Spinori u općoj teoriji relativnosti

Sigmund, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Sigmund

Spinori u općoj teoriji relativnosti

Diplomski rad

Zagreb, 2014

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Ivan Sigmund

Diplomski rad

Spinori u općoj teoriji relativnosti

Voditelj diplomskog rada: Doc.dr.sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Datum polaganja: 05.09.2014.

Zagreb, 2014

Zahvale: Neka je hvala svima koji su mi pomogli, mentoru I.Smoliću, mojoj obitelji i prijateljima, poštovanom susjedu prof. Brani za godine rasprava o fizici, te dragom Bogu na svemu što jest!

Sažetak

U ovom radu ćemo izgraditi spinorni formalizam klasične opće teorije relativnosti, od formalnih algebarskih svojstava, do ponašanja na mnogostrukosti. U tom formalizmu su definirane sve poznate tenzorske veličine, kao Riemannov tenzor i tenzor elektromagnetskog polja. Dobivamo spinorni ekvivalent Maxwellovih jednadžbi, te ekvivalent Einsteinovih jednadžbi polja. Komponente kovarijantne derivacije spinorne baze daju 12 kompleksnih skalara, koje pomoću Newman-Penroseovih jednadžbi opisuju vrijeme-prostor. Pomoću spinornog formalizma postuliramo jednadžbu gibanja bezmasenih čestica proizvoljnog spina u zakrivljenom vrijeme-prostoru. Pokazujemo uporabu spinornog formalizma u opisu svjetlosnih kongruencija i u dobivanju Goldberg-Sachsovog teorema.

Spinors in General Theory of Relativity

Abstract

In this thesis the spinor formalism of the classic general theory of relativity is built, beginning with formal algebraic properties, up to the behavior on manifolds. All the famous tensorial objects like the Riemann tensor and the electromagnetic field tensor are redefined inside the spinor formalism. The spinor equivalents of the Maxwell field equations, and the Einstein field equations are found. We get 12 complex components of the covariant derivative which are enough to describe the space time, with the help of Newman-Penrose field equations. We postulate the equation of motion of massless particles of arbitrary spin in curved space-time. Also, The use of the spinor formalism is shown in the description of light congruences and in the proof of the Goldberg-Sachs theorem.

Sadržaj

1 Uvod

Spinori su se prvi puta pojavili u Kleinovom radu [1] pomoću kojeg je pojednostavljen opis klasičnog zvrka. Dublje matematičko razumijevanje spinora je dao Cartan 1913 [2]. godine. Nadalje, otkrićem pojave spina i Diracove jednadžbe spinori poprimaju potpuno novu važnost.

U općoj teoriji relativnosti se zbog svojih algebarskih svojstava pojavljuju kao pogodna reformulacija uobičajene tenzorske teorije. U spinornom formalizmu pokazat će se da neki računi postaju vrlo jednostavni, posebno kad se promatra Einstein-Maxwellove jednadžbe jer je tada tenzor energije i impulsa dan vrlo jednostavnim izrazom. S druge strane spinorni formalizam daje prirodan način dolaska do Newman-Penroseovih jednadžbi gravitacijskog polja. To su diferencijalne jednadžbe prvog reda koje sa svojih 12 nezavisnih kompleksnih skalara, pomoću kojih je opisano vrijeme-prostor, predstavlja veliko pojednostavljenje nasuprot 24 realna skalara, kada bi se koristili realni vielbeini, ili 40 nezavisnih članova koneksije. Nadalje spinori su prirodan način opisivanja čestica proizvoljnog spina u zakrivljenom prostoru, te time predstavljaju mogućnost neke buduće formulacije kvantne gravitacije.

Glavni dio formalizma i koraka u ovom diplomskom se zasniva na knjigama Penrosea i Rindlera ([5] i [6]), te donekle na knjizi P. O'Donnella [4].

1.1 Konvencije

Zgodno je na početku ovog rada izložiti konvencije koje su korištene u knjizi. Za početak signatura metrike je dana kao:

$$\eta_{\mathbf{ab}} = diag(+,-,-,-) \tag{1.1}$$

Riemannov tenzor je dan kao:

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)X^c = R_{abe}{}^cX^e \tag{1.2}$$

Riccijev tenzor:

$$R_{ab} = R_{acb}{}^c \tag{1.3}$$

Riccijev skalar:

$$R = R_{ab}{}^{ab} \tag{1.4}$$

Einsteinova jednadžba:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \tag{1.5}$$

2 Spinori

Polazeći od formalne definicije spinora istražuje se osnovna algebra spinora, te neki standardni spinori različitih rangova, kao npr. spinori baza $\{o, \iota\}$, i Levi-Civita spinor ϵ_{AB}. Uvest ćemo u poglavlju 2.3 zapis apstraktnih indeksa koja olakšava pisanje spinornih i vektorskih izraza bez potrebe pozivanja na neku određenu bazu. Izvest ćemo važan identitet (2.49) koji ćemo koristiti kroz cijeli rad.

2.1 Osnovne definicije i svojstva spinora

Pregled definicija vektorskih prostora dan je u Dodatku A.

Spinori su elementi vektorskog prostora definirani nad poljem kompleksnih brojeva. Spinori valencije (ranga) 1 su elementi dvodimenzionalnog vektorskog prostora S. Za njih je definiran unutarnji produkt:

Definicija 2.1. Neka $\zeta, \eta \in S$. Binarna relacija unutarnjeg produkta $[\ ,\ ] : S \times S \to \mathbb{C}$ ima svojstva:

1. Antisimetričnost, tj. za svaki $\eta, \zeta \in S$ vrijedi:
$$[\zeta, \eta] = -[\eta, \zeta] \tag{2.1}$$
2. Bilinearnost, tj. za svaki $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, te za svaki spinor ζ,ϕ, γ i η iz S vrijedi:
$$[a\zeta + b\phi, c\gamma + d\eta] = ac[\zeta, \gamma] + bc[\phi, \gamma] + ad[\zeta, \eta] + bd[\phi, \eta] \tag{2.2}$$
3. Nedegeneriranost,tj. postoji jedinstvena nula $\mathbf{0} \in S$, takva da za svaki $\zeta \in S$ vrijedi:
$$[\zeta, \mathbf{0}] = 0 \tag{2.3}$$

Napomena 2.1.1. Iz svojstva antisimetričnosti ((2.1)) slijedi:
$$[\eta, \eta] = -[\eta, \eta] \Leftrightarrow [\eta, \eta] = 0 \tag{2.4}$$

Napomena 2.1.2. svojstvo nedegeneriranosti produkta ((2.3)) znači da postoji jedinstvena nula tog vektorskog prostora, iz čega bi slijedilo :
$$[\zeta, \eta] = 0 \forall \eta \in S \Leftrightarrow \zeta = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

To se svojstvo još može iskazati na sljedeći način: za dva linearno nezavisna spinora $\zeta, \eta \in S$, gdje $\zeta, \eta \neq \mathbf{0}$, nužno slijedi $[\zeta, \eta] \neq 0$

Napomena 2.1.3. Za dva linearno zavisna spinora $\zeta, \eta \in S; \zeta, \eta \neq \mathbf{0}$ slijedi iz $a\zeta + b\eta = 0; a, b \in \mathbb{C}; a, b \neq 0 \Rightarrow \zeta = -\frac{b}{a}\eta$:
$$[\zeta, \eta] = -\frac{b}{a}[\eta, \eta] = 0 \tag{2.6}$$

Budući da je produkt dva linearno nezavisna spinora koja su različita od nule različit od nule, to svojstvo možemo iskoristiti za definiranje spinora baze, kojih po definiciji spinora valencije 1 mora biti točno 2.

2.2 Spinorna baza

Dva spinora $\{o, \iota\}$ čine ortonormiranu spinornu bazu ako vrijedi:

$$[o, \iota] = -[\iota, o] = 1 \tag{2.7}$$

$$[o, o] = [\iota, \iota] = 0 \tag{2.8}$$

Sada svaki $\zeta, \eta \in S$ možemo napisati pomoću o i ι:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^0 o + \zeta^1 \iota \\ \eta &= \eta^0 o + \eta^1 \iota \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdje su $\zeta^i, \eta^i \in \mathbb{C}$, iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &= [\zeta^0 o + \zeta^1 \iota, \eta^0 o + \eta^1 \iota] \\ &= \zeta^0 \eta^1 [o, \iota] + \zeta^1 \eta^0 [\iota, o] \\ &= \zeta^0 \eta^1 - \zeta^1 \eta^0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Apstraktni indeksi

Koristit ćemo konvenciju „apstraktnih indeksa” koju je uveo Penrose (vidi [5]), a koristi se i u O'Donnellovoj knjizi [4].

U zapisu pomoću apstraktnih indeksa ζ^A označava spinor iz prostora S^A, a ζ^B bi bio spinor iz prostora S^B. Prostori S^A i S^B predstavljaju identične kopije prostora S, a njihove je elemente moguće preciznije definirati kao uređeni par: za neki $\zeta \in S$

$$\zeta^A \equiv (\zeta, A) \in S \otimes \mathcal{O} \tag{2.11}$$

gdje je $\mathcal{O}$ skup oznaka $\{A, B, C, \ldots\}$. Iz toga slijedi da nije moguće naći neki $a \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi $\zeta^A = a\zeta^B$.

Definicija 2.2. Možemo definirati vanjski produkt dva spinora kao par dva spinora $(\zeta^A, \eta^B) \in S^A \times S^B$, a pisat ćemo jednostavno $\zeta^A \eta^B$. Vanjski produkt ima sljedeća svojstva, uz $\zeta^A \in S^A,\ \eta^B \in S^B$, i $\alpha^C \in S^C$:

1. komutativnost

$$\zeta^A \eta^B = \eta^B \zeta^A \tag{2.12}$$

2. asocijativnost

$$(\zeta^A \eta^B)\alpha^C = \zeta^A(\eta^B \alpha^C) \tag{2.13}$$

3. distributivnost

$$(\zeta^A + \eta^B)\alpha^C = \zeta^A \alpha^C + \eta^B \alpha^C \tag{2.14}$$

Napomena 2.2.1. Općenito vrijedi $\zeta^A\eta^B - \zeta^B\eta^A \neq 0$, jer $\zeta^A \neq \zeta^B$ i $\eta^A \neq \eta^B$.

Ovaj zapis će biti koristan pri računanju izraza koji vrijede bez obzira na odabir baze u kojoj se radi. Za detaljnije objašnjenje može se pogledati prvu knjigu od Penrosea i Rindlera [5].

Definicija 2.3. Oznake $S^{ABCD\ldots}$ će označavati prostor $S^A \times S^B \times S^C \times S^D \times \ldots$

Definicija 2.4. Dualni vektori se definiraju kao preslikavanje iz vektorskog prostora u polje nad kojim je definiran vektorski prostor. Dualni vektor je element dualnog vektorskog prostora.

Napomena 2.4.1. riječ *vektor* će se koristiti u apstraktnom smislu kao element općenitog vektorskog prostora. U tom smislu su i spinori i 4-vektori vektori.

Po definiciji dualni ekvivalent spinora η bi bio objekt $[\eta, \;]$ jer $[\eta, \zeta] \in \mathbb{C}$. U zapisu pomoću apstraktnih indeksa dual označavamo sa indeksom dolje, npr. dual od spinora ζ^A je $[\zeta^A, \;] \equiv \zeta_A$. Dualni spinorni prostor označavamo kao S_A ($\zeta_A \in S_A$).

Napomena 2.4.2. u produktima moraju biti vektori iz istih vektorskih prostora, tj. nije moguće računati $[\zeta^A, \eta^B]$

Isto kao što dual od ζ^A gledamo kao preslikavanje sa S^A u $\mathbb{C}$, tako isto možemo gledati da je ζ^A dual od ζ_A, tj. da je ζ^A preslikavanje $\zeta^A : S_A \to \mathbb{C}$, te vrijedi $\zeta^A\eta_A \equiv \eta_A\zeta^A$. Treba napomenuti da iako je svako preslikavanje $g : S^A \to \mathbb{C}$ po definiciji element iz S_A, ne mora nužno svako preslikavanje $f : S_A \to \mathbb{C}$ biti element iz S^A, premda na prostorima koje mi promatramo to vrijedi, te njih nazivamo **refleksivni prostori** (za primjer kada ne vrijedi da je S^A cijeli dualni prostor od S_A pogledati u fusnoti na str. 79 u [5]).

Definicija 2.5. Kompleksna konjugacija preslikava spinorni S^A prostor u njemu anti-izomorfni (pogledati C.8) konjugirani spinorni prostor $\bar{S}^{A'}$, a analogno vrijedi i za dualne prostore: $S_A \to S_{A'}$.

Uvodimo oznake valencije. Već smo spominjali da je ζ^A spinor valencije 1, no odsada ćemo reći ćemo da je valencije $(1, 0; 0, 0)$. Za ζ_A će biti valencije $(0, 0; 1, 0)$, $\zeta^{A'}$ $(0, 1; 0, 0)$, a $\zeta_{A'}$ $(0, 0; 0, 1)$.

Definicija 2.6. Spinor valencije $(p, q; r, t)$ je objekt

$$\gamma^{A_1\ldots A_p A'_1\ldots A'_q}_{B_1\ldots B_r B'_1\ldots B'_t} = \sum_i \alpha^{(i)A_1} \cdots \beta^{(i)A_p}\eta^{(i)A'_1} \cdots \zeta^{(i)A'_q}\mu_{(i)B_1} \cdots \theta_{(i)B_r}\nu_{(i)B'_1} \cdots \lambda_{(i)B'_t} \quad (2.15)$$

gdje je suma po i formalna oznaka, te znači da je γ sagrađena od linearnih kombinacija vanjskih produkata spinora, dualnih spinora, i njihovih kompleksnih konjugata. Po toj definiciji vrijedi:

$$\gamma^{A_1\ldots A_p A'_1\ldots A'_q}_{B_1\ldots B_r B'_1\ldots B'_t} \in S^{A_1} \times \ldots S^{A_p} \times S^{A'_1} \times \ldots S^{A'_q} \times S_{B_1} \times \ldots S_{B_r} \times S_{B'_1} \times \ldots S_{B'_t}$$

Definicija 2.7. Neka $V, W, X, Y \ldots \in L(4)$. Tenzori valencije (n, m) se definiraju na sljedeći način:

$$T^{a_1 \ldots a_n}_{b_1 \ldots b_m} = \sum_i V^{(i)a_1} \cdots W^{(i)a_n} X_{(i)b_1} \cdots Y_{(i)b_m} \tag{2.16}$$

vrlo slično spinorima, ali s tim da nema kompleksne konjugacije jer su 4-vektori elementi vektorskog prostora definiranog iznad polja realnih brojeva.

Napomena 2.7.1. Definiciju vanjskog produkta smo proširili i na dualne i konjugirane prostore na „prirodan" način, te se prenose i na objekte općenitih valencija, tj. spinore i tenzore. Taj vanjski produkt zadržava sve svoje osobine.

Definicija 2.8. Levi-Civita ϵ_{AB} se definira u relaciji:

$$[\eta^B, \zeta^B] \equiv \eta_B \zeta^B \equiv \epsilon_{AB} \eta^A \zeta^B \tag{2.17}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{AB} \eta^A = \eta_B \tag{2.18}$$

Definicija 2.9. Kroneckerova δ^A_B se definira u relaciji:

$$\delta^B_A \zeta^A \eta_B = \zeta^A \eta_A \tag{2.19}$$

Prema tome Kroneckerova delta se može koristiti kao operator unutarnjeg produkta $\delta^A_B : S^B \times S_A \to \mathbb{C}$ Uzmimo primjer općenitog spinora gdje pomoću delte prelazimo iz spinora valencije$(p, q; r, t)$ prelazimo u spinor $(p-1, q; r-1, t)$:

$$\delta^D_C \gamma^{A_1 \ldots C \ldots A_p A'_1 \ldots A'_q}_{B_1 \ldots D \ldots B_r B'_1 \ldots B'_t} = \gamma^{A_1 \ldots C \ldots A_p A'_1 \ldots A'_q}_{B_1 \ldots C \ldots B_r B'_1 \ldots B'_t} \tag{2.20}$$

Definicija 2.10. Uvodimo operaciju preimenovanja objekata gdje skup oznaka npr. spinora $\{A, B, C, \ldots\}$ zamijenimo drugim skupom $\{D, E, \ldots\}$ koji nije nužno različit u svim komponentama od prvog skupa no mora ostaviti isti rang spinora. Ta operacija komutira s ostalim, prije definiranim operacijama, s tim da ne može razdvojiti dva objekta koji su u unutarnjem produktu $(\eta^A \alpha_A)$.

Primjer preimenovanja:

$$\zeta^{ABC}_D = \sum_i \alpha^{(i)A} \beta^{(i)B} \gamma^{(i)C} \eta_{(i)D} \to \zeta^{GHJ}_K = \sum_i \alpha^{(i)G} \beta^{(i)H} \gamma^{(i)J} \eta_{(i)K} \tag{2.21}$$

Permutacija simbola je poseban slučaj te operacije, npr.: $\beta_{AB} \to \beta_{BA}$, te općenito vrijedi $\beta_{AB} \neq \beta_{BA}$

Napomena 2.10.1. Nije moguće preimenovati A u A' jer S nije isto što i $\bar{S}$, te bi operacija preimenovanja mijenjala valenciju spinora. No moguće je formalno mijenjati redoslijed između crtanih i ne-crtanih oznaka, ali po različitom značenju nego kod preimenovanja:

$$\zeta^{ABA'}_D = \sum_i \alpha^{(i)A} \beta^{(i)B} \gamma^{(i)A'} \eta_{(i)D} \to \zeta^{A'AB}_D = \sum_i \gamma^{(i)A'} \alpha^{(i)A} \beta^{(i)B} \eta_{(i)D} \tag{2.22}$$

Napomena 2.10.2. iz definicije unutarnjeg produkta kao antisimetričnog možemo zaključiti i da je $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$

2.4 Raspis vektora u bazi

Kako bismo razlikovali apstraktne indekse vektora od indeksa koji označavaju različite komponente vektora u raspisu u bazi, za komponente vektora u bazi koristimo podebljana („bold”) slova, npr.:

$$X^a = \sum_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}} v_{\mathbf{a}}{}^a \equiv X^{\mathbf{a}} v_{\mathbf{a}}{}^a \tag{2.23}$$

gdje $v^a{}_{\mathbf{a}}$ predstavljaju vektore ortonormalne baze, a zadnji znak ekvivalencije označava da ćemo od sada za podebljane indekse podrazumijevati da vrijedi Einsteinova konvencija za sumaciju po ponovljenom indeksu, i još ćemo zahtijevati da je jedan indeks gore jedan dolje ako se po njemu sumira.

Možemo vidjeti da za dva vektora raspisana u ortonormalnoj bazi vrijedi:

$$\begin{aligned} Y_a X^a &= Y_{\mathbf{b}} v^{\mathbf{b}}{}_a X^{\mathbf{a}} v^a{}_{\mathbf{a}} \\ &= Y_{\mathbf{b}} X^{\mathbf{b}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

gdje su $v^{\mathbf{b}}{}_a$ vektori baze dualnog prostora odabranih na način da vrijedi:

$$v^{\mathbf{b}}{}_a v^a{}_{\mathbf{a}} = \delta^{\mathbf{b}}{}_{\mathbf{a}} \tag{2.25}$$

$$\text{gdje } \delta^{\mathbf{b}}{}_{\mathbf{a}} = \begin{cases} 0 & \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \\ 1 & \mathbf{a} = \mathbf{b} \end{cases} \tag{2.26}$$

Iz (2.25) množenjem sa $v_b^{\mathbf{a}}$ i zbrajanjem po $\mathbf{a}$ dobiva se:

$$v_a^{\mathbf{b}} v_{\mathbf{a}}^a v_b^{\mathbf{a}} = v_b^{\mathbf{b}} \tag{2.27}$$

Odavde je moguće zaključiti:

$$v_{\mathbf{a}}^a v_b^{\mathbf{a}} = \delta_b^a \tag{2.28}$$

Odgovarajuća baza za spinore bila bi $\{o^A, \iota^A\}$ za $v_1{}^A$ i $v_2{}^A$ i $\{-\iota_A, o_A\}$ za $v_A{}^1$ i $v_A{}^2$. Iz (2.10) i (2.24) slijedi veza između dualnih komponenti:

$$\zeta_A \eta^A = \zeta_0 \eta^0 + \zeta_1 \eta^1 = \zeta^0 \eta^1 - \zeta^1 \eta^0 \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow \zeta_0 = -\zeta^1, \zeta_1 = \zeta^0 \tag{2.30}$$

To nas upućuje na to da postoji i inverzna operacija dualnom „spuštanju” indeksa:

$$\zeta^A = \zeta_B \epsilon^{AB} \tag{2.31}$$

gdje je redoslijed pisanja indeksa određen konvencijom.

Sada je moguće uspostaviti vezu Kroneckerove delte i Levi-Civite:

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB} \eta^A \zeta^B &= \delta_B^C \eta_C \zeta^B \\ \Rightarrow \epsilon_{AB} \epsilon^{AC} \eta_C &= \delta_B^C \eta_C \\ \Rightarrow \epsilon_{BA} \epsilon^{CA} \equiv \epsilon_B{}^C &= \delta_B^C \end{aligned} \tag{2.32}$$

gdje je u zadnjem retku iskorištena antisimetričnost ϵ_{AB}, te svojstvo da je Levi-Civita ϵ_{AB} spinor podizanja i spuštanja indeksa.

Teorem 2.1. *Vrijedi jednakost između spinora baze ${v_{\mathbf{B}}}^C$ i Levi-Civita spinora zapisanih u bazi ${\epsilon_{\mathbf{B}}}^C$:*

$$ {v_{\mathbf{B}}}^C = {v_{\mathbf{B}}}^B {\epsilon_B}^C = {\epsilon_{\mathbf{B}}}^C \tag{2.33} $$

Lema 2.1.1. *Vrijedi*

$$ {\epsilon_{\mathbf{B}}}^C = -{\epsilon^C}_{\mathbf{B}} \tag{2.34} $$

Dokaz. Slijedi manipuliranjem Levi-Civita spinora □

Levi-Civita ϵ_{AB} je moguće zapisati u bazi $\{{v_1}^A, {v_2}^A\}$, tj. $\{o^A, \iota^A\}$:

$$ \epsilon_{\mathbf{AB}} = \epsilon_{AB} {v_{\mathbf{A}}}^A {v_{\mathbf{B}}}^B \tag{2.35} $$

$$ = \begin{pmatrix} o_A o^A & o_A \iota^A \\ \iota_A o^A & \iota_A \iota^A \end{pmatrix}_{\mathbf{AB}} \tag{2.36} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{AB}} \tag{2.37} $$

S druge strane, za inverzni Levi-Civita $\epsilon^{\mathbf{AB}}$ dobije se:

$$ \epsilon^{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{AB}} \tag{2.38} $$

Jednadžbe (2.37) i (2.38) su u matričnom zapisu iz kojeg se očitavaju vrijednosti tako da prvi indeks označava redak matrice, a drugi stupac matrice.

Množenjem dva Levi-Civita simbola dobije se:

$$ \epsilon_{\mathbf{AB}} \epsilon^{\mathbf{CB}} = {\epsilon_{\mathbf{A}}}^{\mathbf{C}} = {\delta_{\mathbf{A}}}^{\mathbf{C}} \tag{2.39} $$

$$ = {\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{A}}}^{\mathbf{C}} \tag{2.40} $$

Iz (2.35) i uz pomoć svojstva ortogonalnosti (2.28) slijedi:

$$ \epsilon_{AB} = \epsilon_{\mathbf{AB}} {v_A}^{\mathbf{A}} {v_B}^{\mathbf{B}} \tag{2.41} $$

$$ = o_A \iota_B - \iota_A o_B \tag{2.42} $$

2.5 Jacobijev identitet i spinori

Definicija 2.11. Uvodimo oznaku normirane antisimetrizacije spinora:

$$ \gamma^{[ABC\ldots]} = -\gamma^{[CBA\ldots]} = \gamma^{[CAB\ldots]} = \ldots \tag{2.43} $$

Na primjer za dva jednovalentna spinora operacija antisimetrizacije je:

$$ \zeta^{[A}\eta^{B]} \equiv \frac{1}{2}(\zeta^A\eta^B - \zeta^B\eta^A) \tag{2.44} $$

Definicija 2.12. Normirane simetrizacije se označava:

$$\gamma^{(ABC\dots)} = \gamma^{(CBA\dots)} = \gamma^{(CAB\dots)} = \dots \tag{2.45}$$

Na primjer za dva jednovalentna spinora to je:

$$\zeta^{(A}\eta^{B)} \equiv \frac{1}{2}(\zeta^A\eta^B + \zeta^B\eta^A) \tag{2.46}$$

Teorem 2.2. *Jacobijev identitet za Levi-Civita spinore glasi:*

$$\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]} = 0 \tag{2.47}$$

Dokaz. množenjem sa jednovalentnim spinorima i uz pomoć izraza (2.24) slijedi:

$$\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]}\zeta^B\eta^C\gamma^D = \epsilon_{A[\mathbf{B}}\epsilon_{\mathbf{CD}]}\zeta^{\mathbf{B}}\eta^{\mathbf{C}}\gamma^{\mathbf{D}} \tag{2.48}$$

Vidimo da je izraz (2.48) nužno jednak nuli jer $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \{1, 2\}$ pa će nužno biti ponovljena dva indeksa.

