Catalanovi brojevi

Babić, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Babić

CATALANOVI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Dragutin Svrtan

Zagreb, veljača,2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

Catalanovi brojevi se vjerojatno jedni od brojeva koje najčešće susrećemo u matematici. Catalanovi brojevi tvore niz prirodnih brojeva koji se javljaju pri prebrojavanju zapanjujuće mnogo kombinatornih objekata. Ime su dobili po belgijskom matematičaru Eugène Charles Catalanu (1814–1894), iako ih nije on prvi otkrio. Na Catalanove brojeve prvi su naišli Leonhard Euler (1703.-1783.) i Johann Andreas von Segner (1704.-1777.), gotovo čitavo stoljeće prije Catalana. Proučavajući problem triangulacije konveksnog n-terokuta, Segner je postavio rekurzivnu relaciju, a Euler prvi uspješno riješio i 1760. godine došao do općeg izraza za broj triangulacija.Ipak, u čast Catalanu, koji je izveo i dokazao mnoga svojstva i identitete ovih brojeva, oni se danas zovu njegovim imenom. Catalanovi brojevi javljaju se u mnoštvu naizgled nepovezanih kombinatornih problema. Malo je poznato da je ove brojevi potpuno neovisno otkrio kineski matematičar Ming An-Tu (1692.-1763.) tijekom 1730-ih godina, no njegovi radovi ostali su nepoznati zapadnom svijetu sve do 1839. godine. Catalanovi brojevi često su definirani kao

$$C_n = \frac{2n!}{(n+1)!n!)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0. \tag{1}$$

te lako možemo izračunati prvih nekoliko članova niza. Prvih 10 članova prikazani su u tablici.

n	C_n	n	C_n
1	1	6	132
2	2	7	429
3	5	8	1430
4	14	9	4862
5	42	10	16796

Catalanovi brojevi, osim što se pojavljuju kao niz u mnogim područjima kombinatornih objekata, kao što su particije poligona na trokute, binarno sastavljanje zagrada $(n+1)$-članih izraza, šetnja po cjelobrojnoj mreži, Dyckovi putevi, problem binarnih stabala, također se pojavljuju na mnogim neočekivanim mjestima.

Poglavlje 1

Eugène Charles Catalan

Eugène Charles Catalan bio je francuski i belgijski mateamtičar. Rođen je 30. svibnja 1814. godine u belgijskom gradu Brugesu koji je tada bio dio Francuske te se i on sam cijeli život smatrao Francuzom. Eugènova majka, Jeanne Bardin, tada je imala tek 17 godina, a pošto se nije znalo tko je otac, Eugène je nosio majčino prezime te su živjeli kod njezinih roditelja. Kada je Eugène imao 6 godina on i majka su se preselili u Brusseles, gdje je ona upoznala draguljara Joseph Victor Etienne Catalana. Par se vjenčao sljedeće godine, a godinu potom su se preselili u francuski grad Lille. Tamo su se zadržali 3 godine, nakon čega su se preselili u Pariz kojim je Eugène bio očaran. Iako još uvijek vrlo mlad već tada je pokazivao veliku zainteresiranost za politiku i protivio se monarhiji što će obilježiti cijeli njegov život i karijeru. Ubrzo nakon preseljenja u Pariz umrla mu je majka te je nastavio živjeti s očuhom i maćehom.
Eugène je pohadao školu Ecole Royale Gratuite de Dessin et de Mathematiques en Faveur des Arts Mecaniques gdje je, zbog svojeg isticanja znanjem, izabran da predaje geometriju svojim vršnjacima. Nakon škole upisao je sveučilište Ecole Polytechnique gdje je studirao matematiku i francusku povijest i književnost. Studenti tog sveučilišta su bili vrlo politički aktivni, te su predvodili ustanak protiv vlasti koji je brutalno ugušen od strane vojske. Zbog toga je cijela njegova generacija, uključujući i Eugèna , izbačena sa sveučilišta, te su, da bi se mogli vratiti, morali pismeno ispričati.
Nakon završetka studija 1835. godine dobio je posao profesora na sveučilištu Ecole des Arts et Metiers at Chalons-sur-Marne. Godinu poslije oženio je Charlotte Augustine Renee Perin (poznatiju kao Eugènie), koja je bila dvije godine starija od njega i s kojom je proveo ostatak života. Eugènov sveučilišni profesor Joseph Liuville je pokrenuo matematički časopis Journal de Mathematiques Pures et Appliquees gdje je Eugène objavio svoje prve članke. U članku Note sur une Equation aux differences finies, objavljenom 1838. godine, prvi puta iznosi svoje rješenje triangulacije konveksnog n-terokuta. Eugène je bio odlučan u namjeri da nade posao u Parizu te se prijavljivao na mnoge natječaje u školama i na

