3$ sadržane u segmentu $[0, 1]$. Kasnije će se ovo pokazati važno za kombinatorne primjene.

3.4 Vjerojatnosna lema o uklanjaju trokutâ

Napomena 3.4.1. Da bismo si olakšali baratanje s konstantama iskoristit ćemo O notaciju. Neka je $x \in \mathbb{R}$ neka varijabla i $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. Oznaka $O(F(x))$ u formuli zamjenjuje izraz $G(x)$ takav da vrijedi $|G(x)| \leq CF(x)$ za neku konstantu $C > 0$ koja ne ovisi o x. Često postoji više konstanti za koje tvrdnja vrijedi, pogotovo kada radimo s nejednakostima. Poanta je u tome da nam nije bitno kolika je točno vrijednost te konstante, nego samo želimo znati da takva konstanta postoji. Istu oznaku koristimo i ako imamo više od jedne varijable, samo što u tom slučaju podrazumijevamo da konstanta ne ovisi niti o jednoj od tih varijabli.

Ukoliko pak želimo označiti da konstanta ovisi o nekoj varijabli, tu varijablu ćemo pisati u indeksu. Na primjer, ako su x i y varijable i F funkcija, onda oznaka $O_x(F(x, y))$ zamjenjuje izraz $G(x, y)$ takav da vrijedi $|G(x, y)| \leq CF(x, y)$ za neku funkciju $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja nas ponovno ne zanima precizno, nego nam je samo bitno da ona postoji.

Da bismo vjerojatnosnu varijantu leme o regularnosti mogli iskoristiti za dokaz Rothovog teorema, potrebna nam je malo generalnija formulacija koja istodobno dekomponira tri funkcije.

Teorem 3.4.2 (Simultana lema o regularnosti)**.** *Neka su $(X, \mathcal{X}, P_x)$, $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ i $(Z, \mathcal{Z}, P_Z)$ vjerojatnosni prostori i neka su $f\colon X \times Y \to [0, 1]$, $g\colon Y \times Z \to [0, 1]$ i $h\colon Z \times X \to [0, 1]$*

izmjerive funkcije. Izaberimo konstantu $\varepsilon > 0$ i rastuću funkciju $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Tada postoji prirodan broj $M = O_{F,\varepsilon}(1)$ te konačni faktori $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ i $\mathcal{B}_Z$ složenosti najviše M takvi da se sve tri funkcije f, g i h mogu istovremeno dekomponirati kao $f = f_1 + f_2 + f_3$, $g = g_1 + g_2 + g_3$ i $h = h_1 + h_2 + h_3$ tako da vrijedi:

- *(f_1, g_1 i h_1 su strukturirane)*
$$f_1 = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y), \quad g_1 = \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z), \quad h_1 = \mathbb{E}(h|\mathcal{B}_Z \times B_X),$$
- *(f_2, g_2 i h_2 su pseudoslučajne)* $\|f_2\|_{\square^2(X\times Y)}, \|g_2\|_{\square^2(Y\times Z)}, \|h_2\|_{\square^2(Z\times X)} \leq \frac{1}{F(M)}$,
- *(f_3, g_3 i h_3 su male)* $\|f_3\|_{L^2(X\times Y)}, \|g_3\|_{L^2(Y\times Z)}, \|h_3\|_{L^2(Z\times X)} \leq \varepsilon$,
- *funkcije f_1, $f_1 + f_3$, g_1, $g_1 + g_3$, h_1 i $h_1 + h_3$ poprimaju vrijednosti u segmentu* $[0, 1]$.

Dokaz je sličan dokazu prethodnog teorema.

Dokaz. Definirajmo induktivno niz prirodnih brojeva $(M_i)_{i=0}^{\infty}$ formulom
$$M_{i+1} = M_i + 2 \cdot 16F(M_i)^8$$
i početnim uvjetom $M_0 = 1$. Konstruirat ćemo i niz trojki konačnih faktora
$$(\mathcal{B}_X(i), \mathcal{B}_Y(i), \mathcal{B}_Z(i))$$
složenosti najviše M_i, za $i = 0, 1, 2, \ldots$. Početna trojka faktora dana je s $\mathcal{B}_X(0) = \sigma(\{\emptyset, X\})$, $\mathcal{B}_Y(0) = \sigma(\{\emptyset, Y\})$ i $\mathcal{B}_Z(0) = \sigma(\{\emptyset, Z\})$. Složenost svakog od tih faktora je, naravno, 0.

Pretpostavimo da smo već konstruirali faktore $\mathcal{B}_X(i)$, $\mathcal{B}_Y(i)$ i $\mathcal{B}_Z(i)$ složenosti najviše M_i za neki indeks i. Primijenimo lemu 3.3.4 na funkciju f i konstantu $\eta = F(M_i)^{-1}$ te povećajmo konačne faktore $\mathcal{B}_X(i)$ i $\mathcal{B}_Y(i)$ do faktora $\mathcal{B}_X(i)'$ i $\mathcal{B}_Y(i)'$ takvih da vrijedi
$$\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i)' \times \mathcal{B}_Y(i)') \right\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \frac{1}{F(M_i)}.$$
Složenosti faktora $\mathcal{B}_Y(i)'$ i $\mathcal{B}_X(i)'$ su onda najviše $M_i + 16F(M_i)^8$. Primijenimo ponovno lemu 3.3.4 na funkciju g i povećajmo konačne faktore $\mathcal{B}_Y(i)'$ i $\mathcal{B}_Z(i)$ do faktora $\mathcal{B}_Y(i+1)$ i $\mathcal{B}_Z(i)'$ takvih da je
$$\left\| g - \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y(i+1) \times \mathcal{B}_Z(i)') \right\|_{\square^2(Y\times Z)} \leq \frac{1}{F(M_i)}.$$
Pri tome je složenost faktora $\mathcal{B}_Y(i+1)$ najviše $M_i + 2 \cdot 16F(M_i)^8$, a složenost faktora $\mathcal{B}_Z(i)'$ najviše $M_i + 16F(M_i)^8$.