□

Teorem 2.3. *Svaki spinor antisimetričan u dva indeksa ,npr. A i B je proporcionalan s ϵ_{AB} tako da vrijedi:*

$$\gamma_{\dots[AB]\dots} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\gamma_{\dots C}{}^{C}{}_{\dots} \tag{2.49}$$

Dokaz. Jacobijev identitet je moguće raspisati koristeći antisimetriju ϵ_{AB}:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]} &= \frac{1}{6}(\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} - \epsilon_{AB}\epsilon_{DC} - \epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} - \epsilon_{AD}\epsilon_{CB}) \\
&= \frac{1}{6}(\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}) \\
&= \frac{1}{3}(\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}) = 0
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Možemo nadalje presložiti i računati:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{AB}\epsilon_{FG} &= -\epsilon_{AF}\epsilon_{GB} - \epsilon_{AG}\epsilon_{BF} \quad \backslash\, \epsilon^{CF}\epsilon^{DG} \\
\epsilon_{AB}\epsilon^{CD} &= \epsilon_A{}^C\epsilon_B{}^D - \epsilon_A{}^D\epsilon_B{}^C \quad \backslash\, \gamma_{\dots CD\dots} \\
\epsilon_{AB}\gamma_{\dots C}{}^{C}{}_{\dots} &= \gamma_{\dots AB\dots} - \gamma_{\dots BA\dots} = 2\gamma_{\dots[AB]\dots}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

gdje je $\epsilon_B{}^C = \delta_B^C$. □

Lema 2.3.1. *Svaki spinor (i tenzor) možemo razdvojiti na simetrični i antisimterični dio tako da vrijedi:*

$$\gamma_{\dots CD\dots} = \gamma_{\dots(CD)\dots} + \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\gamma_{\dots C}{}^{C}{}_{\dots} \tag{2.52}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\gamma_{\dots CD\dots} &= \gamma_{\dots(CD)\dots} + \gamma_{\dots[CD]\dots} \\ &= \gamma_{\dots(CD)\dots} + \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\gamma_{\dots C}{}^{C}{}_{\dots}\end{aligned} \tag{2.53}$$

□

3 Veza spinora i tenzora

Za potpuno refleksivne vektorske prostore (pogledati dodatak D), što je i spinorni prostor, vrijedi da vektorski prostor nastao vanjskim produktom potpuno refleksivnih vektorskih prostora je također potpuno refleksivan. Promotrimo naredni primjer:

Neka je $\zeta, \eta, \gamma \in S$, onda $\zeta^A \eta^B \gamma_C \in S^A \times S^B \times S_C$. Novi prostor od interesa je $\mathbf{T} \equiv S \times S \times S^*$, gdje je S^* dualni prostor od S. Sada neka je $F, G, H \in \mathbf{T}$. Svojstva se prenose iz spinornog prostora jer je po definiciji potpuno refleksivnog vektorskog prostora (D.2) svaki element iz $\mathbf{T}$ moguće napisati kao vanjski umnožak spinora.

Sada je moguće je po uzoru na spinorne oznake pridružiti prostoru $\mathbf{T}$ indekse $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots\}$ tako da $F^{\mathcal{A}} \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}$, a dual od $F^{\mathcal{A}}$ je $F_{\mathcal{A}}$.

Da se svojstva iz spinornog prostora prenose moguće je vidjeti npr. u:

$$F^{\mathcal{A}} G_{\mathcal{A}} = F^{AB}{}_{C}\, G_{AB}{}^{C} \tag{3.1}$$

Mogli bismo nastaviti npr. sa definicijom objekta unutarnjeg produkta u prostoru $\mathbf{T}$ po uzoru na Kroneckerovu deltu , koja bi bila sagrađena od umnoška tri Kroneckerove delte, te bismo mogli definirati operatore „podizanja" i „spuštanja".

3.1 4-vektori kao produkt spinora

Spomenuta svojstva spinornog prostora služe za definiciju novog vektorskog prostora za kojeg će se pokazati da odgovara upravo 4-vektorskom prostoru.

Definicija 3.1. Neka je vektorski prostor L dan produktom S i $\bar{S}$:

$$L \equiv S \times \bar{S} \tag{3.2}$$

Za prostor L uvodimo skup oznaka $\{a, b, c, d, \dots\}$ tako da:

$$S^A \times S^{A'} \ni v^{AA'} \equiv v^a \in L^a \tag{3.3}$$

Vektor v^a nazivamo kompleksnim 4-vektorom jer :

$$\overline{v^a} = \overline{v^{AA'}} = \bar{v}^{A'A} = \bar{v}^a \tag{3.4}$$

Iako je rezultat konjugacije vektora v vektor istog tipa (valencije), općenito vrijedi: $v \neq \bar{v}$. Ako je $v = \bar{v}$, onda v nazivamo realnim 4-vektorom, a skup L skupom 4-vektora.

Svojstva unutarnjeg produkta vektora slijede iz svojstava unutarnjeg produkta spinora. Neka su $v(1), v(2) \in L$, te označimo unutarnji produkt s točkom :

1. komutativnost:
$$\begin{aligned} v(1)\cdot v(2) &= v(1)_a v(2)^a \\ &= v(1)_{AA'} v(2)^{AA'} = \epsilon_{BA}\epsilon_{B'A'} v(1)^{BB'} v(2)^{AA'} \\ &= \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'} v(2)^{AA'} v(1)^{BB'} = v(2)_{BB'} v(1)^{BB'} \\ &= v(2)_a v(1)^a = v(2)\cdot v(1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

   Napomena 3.1.1. za jednakost (3.5) treba reći da vrijedi $\zeta^A \eta_A = \zeta^B \eta_B$ jer obje strane jednakosti, one sa indeksom A i one sa B, označavaju unutarnji produkt ista dva vektora (spinora)

2. bilinearnost direktno slijedi jer Levi-Civita ϵ_{AB} ne djeluje na skalare, pa oni komutiraju:
$$\epsilon_{AB} a = a \epsilon_{AB} \tag{3.6}$$

3. nedegeneriranost slijedi direktno iz nedegeneriranosti unutarnjeg produkta spinora.

4. posjeduje signaturu $(+,-,-,-)$:
$$b^a{}_0 = t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'}) \tag{3.7}$$
$$b^a{}_1 = x^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} + \iota^A o^{A'}) \tag{3.8}$$
$$b^a{}_2 = y^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} - \iota^A o^{A'}) \tag{3.9}$$
$$b^a{}_3 = z^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} - \iota^A \iota^{A'}) \tag{3.10}$$

   provjerimo, uz pomoć (2.7) i (2.8):
$$\begin{aligned} t_a t^a &= \frac{1}{2}\left((o_A o_{A'} + \iota_A \iota_{A'})(o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(o_A \iota^A o_{A'} \iota^{A'} + \iota_A o^A \iota_{A'} o^{A'}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

   Na Sličan način dobivamo
$$x_a x^a = y_a y^a = z_a z^a = -1 \tag{3.12}$$
$$t_a x^a = t_a y^a = t_a z^a = x_a y^a = \ldots = 0 \tag{3.13}$$

   time smo dokazali da postoji baza sastavljena od realnih 4-vektora (realnost se provjeri konjugacijom) za koju vrijedi
$$b_{a\mathbf{i}} b^a{}_{\mathbf{j}} = \eta_{\mathbf{ij}} \tag{3.14}$$
$$\text{gdje je } \eta_{\mathbf{ij}} = \begin{cases} 0 & \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{i} = \mathbf{j} = 0 \\ -1 & \mathbf{i} = \mathbf{j},\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{3.15}$$

   kao što se traži u definiciji vektorskog prostora sa signaturom $(+,-,-,-)$.

Definicija 3.2. Definiramo tenzore g_{ab} i g^{ab} po uzoru na uporabu u (3.5) kao:

$$g_{ab} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'} \tag{3.16}$$

$$g^{ab} = \epsilon^{AB}\epsilon^{A'B'} \tag{3.17}$$

oni će nam služiti kao operatori „podizanja” i „spuštanja” za 4- vektore. U $\{b^a{}_{\mathbf{i}}\}$ bazi je $g_{\mathbf{ij}}$ dijagonalna matrica sa vrijednostima kao u (3.15):

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{ij}} &= g_{ab}b^a{}_{\mathbf{i}}b^b{}_{\mathbf{j}} \\ &= \eta_{\mathbf{ij}}(= \eta_{ab}b^a{}_{\mathbf{i}}b^b{}_{\mathbf{j}}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Napomena 3.2.1. Može se po uzoru na izraz (2.42) zaključiti:

$$g_{ab} = g_{\mathbf{ij}}b^{\mathbf{i}}{}_a b^{\mathbf{j}}{}_b \tag{3.19}$$

$$= t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \tag{3.20}$$

Definicija 3.3. Definiramo bazu sa 2 realna i 2 kompleksna 4-vektora s Lorentz-normom (pogledati dodatak B.1) jednakom nuli. Ta baza je nastala vanjskim produktom vektora spinorne baze:

$$W^a{}_{00} \equiv l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a + z^a) = o^A o^{A'} \tag{3.21}$$

$$W^a{}_{11} \equiv n^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a - z^a) = i^A i^{A'} \tag{3.22}$$

$$W^a{}_{01} \equiv m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^a - iy^a) = o^A i^{A'} \tag{3.23}$$

$$W^a{}_{10} \equiv \bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^a + iy^a) = i^A o^{A'} \tag{3.24}$$

Skraćeno je izraze za bazu $\{W^a{}_{\mathbf{AA'}}\}$ zapisati koristeći izraze za spinornu bazu:

$$W^a{}_{\mathbf{AA'}} = v^A{}_{\mathbf{A}} v^{A'}{}_{\mathbf{A'}} \tag{3.25}$$

te također inverzna baza:

$$W_a{}^{\mathbf{AA'}} = v_A{}^{\mathbf{A}} v_{A'}{}^{\mathbf{A'}} \tag{3.26}$$

$$\Rightarrow \delta_a{}^b = W_a{}^{\mathbf{AA'}} W^b{}_{\mathbf{AA'}} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_{ab} &= W_a{}^{\mathbf{AA'}} W_{b\mathbf{AA'}} \\ &= l_a n_b + n_a l_b - m_a \bar{m}_b - \bar{m}_a m_b \end{aligned} \tag{3.28}$$

Za kompleksnu bazu $\{l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ vrijede relacije:

$$l_a l^a = n_a n^a = m_a m^a = \bar{m}_a \bar{m}^a = 0 \tag{3.29}$$

$$l_a n^a = -m_a \bar{m}^a = 1 \tag{3.30}$$

Iz čega slijedi raspis općenitog 4-vektora:

$$U^a = (n_b U^b) l^a + (l_b U^b) n^a - (m_b U^b) \bar{m}^a - (\bar{m}_b U^b) m^a \tag{3.31}$$

Napomena 3.3.1. Moguće je dokazati da ne postoji skup 4 nezavisna realna 4-vektora koji bi zadovoljavali relacije (3.29) i (3.30)

3.2 Infeld-van der Waerdenovi simboli i Lorentzove transformacije

Realnu i kompleksnu bazu 4-vektora moguće je na zgodan način povezati pomoću normiranih Paulijevih matrica, koje su poznate i kao Infeld-van van der Waerdenovi simboli:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} W^a{}_{00} & W^a{}_{01} \\ W^a{}_{10} & W^a{}_{11} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (t^a + z^a) & (x^a - iy^a) \\ (x^a + iy^a) & (t^a - z^a) \end{pmatrix} \\ &= t^a(\sigma^0)_{\mathbf{AA'}} + x^a(\sigma^1)_{\mathbf{AA'}} + y^a(\sigma^2)_{\mathbf{AA'}} + z^a(\sigma^3)_{\mathbf{AA'}} \\ &= b^a{}_{\mathbf{i}}(\sigma^{\mathbf{i}})_{\mathbf{AA'}} \end{aligned} \tag{3.32}$$

gdje su normirane Paulijeve matrice $\sigma^{\mathbf{i}}_{\mathbf{AA'}}$ dane kao:

$$\sigma_0^{\mathbf{AA'}} = \sigma^0_{\mathbf{AA'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$\sigma_1^{\mathbf{AA'}} = \sigma^1_{\mathbf{AA'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$-\sigma_2^{\mathbf{AA'}} = \sigma^2_{\mathbf{AA'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

$$\sigma_3^{\mathbf{AA'}} = \sigma^3_{\mathbf{AA'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Za potpunu uspostavu relacija iz $\{W^a\}$ baze u $\{v^a\}$ baze i obratno potrebno je koristiti:

$$\sigma^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{AA'}}\sigma^{\mathbf{AA'}}{}_{\mathbf{j}} = \delta^{\mathbf{i}}_{\mathbf{j}} \tag{3.37}$$

$$\text{gdje } \sigma^{\mathbf{AA'}}{}_{\mathbf{j}} \equiv \eta_{\mathbf{ej}}\, \epsilon^{\mathbf{AB}} \epsilon^{\mathbf{A'B'}} \sigma^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{BB'}} \tag{3.38}$$

Jednadžba (3.37) se provjeri uvrštavanjem izraz (3.38), te izraze za normirane Paulijeve matrice, u jednadžbu (3.37). Korisna je i relacija:

$$\sigma^{\mathbf{i}}_{\mathbf{AA'}}\sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{BB'}} = \epsilon_{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{B}}\epsilon_{\mathbf{A'}}{}^{\mathbf{B'}} \tag{3.39}$$

koja se može provjeriti množenjem sa $\alpha^{\mathbf{A}}\beta^{\mathbf{A'}}\gamma_{\mathbf{B}}\delta_{\mathbf{B'}}$ i zbrajanjem po ponovljenom indeksu. Iz (3.32) i (3.37) se vide i relacije prijelaza iz kompleksne u realne bazu 4-vektora:

$$b^a{}_{\mathbf{i}} = W^a{}_{\mathbf{AA'}}\, \sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{AA'}} \tag{3.40}$$

Moguće je povezati transformaciju spinorne baze sa transformacijom kompleksne 4-vektorske baze $\{W^a_{\mathbf{AA'}}\}$, te sa transformacijom realne 4-vektorske baze $v^a{}_{\mathbf{i}}$:

1. transformacija spinorne baze:

$$v_{\mathbf{A}}{}^{A} = \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}}\hat{v}_{\hat{\mathbf{A}}}{}^{A} \tag{3.41}$$

   gdje $\lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}}$ predstavlja neki skup od 4 broja, i gdje se podrazumijeva zbrajanje po ponovljenim podebljanim indeksima.

2. transformacija kompleksne 4-vektorske baze:

$$\begin{aligned}
W^a{}_{\mathbf{AA'}} &= v_{\mathbf{A}}{}^{A} \bar{v}_{\mathbf{A'}}{}^{A'} \\
&= \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \hat{v}_{\hat{\mathbf{A}}}{}^{A} \bar{\lambda}_{\mathbf{A'}}{}^{\hat{\mathbf{A}}'} \hat{\bar{v}}_{\hat{\mathbf{A}}'}{}^{A'} \\
&= \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \bar{\lambda}_{\mathbf{A'}}{}^{\hat{\mathbf{A}}'} \hat{W}^a{}_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}'}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3. transformacija realne 4-vektorske baze:

$$\begin{aligned}
b^a{}_{\mathbf{i}} &= W^a_{\mathbf{AA'}} \sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{AA'}} \\
&= \sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{AA'}} \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \bar{\lambda}_{\mathbf{A'}}{}^{\hat{\mathbf{A}}'} W^a{}_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}'} \\
&= \sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{AA'}} \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \bar{\lambda}_{\mathbf{A'}}{}^{\hat{\mathbf{A}}'} \sigma^{\mathbf{j}}_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}'} \hat{b}^a{}_{\mathbf{j}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \hat{b}^a{}_{\mathbf{j}}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Drugim riječima, transformacija realne baze dana je s:

$$\Lambda_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = \sigma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{AA'}} \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \bar{\lambda}_{\mathbf{A'}}{}^{\hat{\mathbf{A}}'} \sigma^{\mathbf{j}}_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}'} \tag{3.44}$$

Teorem 3.1. *Ako je transformacija spinorne baze takva da vrijedi:*

$$\det(\lambda) = \epsilon_{\mathbf{AB}} \lambda_1{}^{\mathbf{A}} \lambda_2{}^{\mathbf{B}} = 1 \tag{3.45}$$

onda je transformacija realne 4-vektorske baze takva da je $\Lambda_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ ograničena Lorentzova transformacija, tj.:

$$\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \Lambda_{\mathbf{j}}{}^{\mathbf{l}} \eta_{\mathbf{kl}} = \eta_{\mathbf{ij}} \tag{3.46}$$

$$\det(\Lambda) = 1 \tag{3.47}$$

$$\Lambda_0{}^0 \geq 0 \tag{3.48}$$

Dokaz. 1. Da je $\Lambda_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ Lorentzova transformacija slijedi uvrštavanjem izraza (3.44) u (3.46), te korištenjem svojstva (3.39).

2. Da je transformacija ortokrona, tj. da vrijedi (3.48), slijedi iz (3.44) za $i, j = 0$:

$$\Lambda_0{}^0 = \lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}} \overline{(\lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}})} = \sum_{A,\hat{A}} |\lambda_{\mathbf{A}}{}^{\hat{\mathbf{A}}}|^2 \geq 0 \tag{3.49}$$

3. Za dokaz da je $\det(\Lambda) = 1$ pogledati str. 17 u [5].

□

Dakle, od spinora su sagrađeni 4-vektori koji posjeduju sva svojstva kao i 4-vektori iz dodatka B.1. Spinori se smatraju „fundamentalnijim” veličinama od 4-vektora u smislu da se svaki 4-vektor može izgraditi od spinora, ali se ne može svaki spinor dobiti od 4-vektora.

3.3 *Spinorni ekvivalent simetričnog tenzora*

Neka je zadan općenit kompleksni tenzor T_{ab} takav da:

$$T_{ab} = T_{ba} \tag{3.50}$$

Po uzoru na prošlo poglavlje slijedi:

$$T_{ab} = T_{AA'BB'} = T_{BB'AA'} = T_{ba} \tag{3.51}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} T_{AA'BB'} &= \frac{1}{2}(T_{AA'BB'} + T_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(T_{AA'BB'} + T_{BA'AB'} - T_{BA'AB'} + T_{BB'AA'}) \\ &= T_{(AB)A'B'} + T_{[AB]A'B'} \\ &= T_{(AB)A'B'} + T_{[AB]A'B'} \\ &= T_{(AB)(A'B')} + T_{[AB][A'B']} \end{aligned} \tag{3.52}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz simetričnosti T_{ab}. Koristeći (2.49) se dobiva :

$$\begin{aligned} T_{ABA'B'} &= T_{(AB)(A'B')} + \frac{1}{4}\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}T_{C}{}^{C}{}_{C'}{}^{C'} \\ &= P_{AA'BB'} + \frac{1}{4}\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}T_{C}{}^{C}{}_{C'}{}^{C'} \\ &= P_{ab} + \frac{1}{4}g_{ab}T_{c}{}^{c} \end{aligned} \tag{3.53}$$

gdje je P_{ab} zapravo tenzor T_{ab} bez traga.

3.4 *Spinor elektromagnetskog polja*

Tenzor elektromagnetskog polja F_{ab} je antisimetrični tenzor drugog ranga. Koristi se u kovarijantnom zapisu Maxwellovih jednadžbi. Više detalja je moguće naći u nekim standardnim knjigama poput [11] i [12], a donekle i u ovom radu na poglavlju 5.1.

Za F_{ab} vrijedi:

$$F_{ab} = -F_{ba} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{AA'BB'} &= -F_{BB'AA'} = \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{ABA'B'} - F_{ABB'A'} + F_{ABB'A'} - F_{BAB'A'}) \\ &= F_{AB[A'B']} + F_{[AB]B'A'} \end{aligned} \tag{3.55}$$

I sada zbog (3.54) i (2.53) slijedi:

$$\begin{aligned} F_{AA'BB'} =& F_{(AB)[A'B']} + F_{[AB](B'A')} \\ =& \frac{1}{2}F_{(AB)C'}{}^{C'}\epsilon_{A'B'} + \frac{1}{2}F_{C}{}^{C}{}_{(B'A')}\epsilon_{AB} \\ =& \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \bar{\phi}_{A'B'}\epsilon_{AB} \end{aligned} \tag{3.56}$$

gdje je ϕ_{AB} elektromagnetski spinor definiran kao:

$$\phi_{AB} \equiv \frac{1}{2} F_{(AB)C'}{}^{C'} \tag{3.57}$$

$$\bar{\phi}_{A'B'} \equiv \frac{1}{2} \overline{F_{(AB)C'}{}^{C'}} = \frac{1}{2} F_C{}^C{}_{(B'A')} \tag{3.58}$$

Poznavanje samo tri komponente kompleksnog elektromagnetskog spinora, zbog simetrije $\phi_{AB} = \phi_{BA}$, potpuno određuje cijeli elektromagnetski tenzor F_{ab}.

3.5 Spinorni ekvivalent Levi-Civita tenzora

Spinorni ekvivalent Levi-Civita tenzora je definiran kao:

$$\epsilon_{abcd} = i\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{A'D'}\epsilon_{B'C'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'D'} \tag{3.59}$$

$$\epsilon^{abcd} = i\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon^{A'D'}\epsilon^{B'C'} - \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\epsilon^{A'C'}\epsilon^{B'D'} \tag{3.60}$$

$$\epsilon_{ab}{}^{cd} = i\epsilon_A{}^C\epsilon_B{}^D\epsilon_{A'}{}^{D'}\epsilon_{B'}{}^{C'} - \epsilon_A{}^D\epsilon_B{}^C\epsilon_{A'}{}^{C'}\epsilon_{B'}{}^{D'} \tag{3.61}$$

Tako definiran Levi-Civita tenzor ima svojstva:

1. antisimetričnost pri zamjeni bilo koja dva susjedna indeksa:

$$\epsilon_{abcd} = -\epsilon_{bacd} = -\epsilon_{acbd} = -\epsilon_{abdc} \tag{3.62}$$

   što se direktno vidi za zamjene $a \leftrightarrow b$ i $c \leftrightarrow d$, a za $b \leftrightarrow c$ treba iskoristiti Jacobijev identitet $\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]} = 0$.