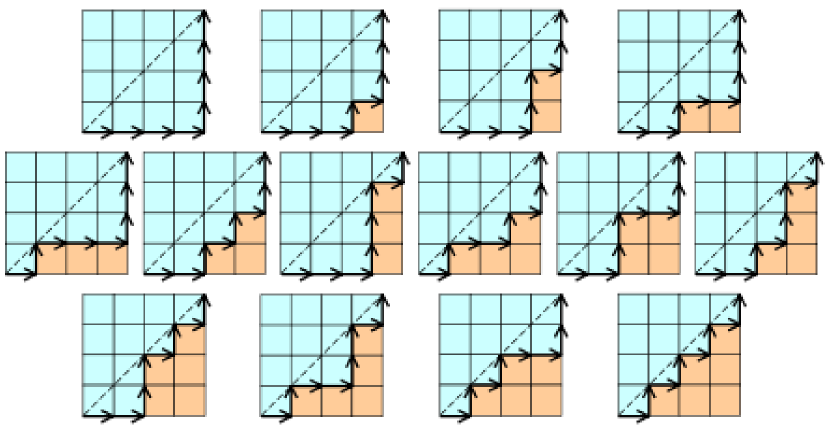
sveučilištima, ali bez uspjeha. Nakon svih razočaranja ponovo se obratio profesoru Liuvilleu te su zajedno osnovali školu École Sainte-Barbe, koja je služila učenicima kao priprema za upis na cijenjeno sveučilište École Polytechnique. Kasnije te godine dobio je posao asistenta na tom sveučilištu, a već sljedeće godine napredovao je na poziciju istraživača. Za to vrijeme Eugène se dodatno obrazovao što je rezultiralo završenim doktoratom iz matematike 1841. godine. Godine 1843. u časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik po prvi puta je objavljena njegova slutnja (poznata danas kao Catalanova slutnja) koju u tom trenutku nije znao dokazati: Dva pozitivna cijela broja, osim 8 i 9, ne mogu biti uzastopne potencije. Odnosno, jednadžba s cijelobrojnim rješenjima $x^m - y^n = 1$ ima jedinstveno rješenje. Sljedećih godina doživljavao je razočaranje za razočaranjem jer zbog svojih političkih stavova nije mogao napredovati, iako je bio najsposobniji kandidat na nekoliko natječaja. Kada se 1848. godine dogodila pobuna i na vlast došao Louis-Napoleon Bonaparte mislilo se kako će stvari krenuti na bolje, ali uskoro je Napoleon pokazao pravo lice i proglasio se carem. Eugène je javno izrazio svoje nezadovoljstvo i odbio potpisati zakletvu odanosti što je rezultiralo time da je 1852. dobio otkaz te je u narednim godinama bio bez stalnog zaposlenja. Nakon što je bio bez posla 13 godina napokon je dobio mjesto profesora na sveučilištu u Liègeu i na toj poziciji je ostao sve do 1884. i svog umirovljenja. Za vrijeme života u Liègeu dobio je mnoga priznanja i bio primljen u razna visoka matematička društva, ali nikada nije primljen u cijenjenu Académie des Sciences, za čime je žudio cijeli život. Umro je 14. veljače 1894. godine od posljedica pneumoije.

Poglavlje 2

Fundamentalne interpretacije Catalanovih brojeva

2.1 Putovi u cjelobrojnoj mreži

Jedan od poznatijih problema uz kojeg se vežu Catalanovi brojevi je šetnja po cjelobrojnoj mreži. Cjelobrojna mreža ili diskretna rešetka sastoji se od pravaca kroz cjelobrojne točke, koji su usporedni s koordinatnim osima u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Za ovaj primjer uvodimo restrikciju na mrežu veličine *nxn* te se pitamo koliko ima različitih najkraćih putova u ovakvoj cjelobrojnoj mreži koji nikad ne prelaze dijagonalu, odnosno putevi u kojima se krećemo samo gore i desno, počevši od donjeg lijevog kuta pa do desnog gornjeg kuta.



Slika 2.1: Putovi u cjelobrojnoj mreži 4 x 4

Kako bi dobili eksplicitnu formulu za n-ti Catalanov broj pokušat ćemo direktno prebrojiti sve puteve koji zadovoljavaju več navedene uvjete. Prvo ćemo prebrojiti sve puteve kroz cjelobrojnu mrežu do točke (n, n) i od tog broja oduzmemo broj putova koji sjeku dijagonalu.
Svaki cjelobrojni put možemo prezentirati kao određen redoslijed vektora pomaka udesno $(1, 0)$ i vektora pomaka prema gore $(0, 1)$. Izbor pozicija prema gore (od ukuno $2n$ pomaka) jednoznačno određuju put u cjelobrojnoj mreži jer preostale pozicije predstavljaju pomake udesno. Pomake prema gore možemo rasporediti na $\binom{2n}{n}$ načina.
Nakon što smo prebrojali sve puteve kroz cjelobrojnu mrežu do točke (n, n), trebamo izbrojati puteve koji sjeku dijagonalu. Promotrimo prvu točku koja se nalazi na nedozvoljenom putu(putu koji sječe dijagonalu) s krive strane dijagonale. Nakon te točke preslikavamo put tako da svaki pomak udesno zamijenimo pomakom prema gore i obrnuto. Budući da smo došli jedno polje iznad dijagonale, dosad smo učinili k pomaka prema desno i $k + 1$ prema gore. Preostalo nam je $n - k$ pomaka desno i $n - k - 1$ pomaka gore da bismo došli do (n, n). Reflektiranjem puta zamjenjuju se brojevi preostalih pomaka pa će takva modificirana staza imati $k + (n - k - 1) = n - 1$ pomaka udesno i $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ prema gore, dakle doći ćemo do točke $(n - 1, n + 1)$. Svaki nedozvoljen put možemo tako modificirati na jedinstven način. Uočimo i da svaki najkraći put u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do $(n - 1, n + 1)$ možemo preinačiti u točno jedan nedozvoljen put od $(0, 0)$ do (n, n), reflektirajući ga na isti način čim prijeđe originalnu dijagonalu. Time smo uspostavili bijekciju između skupa svih najkraćih putova koji sijeku dijagonalu i skupa svih najkraćih putova u cjelobrojnoj mreži do točke $(n-1, n+1)$, kojih ima $\binom{2n}{n+1}$. Stoga je $n - ti$ Catalanov broj jednak:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