Mali problem predstavlja to što za faktore $\mathcal{B}_X(i)'$ i $\mathcal{B}_Y(i+1)$ više ne možemo tvrditi da vrijedi

$$\left\| f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i)' \times \mathcal{B}_Y(i+1)) \right\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \frac{1}{F(M_i)}.$$

Primijenimo lemu 3.3.4 još i na funkciju h i povećajmo faktore $\mathcal{B}'_X(i)$ i $\mathcal{B}'_Z(i)$ do faktora $\mathcal{B}_X(i+1)$ i $\mathcal{B}_Z(i+1)$ tako da vrijedi

$$\left\| h - \mathbb{E}(h|\mathcal{B}_X(i+1) \times \mathcal{B}_Z(i+1)) \right\|_{\square^2(X\times Y)} \leq \frac{1}{F(M_i)}.$$

Nakon toga je složenost obaju faktora $\mathcal{B}_X(i+1)$ i $\mathcal{B}_Z(i+1)$ najviše $M_i + 2 \cdot 16F(M_i)^8$. Ovime smo gotovi s konstrukcijom niza. Bitni su i međufaktori $\mathcal{B}_X(i)'$, $\mathcal{B}_Y(i)'$ i $\mathcal{B}_Z(i)'$, iako oni formalno ne spadaju u niz kojeg smo upravo konstruirali.

Za svaki indeks i napravimo dekompoziciju

- $f_1^i = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i) \times \mathcal{B}_Y(i))$, $f_2^i = f - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i)' \times \mathcal{B}_Y(i)')$, $f_3^i = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i)' \times \mathcal{B}_Y(i)') - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_X(i) \times \mathcal{B}_Y(i))$
- $g_1^i = \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y(i) \times \mathcal{B}_Z(i))$, $g_2^i = g - \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y(i+1) \times \mathcal{B}_Z(i)')$, $g_3^i = \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y(i+1) \times \mathcal{B}_Z(i)') - \mathbb{E}(g|\mathcal{B}_Y(i) \times \mathcal{B}_Z(i))$
- $h_1^i = \mathbb{E}(h|\mathcal{B}_Z(i) \times \mathcal{B}_X(i))$, $h_2^i = h - \mathbb{E}(h|\mathcal{B}_Z(i+1) \times \mathcal{B}_X(i+1))$, $h_3^i = \mathbb{E}(h|\mathcal{B}_Z(i+1) \times \mathcal{B}_X(i+1)) - \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_Z(i) \times \mathcal{B}_X(i))$

Primijetimo da se iz gornjih formula vidi da za svaki indeks i funkcije koje su navedene u četvrtoj točki iskaza poprimaju vrijednosti u segmentu $[0, 1]$.

Kako su f, g i h u L^2 normi omeđeni s 1 a f_3^i, g_3^i i h_3^i disjunktni dijelovi odgovarajućih suma (vidi jednakost (3.3)), dobivamo da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|f_3^i\|^2_{L^2(X\times Y)} + \|g_3^i\|^2_{L^2(Y\times Z)} + \|h_3^i\|^2_{L^2(Z\times X)} \right) \leq 3.$$

Vidimo da najviše $3\varepsilon^{-2}$ članova ovog reda može, u L^2 normi, biti veće od ε^2. To znači da možemo naći indeks k između 0 i $\lfloor 3\varepsilon^{-2} \rfloor$ takav da je

$$\|f_3^k\|_{L^2(X\times Y)} \leq \varepsilon, \quad \|g_3^k\|_{L^2(Y\times Z)} \leq \varepsilon, \quad \|h_3^k\|_{L^2(Z\times X)} \leq \varepsilon.$$

Za taj k dobivamo dekompoziciju koju trebamo. Primijetimo još da konstrukcija niza $(M_i)_{i=0}^{\infty}$ pokazuje da najveća vrijednost konstante $M = M_k$ ovisi samo o F i ε. □

Sada ćemo demonstrirati primjenu leme o regularnosti da bismo dokazali vjerojatnosnu verziju leme o uklanjanju trokutâ, koja je pak ključna komponenta u dokazu Rothovog teorema. Smisao izraza "uklanjanje trokutâ" razjasnit ćemo u sljedećem poglavlju, gdje će se stvarno pojaviti trokuti.

Prije toga, prisjetimo se forme Λ s početka ovog poglavlja (definicija 3.2.5).