2. Realnost

3. Normiranje Levi-Civite:

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd} = -24 \tag{3.63}$$

   Što je moguće dokazati koristeći $\epsilon_{AB}\epsilon^{AB} = 2$

4. u bazi $\{t, x, y, z\}$ vrijedi:

$$\epsilon_{0123} = 1 \tag{3.64}$$

   kao što se vidi u:

$$\begin{aligned}\epsilon_{0123} &= \epsilon_{abcd}t^a x^b y^c z^d \\ &= -\frac{1}{4}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{A'D'}\epsilon_{B'C'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'D'})(o^A o^{A'} + \iota^A\iota^{A'}) \\ &\quad (o^B\iota^{B'} + \iota^B o^{B'})(o^C\iota^{C'} - \iota^C o^{C'})(o^D o^{D'} - \iota^D\iota^{D'}) \\ &= 1\end{aligned} \tag{3.65}$$

5. vrijede raspisi u bazama:

$$\epsilon_{abcd} = -4!t_{[a}x_b y_c z_{d]} \tag{3.66}$$

$$\epsilon_{abcd} = -i4!l_{[a}n_b m_c \bar{m}_{d]} \tag{3.67}$$

3.6 *Hodgeov dual*

Definicija 3.4. Za općeniti kompleksni antisimetrični tenzor G_{ab} definiramo **Hodgeov dual** kao:

$$*G_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}G_{cd} \tag{3.68}$$

Po uzoru na jednadžbu (3.56) zbog antisimetričnosti tenzora G_{ab} možemo pisati:

$$G_{ab} = G_{ABA'B'} = \alpha_{AB}\epsilon_{A'B'} + \bar{\beta}_{A'B'}\epsilon_{AB} \tag{3.69}$$

gdje koristimo dva različita spinora α, β zbog kompleksnosti tenzora G. Uz (3.61) slijedi da je Hodgeov dual od G u spinornom obliku dan kao:

$$\begin{aligned} *G_{ab} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}G_{cd} \\ &= \frac{1}{2}i(G_{ABB'A'} - G_{BAA'B'}) \\ &= i(-\alpha_{AB}\epsilon_{A'B'} + \bar{\beta}_{A'B'}\epsilon_{AB}) \\ &= iG_{ABB'A'} = -iG_{BAA'B'} \end{aligned} \tag{3.70}$$

Iz jednadžbe (3.70) lako slijedi:

$$**G_{ab} = -G_{ab} \tag{3.71}$$

3.7 *Kanonska dekompozicija simetričnih spinora*

Neka je $\phi_{AB} = \phi_{BA}$ općeniti simetrični spinor valencije $(0,0;2,0)$, poput elektromagnetskog spinora, i neka je $\xi = \xi^0 o + \xi^1 \iota \in S$ sada slijedi:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}\xi^A\xi^B &= \phi_{00}\xi^0\xi^0 + \phi_{10}\xi^0\xi^1 + \phi_{01}\xi^1\xi^0 + \phi_{11}\xi^1\xi^1 \\ &= \phi_{00}\xi^0\xi^0 + 2\phi_{10}\xi^0\xi^1 + \phi_{11}\xi^1\xi^1 \\ &= (\xi^1)^2(\phi_{00}A^2 + 2\phi_{10}A + \phi_{11}) \\ &= (\xi^1)^2(\alpha_0 A + \alpha_1)(\beta_0 A + \beta_1) \\ &= (\alpha_0\xi^0 + \alpha_1\xi^1)(\beta_0\xi^0 + \beta_1\xi^1) \\ &= \alpha_A\beta_B\xi^A\xi^B = \frac{1}{2}(\alpha_A\beta_B\xi^A\xi^B + \alpha_B\beta_A\xi^B\xi^A) \\ &= \alpha_{(A}\beta_{B)}\xi^A\xi^B \end{aligned} \tag{3.72}$$

Tip	raznovrsnost smjerova	$\phi_{AB} =$
I	{1,1}	$\alpha_{(A}\beta_{B)}$
N	{2}	$\alpha_A\alpha_B$
0	{-}	0

Tablica 3.1: Klasifikacija spinora ϕ_{AB} po glavnim smjerovima

gdje je korištena pomoćna varijabla $A = \frac{\xi^0}{\xi^1}$, te su komponente od α_A i β_B dane s:

$$\alpha_0 = \sqrt{\phi_{00}} \tag{3.73}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\phi_{00}}\left(\frac{\phi_{01}}{\phi_{00}} - \sqrt{(\frac{\phi_{01}}{\phi_{00}})^2 - \frac{\phi_{11}}{\phi_{00}}}\right) \tag{3.74}$$

$$\beta_0 = \sqrt{\phi_{00}} \tag{3.75}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\phi_{00}}\left(\frac{\phi_{01}}{\phi_{00}} + \sqrt{(\frac{\phi_{01}}{\phi_{00}})^2 - \frac{\phi_{11}}{\phi_{00}}}\right) \tag{3.76}$$

$$\tag{3.77}$$

Iz (3.72) slijedi:

$$\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)} \tag{3.78}$$

što je poznato kao kanonska dekompozicija spinora ϕ_{AB}. Spinori α i β u tom se kontekstu nazivaju glavni spinori. Glavni spinori α i β definiraju realne svjetlosne 4-vektore $a_a = \alpha_A\bar{\alpha}_{A'}$ i $b_a = \beta_A\bar{\beta}_{A'}$ koje nazivamo glavnim vektorima. U bazi $\{t, x, y, z\}$ oni su dani kao:

$$a_{\mathbf{m}} = \sigma_{\mathbf{m}}^{\mathbf{AA'}}\alpha_{\mathbf{A}}\bar{\alpha}_{\mathbf{A'}} \tag{3.79}$$

$$b_{\mathbf{m}} = \sigma_{\mathbf{m}}^{\mathbf{AA'}}\beta_{\mathbf{A}}\bar{\beta}_{\mathbf{A'}} \tag{3.80}$$

Svaki glavni vektor definira glavni smjer :

$$P = \{x_m \in L : x_m = c \cdot a_m; c \in \mathbb{R}\} \tag{3.81}$$

Ako $\alpha_A\beta^A \neq 0$, tj. ako α i β nisu međusobno proporcionalni onda kažemo da je ϕ_{AB} tipa I ili da je **algebarski općenit**, te α i β definiraju dva različita glavna smjera, dok u slučaju $\alpha \propto \beta$ onda ϕ_{AB} nazivamo spinor tipa N ili **algebarski specijalnim**, te α i β definiraju samo jedan glavni smjer. U tablici 3.1 vidljiv je pregled klasifikacije ϕ_{AB} po glavnim smjerovima. Drugi stupac tablice označava koliko je smjerova različito, npr. $\{1, 1\}$ znači dva različita smjera, dok $\{2\}$ znači jedan ponovljeni smjer.

3.8 Klasifikacija elektromagnetskog tenzora

Za elektromagnetski tenzor (ali vrijedi i za svaki antisimetrični tenzor ranga 2) F_{ab} iz (3.56), uz $\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}$, te $a_a = \alpha_A\bar{\alpha}_{A'}$, vidimo:

$$\begin{aligned} F_{ab}a^a &= (\alpha_{(A}\beta_{B)}\epsilon_{A'B'} + \bar{\alpha}_{(A'}\bar{\beta}_{B')}\epsilon_{AB})\alpha^A\bar{\alpha}^{A'} \\ &= \alpha_B\bar{\alpha}_{B'}\frac{1}{2}(\beta_A\alpha^A + \bar{\beta}_{A'}\bar{\alpha}^{A'}) \\ &= \lambda a_b \end{aligned} \tag{3.82}$$

Dakle, glavni 4-vektor spinora ϕ_{AB}, kao i svaki 4-vektor iz glavnog smjera, je ujedno svojstveni svjetlosni 4-vektor tenzora F_{ab}. Svojstvenim vektorom nazivamo vektor koji zadovoljava (3.82). Svaki svojstveni svjetlosni 4-vektor ujedno definira i svojstveni svjetlosni smjer kao u (3.81).

Iz poglavlja 3.7 je moguće zaključiti da postoje maksimalno 2 svojstvena svjetlosna smjera realnog antisimetričnog tenzora ranga 2, te taj tenzor stavljamo u istu klasifikaciju kao i njegov pripadajući spinor (pogledati tablicu 3.1) u odnosu na raznovrsnost svojstvenih smjerova.

Teorem 3.2. *Za elektromagnetski tenzor F_{ab} vrijedi*

$$\begin{aligned} F_{ab}F^{ab} &= 0 \\ F_{ab} * F^{ab} &= 0 \end{aligned} \tag{3.83}$$

ako i samo ako je elektromagnetski spinor ϕ_{AB} tipa N. Takav F_{ab} ćemo također nazivati algebarski specijalnim.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \phi_{AB}\phi^{AB} &= \alpha_{(A}\beta_{B)}\alpha^{(A}\beta^{B)} \\ &= \frac{1}{4}(\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A)(\alpha^A\beta^B + \alpha^B\beta^A) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_A\beta^A)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_A \propto \beta_A \end{aligned} \tag{3.84}$$

S druge strane, uz pomoć (3.56):

$$\begin{aligned} F_{ab}F^{ab} &= 2(\phi_{AB}\phi^{AB} + \phi_{A'B'}\phi^{A'B'}) \\ F_{ab}F^{ab} &= 2i(-\phi_{AB}\phi^{AB} + \phi_{A'B'}\phi^{A'B'}) \end{aligned} \tag{3.85}$$

Odavde slijedi tvrdnja teorema.

□

Definicija 3.5. Definiramo $E_{\mathbf{i}}, B_{\mathbf{i}}$ u bazi $\{t^a, x^a, y^a, z^a\}$ kao:

$$F_{\mathbf{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{ab}} \tag{3.86}$$

(U SI sustavu imamo E_i/c umjesto E_i)

Lema 3.2.1. *Elektromagnetsko polje za koje vrijedi $F_{ab}F^{ab} = 0$ i $F_{ab} * F^{ab} = 0$ je izgrađeno od električnog (E) i magnetskog polja (B) istih iznosa (u L-H prirodnom sustavu jedinica), a okomitog smjera jedno na drugo.*

Dokaz. Za elektromagnetski tenzor F_{ab} i E_i i B_i iz definicije 3.5 slijedi:

$$\begin{aligned} F_{ab}F^{ab} &= 2(-((E_1)^2 + (E_2)^2 + (E_3)^2) + ((B_1)^2 + (B_2)^2 + (B_3)^2)) \\ F_{ab} * F^{ab} &= 4(E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3) \end{aligned} \tag{3.87}$$

sada se direktno vidi

$$\begin{aligned} F_{ab}F^{ab} = 0 &\Leftrightarrow |\vec{E}| = |\vec{B}| \\ F_{ab} * F^{ab} = 0 &\Leftrightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{3.88}$$

gdje $|\vec{E}| = \sqrt{(E_1)^2 + (E_2)^2 + (E_3)^2}$, te $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3$ □

Jedan najuobičajeniji primjer ovakvih polja su upravo ravni EM valovi (pogledati poglavlje 9.2.2 u [11]).

3.9 Klasifikacija Weylovog tenzora

Weylov tenzor je tenzor C_{abcd} ranga 4 (pogledati za definiciju izraz (4.130) i ispod njega) koji ima raspis:

$$C_{abcd} = C_{ABCDA'B'C'D'} = \Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \bar{\Psi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} \tag{3.89}$$

gdje je $\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$ potpuno simetričan spinor. Po uzoru na poglavlje 3.7 slijedi:

$$\begin{aligned} \Psi_{ABCD}\xi^A\xi^A\xi^A\xi^A &= \Psi_{0000}\xi^0\xi^0\xi^0\xi^0 + 4\Psi_{0001}\xi^0\xi^0\xi^0\xi^1 \\ &\quad + 6\Psi_{0011}\xi^0\xi^0\xi^1\xi^1 + \Psi_{0111}\xi^0\xi^1\xi^1\xi^1 + \Psi_{1111}\xi^1\xi^1\xi^1\xi^1 \\ &= \xi^1\xi^1\xi^1\xi^1(\Psi_{0000}K^4 + 4\Psi_{0001}K^3 + 6\Psi_{0011}K^2 \\ &\quad + 44\Psi_{0111}K^1 + \Psi_{1111}) \\ &= \xi^1\xi^1\xi^1\xi^1(\alpha_0K + \alpha_1)(\beta_0K + \beta_1)(\eta_0K + \eta_1)(\zeta_0K + \zeta_1) \\ &= (\alpha_0\xi^0 + \alpha_1\xi^1)(\beta_0\xi^0 + \beta_1\xi^1)(\eta_0\xi^0 + \eta_1\xi^1)(\zeta_0\xi^0 + \zeta_1\xi^1) \\ &= \dots \\ &= \alpha_{(A}\beta_B\eta_C\zeta_{D)}(\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D) \end{aligned} \tag{3.90}$$

U tablici 3.2 vidi se klasifikacija spinora Ψ_{ABCD} koju nazivamo **Petrovljeva klasifikacija**. Nju je moguće opet povezati sa glavnim svjetlosnim smjerovima koju klasificiraju tenzor C_{abcd} (za usporedbu pogledati [4] poglavlje 2.9.2).

Tip	raznovrsnost smjerova	$\Psi_{ABCD} =$
I	{1,1,1,1}	$\alpha_{(A}\beta_B\eta_C\zeta_{D)}$
II	{2,1,1}	$\alpha_{(A}\alpha_B\eta_C\zeta_{D)}$
D	{2,2}	$\alpha_{(A}\alpha_B\eta_C\eta_{D)}$
III	{3,1}	$\alpha_{(A}\alpha_B\alpha_C\eta_{D)}$
N	{4}	$\alpha_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D$
0	{-}	0

Tablica 3.2: Petrovljeva klasifikacija spinora Ψ_{ABCD} po glavnim smjerovima

4 Spinori u općoj teoriji relativnosti

Sva razmatranja do sada su se odnosila na spinore i 4-vektore bez naglašene veze s mnogostrukostima, na kojima je izgrađena cijela opća teorija relativnosti. Formalna definicija i svojstva mnogostrukosti se nalaze u dodatku E, ali potrebno je napomenuti da je mnogostrukost takav skup točaka da je na njoj moguće definirati **skalare** kao beskonačno derivabilne funkcije sa mnogostrukosti M na skup $\mathbb{R}$. Prostor skalara označavamo s $\mathcal{F}$. Nadalje, potrebno je vektore i spinore formulirati kao entitete na mnogostrukosti. **Vektorska polja** se definiraju kao derivacije koje djeluju na skalare iz $\mathcal{F}$, kao što je vidljivo u dodatku F, te su elementi prostora vektorskih polja $\mathcal{L}$(pogledati poglavlje 5.4 u [5]). Prostor vektorskih polja u zapisu pomoću apstraktnih indeksa označavamo s npr. $\mathcal{L}^a$. Spinore ćemo onda postulirati kao entitete na mnogostrukosti od kojih su izgrađeni vektori.

4.1 Gradijent skalara i kovarijantna derivacija

Budući da je prostor vektorskih polja $\mathcal{L}$ potpuno refleksivni vektorski prostor (pogledati teorem D.2) moguće je definirati dualni vektorski prostor (i polje) od prostora $\mathcal{L}$.

Definicija 4.1. Neka je $f \in \mathcal{F}$ i $\mathbf{V} \in \mathcal{L}$, definiramo gradijent df kao element dualnog prostora od $\mathcal{L}$, sa zahtjevom:

$$df(\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}(f) \tag{4.1}$$

Napomena 4.1.1. vidimo da je df linearno preslikavanje $df : \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ iz definicije F.2:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{V} + h\mathbf{W}) &= (\mathbf{V} + h\mathbf{W})(f) = \mathbf{V}(f) + (h\mathbf{W})(f) = \mathbf{V}(f) + h\mathbf{W}(f) \\ &= df(\mathbf{V}) + hdf(\mathbf{W}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Iz teorema F.1 se vidi da je u sustavu $(A, x^{\mathbf{a}})$ jedna moguća baza dana kao:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} : \qquad \mathbf{a} \in 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

a dualna baza je

$$dx^{\mathbf{a}} : \qquad \mathbf{a} \in 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

jer

$$dx^{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{b}}} = \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} = \delta^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}} \tag{4.5}$$

Ako prijeđemo iz koordinata $x^{\mathbf{a}}$ u $y^{\mathbf{a}}$ vrijedi relacija između baza:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} = \frac{\partial y^{\mathbf{b}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} \frac{\partial}{\partial y^{\mathbf{b}}} \tag{4.6}$$

Kako bi pri promjeni iz $x^{\mathbf{a}}$ u $y^{\mathbf{a}}$ koordinate vrijedila relacija (4.5) definiramo zato relaciju između dualnih baza :

$$dy^{\mathbf{a}} = \frac{\partial y^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} dx^{\mathbf{b}} \tag{4.7}$$

Budući da $dx^{\mathbf{a}}$ predstavlja bazu dualnog prostora od $\mathcal{L}$ mora vrijediti raspis:

$$\begin{aligned} df &= f_{\mathbf{a}} dx^{\mathbf{a}} \quad \backslash \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{b}}} \\ f_{\mathbf{b}} &= \frac{\partial f}{\partial x^{\mathbf{b}}} \\ \Rightarrow df &= \frac{\partial f}{\partial x^{\mathbf{a}}} dx^{\mathbf{a}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Za upotrebu zapisa pomoću apstraktnih indeksa potrebno uvodi se oznaka

$$\nabla_a f \in \mathcal{L}_a \tag{4.9}$$

za kanonsku sliku od df iz duala od prostora $\mathcal{L}$. Slijedi nadalje da je moguće kao u sekciji 2.3 uvesti oznake:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ad\ldots}{}_{eg\ldots} &= \mathcal{L}^a \times \mathcal{L}^d \times \ldots \times \mathcal{L}_e \times \mathcal{L}_g \times \ldots \\ V^{ad\ldots}{}_{eg\ldots} \in \mathcal{L}^{ad\ldots}{}_{eg\ldots} &: \mathcal{L}_a \times \mathcal{L}_d \times \mathcal{L}^e \times \mathcal{L}^g \times \ldots \to \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Iz svojstava diferencijala funkcija slijedi:

$$\nabla_a (f + g) = \nabla_a f + \nabla_a g \tag{4.11}$$

$$\nabla_a (fg) = g \nabla_a f + f \nabla_a g \tag{4.12}$$

Očito ∇_a predstavlja linearno preslikavanje:

$$\nabla_a : \mathcal{F} \to \mathcal{L}_a \tag{4.13}$$

Gradijent skalara ima jedinstveno invarijantno značenje koje ovisi samo o strukturi mnogostrukosti M. Kako bi se uspostavio sličan invarijantan koncept koji bi odgovarao „gradijentu” vektora $V^a \in \mathcal{L}^a$ potrebna je dodatna struktura na M koju nazivamo koneksija afinog prostora (pogledati dodatak G). Definiciju gradijenta vektora je onda lako proširiti na bilo koji tenzor.

Definicija 4.2. Kovarijantna derivacija ∇_a je preslikavanje :

$$\nabla_c : \mathcal{L}^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_l} \to \mathcal{L}^{a_1\ldots a_n}_{b_1\ldots b_n c} \tag{4.14}$$

gdje su k i l bilo koji prirodni brojevi uključujući nulu uz značenje

$$\mathcal{L}^{a_1\ldots a_0}_{b_1\ldots b_l} \equiv \mathcal{L}_{b_1\ldots b_l} \tag{4.15}$$

$$\mathcal{L}^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_0} \equiv \mathcal{L}^{a_1\ldots a_k} \tag{4.16}$$

$$\mathcal{L}^{a_1\ldots a_0}_{b_1\ldots b_0} \equiv \mathcal{L} \equiv \mathcal{F} \tag{4.17}$$

sa svojstvima:

1. linearnost:

$$\nabla_c(T^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_r} + B^{d_1\ldots d_m}_{e_1\ldots e_m}) = \nabla_c T^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_r} + \nabla_c B^{d_1\ldots d_m}_{e_1\ldots e_m} \tag{4.18}$$

2. Leibnizovo pravilo derivacija:

$$\nabla_a(T^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_r} B^{d_1\ldots d_m}_{e_1\ldots e_m}) = \nabla_a(T^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_r}) B^{d_1\ldots d_m}_{e_1\ldots e_m} + T^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_r} \nabla_a B^{d_1\ldots d_m}_{e_1\ldots e_m} \tag{4.19}$$

3. komutira sa zamjenom i kontrakcijom indeksa koje ne uključuju indeks kovarijantne derivacije:

$$\begin{aligned} \delta^d_c \nabla_a(T^{a_1\ldots c\ldots a_l}) &= \nabla_a(T^{a_1\ldots d\ldots a_l}) \\ \delta^d_c \nabla_a(T^{a_1\ldots c\ldots a_l}_d) &= \nabla_a(T^{a_1\ldots d\ldots a_l}_d) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Definicija 4.3. Za neku kovarijantnu derivaciju ∇_c i $f \in \mathcal{F}$ definiramo tenzor torzije:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]} f = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_a \nabla_b) f \tag{4.21}$$

$$= T_{ab}{}^c \nabla_c f \tag{4.22}$$

Napomena 4.3.1. Za neki tenzor $X^{ab} \in \mathcal{L}^{ab}$ iz svojstava:

$$X^{ab} 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(k) = 0 \tag{4.23}$$

$$X^{ab} 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(f+g) = 2X^{ab}\nabla_{[a}\nabla_{b]}(f) + X^{ab}2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(g) \tag{4.24}$$

$$X^{ab} 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(fg) = X^{ab}2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(f)g + X^{ab}2f\nabla_{[a}\nabla_{b]}(g) \tag{4.25}$$

slijedi da je $X^{ab}2\nabla_{[a}\nabla_{b]} \in \mathcal{L}$. Iz teorema F.1 slijedi :

$$X^{ab} 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(f) = V^a \nabla_a f \tag{4.26}$$

$$\tag{4.27}$$

gdje $V^c = X^{ab} T_{ab}{}^c$ pa budući da vrijedi za svaki X^{ab} slijedi tvrdnja da je moguće definirati tenzor torzije kao u definiciji 4.3.

Napomena 4.3.2. Kovarijantne derivacije za koje $T_{ab}{}^c = 0$ nazivaju se bestorzijske kovarijantne derivacije.

Neka je dan operator

$$\Delta_{ab} = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]} - T_{ab}{}^{c}\nabla_{c} \tag{4.28}$$

Ovaj operator zadovoljava naredna svojstva :

$$\Delta_{ab} f = 0 \tag{4.29}$$

$$\Delta_{ab}(V_{ghi} + W_{def}) = \Delta_{ab}(V_{ghi}) + \Delta_{ab}(W_{def}) \tag{4.30}$$

$$\Delta_{ab}(fV_{ghi}) = f\Delta_{ab}(V_{ghi}) \tag{4.31}$$

$$\Delta_{ab}(V_{ghi}W_{def}) = W_{def}\Delta_{ab}(V_{ghi}) + V_{ghi}\Delta_{ab}(W_{def}) \tag{4.32}$$

Po tim svojstvima je moguće zaključiti da je preslikavanje

$$\Delta_{ab} : V^{c} \rightarrow \Delta_{ab}V^{c} \tag{4.33}$$

linearno iznad $\mathcal{F}$ te je po definiciji potpuno refleksivnih vektorskih prostora takvo preslikavanje moguće prikazati kao:

$$\Delta_{ab}V^{c} = R_{abd}{}^{c}V^{d} \tag{4.34}$$

Definicija 4.4. Tenzor zakrivljenosti $R_{abc}{}^{d}$ je definiran kao:

$$(\nabla_{a}\nabla_{b} - \nabla_{b}\nabla_{a} - T_{ab}{}^{e}\nabla_{e})V^{d} = R_{abc}{}^{d}V^{c} \tag{4.35}$$

ili za bestorzijske kovarijantne derivacije:

$$(\nabla_{a}\nabla_{b} - \nabla_{b}\nabla_{a})V^{d} = R_{abc}{}^{d}V^{c} \tag{4.36}$$

Iz svojstva $\Delta_{ab}f = \Delta_{ab}(V_{a}W^{a}) = 0$ i jednadžbe (4.32) slijedi:

$$\Delta_{ab}V_{c} = -R_{abc}{}^{d}V_{d} \tag{4.37}$$

te u slučaju općenitog vektora:

$$\Delta_{ab}V^{cd\ldots}_{ef\ldots} = R_{abg}{}^{c}V^{gd\ldots}_{ef\ldots} + R_{abg}{}^{d}V^{cg\ldots}_{ef\ldots} + \ldots - R_{abe}{}^{g}V^{gf\ldots}_{cd\ldots} - R_{abf}{}^{g}V^{eg\ldots}_{cd\ldots} - \ldots \tag{4.38}$$

Napomena 4.4.1. Tenzor zakrivljenosti je moguće zapisati pomoću vektora baze kao:

$$g^{\mathbf{c}}_{c}\Delta_{ab}g^{d}_{\mathbf{c}} = g^{\mathbf{c}}_{c}R_{abe}{}^{d}g^{e}_{\mathbf{c}} = R_{abc}{}^{d} \tag{4.39}$$

4.2 Metrika i Christoffelova kovarijantna derivacija

Definicija 4.5. Metrikom nazivamo simetrične nesingularne tenzore g_{ab} i g^{ab} sa svojstvima:

$$g_{ab}V^{b} = V_{a} \tag{4.40}$$

$$g^{ab}V_{b} = V^{a} \tag{4.41}$$

$$g^{ab}g_{ac} = \delta^{b}_{c} \tag{4.42}$$

Iz dodatka G se vidi da za bestorzijsku derivaciju ∇_a sljedeći izrazi ne ovise o afinoj koneksiji:

$$V^a \nabla_a g_{bc} + g_{ac} \nabla_b V^a + g_{ba} \nabla_c V^a \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \nabla_c V_b - \nabla_b V_c &= \nabla_c (g_{ab} V^a) - \nabla_b (g_{ac} V^a) \\ &= \nabla_c (g_{ab}) V^a + g_{ab} \nabla_c (V^a) - \nabla_b (g_{ac}) V^a - g_{ac} \nabla_b (V^a) \end{aligned} \tag{4.44}$$

Zbrajanjem ta dva izraza i množenjem sa $\frac{1}{2} g^{bd}$ slijedi izraz koji ne ovisi o afinoj koneksiji prostora:

$$\nabla_c V^d + V^a \left(\frac{1}{2} g^{bd} (\nabla_a g_{bc} + \nabla_c g_{ba} - \nabla_b g_{ac}) \right) \tag{4.45}$$

Neka bestorzijska kovarijanta derivacija ∇_a za koju vrijedi

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \tag{4.46}$$

očito i sama ne ovisi o afinoj koneksiji prostora jer za nju vrijedi:

$$\nabla_c V^d + V^a \left(\frac{1}{2} g^{bd} (\nabla_a g_{bc} + \nabla_c g_{ba} - \nabla_b g_{ac}) \right) = \nabla_c V^d \tag{4.47}$$

Definicija 4.6. Bestorzijska kovarijanta derivacija ∇_a koja zadovoljava uvjet

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \tag{4.48}$$

se naziva **Christoffelova kovarijantna derivacija**.