2.2 Problem zagrada

Postavlja se pitanje na koliko načina možemo u nizu rasporedit $2n$ zagrada(odnosno n parova zagrada) tako da brojeći s lijeva, niti u jednom trenutku nemamo više zatvorenih nego otvorenih zagrada.
Problem možemo gledati i kao množenje $n + 1$ brojeva napisanih jedan za drugim. Naime, mi znamo množiti samo dva broja i prema zakonu asocijativnosti dobivamo isti rezultat ako parom zagrada zagradimo svako množenje. Problem je naći ukupni broj takvih zagrađivanja. Za $n = 2$ imamo tri broja i samo dva načina zagrađivanja $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$. Za $n = 3$ imamo 4 broja i pet načina zagrađivanja $(x_1x_2)(x_3x_4) = ((x_1x_2)x_3)x_4 = (x_1(x_2x_3))x_4 = x_1((x_2x_3)x_4) = x_1(x_2(x_3x_4))$, itd. Ovo je pitanje ekvivalentno tome koliko bi najviše rezultata dobili s neasocijativnim množenjem $n + 1$ varijabli. Kako bi pokazali da problem zagrada zadovoljava n-ti Catalanov broj promotrimo prvo problem zagrada za n

brojeva $x_1 x_2 ... x_n$. Da pomožimo te brojeve uvijek imamo jedno završno množenje prvih k brojeva $x_1 x_2 ... x_k$ i zadnjih $n-k$ brojeva $x_{k+1} x_{k+2} ... x_n$, za neki $k = 1, 2, ..., n-1$. Na primjer za $n = 7$ i $k = 4$, u zagrađivanju $(x_1(x_2(x_3 x_4))) \cdot ((x_5 x_6) x_7)$ završno je množenje prvih 4 i zadnjih 3 broja. Prvih k brojeva možemo pomnožiti na Z_k načina, a zadnjih $n-k$ brojeva na Z_{n-k} načina, pa stoga za čvrsti k čitav produkt na $Z_k Z_{n-k}$ načina. Prem pravilu sume, kad k ide od 1 do $n-1$ dobivamo

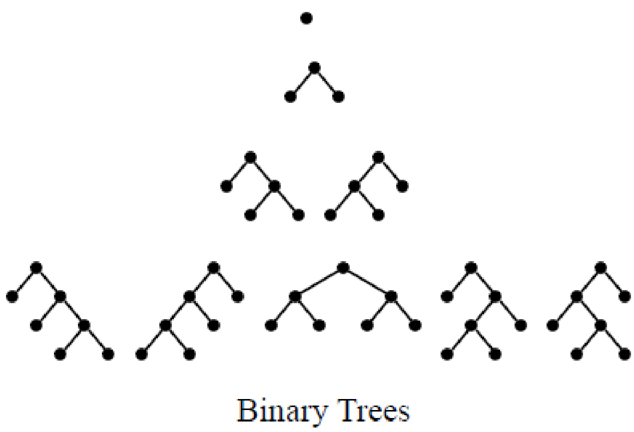
$$Z_n = Z_1 Z_{n-1} + Z_2 Z_{n-2} + ... + Z_{n-2} Z_2 + Z_{n-1} Z_1$$

odnosno s pomakom indeksa za 1

$$Z_{n+1} = Z_1 Z_n + Z_2 Z_{n-1} + ... + Z_{n-1} Z_2 + Z_n Z_1$$

2.3 Problem binarnih stabala

Stablo je povezani graf bez ciklusa. Binarna stabla precizno se definiraju induktivno, tj. rekurzivno ovako. Binarno stablo je ili prazno ili se sastoji od jednog istaknutog vrha koji se zove korijen i uređenog para binarnih stabala koji se zovu lijevo i desno podstablo. Problem je da se izračuna broj B_n binarnih stabala s n vrhova.