Teorem 3.4.3 (Vjerojatnosna lema o uklanjanju trokutâ)**.** *Neka su* $(X, \mathcal{X}, P_X)$, $(Y, \mathcal{Y}, P_Y)$ *i* $(Z, \mathcal{Z}, P_Z)$ *vjerojatnosni prostori. Neka su* $f: X \times Y \to [0,1]$, $g: Y \times Z \to [0,1]$ *i* $h: Z \times X \to [0,1]$ *izmjerive funkcije takve da je* $\Lambda(f, g, h) \leq \delta$ *za neki* $\delta > 0$. *Tada postoje faktori* $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ *i* $\mathcal{B}_Z$ *složenosti* $O_\delta(1)$ *i skupovi* $E_{X,Y} \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, $E_{Y,Z} \in \mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z$ *i* $E_{Z,X} \in \mathcal{B}_Z \times \mathcal{B}_X$ *takvi da vrijedi:*

- $1_{E_{X,Y}}(x, y) 1_{E_{Y,Z}}(y, z) 1_{E_{Z,X}}(z, x) = 0$ *za sve* $x \in X$, $y \in Y$ *i* $z \in Z$,
- $\int_{E^c_{X,Y}} f(x, y)\, dP_X(x) dP_Y(y)$, $\int_{E^c_{Y,Z}} g(y, z)\, dP_Y(y) dP_Z(z)$, $\int_{E^c_{Z,X}} h(z, x)\, dP_Z(z) dP_X(x) \leq c(\delta)$.

Pri tome $c(\delta)$ *teži k nuli kada* δ *teži k nuli tj.* $c(\delta) \overset{\delta \to 0}{\to} 0$.

Napomena 3.4.4. U gornjem teoremu ključna je činjenica da $c(\delta) \overset{\delta \to 0}{\to} 0$ jer za bilo koji δ tvrdnja vrijedi ako uzmemo $c(\delta) = 1$ i $E_{X,Y} = E_{Y,Z} = E_{Z,X} = \emptyset$.

Dokaz. Neka su ε i F oznake za konstantu odnosno funkciju koje u simultanoj lemi o regularnosti (teorem 3.4.2) smijemo po volji izabrati. Specificirat ćemo ih na kraju. Iskoristimo simultanu lemu o regularnosti za dekompoziciju funkcija f, g i h. Dobivamo konstantu $M = O_{F,\varepsilon}(1)$ i rastave $f = f_1 + f_2 + f_3$, $g = g_1 + g_2 + g_3$ i $h = h_1 + h_2 + h_3$. Ograde za pojedine članove raspisane su u iskazu te leme (teorem 3.4.2). Istaknimo samo činjenicu da $f_1, f_1 + f_3, g_1, g_1 + g_3, h1, h_1 + h_3$ poprimaju vrijednosti u $[0,1]$ koju ćemo često koristiti. Utjecaj pseudoslučajnih dijelova na formu Λ možemo ocijeniti pomoću teorema 3.2.6. Korištenjem trilinearnosti forme Λ rastavimo lijevu stranu na 8 dijelova te ocjenjivanjem njih 7 lako dobijemo sljedeću ocjenu:

$$\Lambda(f_1 + f_3, g_1 + g_3, h_1 + h_3) \leq \Lambda(f, g, h) + O(1/F(M)). \tag{3.4}$$

Definirajmo skupove $E^0_{X,Y}$, $E^0_{Y,Z}$ i $E^0_{Z,Y}$ s

$$\begin{aligned}
E^0_{X,Y} &= \left\{ f_1 \geq \varepsilon^{1/10}, \mathbb{E}(f_3^2 | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \leq \varepsilon \right\} \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y, \\
E^0_{Y,Z} &= \left\{ g_1 \geq \varepsilon^{1/10}, \mathbb{E}(g_3^2 | \mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z) \leq \varepsilon \right\} \in \mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z, \\
E^0_{Z,X} &= \left\{ h_1 \geq \varepsilon^{1/10}, \mathbb{E}(h_3^2 | \mathcal{B}_Z \times \mathcal{B}_X) \leq \varepsilon \right\} \in \mathcal{B}_Z \times \mathcal{B}_X.
\end{aligned}$$

Pokažimo da je f “mala” izvan $E^0_{X,Y}$. (Za prvu jednakost vidi propoziciju 3.1.12)

$$\begin{aligned}
\int_{E^c_{X,Y}} f(x, y)\, dP_X(x) dP_Y(y) &= \int_{E^c_{X,Y}} f_1(x, y)\, dP_X(x) dP_Y(y) \\
&\leq \int_{\{f_1 < \varepsilon^{1/10}\}} f_1\, dP_X dP_Y + \int_{\{\mathbb{E}(f_3^2 | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) > \varepsilon\}} 1\, dP_X dP_Y \\
&\leq \varepsilon^{1/10} \int_{X \times Y} 1\, dP_X dP_Y + \frac{1}{\varepsilon} \int_{X \times Y} \mathbb{E}(f_3^2 | \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)\, dP_X dP_Y \\
&\leq \varepsilon^{1/10} + \frac{1}{\varepsilon} \|f_3\|^2_{L^2(X \times Y)} = O(\varepsilon^{1/10})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pri tome zadnja ocjena vrijedi kad je ε dovoljno malen (tj. $\varepsilon \leq 1$).

Potpuno analogno dobivamo ocjene

$$\int_{E^c_{Y,Z}} g(y,z)dP_Y(y)dP_Z(z) = O(\varepsilon^{1/10}) \quad \text{i} \quad \int_{E^c_{Z,X}} h(z,x)dP_Z(z)dP_X(x) = O(\varepsilon^{1/10}).$$