Teorem 4.1. *Christoffelova kovarijantna derivacija je jedinstvena i lokalno je u sustavu koordinata $(A, x^{\mathbf{a}})$ definirana kao:*

$$\nabla_c V^d = \partial_c V^d + V^a \left(\frac{1}{2} g^{bd} (\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ba} - \partial_b g_{ac}) \right) \tag{4.49}$$

gdje je

$$\partial_c = g_c^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{c}}} \tag{4.50}$$

a $g_c^{\mathbf{c}}$ su vektori baze (pogledati dodatak G)

Dokaz. 1. Jedinstvenost slijedi direktno iz toga da izraz (4.47) nema razlike za dvije kovarijantne derivacije (pogledati izraz (G.17) u dodatku G)

2. Valjanost lokalne definicije se vidi iz:

   (a) Ako $\nabla_a g_{bc} = 0$ odmah slijedi 4.49 jer je izraz (4.45) jednak za sve bestorzijske kovarijantne derivacije u što zapravo upada i ∂_a, što vidimo u (4.47)

(b) s druge strane iz lokalne definicije, simetričnosti g_{ab} i spoznaja iz teorema G.1 slijedi:

$$\begin{aligned}\nabla_a(g_{bc}) &= \partial_a(g_{bc}) - g_{bd}\left(\frac{1}{2}g^{ed}(\partial_a g_{ec} + \partial_c g_{ea} - \partial_e g_{ac})\right)\\ &\quad - g_{dc}\left(\frac{1}{2}g^{ed}(\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ea} - \partial_e g_{ab})\right)\\ &= \partial_a(g_{bc}) - \left(\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ba} - \partial_b g_{ac})\right)\\ &\quad - \left(\frac{1}{2}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

□

Napomena uz teorem 4.1.1. Važno je vidjeti da Christoffelova kovarijantna derivacija prima isti izraz u svim koordinatnim sustavima za razliku od npr. ∂_a

4.3 Riemannov tenzor

Definicija 4.7. Tenzor zakrivljenosti $R_{abc}{}^d$ za Christoffelovu derivaciju se zove **Riemannov tenzor**.

Teorem 4.2. *Riemannov tenzor ima sljedeća svojstva:*

1.

$$R_{abc}{}^e g_{ed} = R_{[ab][cd]} \tag{4.52}$$

2.

$$R_{[abc]d} = R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} = 0 \tag{4.53}$$

3.

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{4.54}$$

4. Bianchijev identitet

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \tag{4.55}$$

Dokaz. 1. antisimetričnost u prva dva indeksa je očita iz definicije tenzora zakrivljenosti:

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}V^d = R_{abc}{}^d V^c \tag{4.56}$$

Antisimetričnost u druga dva indeksa slijedi iz $\nabla_{[a}\nabla_{b]}g_{cd} = 0$ i $2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(V_c) = -R_{abc}{}^{d}V_d$:

$$-R_{abc}{}^{d}V_d = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(V^e g_{ec}) \tag{4.57}$$
$$= R_{abd}{}^{e}V^d g_{ec} = R_{abdc}V^d \tag{4.58}$$

sada budući je $R_{abcd}V^d = R_{abc}{}^{d}V_d$

$$-R_{abcd} = R_{abdc} \tag{4.59}$$

2.

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^{d}\nabla_d f &= 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c(f) \\ \Rightarrow R_{[abc]}{}^{d}\nabla_d f &= 2\nabla_{[[a}\nabla_{b]}\nabla_{c]}(f) \\ &= 2\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}(f) \\ = \frac{1}{3}(\nabla_a\nabla_b\nabla_c - \nabla_a\nabla_c\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\nabla_c &+ \nabla_b\nabla_c\nabla_a + \nabla_c\nabla_a\nabla_b + \nabla_c\nabla_b\nabla_a)(f) \\ &= \frac{1}{3}(\nabla_a(T_{bc}{}^{d}f) + \nabla_b(T_{ca}{}^{d}f) + \nabla_c(T_{ab}{}^{d}f) = 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

gdje jednakost nuli slijedi jer je torzija $T_{bc}{}^{d} = 0$ za Christoffelovu derivaciju. Korištenjem antisimetričnosti Riemannovog tenzora u prva dva indeksa dobije se:

$$0 = 3R_{[abc]d} = R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} \tag{4.61}$$

3. Slijedi iz svojstava (4.52) i (4.53):

$$\begin{aligned} 2R_{abcd} &= R_{abcd} + R_{badc} = -R_{cabd} - R_{bcad} - R_{dbac} - R_{adbc} \\ &= -R_{acdb} - R_{dacb} - R_{cbda} - R_{bdca} = R_{cdab} + R_{dcba} = 2R_{cdab} \end{aligned} \tag{4.62}$$

4.

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[a}\nabla_{[b}\nabla_{c]]}V^d &= \nabla_{[a}(R_{bc]e}{}^{d}V^e) \\ &= \nabla_{[a}(R_{bc]e}{}^{d})V^e + \nabla_{[a}(V^e)R_{bc]e}{}^{d} \end{aligned} \tag{4.63}$$
$$\begin{aligned} 2\nabla_{[[a}\nabla_{b]}\nabla_{c]}V^d &= \frac{1}{3}(\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_c + \nabla_{[b}\nabla_{c]}\nabla_a + \nabla_{[c}\nabla_{a]}\nabla_b)V^d \\ &= -R_{[abc]}{}^{e}\nabla_e V^d + R_{[ab|e|}{}^{d}\nabla_{c]}V^e \end{aligned} \tag{4.64}$$

oduzimanjem gornjih dvaju jednadžbi uz korištenje izraza (4.53) dobiva se:

$$0 = 2\nabla_{[[a}\nabla_{b]}\nabla_{c]}V^d - 2\nabla_{[a}\nabla_{[b}\nabla_{c]]}V^d = \nabla_{[a}(R_{bc]e}{}^{d})V^e \tag{4.65}$$
$$\Rightarrow \nabla_{[a}(R_{bc]e}{}^{d}) = 0 \tag{4.66}$$

□

Definicija 4.8. Tenzor $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^{c}$ zovemo **Riccijev tenzor**

Definicija 4.9. Skalar $R \equiv R_{a}{}^{a} = R_{ab}{}^{ab}$ se zove **Riccijev skalar** zakrivljenosti.

Iz Bianchijevog identiteta slijedi:

$$0 = g^{ad}g^{ce}3\nabla_{[a}R_{bc]de} = 2\nabla^{a}(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) \tag{4.67}$$

Definicija 4.10. Tenzor $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ nazivamo **Einsteinovim tenzorom**

Taj tenzor predstavlja osnovu Einsteinove jednadžbe polja kao najjednostavniju poveznicu tenzora T_{ab} i tenzora zakrivljenosti:

$$G_{ab} = CT_{ab} \tag{4.68}$$

No, više o tome u kasnijim poglavljima.

4.4 4-vektori, spinori i mnogostrukost

Kako bi se diskusija iz poglavlja 3 povezala sa vektorskim poljima definiranim na mnogostrukostima uzima se da je mnogostrukost 4-dimenzionalna.

Potrebno je proširiti definiciju derivacije $\mathbf{U} = U^{a}\nabla_{a}$ na kompleksne skalare

$$\mathcal{C} = \mathcal{F} \oplus i\mathcal{F} : \{x \in \mathcal{C} : x = f + ig; f, g \in \mathcal{F}\} \tag{4.69}$$

tako da:

$$U^{a}\nabla_{a} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \tag{4.70}$$

$$U^{a}\nabla_{a}(f + ig) = U^{a}\nabla_{a}f + iU^{a}\nabla_{a}g \tag{4.71}$$

Postulira se sada za svaku točku mnogostrukosti vektorski prostor $L^{AA'}$ izomorfan prostoru $\mathcal{L}^{a}_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}^{a} \oplus i\mathcal{L}^{a}$ koji je djeluje u toj točki, i to tako da svaki $V^{a}(P) \in \mathcal{L}^{a}_{\mathbb{C}}[P]$, gdje je $P \in M$, odgovara jednom 4-vektoru $V^{AA'} \in S^{AA'} \equiv L^{a}$. Ovdje imamo dakle lokalnu definicija 4-vektorskog prostora kao entiteta na mnogostrukosti, a posljedično i lokalnu definiciju spinornog prostora. Za detalja o djelovanju vektorskog polja u jednoj točki pogledati raspravu na stranici 187. u [5] ,a za više o vezi vektorskih polja i 4-vektora pogledati str. 211. i 212. u istoj knjizi.

Definicija kovarijantne derivacije se „prirodno" proširuje na djelovanje na spinorima kao:

$$\nabla_{a} \equiv \nabla_{AA'} : L^{B\ldots D'\ldots}_{G\ldots J'\ldots} \to L^{B\ldots D'\ldots}_{G\ldots J'\ldots AA'} \tag{4.72}$$

sa svojstvima linearnosti, Leibnizovog pravila deriviranja i komutacije sa zamjenom indeksa koje ne uključuju indekse kovarijantne derivacije slično kao u definiciji 4.2, uz dodatno svojstvo realnosti operatora kovarijantne derivacije:

$$\overline{\nabla_{AA'}\xi_{B}} = \nabla_{AA'}\overline{\xi_{B}} \tag{4.73}$$

Moguće je proširiti i definiciju Christoffelove derivacije tako da može djelovati na spinore. Za početak je potrebno definirati djelovanje Christoffelove derivacije na kompleksna vektorska polja, to je ostvareno na sljedeći način:

$$\nabla_a(V_b + iC_d) = \nabla_a(V_b) + i\nabla_a(C_d) \tag{4.74}$$

Promotrimo sljedeći izraz:

$$\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\nabla_a(\xi^B\beta^{C'}) - \epsilon_{B'C'}\beta^{B'}\nabla_a(\xi^B\alpha^{C'}) - \xi^B\nabla_a(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\beta^{C'}) \tag{4.75}$$

Taj je izraz dobro definiran za Christoffelova derivaciju ∇_a jer djeluje samo na elemente iz L^a i $\mathbb{C}$: On definira bilinearno preslikavanje:

$$S^{B'} \times S^{C'} \to S_a^B \tag{4.76}$$

te je prema tome element iz $S^B_{aB'C'}$. Označimo taj element s $A^B_{aB'C'}$. Zbog antisimetričnosti u zamjeni $B' \leftrightarrow C'$ slijedi iz jednakosti (2.49) da je :

$$A^B_{aB'C'} = \frac{1}{2}A^B{}_{aD'}{}^{D'}\epsilon_{B'C'} \tag{4.77}$$

te budući da je $\frac{1}{2}A^B{}_{aD'}{}^{D'}\epsilon_{B'C'}$ funkcija od ξ^B definiramo operaciju $\tilde{\nabla}_a$:

$$\widetilde{\nabla}_a\xi^B = \frac{1}{4}A^B{}_{aD'}{}^{D'} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned} 2\widetilde{\nabla}_a\xi^B\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\beta^{C'} \equiv{}& \epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\nabla_a(\xi^B\beta^{C'}) \\ &-\epsilon_{B'C'}\beta^{B'}\nabla_a(\xi^B\alpha^{C'}) - \xi^B\nabla_a(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\beta^{C'}) \end{aligned} \tag{4.79}$$

Teorem 4.3. *operacija $\widetilde{\nabla}_a : S^B \to S_a^B$ zadovoljava, uz $k \in \mathbb{C}$:*

1. *linearnost:*

$$\widetilde{\nabla}_a(k\xi^B + \eta^B) = k\widetilde{\nabla}_a(\xi^B) + \widetilde{\nabla}_a(\eta^B) \tag{4.80}$$

2. *Leibnizovo pravilo deriviranja uz $f \in \mathcal{C}$*

$$\widetilde{\nabla}_a(f\xi^B) = f\widetilde{\nabla}_a(\xi^B) + \xi^B\widetilde{\nabla}_a(f) \tag{4.81}$$

gdje je

$$\widetilde{\nabla}_a(f) \equiv \nabla_a f \tag{4.82}$$

Dokaz. Svojstva se dokažu korištenjem svojstava Christoffelove derivacije direktnim uvrštavanjem $k\xi^B + \eta^B$ i $f\xi^B$ na mjesto ξ^B u izraz (4.79) . □

Potrebno je proširiti definiciju $\widetilde{\nabla}_a$ na djelovanje na vanjski umnožak spinora. Slično kao ranije izraz:

$$\begin{aligned}\epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\alpha^{D'}\beta^{G'}\nabla_a(\xi^B\eta^C\gamma^{B'}\delta^{C'}) - \epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\gamma^{D'}\delta^{G'}\nabla_a(\xi^B\eta^C\alpha^{B'}\beta^{C'}) \\ +\xi^B\eta^C\nabla_a(\epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\alpha^{D'}\beta^{G'}\gamma^{B'}\delta^{C'})\end{aligned} \tag{4.83}$$

je dobro definiran za Christoffelovu derivaciju, te definira multilinearno preslikavanje $S^{B'C'D'G'} \to S^{BC}_a$. Prema tome ga je, uz primjedbu antilinearnosti $D \leftrightarrow B$,te $G \leftrightarrow C$, moguće napisati kao:

$$A^{BC}{}_{aB'C'D'G'} = \frac{1}{4}A^{BC}{}_{aF'H'}{}^{F'H'}\epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'} \tag{4.84}$$

te kao ranije definiramo:

$$\widetilde{\nabla}_a : S^{BC} \to S^{BC}_a \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_a(\xi^B\eta^C)\epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\alpha^{D'}\beta^{G'}\gamma^{B'}\delta^{C'} =& \epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\alpha^{D'}\beta^{G'}\nabla_a(\xi^B\eta^C\gamma^{B'}\delta^{C'}) \\ &- \epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\gamma^{D'}\delta^{G'}\nabla_a(\xi^B\eta^C\alpha^{B'}\beta^{C'}) \\ &- \xi^B\eta^C\nabla_a(\epsilon_{D'B'}\epsilon_{G'C'}\alpha^{D'}\beta^{G'}\gamma^{B'}\delta^{C'})\end{aligned} \tag{4.86}$$

korištenjem svojstava od $\nabla_{AA'}$ slijedi: $\widetilde{\nabla}_a(\xi^B\eta^C) = \xi^B\widetilde{\nabla}_a(\eta^C) + \eta^C\widetilde{\nabla}_a(\xi^B)$

Induktivno se definiraju i Christoffelove kovarijantne derivacije za spinor bilo kojeg ranga, te se dokazuje Leibnizovo pravilo.

Teorem 4.4. *Za operaciju $\widetilde{\nabla}_a : S^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} \to S^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots AA'}$, koju nazivamo Christoffelovom derivacijom spinora, a definirana je induktivno kao gore, vrijede slijedeća svojstva uz $V^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots}, W^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} \in S^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots}$ te $k \in \mathbb{C}$:*

1. *linearnost*

$$\widetilde{\nabla}_a(V^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} + kW^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots}) = \widetilde{\nabla}_a V^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} + k\widetilde{\nabla}_a W^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} \tag{4.87}$$

2. *Leibnizovo pravilo deriviranja*

$$\widetilde{\nabla}_a(V^{B\ldots}W^{C\ldots}) = \widetilde{\nabla}_a(V^{B\ldots})W^{C\ldots} + \widetilde{\nabla}_a(W^{C\ldots})V^{B\ldots} \tag{4.88}$$

3. *nema torzije, za svaki $f \in \mathcal{C}$:*

$$\widetilde{\nabla}_{[a}\widetilde{\nabla}_{b]}f = 0 \tag{4.89}$$

4. *komutiranje sa zamjenom bilo kojeg indeksa osim indeksa derivacije*

$$\delta^X_B\widetilde{\nabla}_a V^{BC\ldots}_{\ldots} = \widetilde{\nabla}_a V^{XC\ldots}_{\ldots} \tag{4.90}$$

5. *Levi-Civita je „kovarijantno konstantan”*

$$\widetilde{\nabla}_{AA'}\epsilon_{CD} = 0 \tag{4.91}$$

6. *jedinstvenost: neka druga kovarijantna derivacija koja ima ista svojstva kao gore mora biti jednaka ovoj derivaciji*

Dokaz. 1. Slijedi iz induktivne definicije operacije $\widetilde{\nabla}_a$ kao u (4.86) uvrštavanjem izraza $(V^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots} + kW^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots})$ na mjesto $V^{BC\ldots B'C'\ldots}_{EF\ldots G'H'\ldots}$

2. Ako se pretpostavi da operator $\widetilde{\nabla}_a$ definiran djelovanjem na spinor

$$V^{BC\ldots}_{EF\ldots} = \sum_i A(i)^B B(i)^C C(i)_E D(i)_F \cdots \tag{4.92}$$

ranga $(r, s; t, u)$ zadovoljava Leibnizovo pravilo deriviranja tako da je novi spinor $\widetilde{\nabla}_a V^{BC\ldots}_{EF\ldots}$ moguće napisati kao:

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_a V^{BC\ldots}_{EF\ldots} = \sum_i \Big(&\widetilde{\nabla}_a (A(i)^B) B(i)^C C(i)_E D(i)_F \cdots \\ &+ A(i)^B \widetilde{\nabla}_a (B(i)^C) C(i)_E D(i)_F \cdots + \ldots\Big)\end{aligned} \tag{4.93}$$

moguće je dokazati da induktivno definirani operatori $\widetilde{\nabla}_a$ zadovoljavaju to isto pravilo i za spinore ranga $(r+1, s; t, u), (r, s+1; t, u), (r, s; t+1, u), (r, s; t, u+1), \ldots$ te prema tome mora vrijediti i izraz (4.88) gdje su W i V spinori bilo kojeg ranga.

3. slijedi iz istog svojstva za vektore

4. slijedi iz istog svojstva za vektore

5. slijedi iz $\nabla_a g_{bc} = \nabla_a(\epsilon_{BC}\epsilon_{B'C'}) = 0$ za Christoffelovu derivaciju (pogledati za dokaz [5] str. 218)

6. slijedi iz svojstva Christoffelove derivacije:

Usporedimo dva operatora $\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{AA'}$ i $\widetilde{\nabla}_{AA'}$ pomoću izraza (4.75) i činjenice da $\widetilde{\nabla}_a(\xi^B\eta^{B'}) = \nabla_a(\xi^B\eta^{B'})$ te jedinstvenosti Christoffelove derivacije za vektore i skalare

$$\begin{aligned}&2\widetilde{\nabla}_a(\xi^B)\alpha_{B'}\beta^{B'} - 2\widetilde{\widetilde{\nabla}}_a(\xi^B)\alpha_{B'}\beta^{B'} = \\ &= \Big(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\widetilde{\nabla}_a(\xi^B\beta^{C'}) - \epsilon_{B'C'}\beta^{B'}\widetilde{\nabla}_a(\xi^B\alpha^{C'}) + \xi^B\widetilde{\nabla}_a(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\beta^{C'})\Big) \\ &- \Big(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\widetilde{\widetilde{\nabla}}_a(\xi^B\beta^{C'}) - \epsilon_{B'C'}\beta^{B'}\widetilde{\widetilde{\nabla}}_a(\xi^B\alpha^{C'}) + \xi^B\widetilde{\widetilde{\nabla}}_a(\epsilon_{B'C'}\alpha^{B'}\beta^{C'})\Big) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.94}$$

□

U ostatku teksta ćemo koristiti oznaku

$$\nabla_{AA'} \equiv \tilde{\tilde{\nabla}}_{AA'} \tag{4.95}$$

jer ne postoji opasnost od zamjene zbog identičnosti djelovanja na vektore.

4.5 Derivacija spinora u bazi

Uzmimo bazu spinora $\{\epsilon_0{}^A = o^A, \epsilon_1{}^A = \iota^A\}$ i $\{\epsilon_A{}^0 = -\iota_A, \epsilon_A{}^1 = o_A\}$, uz uvjet da vrijedi $o_A i^A = 1$. Slijede komponente od $\nabla_{AA'}\xi^B$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mathbf{A}}{}^A \epsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'} \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} \nabla_{AA'}\xi^B &= \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^{\mathbf{C}} \epsilon_{\mathbf{C}}{}^B) \\
&= \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^{\mathbf{C}}) \epsilon_{\mathbf{C}}{}^B + \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} \nabla_{\mathbf{AA}'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^B) \xi^{\mathbf{C}} \\
&= \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^{\mathbf{B}}) + \nabla_{\mathbf{AA}'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^B) \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} \xi^{\mathbf{C}} \\
&= \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^{\mathbf{B}}) + \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{C}}{}^{\mathbf{B}} \xi^{\mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

gdje je

$$\gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{C}}{}^{\mathbf{B}} = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^B) \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} = -\epsilon_{\mathbf{C}}{}^B \nabla_{\mathbf{AA}'}(\epsilon_B{}^{\mathbf{B}}) \tag{4.97}$$

Ako zahtijevamo $o_A i^A = 1$ u svakoj točki P, slijedi

$$\epsilon_{\mathbf{AB}} = \epsilon_{\mathbf{A}A} \epsilon_{\mathbf{B}}{}^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{AB}} \tag{4.98}$$

odatle slijedi:

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_{\mathbf{AA}'} \epsilon_{\mathbf{BC}} = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\epsilon_{\mathbf{B}A} \epsilon_{\mathbf{C}}{}^A) &= \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{BC}} - \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{CB}} \\
&\Rightarrow \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{BC}} = \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{CB}}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Ovo nam govori da $\gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{B}}{}^{\mathbf{C}}$ ima 12 različitih veličina

Zahtjev normalizacije $o_A i^A = 1$ nije nužan, te je ponekad korisno uzeti $o_A i^A = \chi$, u kom slučaju više ne vrijedi izraz (4.99). Za više o toj temi pogledati poglavlje 4.5 u [5].

Iz svega rečenog slijedi za slijedi za spinore $\xi^A, \xi_A, \eta^{A'}, \eta_{A'}$:

$$\nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^B) \epsilon_B{}^{\mathbf{B}} = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi^{\mathbf{B}}) + \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{C}}{}^{\mathbf{B}} \xi^{\mathbf{C}} \tag{4.100}$$

$$\epsilon_{\mathbf{B}}{}^B \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi_B) = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\xi_{\mathbf{B}}) - \gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{B}}{}^{\mathbf{C}} \xi_{\mathbf{C}} \tag{4.101}$$

$$\nabla_{\mathbf{AA}'}(\eta^{B'}) \epsilon_{B'}^{\mathbf{B}'} = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\eta^{\mathbf{B}'}) + \bar{\gamma}_{\mathbf{AA}'\mathbf{C}'}{}^{\mathbf{B}'} \eta^{\mathbf{C}'} \tag{4.102}$$

$$\epsilon_{\mathbf{B}'}{}^{B'} \nabla_{\mathbf{AA}'}(\eta_{B'}) = \nabla_{\mathbf{AA}'}(\eta_{\mathbf{B}'}) - \bar{\gamma}_{\mathbf{AA}'\mathbf{B}'}{}^{\mathbf{C}'} \eta_{\mathbf{C}'} \tag{4.103}$$

Uobičajeno je pojedine komponente $\gamma_{\mathbf{AA}'\mathbf{B}}{}^{\mathbf{C}}$ označiti sa 12 grčkih slova kao što se vidi u tablici 4.1a, gdje su oznake sa crticama češće korištene u [5] dok one bez crtica u [4], te su ovdje dane za lakše snalaženje po literaturi. Korisno je zapisati neki od izraza danih u 4.3 pomoću 4-vektora $\{l, m, \bar{m}, n\}$. Za ϵ imamo raspis:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \iota^B D(o_B) = \frac{1}{2}\iota^B \left(D(o_B) + D(o_B)\right) \\
&= \frac{1}{2}\iota^B \left(D(o_B o_{B'} \iota^{B'}) + D(o_B o_{B'} \iota^{B'})\right) \\
&= \frac{1}{2}\iota^B \left(D(o_B o_{B'})\iota^{B'} + o_B o_{B'} D(\iota^{B'}) + o_{B'} D(o_B \iota^{B'}) + D(o_{B'}) o_B \iota^{B'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\iota^B \left(D(o_B o_{B'})\iota^{B'} + o_B D(o_{B'} \iota^{B'}) - o^{B'} D(o_B \iota_{B'})\right) \\
&= \frac{1}{2}(n^a D(l_a) - \bar{m}^a D(m_a))
\end{aligned} \tag{4.104}
$$

Na sličan način se dobivaju i ostali izrazi iz tablice 4.4.