Slika 2.2: Binarna stabla

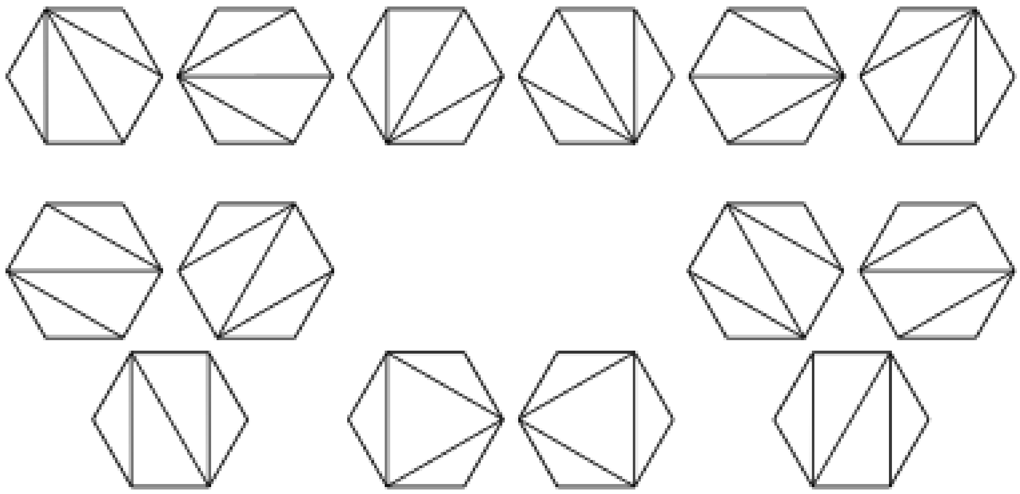
Iz definicije binarnog stabla slijedi da je za $n \geq 1$ broj B_n binarnih stabala s n vrhova jednak broju urešenih parova (B, B') binarnih stabala s ukupno $n-1$ vrhova, od kojih B

ima, recimo, k vrhova, B' ostalih $n-k+1$ vrhova, $k = 0, 1, ..., n-1$. Opet iz pravila sume i produkta slijedi

$$B_n = B_0 B_{n-1} + B_1 B_{n-2} + ... + B_{n-2} B_1 + B_{n-1} B_0$$

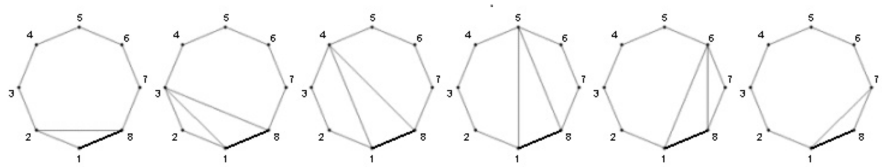
2.4 Triangulacija konveksnog n-terokuta

Ovaj povijesno najstariji problem doveo je do otkrića Catalanovih brojeva. Promatramo broj načina (označimo ih s T_n) na koje je moguća maksimalna dekompozicija konveksnog n-terokuta na n-2 trokuta. Da bi smo n-terokut triangulirali potrebno je povući n-3 dijagonale koje se ne smiju sijeći.
Problem razmatramo induktivno pa počinjemo sa trokutom. S obzirom da je on trianguliran postoji samo jedan način triangulacije pa je stoga $T_3 = 1$. Za konveksan četverokut moramo povući jednu dijagonalu. To možemo učiniti na dva načina pa je $T_4 = 2$. Za peterokut postoji 5 načina triangulacije, znači $T_5 = 5$. Sad nađimo opće rješenje za trian-



Slika 2.3: Svi načini triangulacije šesterokuta

gulaciju n-terokuta T_n. Možemo primjetiti da je svaka stranica n-terokuta dio točno jednog trokuta triangulacije. Kako bi prebrojili sve načine triangulacije prvo fiksiramo jednu od stranica te brojimo triangulacije u kojima sudjeluje svaki od trokuta podignutih nad tom stranicom. Za k-tu točku kao vrh trokuta, zdesna je ostao $(n-k+1)$-terokut, koji možemo triangulirati na T_{n-k+1} načina, a s lijeva k-terokut koji možemo triangulirati na T_k načina (vidi sliku 2.3.). Pritom podrazumijevamo da je $T_2 = 1$.



Slika 2.4: Fiksiramo jednu stranicu i nad njom konstruiramo trokute

Kako su izbori triangulacije izdvojenih mnogokuta međusobo neovisni, vrijedi kombinatorni princip produkta, te je za proizvoljnu točku k taj broj jednak $T_k T_{n-k+1}$. Izbor te točke također možemo učiniti na više neovisnih načina pa ostaje samo sumirati po svim vrijednostima za k. Konačno smo dobili:

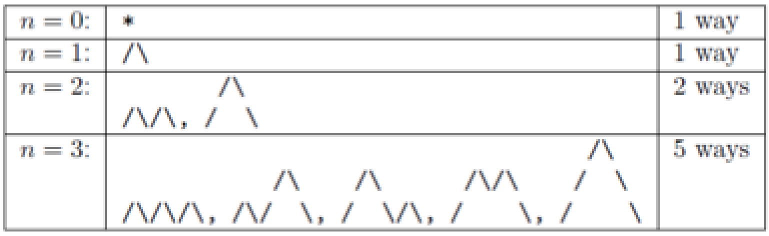
$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1}$$

odnosno s pomakom indeksa za 2 dobivamo

$$T_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} T_k T_{n-k+3}$$

2.5 Dyckovi planinski putovi

Problem Dyckovih planinskih putova sastoji se od pronalaženja svih mogućih konfiguracija planinskih lanaca koji se sastoje od točno n uspona i n spustova, uz pretpostavku da se oni uvijek nalaze iznad početne razine puta. Ako je n=0 očito je moguća samo jedna konfiguracija, za n=1 isto tako postoji samo jedna konfiguarcija. Za n=2 moguće je napraviti dvije, te za n=3 pet različitih konfiguracija.
Problem Dyckovih planinskih putova možemo povezati s problemom zagrađivanja i to tako da svaku otvorenu zagradu zamjenimo usponom, a zatvorenu padom. Također problem zagrađivanja možemo zapisati u obliku odgovarajućeg problema Dyckovih planinskih putova.