Izaberimo bilo koja tri atoma A, B i C u $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ odnosno $\mathcal{B}_Z$ tako da je $A \times B \subseteq E^0_{X,Y}$, $B \times C \in E^0_{Y\times Z}$ i $C \times A \subseteq E^0_{Z,X}$. Izraz

$$\Lambda\left((f_1 + f_3)1_{A\times B}, (g_1 + g_3)1_{B\times C}, (h_1 + h_3)1_{C\times A}\right)$$

možemo razdvojiti na zbroj glavnog člana

$$\Lambda\left(f_1 1_{A\times B}, g_1 1_{B\times C}, h_1 1_{C\times A}\right)$$

i ostalih članova. O sumi svih članova osim glavnog razmišljamo kao o greški i označavat ćemo ju s Err. Funkcije $f_1, f_1+f_3, g_1, \ldots, h_1+h_3$ poprimaju vrijednosti u $[0,1]$ pa apsolutnu vrijednost greške Err možemo ocijeniti s

$$\Lambda(|f_3|1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times A}) + \Lambda(1_{A\times B}, |g_3|1_{B\times C}, 1_{C\times A}) + \Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, |h_3|1_{C\times A}).$$

Zbog definicije skupova $E^0_{X,Y}$, $E^0_{Y,Z}$ i $E^0_{Z,X}$ na njima redom vrijedi $f_1, g_1, h_1 \geq \varepsilon^{1/10}$ pa imamo donju ogradu na glavni član,

$$\Lambda\left(f_1 1_{A\times B}, g_1 1_{B\times C}, h_1 1_{C\times A}\right) \geq \varepsilon^{3/10}\Lambda\left(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times A}\right). \tag{3.6}$$

Iz iste definicije imamo $\mathbb{E}(f_3^2|\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y) \leq \varepsilon$ pa primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti i propozicije 3.1.12 dobivamo gornju ogradu

$$\begin{aligned}
\Lambda(|f_3|1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times A}) &= \int_{A\times B\times C} |f_3(x,y)|\, dP_X(x)dP_Y(y)dP_Z(z) \\
&\leq \Big(\int_{A\times B\times C} \mathbb{E}(f_3^2|\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)\, dP_X(x)dP_Y(y)dP_Z(z)\Big)^{1/2} \\
&\quad \cdot \Big(\int_{A\times B\times C} 1\, dP_X(x)dP_Y(y)dP_Z(z)\Big)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon^{1/2} \int_{A\times B\times C} 1\, dP_X(x)dP_Y(y)dP_Z(z) \\
&= \varepsilon^{1/2}\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times A})
\end{aligned} \tag{3.7}$$

i sličnu ogradu za g_3 i h_3. Nejednakosti (3.6) i (3.7) pokazuju da je greška Err usporediva s glavnim članom. Preciznije,

$$|Err| \leq 3\varepsilon^{1/2}\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times A}) \leq 3\varepsilon^{1/5}\Lambda(f_1 1_{A\times B}, g_1 1_{B\times C}, h_1 1_{C\times A}).$$

Ako je ε dovoljno malen, iz ovoga dobivamo "lokalnu" ocjenu

$$\Lambda\left(f_1 1_{A\times B}, g_1 1_{B\times C}, h_1 1_{C\times A}\right) \leq 2\Lambda\Big((f_1+f_3)1_{A\times B}, (g_1+g_3)1_{B\times C}, (h_1+h_3)1_{C\times A}\Big).$$

Zbrajanjem po svim takvim atomima A, B i C uzimajući u obzir nejednakost (3.4) dobivamo da vrijedi

$$\Lambda\left(f_1 1_{E^0_{X,Y}}, g_1 1_{E^0_{Y,Z}}, h_1 1_{E^0_{Z,X}}\right) \leq O(\delta) + O(1/F(M)).$$

pa je

$$\Lambda\left(1_{E^0_{X,Y}}, 1_{E^0_{Y,Z}}, 1_{E^0_{Z,X}}\right) \leq O(\varepsilon^{-3/10}\delta) + O(\varepsilon^{-3/10}F(M)). \tag{3.8}$$

Definirajmo sada $E_{X,Y}$ kao podskup od $E^0_{X,Y}$ koji je jednak uniji svih atoma $A \times B$ iz $E_{X,Y}$ takvih da je $P_X(A), P_Y(B) \geq \varepsilon/2^M$. Ostatak skupa $E^0_{X,Y}$ je malen. Zaista, unija svih atoma iz $\mathcal{B}_X$ vjerojatnosti manje od $\varepsilon/2^M$ ima vjerojatnost najviše ε jer $\mathcal{B}_X$ sadrži najviše 2^M skupova. Prema tome

$$(P_X \times P_Y)(E^0_{X,Y} \setminus E_{X,Y}) = O(\varepsilon).$$

Uzimajući u obzir nejednakost (3.5) vidimo da je

$$\int_{X\times Y} f(x,y) 1_{E^c_{X,Y}}(x,y)\, dP_X(x)\, dP_Y(y) = O(\varepsilon^{1/10}). \tag{3.9}$$

Slično dobivamo i ocjene

$$\int_{Y\times Z} g(y,z) 1_{E^c_{Y,Z}}\, dP_Y(y)\, dP_Z(z) = O(\varepsilon^{1/10}), \tag{3.10}$$

$$\int_{Z\times X} h(z,x) 1_{E^c_{Z,X}}\, dP_Z(z)\, dP_X(x) = O(\varepsilon^{1/10}). \tag{3.11}$$

Pretpostavimo sada da funkcija $(x,y,z) \mapsto 1_{E_{X,Y}}(x,y)1_{E_{Y,Z}}(y,z)1_{E_{Z,X}}(z,x)$ nije identički jednaka 0. Tada postoje atomi $A \in \mathcal{B}_X$, $B \in \mathcal{B}_Y$ i $C \in \mathcal{B}_Z$ takvi da je

$$1_{E_{X,Y}}(x,y)1_{E_{Y,Z}}(y,x)1_{E_{Z,X}}(z,x) = 1 \qquad \text{za sve } x \in A, y \in B, z \in C.$$

S jedne strane, iz (3.8) slijedi

$$\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times X}) = O(\varepsilon^{-3/10}\delta) + O(\varepsilon^{-3/10}/F(M)),$$

dok s druge strane dobivamo

$$\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times X}) = P_X(A)P_Y(B)P_Z(C) \geq (\varepsilon/2^M)^3.$$

Još uvijek nismo odredili konstantu ε i funkciju F. Uzmimo $F(x) = \lceil 2^{3x}\varepsilon^{-4}\rceil$. Ideja je sada naći ovisnost varijable ε o δ tako da gornje dvije ocjene za dovoljno mali δ dođu u kontradikciju.