$\mathbf{AA'}$	$_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{C}}$			
	${}_0{}^0$	${}_0{}^1$	${}_1{}^0$	${}_1{}^1$
$00'$	ϵ	$-\kappa$	$\pi = -\tau'$	$-\epsilon = \gamma'$
$10'$	α	$-\rho$	$\lambda = -\sigma'$	$-\alpha = \beta'$
$01'$	β	$-\sigma$	$\mu = -\rho'$	$-\beta = \alpha'$
$11'$	γ	$-\tau$	$\nu = -\kappa'$	$-\gamma = \epsilon'$

(a) komponente od $\gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{C}}$

Oznaka derivacije	spinorni zapis	vektorski zapis
D	$o^A o^{A'} \nabla_{AA'}$	$l^a \nabla_a$
δ	$o^A \iota^{A'} \nabla_{AA'}$	$m^a \nabla_a$
$\bar{\delta}$	$\iota^A o^{A'} \nabla_{AA'}$	$\bar{m}^a \nabla_a$
Δ	$\iota^A \iota^{A'} \nabla_{AA'}$	$n^a \nabla_a$

(b) komponente kovarijantne derivacije

Tablica 4.1: Tablice oznaka

$\mathbf{a}$	$v_{\mathbf{a}} = (l, m, \bar{m}, n)$	$v_{\mathbf{a}} = (t, x, y, z)$
0	$o^A o^{A'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'}\right)$
1	$o^A \iota^{A'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A i^{A'} + \iota^A o^{A'}\right)$
2	$\iota^A o^{A'}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}\left(o^A i^{A'} + \iota^A o^{A'}\right)$
3	$\iota^A \iota^{A'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(o^A o^{A'} - \iota^A \iota^{A'}\right)$

Tablica 4.2: Vektori baze zapisani pomoću spinora

$\nabla_{\mathbf{AA'}}$	$-\nabla_{\mathbf{AA'}}(o^A) i_A$	$\nabla_{\mathbf{AA'}}(o^A) o_A$	$-\nabla_{\mathbf{AA'}}(i^A) i_A$	$\nabla_{\mathbf{AA'}}(i^A) o_A$
$\nabla_{00'} = D$	ϵ	$-\kappa$	$-\tau' = \pi$	$-\epsilon$
$\nabla_{01'} = \delta$	β	$-\sigma$	$-\rho' = \mu$	$-\beta$
$\nabla_{10'} = \bar{\delta}$	α	$-\rho$	$-\sigma' = \lambda$	$-\alpha$
$\nabla_{11'} = \Delta$	γ	$-\tau$	$-\kappa' = \nu$	$-\gamma$

Tablica 4.3: komponente od $\gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{C}}$ iskazane pomoću derivacija i spinora

$\nabla_{\mathbf{AA'}}$	$\frac{1}{2}\left(n^a \nabla_{\mathbf{AA'}}(l_a) - \bar{m}^a \nabla_{\mathbf{AA'}}(m_a)\right)$	$l^a \nabla_{\mathbf{AA'}}(m_a)$	$-\bar{m}^a \nabla_{\mathbf{AA'}}(n_a)$
$\nabla_{00'} = D$	ϵ	$-\kappa$	$-\tau' = \pi$
$\nabla_{01'} = \delta$	β	$-\sigma$	$-\rho' = \mu$
$\nabla_{10'} = \bar{\delta}$	α	$-\rho$	$-\sigma' = \lambda$
$\nabla_{11'} = \Delta$	γ	$-\tau$	$-\kappa' = \nu$

Tablica 4.4: veza između spinornog i vektorskog zapisa od $\gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{C}}$

4.6 *Spinori zakrivljenosti*

Riemannov tenzor zakrivljenosti ima spinorni ekvivalent dan kao:

$$R_{abcd} = R_{AA'BB'CC'DD'} \tag{4.105}$$

Iz antisimetričnosti u indeksima ab slijedi:

$$R_{abcd} = R_{(AB)[A'B']CC'DD'} + R_{[AB](A'B')CC'DD'} \tag{4.106}$$

Sada iz antisimetričnosti u cd i izraza koji povezuje ϵ_{AB} i $\phi_{...[AB]...}$ (izraz (2.49))slijedi:

$$\begin{aligned} R_{abcd} = {} & R_{(AB)[A'B'](CD)[C'D']} + R_{[AB](A'B')(CD)[C'D']} + R_{(AB)[A'B'][CD](C'D')} \\ & + R_{[AB](A'B')[CD](C'D')} \qquad (4.107) \\ = {} & X_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \bar{X}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \Phi_{ABC'D'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{CD} \\ & + \bar{\Phi}_{A'B'CD}\epsilon_{AB}\epsilon_{C'D'} \qquad (4.108) \end{aligned}$$

Kako je i Riemannov tenzor moguće zapisati pomoću vektora baze (izraz (4.39)) tako je moguće povezati i spinore X_{ABCD} i $\Phi_{ABC'D'}$ sa derivacijama i spinorima baze:

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^{d} &= g_c^{\mathbf{c}} \Delta_{ab} g_{\mathbf{c}}^{d} \\ &= \epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\Delta_{ABA'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) \\ &= \epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\epsilon_{C'}{}^{D'}\Delta_{ABA'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) + \epsilon_C{}^{D}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\Delta_{ABA'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) \\ &= \epsilon_{C'}{}^{D'}\epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\square_{AB}\epsilon_{A'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) + \epsilon_{C'}{}^{D'}\epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\square_{A'B'}\epsilon_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) \\ &\quad + \epsilon_C{}^{D}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\square_{AB}\epsilon_{A'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) + \epsilon_C{}^{D}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\square_{A'B'}\epsilon_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) \\ &= \epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'}{}^{D'}\epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\square_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) + \epsilon_{AB}\epsilon_{C'}{}^{D'}\epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\square_{A'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) \\ &\quad + \epsilon_C{}^{D}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\square_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) + \epsilon_{AB}\epsilon_C{}^{D}\epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\square_{A'B'}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) \end{aligned} \tag{4.109}$$

gdje je

$$\Delta_{ab} = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]} \tag{4.110}$$

te je

$$\square_{AB}\epsilon_{A'B'} = \Delta_{(AB)[A'B']} \tag{4.111}$$

$$\square_{A'B'}\epsilon_{AB} = \Delta_{[AB](A'B')} \tag{4.112}$$

$$\Delta_{ab} = \Delta_{[AB](A'B')} + \Delta_{(AB)[A'B']} \tag{4.113}$$

a u izrazu (4.109) je iskorišteno da je

$$\nabla_a\epsilon_{AB} = \nabla_a\epsilon_{A'B'} = 0 \tag{4.114}$$

Sada usporedbom (4.108) i (4.109) slijedi veza Riemannovih spinora X_{ABCD} i $\Phi_{ABC'D'}$ s derivacijama baza :

$$X_{ABC}{}^{D} = \epsilon_C{}^{\mathbf{C}}\square_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^{D}) \tag{4.115}$$

$$\Phi_{ABC'}{}^{D'} = \epsilon_{C'}{}^{\mathbf{C}'}\square_{AB}(\epsilon_{\mathbf{C}'}{}^{D'}) \tag{4.116}$$

Iz (4.113), (4.115) i (4.116) slijedi :

$$\begin{aligned}\Delta_{ab}\alpha^D &= \Delta_{ab}(\alpha^{\mathbf{D}}\epsilon_{\mathbf{D}}{}^D)\\ &= \alpha^{\mathbf{D}}\Delta_{ab}(\epsilon_{\mathbf{D}}{}^D)\\ &= \alpha^C\epsilon_C{}^{\mathbf{D}}\Delta_{ab}(\epsilon_{\mathbf{D}}{}^D)\\ &= \alpha^C(\epsilon_{A'B'}X_{ABC}{}^D + \epsilon_{AB}\Phi_{A'B'C}{}^D)\end{aligned} \tag{4.117}$$

Očito iz (4.108) za X_{ABCD} i $\Phi_{ABC'D'}$ slijede svojstva :

$$X_{ABCD} = X_{(AB)(CD)} \tag{4.118}$$

$$\Phi_{ABC'D'} = \Phi_{(AB)(C'D')} \tag{4.119}$$

Iz simetrije na zamjenu $ab \leftrightarrow cd$ od R_{abcd} slijedi:

$$X_{ABCD} = X_{CDAB} \tag{4.120}$$

$$\bar{\Phi}_{ABC'D'} = \Phi_{ABC'D'} \tag{4.121}$$

Iz (4.121) slijedi da je $\Phi_{AA'BB'}$ odgovara simetričnom realnom tenzoru Φ_{ab} koji za kojega vrijedi i:

$$\Phi_a{}^a = \Phi_{(AB)(A'B')}\epsilon^{AB}\epsilon^{A'B'} = 0 \tag{4.122}$$

zbog kontrakcije antisimetričnog Levi-Civita spinora i simetričnog $\Phi_{ABC'D'}$.

Moguće je izvući još jedan zaključak o spinoru X_{ABCD} iz uvjeta $R_{[abc]d} = 0$ i koristeći izraze iz poglavlja o Hodgeovom dualu (3.6), uz izraz za kontrakciju dvaju Levi-Civita tenzora koji se može provjeriti u nekoj bazi:

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{afgh} = -3!\delta^f_{[b}\delta^g_c\delta^h_{d]} \tag{4.123}$$

Slijedi sada:

$$\begin{aligned}0 = R_{a[bcd]} &= \delta^e_{[b}\delta^f_c\delta^g_{d]}R_{aefg} = -\frac{1}{3!}\epsilon_{hbcd}(\epsilon^{hefg}R_{aefg})\\ &= -\frac{1}{3!}\epsilon_{hbcd}(iR_{AA'EE'}{}^{HEE'H'})\\ &= -\frac{1}{3!}\epsilon_{hbcd}i\Big(-X_{AE}{}^{HE}\epsilon_{A'E'}\epsilon^{H'E'} + \bar{X}_{A'E'}{}^{H'E'}\epsilon_{AE}\epsilon^{HE}\\ &\quad +\Phi_{AE}{}^{H'E'}\epsilon_{A'E'}\epsilon^{HE} - \bar{\Phi}_{A'E'}{}^{HE}\epsilon_{AE}\epsilon^{H'E'}\Big)\end{aligned} \tag{4.124}$$

Iz čega uz već poznatu realnost $\Phi_{ABC'D'}$, te uz

$$\epsilon_{AB}\epsilon^{CB} = \epsilon_A{}^C \equiv \delta_A^C \tag{4.125}$$

slijedi:

$$\begin{aligned}X_{AE}{}^{HE}\epsilon_{A'}{}^{H'} &= \bar{X}_{A'E'}{}^{H'E'}\epsilon_A{}^H \qquad \backslash\ \epsilon_{H'}{}^{A'}\epsilon_{BH}\\ X_{AEB}{}^E &= \frac{1}{2}\bar{X}_{A'E'}{}^{A'E'}\epsilon_{AB}\end{aligned} \tag{4.126}$$

Definiramo realni skalar Λ uz konvencionalni faktor $\frac{1}{6}$ tako da je:

$$\Lambda = \frac{1}{6} X_{AB}{}^{AB} \tag{4.127}$$

gdje realnost od Λ slijedi iz (4.126).

Koristeći (4.118), (4.120) i (4.126), te $\alpha_{[AB]} = 1/2\ \alpha_A^A \epsilon_{AB}$ slijedi važan raspis spinora X_{ABCD}:

$$\begin{aligned} X_{ABCD} &= \frac{1}{3}\left((X_{ABCD} + X_{ACDB} + X_{ADBC}) + X_{ABCD} - X_{ADBC} + X_{ABCD} - X_{ACDB}\right) \\ &= X_{(ABCD)} + \frac{1}{3} X_{A[B|C|D]} + \frac{1}{3} X_{A[B|D|C]} \\ &= \Psi_{ABCD} + \Lambda(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}) \end{aligned} \tag{4.128}$$

gdje $\Psi_{ABCD} = X_{(ABCD)}$.

Definicija 4.11. Spinor Ψ_{ABCD} nazivamo gravitacijski spinor. Za njega će se pokazati da predstavlja dio Riemannovog tenzora R_{abcd} koji je različit od nule za prazan prostor (pogledati sljedeće poglavlje o Einsteinovoj jednadžbi).

Napomena 4.11.1. Za spinor Ψ_{ABCD} vrijedi Petrovljeva klasifikacija kao što je vidljivo u tablici 3.2, te i sam Riemannov tenzor nazivamo ovisno o klasifikaciji Ψ_{ABCD}. Na primjer ako je Ψ_{ABCD} tipa II („algebarski specijalan") za pripadajući Riemannov tenzor kažemo da je tipa II, tj. algebarski specijalan.

Za zaključak korištenjem raspisa spinora X_{ABCD} i izraza $\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]} = 0$ raspis tenzora R_{abcd} je dan kao:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &\equiv R_{AA'BB'CC'DD'} \\ &= \Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \bar{\Psi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} \\ &+ \Phi_{ABC'D'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{CD} + \Phi_{A'B'CD}\epsilon_{AB}\epsilon_{C'D'} \\ &+ 2\Lambda(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'D'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{A'D'}\epsilon_{B'C'}) \end{aligned} \tag{4.129}$$

te u tenzorskom obliku

$$R_{abcd} = C_{abcd} + E_{abcd} + 2\Lambda g_{abcd} \tag{4.130}$$

gdje su pojedini tenzori dani kao:

$$C_{abcd} = \Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \bar{\Psi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}$$
$$E_{abcd} = \Phi_{ABC'D'}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{CD} + \Phi_{A'B'CD}\epsilon_{AB}\epsilon_{C'D'}$$

$$\begin{aligned} g_{abcd} &= \epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'D'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{A'D'}\epsilon_{B'C'} \\ &= g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc} \end{aligned} \tag{4.131}$$

(4.132)

Tenzor C_{abcd} nazivamo **Weylov tenzor**

Korištenjem simetrija od ϵ_{AB}, Ψ_{ABCD} i $\Phi_{ABC'D'}$ slijede izrazi za Riccijev tenzor i Riccijev skalar:

$$R_{ab} = R_{acbd}g^{cd} = 6\Lambda g_{ab} - 2\Phi_{ab} \tag{4.133}$$

$$R = R_{ab}g^{ab} = 24\Lambda \tag{4.134}$$

Na kraju još samo spomenimo zapis koja je uobičajena za komponente spinora zakrivljenosti Ψ_{ABCD} u spinornoj bazi:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\equiv \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C o^D \\
\Psi_1 &\equiv \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C \iota^D \\
\Psi_2 &\equiv \Psi_{ABCD}o^A o^B \iota^C \iota^D \\
\Psi_3 &\equiv \Psi_{ABCD}o^A \iota^B \iota^C \iota^D \\
\Psi_4 &\equiv \Psi_{ABCD}\iota^A \iota^B \iota^C \iota^D
\end{aligned} \tag{4.135}$$

te slično tako za $\Phi_{ABC'D'}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &\equiv \Phi_{ABC'D'}o^A o^B o^{C'} o^{D'} \\
\Phi_{01} &\equiv \Phi_{ABC'D'}o^A o^B o^{C'} \iota^{D'} \\
\Phi_{02} &\equiv \Phi_{ABC'D'}o^A o^B \iota^{C'} \iota^{D'} \\
\Phi_{10} &\equiv \Phi_{ABC'D'}\iota^A o^B o^{C'} o^{D'} \\
\Phi_{20} &\equiv \Phi_{ABC'D'}\iota^A \iota^B o^{C'} o^{D'} \\
\Phi_{11} &\equiv \Phi_{ABC'D'}\iota^A o^B \iota^{C'} o^{D'} \\
\Phi_{12} &\equiv \Phi_{ABC'D'}o^A \iota^B \iota^{C'} \iota^{D'} \\
\Phi_{21} &\equiv \Phi_{ABC'D'}\iota^A \iota^B o^{C'} \iota^{D'} \\
\Phi_{22} &\equiv \Phi_{ABC'D'}\iota^A \iota^B \iota^{C'} \iota^{D'}
\end{aligned} \tag{4.136}$$

4.7 Tenzor energije i impulsa

Za uspostavu veze između materije (tvari) i prostora potrebno je definirati tenzor energije i impulsa.

U ovom će se poglavlju pojavljivati izrazi koji nisu strogo definirani unutar ovog rada kao npr. integral po volumenu, energija, impuls, itd. Za takve neke pojmove može se pogledati izvore kao što je npr. [10] na koju se oslanja dijelom ovo poglavlje, te neku knjigu klasične elektrodinamike (kao npr. [12] ili [11]). U izrazima koji slijede pojavljivat će se konstanta c i označavat će brzinu svjetlosti u vakuumu. Uobičajeno je prigodnim izborom jedinica staviti c u 1, što je i primijenjeno u nekim poglavljima.

Definicija 4.12. Ravan prostor je prostor-vrijeme u kom je Riemannov tenzor zakrivljenosti jednak nuli u svim točkama.

U ravnom prostoru u koordinatama $x^{\mathbf{0}} = ct, x^{\mathbf{1}} = x, x^{\mathbf{2}} = y, x^{\mathbf{3}} = z$ za 4-vektor struje

$$j^{\mathbf{a}} = \rho \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial t} \tag{4.137}$$

gdje je ρ gustoća naboja, a $x^{\mathbf{a}}$ su pojedine koordinate naboja iz jednadžbe neprekidnosti gustoće naboja i struje $\partial_{\mathbf{a}} j^{\mathbf{a}} = 0$ slijedi ukupno očuvanje naboja:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int dV \rho\right) = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \tag{4.138}$$

Za dokaz je moguće pogledati na 66. str. u [10].

Definicija 4.13. Definiramo 4-vektor impulsa kao:

$$p^{\mathbf{a}} = m u^{\mathbf{a}} \tag{4.139}$$

gdje je 4-brzina definirana kao

$$u^{\mathbf{a}} = \frac{dx^{\mathbf{a}}}{d\tau} \tag{4.140}$$

a diferencijal vlastitog vremena τ je dan kao

$$(cd\tau)^2 = g_{\mathbf{ab}} dx^{\mathbf{a}} dx^{\mathbf{b}} \tag{4.141}$$

Teorem 4.5. *U izoliranom sustavu (npr. slobodnu čestica) u ravnom prostoru je 4-vektor energije-impulsa ukupnog sustava očuvan.*

Dokaz. Lagranžijan slobodne čestice u ravnom prostoru glasi (pogledati stranicu 53. iz [10]):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{4.142}$$

gdje je

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{4.143}$$

ukupna brzina čestice u koordinatnom sustavu (ct, x, y, z). Lagrangeove jednadžbe (str. 52 u [10]) glase onda:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^{\mathbf{a}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mathbf{a}}}\right) \tag{4.144}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mathbf{a}}}\right) \tag{4.145}$$

gdje je $\dot{x}^{\mathbf{a}} = dx^{\mathbf{a}}/dt$ i $\mathbf{a} \in \{1,2,3\}$. Odatle slijedi da je brzina v konstantna u vremenu, pa je i

$$p^{\mathbf{a}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mathbf{a}}} \quad \mathbf{a} \in \{1,2,3\} \tag{4.146}$$

$$= m\dot{x}^{\mathbf{a}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.147}$$

konstanta u vremenu. S druge strane slijedi da je i energija konstantna:

$$E = H = \sum_{\mathbf{a}=1}^{3} \dot{x}^{\mathbf{a}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mathbf{a}}} - L = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.148}$$

Moguće je pokazati da ako se stavi $p^0 = E/c$ i ako vrijedi (4.146) za ostale tri komponente $p^{\mathbf{a}}$ gdje $\mathbf{a} \in \{0,1,2,3\}$ onda vrijedi jednakost (4.139). $\square$

Moguće je povezati u analogiji sa 4-vektorom gustoće struje da zahtjev očuvanja 4-vektora energije i impulsa slijedi iz „jednadžbe kontinuteta” nekog tenzora T_{ab}

$$\frac{\partial T^{\mathbf{ab}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} = 0 \tag{4.149}$$

Taj tenzor nazivamo tenzor gustoće energije impulsa i komponente od p^a i T^{ab} su povezane izrazom:

$$p^{\mathbf{a}} = \int_V T^{0\mathbf{a}} dV \tag{4.150}$$

Jednadžba kontinuiteta ima „prirodno” poopćenje na bilo koji prostor i glasi:

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \tag{4.151}$$

No takva jednadžba ne dovodi u prostoru koji nije ravan (tj. u zakrivljenom prostoru) do očuvanja 4-vektora energije impulsa jer taj prostor onda nije izoliran, nego je pod utjecajem gravitacijske sile koja također posjeduje svoju vlastitu energiju i impuls, te je potrebno proširiti sustav da i on bude uključen u zakon sačuvanja (energiju i impuls gravitacije nije moguće uključiti niti u jedan tenzor T_{ab}).

Za tenzor gustoće energije impulsa moguće je pokazati da je simetričan tj.:

$$T_{ab} = T_{ba} \tag{4.152}$$

Simetričan tenzor energije impulsa povlači očuvanje kutne količine gibanja u ravnom prostoru za daljnji komentar pogledati str. 20 u [16]. Ponekad se kanonskim postupcima dobije nesimetričan T_{ab}, njega je onda moguće simetrizirati. Za više o toj temi pogledati [17].

4.8 *Einsteinova jednadžba*

U jednadžbi koja opisuje vezu prostora i materije kao izvor zakrivljenosti se po analogiji na gustoću struje u izrazu (4.153) koji vrijedi za elektromagnetsko polje (zapisan u ravnom prostoru u SI sustavu) stavlja tenzor gustoće energije impulsa T_{ab}.

$$\frac{\partial F^{\mathbf{ab}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} = \mu_0 j^{\mathbf{b}} \tag{4.153}$$

Tenzor drugog reda koji ima veze sa zakrivljenosti prostora je Riccijev tenzor R_{ab} te Riccijev skalar R pomnožen metrikom g_{ab}. Moglo bi se pisati:

$$c_1 R^{ab} + c_2 R g^{ab} = C T^{ab} \tag{4.154}$$

Kako bi vrijedilo $\nabla_a T^{ab} = 0$ iz (4.67) slijedi da moramo staviti $c_1 = 1$ te $c_2 = 1/2$. Konstanta C se računa iz zahtjeva da u limesu malih masa dobijemo Newtonove jednadžbe gravitacije. Dobije se $C = -8\pi G/c^2$, gdje je G Newtonova konstanta gravitacije (pogledati str. 201. u [10]), a minus je naš izbor (po uzoru na knjigu Penrosea i Rindlera [5]), tako da će svi T_{ab} imati u sebi još jedan dodatni faktor -1 u odnosu na tenzore energije i impulsa u radovima koji koriste češće korištenu konvenciju da je $C = 8\pi G/c^2$. Dakle, Einsteinova jednadžba gravitacijskog polja s materijom glasi:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{4.155}$$

Te pomoću izraza (4.133) i (4.134) slijedi:

$$6\Lambda g_{ab} + 2\Phi_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{4.156}$$

Moguće je dodati i tzv. **kozmološku konstantu** λ

$$6\Lambda g_{ab} + 2\Phi_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} + g_{ab}\lambda \tag{4.157}$$

Vidimo iz gornje jednadžbe da u vakuumu vrijedi:

$$\Phi_{ab} = 0 \tag{4.158}$$

$$\Lambda = \frac{1}{6}\lambda \tag{4.159}$$

što znači da je u prostoru bez izvora zakrivljenost prostora sasvim izražena pomoću Ψ_{ABCD} spinora.