$n = 0$:	*	1 way
$n = 1$:	/\	1 way
$n = 2$:	/\ /\/\, / \	2 ways
$n = 3$:	/\ /\ /\ /\/\ / \ /\/\/\, /\/ \, / \/\, / \, / \	5 ways

Mountain Ranges

[h]

Slika 2.5: Dyckovi putovi

2.6 Bertrandov problem glasovanja

Treba izračunati broj nizova $(i_1, i_2, ..., i_{2n}), i_k \in \{-1, 1\}$, tako da svaka parcijalna suma $i_1 + i_2 + ... + i_k \geq 0$, a ukupno $i_1 + i_2 + ... + i_{2n} = 0$. Interpretacija je ova. Na nekim predsjedničkim izborima, dva su kandidata A i B, glasuje $2n$ ljudi. Svaki glas A bilježimo s 1, a za B s -1. Na koliko načina možemo prebrojiti rezultate glasovanja, tako da B nikad nema više glasova od A, a koačan je rezultat ipak nerješen?
Ovaj problem podsjeća na ostale već navedene, te će njihove povezanosti biti pokazaneu idućem teoremu.

Teorem 2.6.1. *Catalanov broj C_n jednak je:*

(i) *Broju triangulacija T_{n+2} konveksong poligona sa n+2 vrhova*

(ii) *Problemu zagrada Z_{n+1} kod množenja n+1 brojeva*

(iii) *Broju binarnih stabala B_n s n vrhova*

(iv) *Broju ispod dijagonalnih putova P_n u cjelobrojnoj mreži*

(v) *Broju Dyckovih putova D_n*

(vi) *Bertrandovom problemu glasovanja G_n*

Dokaz. Pogledavši rekurzije za broj triangulacija konveksnog poligona, broj binarnih stabala i broj zagrađivanja uočavamo da su one iste(do na pomak indeksa), a početni uvjeti za

T_{n+2}, Z_{n+1} i B_n su također isti. Zato je $T_{n+2} = Z_{n+1} = B_n$
Pokažimo sad da je $G_n = D_n$. To slijedi odmah iz toga što svakom nizu $(i_1, i_2, ..., i_{2n})$ iz definicije G_n pridružimo Dyckov put s koracima redom $(1, i_1), (1, i_2), ..., (1, i_{2n})$. To je bijekcija, jer mu je inverz ovo: svakom usponu $\nearrow$ pridružimo 1, a svakom silasku $\searrow$ pridružimo -1.
Da bi vidjeli da je $D_n = P_n$, treba samo okrenuti sliku Dyckovog puta za 45° tako, da os x prijeđe u os y=x, čime se dobije odgovarajući put u cjelobrojnoj mreži.
Pokažimo još da je $Z_{n+1} = G_n$. Svakom zagrađivanju produkta $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n+1}$ pridružimo niz $(i_1, i_2, ..., i_{2n})$ ovako. Prvo, s jednim ekstra parom zagrada zatvorimo završno množenje. Na taj način imamo n parova zagrada koje odgovaraju n sukcesivnim množenjima. Sada svako množenje zamjenimo brojem 1, a svaku desnu zagradu zamjenimo brojem -1 i sve ostalo izbrišemo. Ovaj se algoritam na očit način može obrnuti, čime smo dobili bijekciju.
Da je $P_n = C_n$ već smo pokazali objašnjavajući problem putova u cjelobrojnoj mreži. Time smo pokazali sve jednakosti iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Poglavlje 3

Svojstva Catalanovih brojeva

Alternativan izraz za Catalanove brojeve je:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0.$$

Uzimajući u obzir navedenu formulu pokažimo da su Catalanovi brojevi cijeli brojevi. Prvo ćemo dokazati Hermite-ov teorem.

Teorem 3.0.2. *(Hermite) Neka je* $m, n \leq 1$*. Tada vrijedi:*

$$\frac{m}{(m,n)} \mid \binom{m}{n} \tag{3.1}$$

$$\frac{m-n+1}{(m+1,n)} \mid \binom{m}{n} \tag{3.2}$$

gdje je (a,b) najveći zajednički djelitelj (NZD) pozitivnih brojeva a i b.

Dokaz. Neka je $d = (m, n)$. Tada postoje cijeli brojevi x i y takvi da vrijedi $d = xm + yn$, štoviše $d = min(xm + yn : x, y \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$. Neka je l najmanji pozitivni član skupa $S = xm + yn : x, y \in \mathbb{Z}Z$. To znači da postoje cijeli brojevi x_0 i y_0 takvi da je $l = mx_0 + ny_0$. Pokažimo da $l|m$ i $l|n$. Pretpostavimo da npr. $l \nmid m$. Tada postoje cijeli brojevi q i r takvi da je $m = lq+r$, i $0 < r < l$. Sada je $r = m-lq = m-q(mx_0+ny_0) = m(1-qx_0)+n(-qy_0) \in S$ što je u suprotnosti s minimalnošću od l. Dakle, $l|m$. Na isti način se dokazuje da $l|m$. Budući da je $d = (m, n)$, postoje $\gamma, \beta \in \mathbb{Z}$ takvi da je $m = d\beta$ i $n = d\gamma$, pa je $l = mx_0 + ny_0 = d(\beta x_0 + \gamma y_0)$. Odavde slijedi da je $d \leq l$, pa smo dokazali da je $d = l$. Pomnožimo sada obje strane jednakosti $d = xm + yn$ s $\binom{m}{n}$. Dobivamo