Kako gornja granica na M ovisi samo o varijabli ε, možemo naći rastuću bijekciju $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takvu da je $\gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon^4/2^{3M}$ i da $\gamma(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. Onda za inverz γ^{-1} također vrijedi $\gamma^{-1}(x) \overset{x\to 0}{\to} 0$. Stavimo $\varepsilon = \gamma^{-1}(\delta)$, čime postižemo da je $\delta \leq \varepsilon^4/2^{3M}$. Ako pustimo da δ teži u 0 onda i ε teži u nula pa za dovoljno mali δ gornje ocjene prelaze u

$$\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times X}) \leq \varepsilon^{7/10}O((\varepsilon/2^M)^3),$$
$$\Lambda(1_{A\times B}, 1_{B\times C}, 1_{C\times X}) \geq (\varepsilon/2^M)^3.$$

Puštanjem $\delta \to 0$ odnosno $\varepsilon \to 0$ dobivamo kontradikciju jer $\varepsilon^{7/10}$ teži u 0. To pokazuje da se za dovoljno malen δ funkcija $1_{E_{X,Y}}(x,y)1_{E_{Y,Z}}(y,z)1_{E_{Z,X}}(z,x)$ poništava identički. Drugi dio tvrdnje slijedi iz ocjena (3.9), (3.10) i (3.11). Budući da $\varepsilon \to 0$ kada $\delta \to 0$, vidimo da se tako mora ponašati i $c(\delta)$. □

Poglavlje 4

Primjene u kombinatorici

Na primjeru ćemo demonstrirati kako rezultate iz prethodnog poglavlja možemo iskoristiti u kombinatorici. Preciznije, dokazat ćemo Rothov teorem o aritmetičkim progresijama. Započnimo s iskazom Szemerédijevog teorema.

Teorem 4.0.1 (Szemerédijev teorem [4]). *Neka je A podskup od $\mathbb{Z}$ s pozitivnom gornjom gustoćom. Drugim riječima,*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap [-N, N]|}{2N + 1} > 0.$$

Tada A sadrži po volji dugačke konačne aritmetičke nizove.

Napomena 4.0.2. Kada govorimo o duljini aritmetičkog niza mislimo na broj članova u tom nizu.

Tvrdnju prethodnog teorema naslutili su 1936. godine Erdõs i Tuŕan a dokazao ju je Endre Szemerédi 1975. godine. Szemerédijevom teoremu prethodio je sličan, ali mnogo jednostavniji, Van der Waerdenov teorem. Dokazan je dosta ranije, još 1927 godine, a njegov iskaz dan je sljedećim teoremom.

Teorem 4.0.3 (Van der Waerdenov teorem). *Pretpostavimo da je skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ particioniran u konačno mnogo klasa. Tada jedna od klasa sadrži po volji dugačke konačne aritmetičke nizove.*

Lako se vidi da Van der Weardenov teorem slijedi iz Szemerédijevog jer jedna od klasa mora imati pozitivnu gornju gustoću pa stoga mora sadržavati aritmetički niz proizvoljno velike duljine.

Između dokaza ova dva teorema proteklo je skoro 50 godina i u međuvremenu su dokazani posebni slučajevi Szemerédijevog teorema koji garantiraju postojanje aritmetičkih nizova duljine 3 i 4 u skupovima pozitivne gornje gustoće. Prvi netrivijalni slučaj Szemerédijevog teorema, tj. verzija koja garantira postojanje aritmetičkog niza duljine 3 poznat je pod nazivom *Rothov teorem* i već smo ga više puta spomenuli.

Teorem 4.0.4 (Rothov teorem)**.** *Neka je A poskup od $\mathbb{Z}$ s pozitivnom gornjom gustoćom. Drugim riječima,*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap [-N, N]|}{2N + 1} > 0.$$

Tada A sadrži aritmetički niz duljine tri.

Prethodni teorem dokazao je 1953. godine Klaus Roth [2] i ovdje ćemo dati jedan dokaz tog teorema. Činjenica da je za dokaz ovog slučaja trebalo čekati više od 20 godina daje naslutiti da ni ovaj prvi netrivijalan slučaj nije jednostavan. Potpuni Szemerédijev teorem ipak je prekompliciran da bismo ga ovdje dokazali. Napomenimo samo da je tehnike koje ćemo koristiti za dokaz Rothovog teorema moguće proširiti i iskoristiti za traženje aritmetičkih nizova većih duljina.

Navedimo još i da su 2004. godine Ben Green i Terence Tao dokazali *Green-Tao teorem*, koji se tematski nastavlja na do sada spomenute rezultate.