Zanimljiva jednadžba se dobiva nalaženjem spinorne verzije Bianchijevog identiteta

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 = i\nabla^{AA'} R_{AB'BA'cd} \tag{4.160}$$

Ona glasi (pogledati dokaz na str 245. u [5]) :

$$\nabla^A_{B'} X_{ABCD} = \nabla^{A'}_B \Phi_{A'B'CD} \tag{4.161}$$

odatle raspisom spinora X_{ABCD} slijedi:

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{ABCD} = \nabla^{A'}_B \Phi_{A'B'CD} - 2\epsilon_{B(D}\nabla_{C)B'}\Lambda \tag{4.162}$$

Koju je nadalje moguće razdvojiti na dio simetričan i antisimetričan u BC:

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{ABCD} = \nabla^{A'}_{(B} \Phi_{CD)A'B'} \tag{4.163}$$

$$\nabla^{A'}_{[B} \Phi_{C]DA'B'} = 2\epsilon_{B(C}\nabla_{D)B'}\Lambda \tag{4.164}$$

Zbog (4.158) i (4.159), zaključujemo da ta jednadžba u vakuumu postaje:

$$\nabla^{AA'} \Psi_{ABCD} = 0 \tag{4.165}$$

Ta jednadžba zajedno sa $\Phi_{ABC'D'} = 0$ i $\Lambda = 1/6\lambda$ određuje „širenje” (propagaciju) zakrivljenosti u vakuumu. Ta jednadžba odgovara jednadžbi propagacije slobodne bezmasene čestice spina 2 koja će biti pokazana u poglavlju 5.2, te je pokazatelj da bi čestice koje propagiraju gravitacijsko djelovanje bile spina 2!

Često je korisno imati jednadžbu 4.165 zapisanu po komponentama:

$$\nabla^{\mathbf{AA'}} \Psi_{\mathbf{ABCD}} = 4\Psi_{\mathbf{E(BCD}} \gamma^{\mathbf{AA'}}{}_{\mathbf{A)}}{}^{\mathbf{E}} \tag{4.166}$$

korištenjem tablica 4.1 i konvencije iz jednadžbi (4.135) za pisanje komponenti od Ψ_{ABCD} slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 &= (4\gamma - \mu)\Psi_0 - (4\tau + 2\beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 \\
-\delta\Psi_0 + D\Psi_1 &= (-4\alpha + \pi)\Psi_0 + (4\rho + 2\epsilon)\Psi_1 - 3\kappa\Psi_2 \\[2em]
\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 &= \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 \\
-\delta\Psi_1 + D\Psi_2 &= -\lambda\Psi_0 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 \\[2em]
\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 &= 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 \\
-\delta\Psi_2 + D\Psi_3 &= -2\lambda\Psi_1 + 3\pi\Psi_2 + 2(\rho - \epsilon)\Psi_3 - \kappa\Psi_4 \\[2em]
\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 &= 3\nu\Psi_2 - (4\mu + 2\gamma)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 \\
-\delta\Psi_3 + D\Psi_4 &= -3\lambda\Psi_2 + (4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + (-4\epsilon + \rho)\Psi_0
\end{aligned} \tag{4.167}$$

gdje se pri raspisu radi jednostavnosti koristile formule (3.137) u [4], koje su dane kao spinorna verzija Bianchijevog identiteta raspisana po komponentama u neprazznom prostoru, tj. u prostoru u kojem ne mora nužno biti $\Phi_{ABC'D'} = 0$ i $\Lambda = \frac{1}{6}\lambda$, no nama će i ove gore biti korisne!

4.9 Newman-Penroseove jednadžbe polja

Newman-Penroseove jednadžbe polja oslikavaju vezu između derivacija spinora u bazi i spinora zakrivljenosti prostora. Kako bi se dobila tražena veza počinjemo od jednadžbe (4.117) tj.:

$$\Delta_{ab}\alpha^D = \alpha^C(\epsilon_{A'B'}X_{ABC}{}^D + \epsilon_{AB}\Phi_{A'B'C}{}^D) \tag{4.168}$$

Potrebno je sada množiti taj izraz sa spinorima baze $g_{\mathbf{a}}{}^a g_{\mathbf{b}}{}^b \epsilon_D{}^{\mathbf{D}}$, gdje $g_{\mathbf{a}}{}^a = \epsilon_{\mathbf{A}}{}^A \epsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'}$. Desna strana jednakosti glasi:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}{}^a g_{\mathbf{b}}{}^b \epsilon_D{}^{\mathbf{D}} \alpha^C(\epsilon_{A'B'}X_{ABC}{}^D + \epsilon_{AB}\Phi_{A'B'C}{}^D) = \\ = \alpha^{\mathbf{C}}(\epsilon_{\mathbf{A'B'}}X_{\mathbf{ABC}}{}^{\mathbf{D}} + \epsilon_{\mathbf{AB}}\Phi_{\mathbf{A'B'C}}{}^{\mathbf{D}}) \end{aligned} \tag{4.169}$$

dok je lijeva strana jednakosti :

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}{}^a g_{\mathbf{b}}{}^b \epsilon_D{}^{\mathbf{D}}(\Delta_{ab}\alpha^D) &= \alpha^{\mathbf{C}} g_{\mathbf{a}}{}^a g_{\mathbf{b}}{}^b \epsilon_D{}^{\mathbf{D}}(\Delta_{ab}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) \\ &= \alpha^{\mathbf{C}}\epsilon_D{}^{\mathbf{D}}\left(g_{\mathbf{b}}{}^b(g_{\mathbf{a}}{}^a\nabla_a)\nabla_b - g_{\mathbf{a}}{}^a(g_{\mathbf{b}}{}^b\nabla_b)\nabla_a\right)(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) \\ &= \alpha^{\mathbf{C}}\epsilon_D{}^{\mathbf{D}}\left((g_{\mathbf{a}}{}^a\nabla_a)(g_{\mathbf{b}}{}^b\nabla_b) - g_{\mathbf{a}}{}^a(\nabla_a g_{\mathbf{b}}{}^b)\nabla_b \right. \\ &\quad \left. - (g_{\mathbf{b}}{}^b\nabla_b)(g_{\mathbf{a}}{}^a\nabla_a) + g_{\mathbf{b}}{}^b(\nabla_b g_{\mathbf{a}}{}^a)\nabla_a\right)(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) \\ &= \alpha^{\mathbf{C}}\epsilon_D{}^{\mathbf{D}}\Big(\nabla_{\mathbf{a}}\nabla_{\mathbf{b}} - (\nabla_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{B}}{}^B\epsilon_{\mathbf{B}'}{}^{B'})\epsilon_B{}^{\mathbf{E}}\epsilon_{B'}{}^{\mathbf{E}'}\nabla_{\mathbf{e}} \\ &\quad - \nabla_{\mathbf{b}}\nabla_{\mathbf{a}} + (\nabla_{\mathbf{b}}\epsilon_{\mathbf{A}}{}^A\epsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'})\epsilon_A{}^{\mathbf{E}}\epsilon_{A'}{}^{\mathbf{E}'}\nabla_{\mathbf{e}}\Big)(\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) \end{aligned} \tag{4.170}$$

Prvi član u (4.170) je moguće napisati kao:

$$\begin{aligned} \delta_D^E\epsilon_E{}^{\mathbf{D}}\nabla_{\mathbf{a}}(\nabla_{\mathbf{b}}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) &= \epsilon_E{}^{\mathbf{D}}\nabla_{\mathbf{a}}(\epsilon_{\mathbf{E}}{}^E\epsilon_D{}^{\mathbf{E}}\nabla_{\mathbf{b}}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) \\ &= \epsilon_E{}^{\mathbf{D}}\nabla_{\mathbf{a}}(\epsilon_{\mathbf{E}}{}^E\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}}) \\ &= \epsilon_E{}^{\mathbf{D}}\nabla_{\mathbf{a}}(\epsilon_{\mathbf{E}}{}^E)\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}} + \epsilon_E{}^{\mathbf{D}}\epsilon_{\mathbf{E}}{}^E\nabla_{\mathbf{a}}(\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}}) \\ &= \gamma_{\mathbf{AA'E}}{}^{\mathbf{D}}\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}} + \nabla_{\mathbf{a}}\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{D}} \end{aligned} \tag{4.171}$$

Treći član slijedi zamjenom $\mathbf{AA'} \leftrightarrow \mathbf{BB'}$ iz prvog člana

$$\epsilon_D{}^{\mathbf{D}}\nabla_{\mathbf{b}}(\nabla_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D) = \gamma_{\mathbf{BB'E}}{}^{\mathbf{D}}\gamma_{\mathbf{AA'C}}{}^{\mathbf{E}} + \nabla_{\mathbf{b}}\gamma_{\mathbf{AA'C}}{}^{\mathbf{D}} \tag{4.172}$$

Drugi član:

$$\begin{aligned} \epsilon_D{}^{\mathbf{D}}(\nabla_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{B}}{}^B\epsilon_{\mathbf{B}'}{}^{B'})\epsilon_B{}^{\mathbf{E}}\epsilon_{B'}{}^{\mathbf{E}'}\nabla_{\mathbf{e}}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D &= (\nabla_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{B}}{}^B\epsilon_{\mathbf{B}'}{}^{B'})\epsilon_B{}^{\mathbf{E}}\epsilon_{B'}{}^{\mathbf{E}'}\gamma_{\mathbf{EE'C}}{}^{\mathbf{D}} \\ &= \gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EB'C}}{}^{\mathbf{D}} + \bar{\gamma}_{\mathbf{AA'B'}}{}^{\mathbf{E}'}\gamma_{\mathbf{BE'C}}{}^{\mathbf{D}} \end{aligned} \tag{4.173}$$

Četvrti član se onda dobiva zamjenom $\mathbf{AA'} \leftrightarrow \mathbf{BB'}$ u drugom članu:

$$\epsilon_D{}^{\mathbf{D}}(\nabla_{\mathbf{B}}\epsilon_{\mathbf{A}}{}^A\epsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'})\epsilon_A{}^{\mathbf{E}}\epsilon_{A'}{}^{\mathbf{E}'}\nabla_{\mathbf{e}}\epsilon_{\mathbf{C}}{}^D = \gamma_{\mathbf{BB'A}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EA'C}}{}^{\mathbf{D}} + \bar{\gamma}_{\mathbf{BB'A'}}{}^{\mathbf{E}'}\gamma_{\mathbf{AE'C}}{}^{\mathbf{D}} \tag{4.174}$$

Konačno potpuni zapis izraza (4.168) u spinornoj bazi se dobiva tako da obje strane ,zbog proizvoljnosti od α^D, budu podijeljene s $\alpha^{\mathbf{C}}$, te prebacivanjem članova tako da na lijevoj strani ostanu članovi derivacije spinornih koeficijenata γ^D_{ABC}:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{AA'}}\gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{D}} - \nabla_{\mathbf{BB'}}\gamma_{\mathbf{AA'C}}{}^{\mathbf{D}} =& \gamma_{\mathbf{AA'C}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{BB'E}}{}^{\mathbf{D}} - \gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{AA'E}}{}^{\mathbf{D}} \\ &+ \gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EB'C}}{}^{\mathbf{D}} + \bar{\gamma}_{\mathbf{AA'B'}}{}^{\mathbf{E'}}\gamma_{\mathbf{BE'C}}{}^{\mathbf{D}} \\ &- \gamma_{\mathbf{BB'A}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EA'C}}{}^{\mathbf{D}} - \bar{\gamma}_{\mathbf{BB'A'}}{}^{\mathbf{E'}}\gamma_{\mathbf{AE'C}}{}^{\mathbf{D}} \\ &+ \epsilon_{\mathbf{A'B'}}X_{\mathbf{ABC}}{}^{\mathbf{D}} + \epsilon_{\mathbf{AB}}\Phi_{\mathbf{A'B'C}}{}^{\mathbf{D}} \qquad (4.175)\\ =& \gamma_{\mathbf{AA'C}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{BB'E}}{}^{\mathbf{D}} - \gamma_{\mathbf{BB'C}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{AA'E}}{}^{\mathbf{D}} \\ &+ \gamma_{\mathbf{AA'B}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EB'C}}{}^{\mathbf{D}} + \bar{\gamma}_{\mathbf{AA'B'}}{}^{\mathbf{E'}}\gamma_{\mathbf{BE'C}}{}^{\mathbf{D}} \\ &- \gamma_{\mathbf{BB'A}}{}^{\mathbf{E}}\gamma_{\mathbf{EA'C}}{}^{\mathbf{D}} - \bar{\gamma}_{\mathbf{BB'A'}}{}^{\mathbf{E'}}\gamma_{\mathbf{AE'C}}{}^{\mathbf{D}} \\ &+ \epsilon_{\mathbf{A'B'}}\epsilon^{\mathbf{DF}}\Psi_{\mathbf{ABCF}} + \epsilon_{\mathbf{AB}}\epsilon^{\mathbf{DF}}\Phi_{\mathbf{CFA'B'}} \\ &+ \epsilon_{\mathbf{A'B'}}\Lambda(\epsilon_{\mathbf{AC}}\epsilon_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{D}} + \epsilon_{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{D}}\epsilon_{\mathbf{BC}}) \qquad (4.176)\end{aligned}$$

Skup jednadžbi (4.176) se nazivaju **Newman-Penroseove jednadžbe polja** ili skraćeno **NP** jednadžbe. One sadrže 18 nezavisnih jednadžbi (ako ne vrijedi normalizacija $o_A i^A = 1$ onda postoji 24 nezavisne jednadžbe). Te jednadžbe su često korištene u raznim problemima, kao npr. u dokazu Robinsonovog i Golberg-Sachsovog teorema iz poglavlja 6.3, i lako je vidjeti koje je jednadžbe potrebno gledati ako se koristi tablica svih NP jednadžbi kao što je dana na stranicama str. 248. i 249. u [5].

5 Jednadžbe fizikalnih polja u prostor-vremenu

5.1 Elektromagnetsko polje

Za puno opširniju raspravu o ovoj temi pogledati poglavlje 5.1 u [5]. Poznato je da postoji veličina koja se zove naboj čestice, na taj naboj se veže EM polje. Uvodimo, sa željom opisivanja nabijenih čestica, nove kopije spinornih prostora za svaki naboj $q \in 0, \pm e, \pm 2e, \ldots$:

$$\overset{q}{\mathcal{F}}, \overset{q}{S}{}^{A}, \overset{q}{S}{}^{AB}, \ldots \qquad (5.1)$$

Postavljena su određena pravila (postulati) koje nabijeni spinori zadovoljavaju:

1. dva nabijena spinora mogu se zbrajati ako su im naboji jednaki, naboj sume je jednak naboju pribrojnika

2. vanjski produkt nabijenih spinora je uvijek moguć bez obzira na naboje; ukupni naboj vanjskog produkta je dan sumom naboja faktora

3. Kontrakcije i zamjene indeksa su uvijek moguće bez obzira na naboje i ne mijenjaju iznos naboja

4. kompleksna konjugacija nabijenog spinora obrće predznak naboja tog spinora. npr. ako je naboj od β jednak q, naboj od $\bar{\beta}$ je $-q$

$\overset{q}{\mathcal{F}}[Q], Q \in M$ predstavlja kompleksno jednodimenzionalno vektorsko polje sa definiranom nulom ali bez kanonski definirane jedinice. Vrijednost elementa $A \in \overset{q}{\mathcal{F}}$ nije numerička u nekoj točki $Q \in M$ sve dok se ne izabere neko „baždarenje" kao npr. za $\alpha \in \mathcal{F}$, tako da je α svuda različit od nule, definiramo baždarenje da za vanjski umnožak $\bar{\alpha}\alpha$ vrijedi

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \tag{5.2}$$

gdje je vidljivo da je $\alpha\bar{\alpha}$ element iz običnog $\mathcal{F}$ jer mu je naboj jednak nuli.

Definira se nadalje djelovanje kovarijantne derivacije ∇_a na nabijena polja kao preslikavanje:

$$\nabla_a : \overset{q}{S}{}^{\mathcal{B}} \to \overset{q}{S}{}^{\mathcal{B}}_a \tag{5.3}$$

gdje oznaka $\mathcal{B}$ radi lakšeg čitanja i pisanja označava bilo koji skup indeksa uključujući gornje, donje, crtane i necrtane. ∇_a zadovoljava standardne zahtjeve Leibnizovog pravila deriviranja itd. Levi-Civita spinore ϵ_{AB} i ϵ^{AB}, kao operatore „dizanja" i „spuštanja" indeksa ostavljamo nenabijenima (pogledati komentar na str. 315 [5]).

4-potencijal EM polja je moguće definirati pomoću nigdje iščezavajućeg polja $\alpha \in \overset{e}{\mathcal{F}}$ kao:

$$A_a = i\frac{1}{e\alpha}\widetilde{\nabla}_a\alpha \tag{5.4}$$

gdje je $\widetilde{\nabla}_a$ također neka kovarijantna derivacija, a naziva se baždarno kovarijantna derivacija.

Definicija 5.1. Baždarno kovarijantna derivacija $\widetilde{\nabla}_a$ je definirana Christoffelovom kovarijantnom derivacijom kao, uz $\psi^{\mathcal{B}} \in \overset{ne}{S}{}^{\mathcal{B}}, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_a(\psi^{\mathcal{B}}) &= \alpha^n\widetilde{\nabla}_a\left((\alpha^{-1})^n\psi^{\mathcal{B}}\right) \\
&= \widetilde{\nabla}_a\left(\psi^{\mathcal{B}}\right) - n\psi^{\mathcal{B}}\frac{1}{\alpha}\widetilde{\nabla}_a\alpha \\
&= \widetilde{\nabla}_a\left(\psi^{\mathcal{B}}\right) + ine\psi^{\mathcal{B}}A_a \\
\Rightarrow \widetilde{\nabla}_a\left(\psi^{\mathcal{B}}\right) &= \left(\nabla_a - iqA_a\right)\psi^{\mathcal{B}}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

gdje je $q = ne$ naboj od $\psi^{\mathcal{B}}$.

Napomena 5.1.1. Ako $\widetilde{\nabla}_a$ djeluje na nenabijene spinore ili skalare, onda je njeno djelovanje istovjetno djelovanju Christoffelove derivacije. Odatle je moguće zaključiti i realnost $\widetilde{\nabla}_a$.

Napomena 5.1.2. Izraz (5.5) u ravnom prostoru je ekvivalentan baždarnoj kovarijantnoj derivaciji kao u izrazu 2.30 u [13], gdje se došlo do tog izraza zahtijevanjem invarijantnosti Langrangiana slobodne čestice na lokalnu transformaciju $\phi(x) \to e^{-i\theta(x)}\phi(x)$.

Ako primijenimo baždarni uvjet:

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \tag{5.6}$$

slijedi

$$\alpha\widetilde{\nabla}_a\bar{\alpha} = -\bar{\alpha}\widetilde{\nabla}_a\alpha \tag{5.7}$$

Iz gornjeg izraza i realnosti $\widetilde{\nabla}_a$ slijedi realnost EM 4-potencijala:

$$\bar{A}_a = A_a \tag{5.8}$$

Iz toga vidimo konzistentnost izraza (5.5) na konjugaciju jer je naboj od $\psi^{\mathcal{B}}$ jednak $-q = -ne$.

Lokalna baždarna transformacija

$$\alpha \to e^{-i\theta}\alpha \tag{5.9}$$

gdje je $\theta \in \mathcal{F}$, tj. nenabijeni skalar, dovodi do transformacije

$$\begin{aligned} A'_a &= i\frac{e^{i\theta}}{e\alpha}\widetilde{\nabla}_a(e^{-i\theta}\alpha) \\ &= A_a + \frac{1}{e}\nabla_a\theta \end{aligned} \tag{5.10}$$

te također vrijedi u novom baždarenju:

$$\begin{aligned} \nabla_a\psi^{\mathcal{B}} \to &\alpha'^n\widetilde{\nabla}_a\left((\alpha'^{-1})^n\psi^{\mathcal{B}}\right) \\ &= \nabla_a\psi^{\mathcal{B}} + in\psi^{\mathcal{B}}\nabla_a\theta \end{aligned} \tag{5.11}$$

Što pokazuje da djelovanje Christoffelove derivacije na nabijene spinore ovisi o baždarenju nabijenih spinora. S druge strane imamo na $\widetilde{\nabla}_a$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_a(\psi^{\mathcal{B}}) &\to \left(\nabla_a + in\nabla_a\theta - iqA_a - in\nabla_a\theta\right)\psi^{\mathcal{B}} \\ &= \widetilde{\nabla}_a(\psi^{\mathcal{B}}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Odakle i dolazi ime baždarno invarijantna derivacija za $\widetilde{\nabla}_a$.

5.1.1 EM tenzor i spinori

Odsada radi jednostavnosti će se koristiti oznaka ∇_a za baždarno kovarijantnu derivaciju, te oznaku

$$\Delta_{ab} = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]} \tag{5.13}$$

.

Definicija 5.2. Tenzor elektromagnetskog polja je definiran kao:

$$F_{ab} = 2\nabla_{[a}A_{b]} = i\frac{1}{e\alpha}\Delta_{ab}\alpha \tag{5.14}$$

gdje je korišteno $\nabla_a(\alpha\alpha^{-1}) = 0$.

Kada Δ_{ab} djeluje na nenabijeni skalar γ iz istovjetnosti Christoffelove i baždarne derivacije na nenabijene skalare i spinore vrijedi:

$$\Delta_{ab}\gamma = 0 \tag{5.15}$$

Budući da svaki nabijeni skalar je moguće napisati kao

$$\psi = \gamma\alpha^n \tag{5.16}$$

gdje je $q = ne$ naboj od ψ, a $\gamma \in \mathcal{F}$, vrijedi raspis:

$$\Delta_{ab}\psi = \gamma n\alpha^{n-1}\Delta_{ab}\alpha = n\psi\alpha^{-1}\Delta_{ab}\alpha = -iq\psi F_{ab} \tag{5.17}$$

Na sličan način djelovanjem na nabijeni spinor $\psi^{\mathcal{B}}$ naboja $q = ne$ slijedi iz Leibnizovog pravila:

$$\alpha^n\Delta_{ab}(\alpha^{-n}\psi^{\mathcal{B}}) = \Delta_{ab}(\psi^{\mathcal{B}}) - n\alpha^n\alpha^{-n-1}\psi^{\mathcal{B}}\Delta_{ab}(\alpha) \tag{5.18}$$

preslagivanjem se dobiva:

$$\Delta_{ab}(\psi^{\mathcal{B}}) = \alpha^n\Delta_{ab}(\alpha^{-n}\psi^{\mathcal{B}}) - ieqF_{ab}\psi^{\mathcal{B}} \tag{5.19}$$

gdje je djelovanje na $\alpha{-}n\psi^{\mathcal{B}}$ dano kao djelovanje na nenabijeni spinor, pa onda za neki nabijeni spinor V^d naboja $q = ne$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\Delta_{ab}(V^d) &= \alpha^n\Delta_{ab}(\alpha^{-n}V^d) - ieqF_{ab}V^d\\ &= \alpha^n\alpha^{-n}R_{abc}{}^dV^c - ieqF_{ab}V^d\\ &= R_{abc}{}^dV^c - ieqF_{ab}V^d\end{aligned} \tag{5.20}$$

Teorem 5.1. *EM tenzor F_{ab} je antisimetričan i realan tenzor*

Dokaz. Antisimetričnosti slijedi direktno iz izraza u izrazu definicije (5.14). Realnost se vidi iz (5.17) djelovanjem na $\bar{\psi}$ kojemu je naboj $-q$ (negativno od naboja od ψ):

$$\Delta_{ab}\bar{\psi} = iq\bar{\psi}F_{ab} \tag{5.21}$$

a s druge strane iz realnosti Δ_{ab} i q konjugiranjem cijelog izraza (5.17) se mora dobiti gornji izraz, što znači da

$$\bar{F}_{ab} = F_{ab} \tag{5.22}$$

□

Poznato je da je ponašanje elektromagnetskih polja određeno Maxwellovim jednadžbama. U kovarijantnom zapisu one glase (u SI sustavu):

$$\nabla_{[a}F_{bc]} \propto \nabla_a F^{ab} = \mu_0 J^b \tag{5.23}$$

$$\nabla_a * F^{ba} = 0 = \nabla_{[a}F_{bc]} \tag{5.24}$$

Jednadžba (5.24) slijedi direktno iz definicije (5.14):

$$\begin{aligned}\nabla_{[a}F_{bc]} &= 2\nabla_{[a}\nabla_b A_{c]} \\ &= 2\nabla_{[[a}\nabla_{b]}A_{c]} = 2R_{[abc]}{}^d A_d = 0\end{aligned} \tag{5.25}$$

S druge strane, jednadžbu (5.23) je potrebno postulirati.