$$d\binom{m}{n} = xm\binom{m}{n} + yn\binom{m}{n}$$

$$= m[x\binom{m}{n} + y\binom{m-1}{n-1}]$$

$$= mz, z \in \mathbb{Z}$$

Dobili smo da vrijedi $\frac{m}{d}|\binom{m}{n}$, odnosno, $\frac{m}{(m,n)}|\binom{m}{n}$, pa je tvrdnja (3.1) dokazana.
Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka je $d = (m+1, n)$. Kao i gore, postoje cijeli brojevi P i Q takvi da je

$$\begin{aligned} d &= P(m+1) + Qn \\ &= (m-n+1)P + n(P+Q) \\ d \cdot \frac{m!}{n!(m-n+1)!} &= \binom{m}{n}P + \binom{m}{n-1}(P+Q) \\ &= R \\ d\binom{m}{n} &= (m-n+1)R \end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{m-n+1}{d}|\binom{m}{n}$$

odnosno

$$\frac{m-n+1}{m+1, n}|\binom{m}{n}$$

□

Sada možemo pokazati korolar koji pokazuje da su Catalanovi brojevi cijeli brojevi

Korolar 3.0.3. *1. Binomni koeficijent $\binom{2n}{n}$ je paran cijeli broj, za $n \geq 1$*
2. Neka je p prost broj. Tada je $\binom{p}{r} \equiv 0(modp), za 1 \leq r \leq p-1$
3. $n+1|\binom{2n}{n}$

Dokaz. 1. Iz svojsta (3.1) direktno slijedi da je $\binom{2n}{n}$ paran broj.
2. Jer je $1 \leq r \leq p-1$ te p prost, vrijedi $(p, r) = 1$. Ponovno, iz svojstva (3.1) slijedi $p|\binom{p}{r}$, odnosno $\binom{p}{r} \equiv 0 mod p$.
3. U (3.2) stavimo $m = 2n$. Kako je $(2n+1, n) = 1$ to vrijedi $(n+1)|\binom{2n}{n}$ □

3.1 Funkcija izvodnica za Catalanove brojeve

Općenito, funkcija izvodnica je formalni red potencija čiji su koeficijenti članovi nekog brojevnog niza.
Spomenimo sad jedan aspekt funkcija izvodnica, naime binomni teorem za proizvoljni eksponent. Kada je a proizvoljan kompleksni broj, a $k \in \mathbb{N}$, onda definiramo binomni koeficijent kao:

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!}$$

Poopćeni binomni teorem kaže:

$$(1+x)^a = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} x^n$$

Ova formula je samo formula za Taylor-ov red $(1+x)^a$ za $x = 0$.
Pretpostavljamo da je funkcija izvodnica opisana u gornjoj jednadžbi ”obični” identitet. U ovom slučaju konvergenciju ignoriramo.

Propozicija 3.1.1. *Neka je C(x) funkcija izvodnica za Catalanove brojeve*

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + 429x^7 + 1430x^8 + ...$$

Tada je:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Dokaz. Množeći jednakost $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, C_0 = 1$ sa x^n i sumirajući po $n \geq 0$ s lijeva dobivamo:

$$\sum_{n\geq 0} C_{n+1} x^n = \frac{C(x) - 1}{x}$$

Budući da je koeficijent od x^n u $C(x)^2$ jednak $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ s desne strane imamo $C(x)^2$. Imamo

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C(x)^2$$

ili

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

Rješavajući kvadratnu jednadžbu za $C(x)$ dobivamo

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Moramo odrediti točan predznak. Sada, uz pomoč binomnog teorem za eksponent 1/2

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x + ...$$

Ako uzmemo pozitivan predznak dobivamo

$$\frac{1 + (1 - 2x + ...)}{2x} = \frac{1}{x} - 1 + ...$$

što nije ispravno. Znači moramo uzeti negativan predzank.

$$\frac{1 - (1 - 2x + ...)}{2x} = 1 + ...$$

□

3.2 Eksplicitna formula Catalanovih brojeva

Uz pomoć funkcije izvodnice jednostavno je naći formulu za C_n

Teorem 3.2.1. *Vrijedi:*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Dokaz. Imamo

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4x)^n$$

Prema propoziciji 3.1.1.

$$C(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4x)^n)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}x^n$$

Izjednačavajući koeficijente uz x^n sa obe strane dobivamo

$$C_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}$$

Lako se raspiše desna strana jednakosti i uočava da je jedanka $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. □

Formula $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ je standardna eksplicitna formula za zapisivanje C_n. Postoji ekvivalentna formula koja je ponekad zgodnija:

$$C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

Također možemo korisiti i formulu

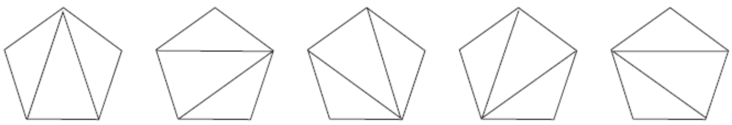
$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

Poglavlje 4

Primjeri nekih kombinatornih interpretacija Catalanovih brojeva

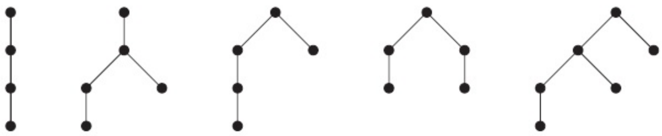
Pokažimo još neke primjere pojavljivanja Catalanovih brojeva.