Teorem 4.0.5 (Green-Tao)**.** *Neka $\pi(N)$ označava broj prostih brojeva manjih ili jednakih N. Ako je A podskup skupa prostih brojeva takav da je*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, N\}|}{\pi(N)} > 0,$$

onda za svaki prirodan broj k, skup A sadrži beskonačno mnogo aritmetičkih nizova duljine k. Posebno, skup prostih brojeva sadrži aritmetičke nizove po volji velike duljine.

Napomenimo kao zanimljivost da je sasvim drugi problem naći konkretne vrlo duge aritmetičke nizove u skupu prostih brojeva. Trenutni rekord (iz 2015. godine) drži Bryan Little s aritmetičkim nizom duljine 26.

4.1 Dokaz Rothovog teorema

Pokažimo prvo da sljedeći teorem implicira Rothov teorem (teorem 4.0.4).

Teorem 4.1.1 (Ciklička verzija Rothovog teorema)**.** *Neka je $N \in \mathbb{N}$ prirodan broj i neka je A neki podskup od $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Ako postoji $\delta > 0$ takav da je $|A| \geq \delta N$, onda A sadrži barem $c(\delta)N^2$ aritmetičkih progresija duljine 3 (Govorimo o aritmetičkim nizovima u odnosu na operaciju zbrajanja mod N). Pri tome je $c(\delta) > 0$ i* ne ovisi *o N ni o skupu A.*

Propozicija 4.1.2. Ciklička formulacija 4.1.1 implicira Rothov teorem (teorem 4.0.4).

Dokaz. Neka je A poskup od $\mathbb{Z}$ koji ima pozitivnu gornju gustoću. To znači da postoji konstanta $\delta > 0$ (možda malo manja od samog limesa superiora) tako da možemo naći proizvoljno velik prirodan broj N za kojeg je $|A \cap [-N, N]| > (2N+1)\delta$. Iskoristimo to da nađemo dovoljno velik N za koji je $c(\delta/3)N^2 > 1$. Tada vrijedi barem jedna od sljedeće dvije tvrdnje

- $|A \cap \{0, 1, \ldots, N\}| > N\delta$
- $|A \cap \{-N, -N+1, \ldots, -1, 0\}| > N\delta$

Zrcaljenjem skupa A (tj. operacijom $A \mapsto -A$), ako je potrebno, možemo postići da vrijedi prva tvrdnja. Pritom smo iskoristili da su aritmetički nizovi u skupu $-A$ upravo zrcaljeni aritmetički nizovi iz A. Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi

$$|A \cap \{0, 1, \ldots, N\}| > N\delta. \tag{4.1}$$

Uložimo sad skup $A \cap \{0, 1, \ldots, N\}$ u cikličku grupu $\mathbb{Z}/3N\mathbb{Z}$. Iz jednakosti (4.1) slijedi

$$|A \cap \{0, 1, \ldots, N\}| > (3N)\frac{\delta}{3}$$

pa primjenom cikličke verzije Rothovog teorema vidimo da u skupu $A \cap \{0, 1, \ldots, N\}$ postoji barem $c(\delta/3)(3N)^2 > 1$ aritmetičkih nizova duljine 3. Ovdje treba malo pripaziti jer su to aritmetički nizovi u odnosu na operaciju zbrajanja u grupi $\mathbb{Z}/3N\mathbb{Z}$. Oni općenito ne moraju biti aritmetički nizovi u $\mathbb{Z}$ (moguće je da dođe do "prelijevanja"), ali u ovom konkretnom slučaju to jesu aritmetički nizovi i s obzirom na operaciju zbrajanja u $\mathbb{Z}$.

Zaista, neka je $x, x+d$ i $x+2d$ neki aritmetički niz u $A \cap \{0, 1, \ldots, N\}$ s obzirom na operaciju zbrajanja modulo $3N$. Znamo da su x i $x+d$ u intervalu $[0, N]$ pa se d može nalaziti ili u intervalu $[0, N]$ ili u intervalu $[2N+1, 3N-1]$. Ako se d nalazi u intervalu $[2N+1, 3N-1]$ onda na aritmetički niz x, $x+d$, $x+2d$ možemo gledati kao na niz $(x+2d)$, $(x+2d)-d$, $(x+2d)-2d$ pri čemu je $-d$ sad u intervalu $[0, N]$. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je d u intervalu $[0, N]$. No, onda su zbrojevi $x+d$ i $x+2d$ (gledano s operacijom zbrajanja u $\mathbb{Z}$) manji od $3N$ pa je niz x, $x+d$, $x+2d$ aritmetički niz i u $\mathbb{Z}$. □

Na redu je dokaz teorema 4.1.1. Za prirodan broj N želimo u svim dovoljno velikim podskupovima od $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ naći "mnogo" aritmetičkih nizova duljine 3. Pod mnogo aritmetičkih nizova mislimo na broj koji raste proporcionalno s kvadratom od N tj. broj reda veličine $O(N^2)$. Nizove koji imaju sve članove jednake obično ne smatramo aritmetičkim nizovima, međutim, za ovaj dokaz ključno je uzeti u obzir i takve nizove. Dakle pod aritmetičkim nizom u ovom dokazu podrazumijevamo bilo koji trojku brojeva

$$x, x+d, x+2d \quad \text{za bilo koji izbor } x, d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

Primijetimo da se među ovim trojkama, osim trivijalnih nizova, mogu pojaviti i deformirani nizovi x, $x+d$, x ako je $d = N/2$. Ipak, trivijalnih nizova ima točno N a degeneriranih najviše N (ako je N paran) pa je broj ovih "nezanimljivih" nizova reda $O(N)$. Stvar je u tome da ako dokažemo da je broj aritmetičkih nizova, zajedno s ovim nezanimljivim nizovima, reda $O(N^2)$ onda možemo zaključiti i da je broj pravih aritmetičkih nizova također reda $O(N^2)$. Drugim riječima, za dovoljno velik N, nezanimljivih nizova je premalo da bi utjecali na rezultat kojeg želimo dokazati.