Poznato je iz poglavlja 3.4 da je F_{ab} moguće napisati kao:

$$F_{ab} = \epsilon_{A'B'}\phi_{AB} + \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'B'} \tag{5.26}$$

Uz pomoć (5.17) i raspisa

$$\Delta_{ab} = \epsilon_{A'B'}\Box_{AB} + \epsilon_{AB}\Box_{A'B'} \tag{5.27}$$

slijedi za nabijeni skalar ψ:

$$\Box_{AB}\psi = -iq\psi\phi_{AB} \tag{5.28}$$

$$\Box_{A'B'}\psi = -iq\psi\bar{\phi}_{A'B'} \tag{5.29}$$

Osim toga, lako se pokaže da vrijedi:

$$\nabla^{A'}_{(A}A_{B)A'} = \phi_{AB} \tag{5.30}$$

što prelazi u:

$$\nabla^{A'}_{A}A_{BA'} = \phi_{AB} \tag{5.31}$$

ako se zahtijeva tzv. Lorenzov baždarni uvjet tako da:

$$\nabla_a A^a = 0 \tag{5.32}$$

jer vrijedi raspis:

$$\begin{aligned}\nabla^{A'}_{A}A_{BA'} &= \nabla^{A'}_{[A}A_{B]A'} + \nabla^{A'}_{(A}A_{B)A'} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\nabla^{A'C}A_{A'C} + \nabla^{A'}_{(A}A_{B)A'}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Teorem 5.2. *Uz činjenicu da je $J^{AA'}$ realan 4-vektor, spinorni oblik dvaju Maxwellovih jednadžbi prelazi u samo jednu jednadžbu:*

$$\nabla^{A'B}\phi^{A}{}_{B} = \frac{1}{2}\mu_0 J^{AA'} \tag{5.34}$$

Dokaz. Maxwellova jednadžba (5.23) u spinornom obliku je dana kao:

$$\nabla^{A'B}\phi^{A}{}_{B} + \nabla^{AB'}\bar{\phi}^{A'}{}_{B'} = \mu_0 J^{AA} \tag{5.35}$$

Nadalje, iz Maxwellove jednadžbe (5.24) slijedi:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^{a} * F_{ab} &= i\nabla^{AA'}(F_{ABB'A'}) \\ &= i\nabla^{AA'}(-\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \bar{\phi}_{A'B'}\epsilon_{AB}) \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dakle, zaključujemo da vrijedi:

$$\nabla^{A}_{B'}\phi_{AB} = \nabla^{A'}_{B}\bar{\phi}_{A'B'} \tag{5.37}$$

To znači da vrijedi

$$\nabla^{A'B}\phi^{A}{}_{B} = \frac{1}{2}\mu_0 J^{AA'} \tag{5.38}$$

□

Moguće je, radi povezivanja sa $\gamma_{ABC}{}^{D}$ raspisati Maxwellovu spinornu jednadžbu u bazi.

Lema 5.2.1. *Maxwellove spinorna jednadžba u zapisu u nekoj spinornoj bazi je:*

$$\nabla_{\mathbf{A'C}}(\phi^{\mathbf{AC}}) + \phi^{\mathbf{DC}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{A}} + \phi^{\mathbf{AD}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{C}} = -\frac{1}{2}\mu_0 J^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{A'}} \tag{5.39}$$

Dokaz. Vrijedi za derivaciju spinora:

$$\begin{aligned} \nabla_{A'B}(\phi^{AC})\epsilon_{\mathbf{A'}}{}^{A'}\epsilon_{\mathbf{B}}{}^{B}\epsilon_{A}{}^{\mathbf{A}}\epsilon_{C}{}^{\mathbf{C}} =& \nabla_{\mathbf{A'B}}(\phi^{AC})\epsilon_{A}{}^{\mathbf{A}}\epsilon_{C}{}^{\mathbf{C}} \\ =& \nabla_{\mathbf{A'B}}(\phi^{\mathbf{DE}}\epsilon_{\mathbf{D}}{}^{A}\epsilon_{\mathbf{E}}{}^{C})\epsilon_{A}{}^{\mathbf{A}}\epsilon_{C}{}^{\mathbf{C}} \\ =& \nabla_{\mathbf{A'B}}(\phi^{\mathbf{AC}}) + \phi^{\mathbf{DC}}\nabla_{\mathbf{A'B}}(\epsilon_{\mathbf{D}}{}^{A})\epsilon_{A}{}^{\mathbf{A}} \\ &+ \phi^{\mathbf{AE}}\nabla_{\mathbf{A'B}}(\epsilon_{\mathbf{E}}{}^{C})\epsilon_{C}{}^{\mathbf{C}} \\ =& \nabla_{\mathbf{A'B}}(\phi^{\mathbf{AC}}) + \phi^{\mathbf{DC}}\gamma_{\mathbf{A'BD}}{}^{\mathbf{A}} + \phi^{\mathbf{AD}}\gamma_{\mathbf{A'BD}}{}^{\mathbf{C}} \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ako sada tu jednadžbu množimo sa $\epsilon_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{C}}$, te zbrojimo po ponovljenim indeksima dobije se:

$$\nabla_{\mathbf{A'C}}(\phi^{\mathbf{AC}}) + \phi^{\mathbf{DC}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{A}} + \phi^{\mathbf{AD}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{C}} \tag{5.41}$$

□

Teorem 5.3. *Divergencija struje naboja je jednaka nuli:*

$$\nabla_a J^a = 0 \tag{5.42}$$

Dokaz. Iz (5.34) slijedi:

$$\begin{aligned}
-\mu_0 \nabla_a J^a &= \nabla_{AA'} \nabla^{A'}{}_B \phi^{AB} \\
&= \epsilon^{A'C'} \nabla_{AA'} \nabla_{BC'} \phi^{AB} \\
&= \epsilon^{A'C'} \nabla_{A'(A} \nabla_{B)C'} \phi^{AB} \\
&= \square_{AB} \phi^{AB} \\
&= X_{ABC}{}^A \phi^{CB} + X_{ABC}{}^B \phi^{AC} \qquad (5.43) \\
&= \Lambda(\epsilon_{BC} \phi^{CB} + \epsilon_{AC} \phi^{AC}) \\
&= 0 \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

gdje su korištene svojstva X_{ABCD} spinora (4.118) i (4.126), te simetričnost spinora ϕ_{AB}. □

Lako je vidjeti iz (5.34) da u prostoru bez struja naboja, tj. kada

$$J^{AA'} = 0 \tag{5.45}$$

vrijedi:

$$\nabla^{AA'} \phi_{AB} = 0 \tag{5.46}$$

Što u principu odgovara jednadžbi za slobodno bezmaseno polje spina 1, kao što će biti pokazano kasnije.

5.1.2 Elektromagnetski tenzor energije i impulsa

U prostoru bez izvora, tj. u kojem vrijedi

$$J^a = 0 \tag{5.47}$$

zahtjev simetričnosti tenzora energije impulsa T_{ab} i zahtjev da vrijedi

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \tag{5.48}$$

vrlo je lako dokazati da tenzor

$$T_{ab} = a\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'} \tag{5.49}$$

zadovoljava tražene uvjete, gdje je a neka konstanta.

Usporedimo taj izraz sa tenzorom energije impulsa kojeg se dobije standardnom metodom (npr. [12], str. 384.):

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{1}{\mu_0}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\right) \\ &= \frac{2}{\mu_0}(\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}) \end{aligned} \tag{5.50}$$

gdje je pri raspisu gornjeg izraza korišteno:

$$\phi_{C(A}\phi_{B)}{}^C = \phi_{CA}\phi_B{}^C + \phi_{CB}\phi_A{}^C = \phi_{CA}\phi_B{}^C - \phi^C{}_B\phi_{AC} = 0 \tag{5.51}$$

Definicija 5.3. Elektromagnetski tenzor energije impulsa u prostoru bez druge materije je dan kao (u SI sustavu):

$$T_{ab} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\right) = \frac{2}{\mu_0}(\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}) \tag{5.52}$$

Napomena 5.3.1. U cgs sustavu trebamo zamijeniti μ_0 za 4π u gornjem izrazu

Iz spinorne definicije iz simetrije $\phi_{AB} = \phi_{BA}$ odmah je vidljivo da je tenzor T_{ab} bez traga:

$$T_{ab}g^{ab} \propto \epsilon^{A'B'}\phi_{AB}\epsilon^{A'B'}\phi_{A'B'} = 0 \tag{5.53}$$

Usporedbom sa Einsteinovom jednadžbom (4.157) dobivamo:

$$\Phi_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}\Lambda = \frac{1}{6}\lambda \tag{5.54}$$

U Gaussovim prirodnim koordinatama $(8\pi G/c^4\mu_0)$ prelazi u $2G$.

Za gravitacijski spinor Ψ_{ABCD} iz (4.163) i (5.46) slijedi:

$$\nabla^A_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}\phi_{A'B'}\nabla^{A'}_B\phi_{CD} \tag{5.55}$$

Teorem 5.4. *Za EM tenzor energije i impulsa vrijedi relacija:*

$$T_{ac}T_b{}^c = \frac{1}{4}(T_{cd}T^{cd})g_{ab} \tag{5.56}$$

Dokaz.

$$T_{ac}T_b{}^c = \kappa\phi_{AC}\bar{\phi}_{A'C'}\phi_B{}^C\bar{\phi}_{B'}{}^{C'} \tag{5.57}$$

gdje je $\kappa = (8\pi G/c^4\mu_0)^2$. Proglasimo desnu stranu jednakosti spinorom $\zeta_{AA'BB'}$. Ako zamijenimo u spinoru $\zeta_{AA'BB'}$ oznake A i B dobivamo:

$$\kappa\phi_{BC}\bar{\phi}_{A'C'}\phi_A{}^C\bar{\phi}_{B'}{}^{C'} = -\kappa\phi_B{}^C\bar{\phi}_{A'C'}\phi_{AC}\bar{\phi}_{B'}{}^{C'} = -\zeta_{AA'BB'} \tag{5.58}$$

gdje je korišteno $\alpha_C{}^C = -\alpha^C{}_C$. Analogno se dobiva antisimetričnost u zamjeni $A' \leftrightarrow B'$. Sada koristeći izraz (2.49) slijedi tvrdnja teorema. □

Upravo smo u ovom primjeru pokazali moć korištenja spinorne formulacije jer se na vrlo jednostavan i izravan način dokazao teorem 5.4.

5.2 Jednadžbe polja čestica proizvoljnog spina

Počet ćemo poglavlje od poznatih relativističkih kvantnih jednadžbi u ravnom prostoru. Njih ćemo poopćiti na zakrivljeni prostor prelaskom sa parcijalnih derivacija na kovarijantne derivacije. Za poneke detalje oko čestica u ravnom prostoru koristit ćemo knjigu „Relativistic Quantum Mechanics" Waltera Greinera [14], a veza Diracovih spinora i našeg načina zapisivanja je uspostavljena kao u knjizi [19].

Uvodimo kvantni operator impulsa u ravnom prostoru:

$$\hat{p}_{\mathbf{a}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} \tag{5.59}$$

u koordinatnom sustavu $x^{\mathbf{a}} = \{ct, x, y, z\}$. Tako se dobiva poznata Klein-Gordonova jednadžba slobodne masivne skalarne čestice:

$$\begin{aligned} g^{\mathbf{ab}}\hat{p}_{\mathbf{b}}\hat{p}_{\mathbf{a}}\Phi &= mc^2\Phi \\ g^{\mathbf{ab}}\partial_{\mathbf{a}}\partial_{\mathbf{b}}\Phi &= -\frac{mc^2}{\hbar^2}\Phi \end{aligned} \tag{5.60}$$

To bi u zakrivljenom prostoru moglo odgovarati izrazu:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Phi = -\frac{mc^2}{\hbar^2}\Phi \tag{5.61}$$

gdje je m masa čestice. Za bezmasene čestice spina 0 , dakle, vrijedi:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Phi = 0 \tag{5.62}$$

Za raspravu o česticama spina različitog od nule potrebno je definirati Diracove spinore, a slijedit ćemo konvenciju danu u [19] u dodatku A (na sličan način je danu i u [5], no ne tako eksplicitno).

Definicija 5.4. Diracovi spinori Ψ^α su elementi prostora $D^\alpha = S^A \oplus \bar{S}_{A'}$, tj. Ψ^α je dan kao:

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi^A \\ \bar{\chi}_{A'} \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

gdje su ψ i χ spinori iz S

Postoje dvije mogućnosti kako možemo definirati Ψ_α, tj. dualni vektor od Ψ^α .

Definicija 5.5. Diracov pridruženi spinor je od spinora Ψ^α je dan kao:

$$\bar{\Psi}_\alpha = (\chi_A, \bar{\psi}^{A'}) \tag{5.64}$$

Druga mogućnost je tzv. Majoranin konjugat spinora.

Definicija 5.6. Majoranin konjugat od Ψ^α je dan kao:

$$(\Psi_M)_\alpha = (\psi_A, \bar{\chi}^{A'}) \tag{5.65}$$

Napomena 5.6.1. Majoranin spinor je spinor za kojeg vrijedi $(\Psi_M)_\alpha = \bar{\Psi}_\alpha$

Neki objekt $T^\alpha{}_\beta \in D^\alpha{}_\beta$ je dan kao:

$$T^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} F_B{}^A & G^{AB'} \\ H_{BA'} & K_{A'}{}^{B'} \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

Što smo dobili iz zahtjeva da je $T^\alpha{}_\beta \Psi^\beta \in D^\alpha$. Eksplicitno to razumijemo kao matrično množenje matrice 2×2 i vektora stupca:

$$T^\alpha{}_\beta \Psi^\beta = \begin{pmatrix} F_B{}^A & G^{AB'} \\ H_{BA'} & K_{A'}{}^{B'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^B \\ \bar{\chi}_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_B{}^A \psi^B + G^{AB'} \bar{\chi}_{B'} \\ H_{BA'} \psi^B + K_{A'}{}^{B'} \bar{\chi}_{B'} \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

U ravnom prostoru u koordinatnom sustavu $x^{\mathbf{a}} = \{ct, x, y, z\}$ za čestice spina $1/2$ vrijedi Diracova jednadžba:

$$i\hbar \gamma^{\mathbf{a}\alpha}{}_\beta \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} \Psi^\beta = mc\Psi^\alpha \tag{5.68}$$

Objekt $\gamma^{\mathbf{a}\alpha}{}_\beta$ označava 4 matrice, jednu za pojedinu vrijednost broja a, koje imaju svojstvo:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mathbf{a}\alpha}{}_\beta \gamma^{\mathbf{b}\beta}{}_\delta + \gamma^{\mathbf{b}\alpha}{}_\beta \gamma^{\mathbf{a}\beta}{}_\delta &= 2\eta^{\mathbf{ab}} \delta^\alpha{}_\delta \\ &= 2\eta^{\mathbf{ab}} \begin{pmatrix} \epsilon_D{}^A & 0 \\ 0 & \epsilon_{A'}{}^{D'} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.69}$$

Ako izaberemo spinornu bazu $\{o, \iota\}$ moguće je koristiti sljedeću reprezentaciju tih $\gamma^{\mathbf{a}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}$ matrica:

$$\gamma^{\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mathbf{aAB'}} \\ \sigma^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{BA'}} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

gdje su $\sigma^{\mathbf{a}}_{\mathbf{AA'}}$ Infeld-van der Waerdenovi simboli definirani u poglavlju 3.2. Da $\gamma^{\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ matrice zadovoljavaju jednadžbu (5.69) se dokaže koristeći izraz:

$$\begin{aligned} 2\sigma^{\mathbf{AA'}}_{(\mathbf{a}} \sigma^{\mathbf{BB'}}_{\mathbf{b})} \epsilon_{\mathbf{A'B'}} &= \zeta^{\mathbf{ABA'B'}} \epsilon_{\mathbf{A'B'}} \\ &= (\zeta^{(\mathbf{AB})(\mathbf{A'B'})} + \zeta^{[\mathbf{AB}][\mathbf{A'B'}]}) \epsilon_{\mathbf{A'B'}} \\ &= \zeta^{[\mathbf{AB}]\mathbf{A'B'}} \epsilon_{\mathbf{A'B'}} = \frac{1}{2} \zeta^{CD\mathbf{A'B'}} \epsilon_{CD} \epsilon^{\mathbf{AB}} \epsilon_{\mathbf{A'B'}} = \frac{1}{2}(g_{\mathbf{ab}} + g_{\mathbf{ba}}) \epsilon^{\mathbf{AB}} \\ &= (g_{\mathbf{ab}}) \epsilon^{\mathbf{AB}} \end{aligned} \tag{5.71}$$

gdje je $\zeta^{\mathbf{ABA'B'}}$ pomoćna oznaka definirana (samo za ovu potrebu) kao:

$$\zeta^{\mathbf{ABA'B'}} \equiv \sigma^{\mathbf{AA'}}_{\mathbf{a}} \sigma^{\mathbf{BB'}}_{\mathbf{b}} + \sigma^{\mathbf{AA'}}_{\mathbf{b}} \sigma^{\mathbf{BB'}}_{\mathbf{a}}$$

Napomena. Naša reprezentacija u biti odgovara Weylovoj reprezentaciji, no zbog konvecija u zapisivanju koje mi koristimo, to nije jednostavno vidljivo, za usporedbu pogledati dodatak A u [19].

Diracova jednadžba zapisana u matričnom obliku sa izabranom spinornom bazom $\{o, i\}$ koja ne ovisi o položaju, u koordinatnom sustavu $\{ct, x, y, z\}$, u ravnom prostoru glasi:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mathbf{aAB'}} \\ \sigma^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{BA'}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{a}}\psi^{\mathbf{B}} \\ \partial_{\mathbf{a}}\bar{\chi}_{\mathbf{B'}} \end{pmatrix} = -i\mu_0 \begin{pmatrix} \psi^{\mathbf{A}} \\ \bar{\chi}_{\mathbf{A'}} \end{pmatrix} \tag{5.72}$$

tj. zapisano kao dvije jednadžbe to je:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{BA'}}\psi^{\mathbf{B}} &= -i\mu_0\chi_{\mathbf{A'}} \\ \partial^{\mathbf{AB'}}\chi_{\mathbf{B'}} &= -i\mu_0\psi^{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{5.73}$$

gdje je $\mu_0 = mc/\sqrt{2}\hbar$. Jednostavno ćemo sada postulirati da u zakrivljenom prostoru vrijedi:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{BA'}}\psi^{\mathbf{B}} &= -i\mu_0\chi_{\mathbf{A'}} \\ \nabla^{\mathbf{AB'}}\chi_{\mathbf{B'}} &= -i\mu_0\psi^{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{5.74}$$

Napomena. U Penroseovoj knjizi se koristi drukčija reprezentacija γ matrica koja sadrži uz sebe faktor $-i$

Gornji izraz u ravnom prostoru, izborom spinorne baze koja ne ovisi o položaju, prelazi u jednadžbe (5.72). U slučaju $m = 0$ dobivamo dvije odvojene jednadžbe:

$$\begin{aligned} \nabla_{BA'}\psi^{B} &= 0 \\ \nabla^{AB'}\chi_{B'} &= 0 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Definicija 5.7. Matricu $\gamma^{5\alpha}{}_{\beta}$ definiramo kao:

$$\gamma^{5\alpha}{}_{\beta} = i\gamma^{0\alpha}{}_{\xi}\gamma^{1\xi}{}_{\delta}\gamma^{2\delta}{}_{\eta}\gamma^{3\eta}{}_{\beta} \tag{5.76}$$

Što je u našem izboru reprezentacije:

$$\gamma^{5\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} -\epsilon_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\mathbf{B'}}{}^{\mathbf{A'}} \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

Definicija 5.8. Pomoću $\gamma^{5\alpha}{}_{\beta}$ se definiraju lijeva i desna projekcija spinora kao:

$$\begin{aligned} (\Psi_L)^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}{}_{\beta} - \gamma^{5\alpha}{}_{\beta})\Psi^{\beta} = \begin{pmatrix} \psi^{A} \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\Psi_R)^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \gamma^{5\alpha}{}_{\beta})\Psi^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{A'} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.78}$$

Odatle vidimo da jednadžbe (5.75) odgovaraju jednadžbama desne i lijeve bezmasene čestice.

Kako bismo završili priču o česticama proizvoljnog spina pogledajmo spinske stupnjeve slobode potpuno simetričnog spinora $\psi_{\mathbf{ABCD}\dots}$. Potpuno simetrični tenzor s n

indeksa ima $n+1$ nezavisnih komponenata, odatle slijedi da spinor s n indeksa odgovara čestici spina $n/2$.

Po uzoru na jednadžbe (5.75) postuliramo jednadžbu gibanja bezmasene desne čestice spina $n/2$ u zakrivljenom prostoru bez dodatnih interakcija (bez nekih dodatnih potencijala osim gravitacije):

$$\nabla_{BA'}\psi^{BCDE...} = 0 \tag{5.79}$$

Odatle vidimo da je EM val ϕ_{AB} (foton) spina 1, te gravitacijski spinor ψ_{ABCD} spina 2, te da se iz Bianchijevih identiteta za oba spinora dobije upravo jednadžba (5.79).

6 Svjetlosne kongruencije i Goldberg-Sachsov teorem

U ovom poglavlju ćemo se baviti kongruencijama svjetlosnih geodezika, no potrebno je prvo definirati svaki novi pojam u toj rečenici. Kako bi se najlakše definiralo što je geodezik, definirajmo prvo što je **tangentni vektor krivulje**.

Neka je dan koordinatni sustav $(x^{\mathbf{a}}, A)$ gdje je $A \subset M$, te neka je dana neka krivulja čije su koordinate dane kao:

$$x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{a}}(u) \tag{6.1}$$

gdje je u neki parametar krivulje. Sada se definira tangentni vektor te krivulje jednostavno kao vektor proporcionalan derivaciji koordinata po parametru krivulje:

$$v^{\mathbf{a}} = k\frac{dx^{\mathbf{a}}}{du} \tag{6.2}$$

gdje je k neki skalar. Moguće je, nadalje, dokazati da vrijedi:

$$v^{\mathbf{a}}\frac{\partial u}{\partial x^{\mathbf{a}}} = k \tag{6.3}$$

što nam daje mogućnost definicije tangentnog vektora bez poziva na bazu.

Definicija 6.1. tangentni vektor neke krivulje sa parametrom u je definiran kao vektorsko polje v^a za koje vrijedi:

$$v^a\nabla_a u = k \tag{6.4}$$

Definicija 6.2. Normalizirani tangentni vektor, tj. sa konstantom proporcionalnosti $k=1$ iz gornje definicije, neke krivulje sa parametrom u je definiran kao vektorsko polje v^a za koje vrijedi:

$$v^a\nabla_a u = 1 \tag{6.5}$$

Definicija 6.3. Svjetlosna krivulja je ona krivulja za čiji tangentni vektor vrijedi:

$$v^a v_a = 0 \tag{6.6}$$

Tangentni vektor svjetlosne krivulje ćemo označavati sa l^a, kao vektor kompleksne baze $\{l, n, m, \bar{m}\}$.

Definicija 6.4. Geodezik je krivulja čiji su tangentni vektori takvi da vrijedi:

$$v^a \nabla_a v^b \propto v^b \tag{6.7}$$

S druge strane parametar u se naziva afini parametar ako vrijedi:

$$v^a \nabla_a v^b = 0 \tag{6.8}$$

Definicija 6.5. Svjetlosni geodezik je svjetlosna krivulja koja je ujedno i geodezik. Pokazat ćemo kasnije u Robinsonovom teoremu, tj. teoremu 6.6, da krivulja svjetlosnog geodezika odgovara krivulji koju bi pratila svjetlosna zraka ravnog EM val.

Bit će nam potrebno sjetiti se da vrijedi $l^a = o^A o^{A'}$, te da po tablici 4.1b na stranici 33 imamo $l^a \nabla_a \eta^u iv D$.

Definicija 6.6. Kongruencije su familije krivulja sa svojstvom da samo jedna krivulja prolazi kroz bilo koju točku promatranog podprostora od M. Posebno su korisne kad su promatrane krivulje geodezici.

Napomena 6.6.1. Ponekad postoje točke koje je potrebno isključiti neke točke iz promatranog prostora, jer posjeduju svojstva izvora ili uvira krivulja („singulariteti”).