Primjer 4.0.2. *Broj triangulacija konveksnih (n+2)-terokuta u n trokuta sa* $n - 1$ *dijagonalom koje se ne sjeku unutar (n+2)-terokuta.*



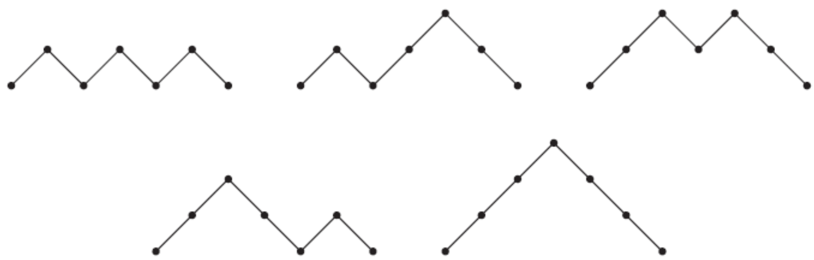
Tvrdnja primjera izravno slijedi iz teorema 2.6.1

Primjer 4.0.3. *Broj binarnih stabala s n unutarnjih vrhova takvih da svaki vrh ima najviše dvoje djece i svako lijevo dijete s dvoje djece je unutarnji vrh jednak je Catalanovom broj* C_n.



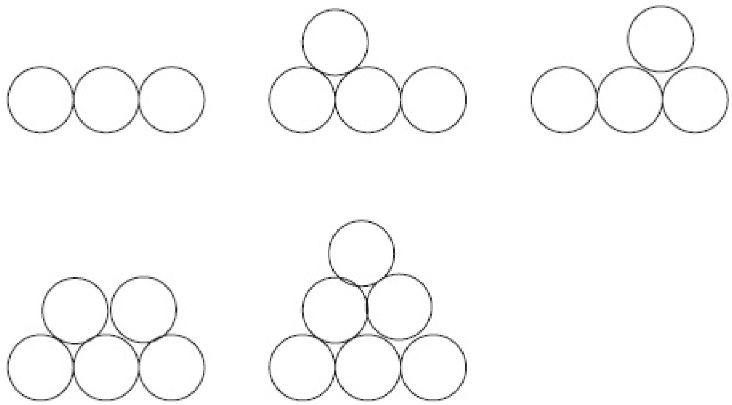
Kako bi pokazali da navedena tvrdnja vrijedi prvo obilazimo stablo u preduređaju. Zamjenimo brid preko kojeg prolazimo po prvi put(od korijena) sa 1, sa -1 ako njegov vrh koji je udaljeniji od korjena nema djece, zamjenimo sa 1 ako ima lijevo dijete, a sa -1 ako ima desno dijete. Na taj način pokazali smo bijekciju između ovog problema i Bertrandovog problema glasovanja, iz čega je jasno da je broj binarnih stabala koja zadovoljavaju gornje uvjete jednak Catalanovom broju C_n.

Primjer 4.0.4. *Broj Dyckovih puteva duljine* $2n$ *jednak je broju putova u cjelobrojnoj mreži od (0,0) do (2n,0) sa koracima (1,1) i (1,-1), koji nikad ne idu ispod x-osi.*

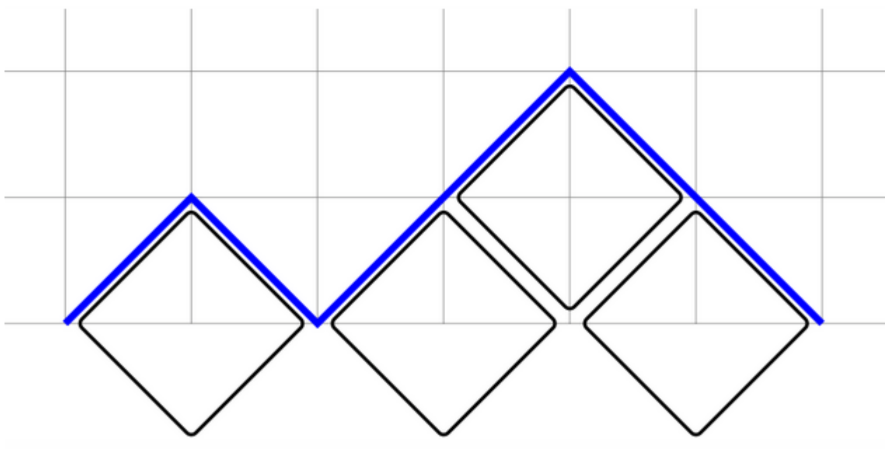


Dokaz ove tvrdnje već smo pokazali u teoremu 2.6.1., te ćemo ovu tvrdnju koristiti u dokazima sljedećih primjera.