Neka je A neki skup u $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Rješenja sustava

$$\begin{array}{lll} n & & \in A, \\ n & +d & \in A, \\ n & +2d & \in A, \end{array} \tag{4.2}$$

su upravo aritmetički nizovi duljine tri u A. Znači, dovoljno je naći mnogo rješenja ovog sustava. Uvedimo dodatnu varijablu zamjenom $n = -x_2 - 2x_3$, $d = x_1 + x_2 + x_3$, čime dobivamo sustav

$$\begin{array}{rrrl} & -x_2 & -2x_3 & \in A, \\ x_1 & & -x_3 & \in A, \\ 2x_1 & +x_2 & & \in A. \end{array} \tag{4.3}$$

Zbog neodređenosti sustav (4.3) ima točno N puta više rješenja nego sustav (4.2). Prednost sustava 4.3 u odnosu na sustav 4.2 je u tome što ga možemo modelirati grafom, što ćemo sad pokazati. Konstruirajmo graf G tako da se skup vrhova sastoji od tri kopije grupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$; označimo ove kopije redom s V_1, V_2 i V_3. Bridove ćemo zadati relacijama iz (4.3):

- Između vrhova $v_2 \in V_2$ i $v_3 \in V_3$ postoji brid ako je $-v_2 - 2v_3 \in A$,
- između vrhova $v_1 \in V_1$ i $v_3 \in V_3$ postoji brid ako je $v_1 - v_3 \in A$,
- između vrhova $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ postoji brid ako je $2v_1 + v_2 \in A$.

Problem koji želimo riješiti ovime smo sveli na pronalaženje dovoljno mnogo trokutâ u grafu G. Zaista, ako varijable x_1, x_2 i x_3 zadovoljavaju sustav (4.3) onda je $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ i $x_3 \in V$ trokut u G. Obrnuto, ako je a, b i c trokut u G, nemoguće je da su neka dva od ta tri vrha u istoj kopiji V_1, V_2 ili V_3 jer u G ne postoje bridovi unutar jedne kopije. Zato te vrhove možemo označiti s $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ i $v_3 \in V_3$ i oni zadovoljavaju relacije iz (4.3).

Dakle, dovoljno je naći mnogo trokutâ u grafu G. Primijetimo da u ovom grafu već znamo neke trokute; to su trokuti koji odgovaraju trivijalnim aritmetičkim nizovima. Drugim riječima, znamo $N|A| \geq \delta N^2$ rješenja za koja je $d = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, tj. to su rješenja sustava

$$\begin{array}{rrrl} & -x_2 & -2x_3 & \in A, \\ x_1 & & -x_3 & \in A, \\ 2x_1 & +x_2 & & \in A, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0. \end{array} \tag{4.4}$$

Poslužit ćemo se jednom zanimljivom lemom, čiju generalizaciju smo već vidjeli (vidi teorem 3.4.3).

Teorem 4.1.3 (Lema o uklanjanju trokutâ)**.** *Neka je G graf s N vrhova koji sadrži najviše δN^3 trokutâ za neki $\delta > 0$. Tada postoji konstanta $c(\delta)$ takva da možemo ukloniti najviše $c(\delta)N^2$ bridova iz G i dobiti graf koji ne sadrži niti jedan trokut. Konstanta $c(\delta)$ ne ovisi o N i vrijedi $c(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.*

Zanimljivija nam je kontrapozicija ove leme.

Teorem 4.1.4. *Neka je G graf sa N vrhova koji sadrži barem δN^2 trokutâ koji nemaju zajedničkih bridova. Tada G mora sadržavati barem $c(\delta)N^3$ trokutâ za neku konstantu $c(\delta) > 0$ koja ovisi samo o δ.*

Napomena 4.1.5. Dvije konstante koje smo u prethodna dva iskaza označili s $c(\delta)$ nemaju veze jedna s drugom.

Primijetimo da $N|A| \geq \delta N^2$ trokutâ koji odgovaraju trivijalnim nizovima nemaju zajedničkih bridova. Zaista, neka su $\triangle abc$ i $\triangle abd$ takvi trokuti u G koji imaju zajednički brid $\overline{ab}$. Pretpostavimo recimo da je a u V_1, a b u V_2 (ostali slučajevi su slični). Oba trokuta zadovoljavaju sustav 4.4 iz kojega se lako dobije da vrijedi

$$c = -a - b = d$$

pa su trokuti $\triangle abc$ i $\triangle abd$ jednaki. To znači da dva različita trokuta koji dolaze od trivijalnih aritmetičkih nizova ne mogu imati zajednički brid. Primjenom kontrapozicije leme o uklanjaju trokutâ (teorem 4.1.4) slijedi da možemo naći $c(\delta)N^3$ rješenja sustava 4.3. No svakom aritmetičkom nizu odgovara točno N takvih rješenja pa smo zapravo našli $c(\delta)N^2$ aritmetičkih nizova u A. Ovdje su uključeni trivijalni i degenerirani aritmetički nizovi, ali njih je premalo da bi utjecali na tvrdnju, što smo već komentirali. Time je dokazan teorem 4.1.1, a posljedično i teorem 4.0.4.