Primjer 4.0.5. *Broj načina na koje možemo složiti novčiće u ravnini tako da se donji red sastoji od n uzastopnih novčića jednak je Catalanovom broju C_n.*



Pokazat ćemo da je broj načina na koje možemo složiti novčiće u ravnini, kako je navedeno u primjeru, jednak broju putova u cjelobrojnoj mreži od donjeg lijevog kuta do gornjeg desnog tako da nikad ne prelazimo dijagonalu. Dokaz navedene pretpostavke je trivijalan, samo kretanja gore i desno u mreži zamjenimo dijagonalinim kretanjem prema gore i dolje. Na slici je prikazano jedno takvo kretanje koje opet veoma podsjeća na Dyckove putove.



Primjer 4.0.6. *n-člani multiskupovi na $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ čija je suma jednaka 0.*

$$000 \;\; 013 \;\; 022 \;\; 112 \;\; 233$$

Ukupan broj n-članih multiskupova na $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ je $\binom{2n}{n}$. Kažemo da su dva multiskupa M i N jednaki ako za proizvoljni $k \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ imamo $M = \{a_1, ..., a_n\}$ i $N = \{a_1 + k, ..., a_n + k\}$. Definirali smo relaciju ekvivalencije u kojoj svaka klasa ekvivalencije sadrži $n+1$ element, točno jedan čija suma elemnata teži u 0. Stoga je broj multiskupova sa elementima čija suma teži u 0(ili bilo koji drugi fiksni element iz $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$) jednaka $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Primjer 4.0.7. *Nizovi pozitivnih cijelih brojeva $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ za koje postoji polje cijelih brojeva (nužno sa $n+1$ redova)*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & \\
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \cdots & & a_{n+2} & & a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_{n-1} & & & \\
 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots & & b_{n+2} & & b_1 & & \cdots & & b_{n-2} & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & r_1 & & r_2 & & r_3 & & \cdots & & r_{n+2} & & r_1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & & & & & &
\end{array}$$

takvih da svaka četiri susjedna člana konfiguracije $\begin{smallmatrix} r \\ st \\ u \end{smallmatrix}$ zadovoljavaju jednakost $st = ru + 1$. Primjer takvog polja za $(a_1, ..., a_8) = (1, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 3)$, koje je nužno jedinstveno prikazano je na slici.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 5 & \\
 & & 2 & & 5 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & 5 & & 2 & & 2 & & 5 & & 1 & & 4 & & \\
 & & & 3 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 & & 2 & & 3 & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 2 & & 2 & & 5 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & 5 & & & & \\
 & & & & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 2 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & &
\end{array}$$

Neka je P konveksni (n+2)-terokut sa vrhovima $v_1, v_2, ..., v_{n+2}$ u smjeru kazaljke na satu. Neka je T triangulacija od P prikazana kao u primjeru 4.0.1, te neka je a_i broj trokuta iznad v_i. Tada preslikavanje $T \mapsto (a_1, a_2, ..., a_{n+2})$ uspostavlja bijekciju sa primjerom 4.0.1.

Bibliografija

[1] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*, 2nd edition, 2011.

[2] Darko Veljan *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, prvo izdanje 2001.

[3] Richard P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press 2015.

[4] Wikipedia, *Catalan Numbers*, 2016., https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan number

[5] Wikipedia, *Eugene Charles Catalan*, 2015., https://en.wikipedia.org/wiki/Eugne Charles Catalan

[6] Ivica Nakić, *Diskretna matematika*, predavanja ak. god. 2011./2012.

[7] Hrvoje Čavrak, *Catalanovi brojevi*, Hrvatski matematički elektronski časopis, Broj 7

Sažetak

Catalanovi brojevi javljaju se u mnogo kombinatornih problema, kao što su putevi u cjelobrojnoj mreži, problem zagrađivanja, problem binarnih stabala, Dyckovi putovi, triangulacije konveksnog n-terokuta, te Bertradov problem glasovanja. U ovom diplomskom radu opisani su navedeni kombinatorni problemi te pokazane bijekcije sa drugim kombinatornim objektima. Opisana su i svojstva Catalanovih brojeva. Na kraju diplomskog rada navedeni su primjeri nekih kombinatornih interpretacija koje nisu toliko poznate, te je pokazano kako se Catalanovi brojevi pojavljuju na mnogo neočekivanih mjesta.

Summary

Catalan numbers appear in many combinatorial problems, such as monotonic lattice paths along the edges of a grid with n x n square cells which do not pass above the diagonal, matching n pairs of brackets, the problem of binary trees, Dyck paths, triangulation of a convex polygon with n sides, and Bertrand's ballot problem. In this study we described each of these combinatorial problems and showed bijection with other combinatorial objects. We also have described the properties of the Catalan numbers. We have concluded the work with some examples of combinatorial interpretations that are not so well known, and showed some of them how Catalan numbers appear in many unexpected places.

Životopis

Rođena sam 04.veljače 1990. godine u Vukovaru. Završila sam OŠ Gustava Krklec u Maruševcu, te 1.Gimnaziju u Varaždinu.
Nakon završenog srednjeg školovanja upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu (2008. godine), koji sam završila 2012. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Računarstva i matematike na istom fakultetu.