4.2 Dokaz leme o uklanjanju trokutâ

Ostalo je još dokazati lemu o uklanjanju trokutâ. Teži dio posla smo zapravo već obavili u teoremu 3.4.3. Pokazat ćemo da je taj teorem generalizacija ove leme (teorema 4.1.3).

Propozicija 4.2.1. Vjerojatnosna lema o uklanjanju trokutâ (teorem 3.4.3) implicira lemu o uklanjanju trokutâ (teorem 4.1.3).

Dokaz. Neka je G graf s N vrhova koji sadrži najviše δN^3 trokutâ. Označimo s ζ funkciju bridova grafa G i stavimo uniformnu mjeru μ na skup vrhova V grafa G. Ako primijenimo formu Λ (vidi definiciju 3.2.5) na funkciju ζ, dobivamo

$$\Lambda(\zeta,\zeta,\zeta) = \int_{V\times V\times V} \zeta(x,y)\zeta(y,z)\zeta(z,x)\, d\mu(z)d\mu(y)d\mu(z) = \frac{1}{N^3}\sum_{x,y,z\in V}\zeta(x,y)\zeta(y,z)\zeta(z,x),$$

iz čega vidimo da u ovom slučaju forma Λ broji trokute u grafu G. Zbog toga iz pretpostavke slijedi da je $\Lambda(\zeta,\zeta,\zeta) \leq \delta$. Primijenimo lemu 3.4.3 iz prošlog poglavlja tako da izaberemo

- $(X, \mathcal{X}, P_X) = (Y, \mathcal{Y}, P_Y) = (Z, \mathcal{Z}, P_Z) = (V, \mathcal{P}(V), \mu)$,
- $f = g = h = \zeta\colon V \times V \to [0, 1]$.

Nalazimo skupove $E_{X,Y}$, $E_{Y,Z}$ i $E_{Z,X}$ (ovo ne moraju biti isti skupovi makar su u našem konkretnom slučaju X, Y i Z jednaki) takve da vrijedi

$$\int_{E^c_{X,Y}} \zeta(x)\, d\mu(x) \leq c(\delta) \qquad \text{i pri tome } c(\delta) \overset{\delta\to 0}{\to} 0$$

(slična tvrdnja vrijedi za skupove $E_{Y,Z}$ i $E_{Z,X}$) i da je funkcija $1_{E_{X,Y}}(x,y)1_{E_{Y,Z}}(y,z)1_{E_{Z,X}}(z,x)$ identički jednaka 0. Neka je $E = E_{X,Y} \cap E_{Y,Z} \cap E_{Z,X}$. Na taj skup treba gledati kao na skup bridova koje ćemo zadržati. Odmah se vidi da je

$$\int_{E^c} \zeta(x,y)\, d\mu\times\mu \leq \int_{E^c_{X,Y}} \zeta d\mu\times\mu + \int_{E^c_{Y,Z}} \zeta d\mu\times\mu + \int_{E^c_{Z,X}} \zeta d\mu\times\mu \leq 3c(\delta).$$

Također, $1_E(x,y)1_E(y,z)1_E(z,x)$ je jednako 0 za sve x, y i z iz G. Stoga, ako iz grafa izbacimo sve bridove koji nisu u E, izbacit ćemo samo $3c(\delta)N^2$ bridova i dobit ćemo graf koji uopće ne sadrži trokute. Pri tome vrijedi da $3c(\delta) \to 0$ kada $\delta \to 0$ pa smo dokazali teorem. □

Bibliografija

[1] W. T. Gowers, *Decompositions, approximate structure, transference, and the Hahn-Banach theorem*, Bull. Lond. Math. Soc. **42** (2010), 573–606.

[2] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.

[3] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, 1970.

[4] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.

[5] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), pp. 399–401, Colloq. Internat. CNRS, 260, CNRS, Paris, 1978.

[6] T. Tao, *A variant of the hypergraph removal lemma*, J. Comb. Theory, Ser. **A 113** (2006), 1257–1280.

[7] T. Tao, *Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog*, AMS, Providence, 2008.

[8] T. Tao, *Szemerédi's regularity lemma revisited*, Contrib. Discrete Math. **1** (2006), 8–28.

[9] T. Tao, *The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi's theorem*, Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes **43** (2007), 145–193.

Sažetak

Ovaj rad daje dokaze funkcionalno analitičkih i vjerojatnosnih varijanti Szemerédijeve leme o regularnosti i međusobno ih uspoređuje. Dokaz funkcionalne varijante bazira se na Hahn-Banachovom teoremu o separaciji, dok je dokaz vjerojatnosne varijante elementaran i koristi samo osnove teorije vjerojatnosti. Kroz cijeli rad motivaciju pruža Szemerédijev teorem o aritmetičkim nizovima. Posebni slučaj ovog teorema, Rothov teorem, dokazan je korištenjem vjerojatnosne varijante leme o regularnosti.

Summary

This paper gives proofs of functional analytic and probabilistic variants of the Szemerédi regularity lemma and compares them with each other. The proof of the functional variant is based on the Hahn-Banach separation theorem, while the proof of the probabilistic variant is completely elementary and uses only basic probability theory. Throughout the thesis, Szemerédi's theorem on arithmetic progressions provides the main source of the motivation. A special case of this theorem, Roth's theorem, is proved using the probabilistic variant of regularity lemma.

Životopis

Rođen sam 3. veljače 1993. godine u Zagrebu. Nakon osnovne škole, u Zagrebu sam upisao Petu gimnaziju, koju sam završio 2011. godine. Iste godine upisao sam studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, na kojem od 2014. godine studiram na diplomskom studiju Teorijska matematika.