U koordinatnom sustavu koordinate geodezika kongruencije mogu biti dane kao:

$$x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{a}}(u, y_1, y_2, y_3) \tag{6.9}$$

gdje je u parametar krivulje, $y_{\mathbf{i}}$ su tri parametra koji određuju o kojoj je krivulji kongruencije riječ.

Za opis kongruencije je potrebno definirati i tzv. vektor povezanosti. **Vektor povezanosti** q^a je vektorsko polje definirano duž neke krivulje (koja je element kongruencije) tako da označava pomak od točke P na promatranoj krivulji do točke P' na nekoj susjednoj krivulji, gdje točke P i P' imaju jednaku vrijednost parametra u na tim dvama krivuljama. U koordinatnom sustavu $\{x^{\mathbf{a}}\}$ za kongruencije dane kao u jednadžbi (6.9) vektor povezanosti q^a se definira kao:

$$q^{\mathbf{a}} = \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial y^{\mathbf{i}}} \delta y^{\mathbf{i}} \tag{6.10}$$

gdje su $\delta y^{\mathbf{i}}$ konstante. Budući da za parcijalnu derivaciju vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial y^{\mathbf{i}}}\right) = \frac{\partial}{\partial y^{\mathbf{i}}}\left(\frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial u}\right) \tag{6.11}$$

množenjem sa $\delta y^{\mathbf{i}}$ i zbrajanjem po $\mathbf{i}$ se dobiva:

$$\frac{\partial q^{\mathbf{a}}}{\partial u} = \frac{\partial v^{\mathbf{a}}}{\partial y^{\mathbf{i}}} \delta y^{\mathbf{i}} \tag{6.12}$$

gdje je $v^{\mathbf{a}}$ tangentni vektor krivulje dan kao u jednadžbi (6.2) sa $k = 1$. Za lijevu stranu gornje jednadžbe imamo:

$$\frac{\partial q^{\mathbf{a}}}{\partial u} = \frac{\partial x^{\mathbf{b}}}{\partial u} \frac{\partial q^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} = v^{\mathbf{b}} \frac{\partial q^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}}$$

dok za desnu stranu vrijedi:

$$\frac{\partial v^{\mathbf{a}}}{\partial y^{\mathbf{i}}} \delta y^{\mathbf{i}} = \frac{\partial v^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} \frac{\partial x^{\mathbf{b}}}{\partial y^{\mathbf{i}}} \delta y^{\mathbf{i}} = q^{\mathbf{b}} \frac{\partial v^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}}$$

odakle slijedi:

$$v^{\mathbf{b}} \frac{\partial q^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} - q^{\mathbf{b}} \frac{\partial v^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} = 0 \tag{6.13}$$

Budući da taj izraz ne ovisi o koneksiji, kao što je vidljivo u izrazu (G.15), možemo ga zapisati bez poziva na određenu bazu pomoću Christoffelovih derivacija kao:

$$q^b \nabla_b v^a = v^b \nabla_b q^a$$

što je kovarijantna definicija vektora povezanosti q^a

Definicija 6.7. Vektor povezanosti q^a za danu neku krivulju je definiran kao vektor za koji vrijedi:

$$q^b \nabla_b v^a = v^b \nabla_b q^a \tag{6.14}$$

gdje je v^a tangentni vektor te krivulje

6.1 Značenje parametara ϵ i κ

Svjetlosne kongruencije nam daju mogućnost interpretacije pojedinih skalara iz tablice 4.1a, kao što ćemo vidjeti u nastavku.

Neka je dana svjetlosna krivulja sa tangentnim vektorom l^a, sada slijedi pomoću jednadžbe (3.31) i tablica 4.3 i 4.4:

$$\begin{aligned} l^d \nabla_d l^a = Dl^a &= (n_b Dl^b) l^a + (l_b Dl^b) n^a - (m_b Dl^b) \bar{m}^a - (\bar{m}_b Dl^b) m^a \\ &= (\epsilon + \bar{\epsilon}) l^a - \kappa \bar{m}^a - \bar{\kappa} m^a \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ta jednadžba „mjeri” promjenu vektorskog polja l^a pri pomicanju duž krivulje kojoj je tangentni vektor l^a. Ako sada uvedemo transformaciju spinora baze:

$$o^A \to o'^A = \chi o^A \qquad i^A \to i'^A = \chi^{-1} i^A \tag{6.16}$$

dobivamo ostale veličine koje ovise o spinornoj bazi kao:

$$\begin{aligned} D' &= rD & & \\ l'^a &= rl^a & n'^a &= r^{-1}n^a \\ \epsilon' &= r\epsilon + r\chi^{-1}D\chi & \bar{\epsilon}' &= r\bar{\epsilon} + r\bar{\chi}^{-1}D\bar{\chi} \\ \kappa' &= \chi^2 r\kappa & \bar{\kappa}' &= \bar{\chi}^2 r\bar{\kappa} \end{aligned} \tag{6.17}$$

gdje je $r = \chi\bar{\chi}$, u je parametar krivulje kao u (6.5), te je normalizacija od l^a bila uzeta tako da bude $l^a\nabla_a u = 1$. Parametar χ je određen proizvoljno, te je vidljivo da je moguće uzeti takav χ da poništi ϵ, tj. da vrijedi:

$$\epsilon' = r(\epsilon + \chi^{-1}D\chi) = 0 \tag{6.18}$$

Za takav izbor parametra l'^a i dalje ostaje tangentan krivulji u smislu (6.4) jer vrijedi $l'^a\nabla_a u = r$.

Bez obzira na izbor parametra $\chi \neq 0$, ili nekom transformacijom $\iota \to \alpha\iota + \beta o$, nije moguće napraviti da κ ide u nulu (ne smijemo mijenjati $o \to \alpha o + \beta\iota$ jer onda l^a više ne bi bio tangenti vektor krivulje), što znači da κ „mjeri" odstupanje krivulje od svjetlosne geodetske krivulje!

Teorem 6.1. $\sqrt{2}|\kappa|$ *je mjera iznosa odstupanja svjetlosne krivulje sa tangentnim vektorom l^a od svjetlosnog geodezika.*

$\phi = +\pi - \arg(\kappa)$ *je mjera smjera odstupanja promatrane krivulje u ravnini određenoj vektorima x^a i y^a, i to tako da je ϕ kut smjera odstupanja mjeren od vektora x^a u pozitivnom smjeru prema y^a.*

Dokaz. Neka je $\sqrt{2}\kappa = -(a - ib)$, gdje su $a, b \in \mathcal{C}$, te neka je $\epsilon = 0$, sada imamo:

$$\begin{aligned} Dl^a &= -(\kappa\bar{m}^a + \bar{\kappa}m^a) \\ &= \Re\big((a - ib)(x^a + iy^a)\big) \\ &= ax^a + by^a \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ako posljednji član gornje jednadžbe izrazimo u kompleksnoj xy ravnini (pogledati neku knjigu kompleksne analize, npr. [18]) dobivamo $a + ib = \rho\exp(i\phi)$, slijedi da je:

$$\kappa = |\kappa|e^{i\arg\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho e^{-i(\phi-\pi)} \tag{6.20}$$

odakle slijedi tvrdnja teorema. □

S druge strane, moguće je $\Re(\epsilon)$ tumačiti kao mjeru produljenja vektora l^a paralelnim pomakom, no to i onako ovisi o parametrizaciji krivulje, pa ne nosi direktno geometrijsko značenje, i informaciju o toj krivulji.

Promotrimo sada jednostavan primjer svjetlosne krivulje koja nije geodezik.

Primjer 6.1. *Pronađimo u ravnom prostoru parametar κ za krivulju zadanu parametrom u:*

$$\begin{aligned} t &= u \\ x &= \cos(u) \\ y &= 0 \\ z &= \sin(u) \end{aligned}$$

Tangentni vektor te krivulje dan je kao

$$l^{\mathbf{a}} = \frac{dx^{\mathbf{a}}}{du} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(u) \\ 0 \\ \cos(u) \end{pmatrix}^{\mathbf{a}}$$

u gornjem izrazu je vektor l^a zapisan u bazi ${g_a}^{\mathbf{a}} = \nabla_a x^{\mathbf{a}}$ koji je sama neovisna o položaju (vektori te baze se ne „vrte"). Iz svojstva $l^{\mathbf{a}} l^{\mathbf{b}} g_{\mathbf{ab}} = l^{\mathbf{a}} l^{\mathbf{b}} \eta_{\mathbf{ab}} = 0$ odmah je vidljivo da je promatrana krivulja svjetlosna krivulja.

Moguće je nadalje računati Dl^a:

$$\begin{aligned} (Dl^a){g_a}^{\mathbf{a}} &= D(l^{\mathbf{a}}) + l^{\mathbf{b}} D({g_{\mathbf{b}}}^a){g_a}^{\mathbf{a}} \\ &= D(l^{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(u) \\ 0 \\ -\sin(u) \end{pmatrix}^{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

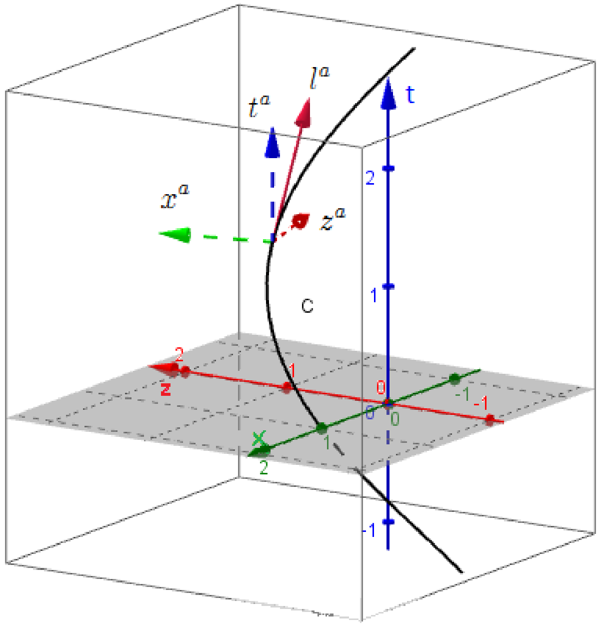
gdje je iskorišteno da ${g_{\mathbf{b}}}^a$ ne ovisi o položaju. Odavde je moguće odrediti parametar κ koji ovisi o izboru lokalne baze $\{l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$. Ako se uzme da vrijedi:

$$t^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{a}} \quad x^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(u) \\ 0 \\ \sin(u) \end{pmatrix}^{\mathbf{a}} \quad y^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{a}} \quad z^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(u) \\ 0 \\ -\cos(u) \end{pmatrix}^{\mathbf{a}}$$

odavde slijedi uz pomoć izraza (6.19)*:*

$$Dl^a = -x^a \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Krivulje iz ovog primjera sa naglašenom lokalnom i globalnom bazom je moguće naći na slici 6.1. Mogli bismo reći da je κ količina negativnog zakretanja krivulje od geodetske krivulje, tj. pravca u ovom primjeru.



Slika 6.1: Krivulja iz primjera 6.1

6.2 Značenje parametara ρ, σ i τ

Želimo doći do interpretacije parametara ρ, σ i τ, no da bismo to mogli potrebno je gledati kongruencije svjetlosnih krivulja, jer oni određuju ponašanje susjednih svjetlosnih geodezika. Neka je dana neka kongruencija svjetlosnih krivulja, te za jedan par krivulja promatrajmo vektor povezanosti q^a. Vektor q^a je moguće zapisati pomoću baze $\{l, n, m, \bar{m}\}$ kao:

$$q^a = gl^a + \bar{\zeta}m^a + \zeta\bar{m}^a + hn^a \tag{6.21}$$

gdje je $g = n_a q^a$, $\zeta = -m_a q^a$,te $h = l_a q^a$. Ako stavimo

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_x + i\zeta_y) = |\zeta|e^{i\theta} \tag{6.22}$$

dobivamo:

$$q^a = gl^a + hn^a + \zeta_x x^a + \zeta_y y^a \tag{6.23}$$

Nadalje, uz pomoć izraz (6.14) slijedi:

$$\begin{aligned} D(q^{\mathbf{a}}g_{\mathbf{a}}{}^a) &= q^b\nabla_b(l^a) \\ D(q^{\mathbf{a}})g_{\mathbf{a}}{}^a &= q^{\mathbf{a}}(D(g_{\mathbf{a}}{}^a) - \nabla_{\mathbf{a}}(l^a)) \\ D(q^{\mathbf{c}}) &= q^{\mathbf{a}}(g_a^{\mathbf{c}}Dg_{\mathbf{a}}{}^a - g_a^{\mathbf{c}}\nabla_{\mathbf{a}}l^a) \end{aligned} \tag{6.24}$$

Eksplicitno imamo dakle razvoj komponenti od q^a pomakom duž l^a:

$$\begin{aligned} Dg &= (\alpha + \bar{\beta})\zeta + (\beta + \bar{\alpha})\bar{\zeta} + (\gamma + \bar{\gamma})h \\ D\zeta &= -\rho\zeta - \sigma\bar{\zeta} - \tau h \\ Dh &= \kappa\bar{\zeta} + \bar{\kappa}\zeta \end{aligned} \tag{6.25}$$

Gdje smo prikladnom transformacijom

$$\begin{aligned} o &\to \lambda o \\ \iota &\to \lambda^{-1}\iota + co \end{aligned} \tag{6.26}$$

stavili $\epsilon = \pi = 0$ (pogledati u [4] str. 65. do 69.). Štoviše, istom transformacijom je moguće staviti i parametre α, β i γ da budu jednake nuli, bez da mijenjamo geometriju krivulje.

Uzmimo sada geodetske svjetlosne krivulje, tj. takve da je $\kappa = \epsilon = \tau = 0$. Sada slijedi da je:

$$Dh = D(q_a l^a) = 0 \tag{6.27}$$

što znači da se paralelnim pomakom h ne mijenja, pa za zrake za koje vrijedi $q_a l^a = 0$ u jednoj točki krivulje to ostaje vrijediti duž cijele krivulje, te ne ovisi o transformaciji (6.26), koje odgovaraju Lorentzovom potisku duž z osi uz tzv. svjetlosnu rotaciju (pogledati [4] str. 65.).

Definicija 6.8. Dvije zrake za koje vrijedi $q^a l_a = 0$ nazivamo **usporedne zrake**.

Usporedne zrake možemo predočiti ako kongruenciju zamislimo kao oblak fotona, onda će zrake svjetlosti koje su usporedne prolaziti okomito na 2D ravninu u lokalnom 3D prostoru. Smjer bi im bio duž lokalne z osi, a prolaze okomito na xy ravninu. $|2\zeta|$ predstavlja za takve zrake udaljenost dvije točke prolaska u xy ravnini. I to vrijedi za svakog opažača! Štoviše, moguće je pokazati da ako je $h = 0$, onda je $|\zeta|$ invarijantno na transformacije 6.26.

Budući da se pod transformacijom $\iota^A \to \iota^A + \omega o^A$ skalar τ, za razliku od ρ i σ koji su invarijantni ako $\kappa = 0$, se transformira kao:

$$\begin{aligned} \tau_{novi} &= o^B\big((\iota^A + \omega o^A)(\iota^{A'} + \bar{\omega} o^{A'})\big)\nabla_{AA'} o_B \\ &= \tau + \omega\sigma + \bar{\omega}\rho \end{aligned} \tag{6.28}$$

nezgodno je dati tumačenje skalara τ za σ i ρ različiti od nula, jer ovisi o orijentaciji baznog spinora ι, no za $\sigma = \rho = 0$ ipak dajemo interpretaciju, kao što slijedi u teoremu.

Teorem 6.2. *Za zrake za koje je $h \neq 0$, te $\sigma = \rho = 0$, konstanta τ određuje smanjenje udaljenosti i međusobnu rotaciju među zrakama u nekom sustavu:*

$$D\zeta = -\tau h \tag{6.29}$$

Dokaz tog teorema slijedi direktno iz jednadžbi (6.25).

Kako bismo dali interpretaciju za ρ i σ, promatrajmo dva usporedna svjetlosna geodezika kongruencije, za njih imamo:

$$D\zeta = -\rho\zeta - \sigma\bar{\zeta} \tag{6.30}$$

Teorem 6.3. *Neka su ρ i σ dani kao:*

$$\begin{aligned} \rho &= k + it \\ \sigma &= se^{2i\theta} \end{aligned} \tag{6.31}$$

parametar $k = \Re(\rho)$ je parametar ***kontrakcije*** *skupine usporednih svjetlosnih geodezika, t je mjera* ***rotacije*** *,a σ je mjera* ***smicanja*** *kongruencije tako da $s = |\sigma|$ označava iznos smicanja, a $-\theta + n\pi$, gdje je n prirodan broj, je kut, mjereno od vektora baze x^a, pri kojem je stezanje kongruencije najveće, a kut $-\theta + \pi(2n+1)/2$ pri kojem je rastezanje najveće.*

Dokaz. Najprije pogledajmo za $t = s = 0$ vrijedi:

$$D\zeta = -k\zeta \tag{6.32}$$

Ako su krivulje dane parametrom u, udaljenost između dvije krivulje je dana kao:

$$\zeta(u) = \zeta_0 e^{-ku} \tag{6.33}$$

Što znači da je k mjera skupljanja krivulja (ako je $k < 0$ onda je ono mjera širenja).

Nadalje, ako imamo $s = k = 0$ slijedi:

$$D\bar{\zeta} = it\bar{\zeta} \tag{6.34}$$

iz čega dobivamo s parametrizacijom u:

$$\bar{\zeta}(u) = \bar{\zeta}_0 e^{itu} \tag{6.35}$$

Što usporedbom s jednadžbama (6.22) i (6.23) možemo protumačiti kao povećanje kuta kojeg zatvaraju vektori x^a i q^a u xy ravnini za iznos tu.

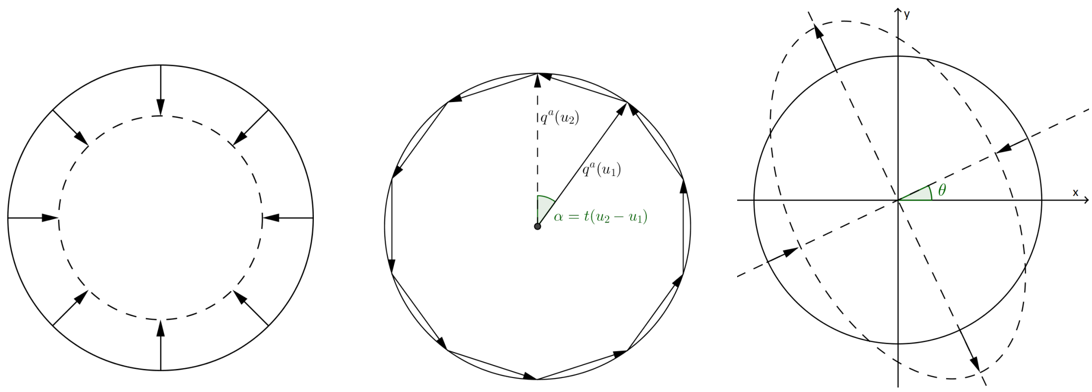
Naposljetku, za $\rho = 0$, $\sigma \neq 0, s > 0$, te $\bar{\zeta} = \exp(i\phi)|\zeta|$ imamo:

$$D\zeta = -se^{i2\theta}\bar{\zeta} = -se^{i2(\phi+\theta)}\zeta \tag{6.36}$$

gdje smo iskoristili $\bar{\zeta} = \exp(i2\phi)\zeta$. Sada za $\phi = -\theta + n\pi$, gdje je n prirodan broj, imamo slučaj maksimalnog stezanja kao u (6.32), a $\phi = -\theta + (2n-1)\pi/2$ je kut pri kojem je najveće širenje. □

Na slici 6.2 imamo prikaz učinaka ρ i σ na kongruenciju svjetlosnih usporednih geodezika prikazano u xy ravnini koju definira lokalna baza $\{l, n, x, y\}$

Primjer 6.2. *Pogledajmo kako se ponaša površina omeđena trima usporednim svjetlosnim geodezicima pri paralelnom pomaku duž l^a. One za neku vrijednost parametra u u kompleksnoj xy ravnini prolaze kroz točke 0, $\sqrt{2}|\zeta_1|e^{i\phi_1}$, $\sqrt{2}|\zeta_2|e^{i\phi_2}$.*



(a) $k = \Re(\rho) > 0$ (b) $t = \Im(\rho) > 0$ (c) $\sigma = se^{2i\theta}$

Slika 6.2: Interpretacija ρ i σ kao djelovanje na kongruenciju afino parametriziranih svjetlosnih geodezika za koje je i $h = q^a l_a = 0$. Puna crta predstavlja kongruenciju za $u = u_1$, a iscrtkana crta je za $u = u_2 > u_1$.

Površina trokuta koji omeđuju te zrake je dana izrazom:

$$A = |\zeta_1||\zeta_2| sin(\phi_2 - \phi_1) = |\zeta_1||\zeta_2| \frac{e^{-i\phi_1}e^{i\phi_2} - e^{i\phi_1}e^{-i\phi_2}}{2i} = \frac{\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_2\bar{\zeta}_1}{2i}$$
$$= \Im(\zeta_1\bar{\zeta}_2) \tag{6.37}$$

odavde imamo djelovanjem operatora realnog D na površinu A:

$$\begin{aligned} D(A) = D\Im(\zeta_1\bar{\zeta}_2) &= \Im(\bar{\zeta}_2(D\zeta_1) + \zeta_1(D\bar{\zeta}_2)) \\ &= \Im\left(-\zeta_1\bar{\zeta}_2(\rho + \bar{\rho}) - (\sigma\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\sigma}\zeta_1\zeta_2)\right) \\ &= \Im\left(-2k\zeta_1\bar{\zeta}_2 - 2\Re(\sigma\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2)\right) \\ &= -2kA \end{aligned} \tag{6.38}$$

Što znači da jedino realni dio parametra ρ određuje mijenjanje iznosa površine, dok je $\Im(\rho)$ samo vrti pojedine točke, a σ mijenja oblik površine!

6.3 Goldberg-Sachsov teorem

Prije nego što dotaknemo sam Goldberg-Sachsov teorem prvo ćemo pokazati dva teorema koje možemo nazvati „elektromagnetskim varijantama” Goldberg-Sachsova teorema.

Teorem 6.4 (Mariot-Robinsonov teorem). *Neka je F_{ab} algebarski specijalan elektromagnetski tenzor kao iz teorema 3.2. U području bez izvora, ponovljeni svjetlosni smjer tog tenzora generira kongruenciju svjetlosnih geodezika bez smika, tj. kongruenciju sa $\kappa = \sigma = 0$*

Dokaz. Iz dokaza teorema 3.2 zaključujemo da za elektromagnetski spinor ϕ_{AB} vrijedi $\phi_{AB} = \alpha_A \alpha_B$, te ako orijentiramo spinor baze o_A duž α_A imamo:

$$\phi^{AB} = \phi o^A o^B \tag{6.39}$$

što u zapisu u bazi je :

$$\begin{aligned} \phi^{00} = (-\iota_A)(-\iota_B)\phi^{AB} = \phi \\ \phi^{11} = \phi^{01} = \phi^{10} = 0 \end{aligned} \tag{6.40}$$

budući su Maxwellove spinorne jednadžbi u bazi dane kao

$$\nabla_{\mathbf{A'C}}(\phi^{\mathbf{AC}}) + \phi^{\mathbf{DC}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{A}} + \phi^{\mathbf{AD}}\gamma_{\mathbf{A'CD}}{}^{\mathbf{C}} = -\frac{1}{2}\mu_0 J^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{A'}}$$

za $\mathbf{A} = 1$ i $\mathbf{A'} = 1$ imamo:

$$\phi^{\mathbf{DC}}\gamma_{1'\mathbf{CD}}{}^{1} = \phi^{00}\gamma_{1'00}{}^{1} = -\phi\sigma = -\frac{1}{2}\mu_0 J^1{}_{1'} = 0 \tag{6.41}$$

gdje su ostali članovi lijeve strane te Maxwellove jednadžbe jednaki nuli. Sada, iz $J^{AA'} = 0$ i $\phi \neq 0$, slijedi da je $\sigma = 0$. Analogno, za $\mathbf{A} = 1$ i $\mathbf{A'} = 0$ se dobije:

$$\phi^{00}\gamma_{0'00}{}^{1} = -\phi\kappa = -\frac{1}{2}\mu_0 J^1{}_{0'} \tag{6.42}$$

pa slijedi da je $\kappa = 0$. Time smo dokazali tvrdnju teorema.

□

S druge strane moguće je povezati postojanje kongruencije geodezika bez smika u nekom prostoru sa postojanjem rješenja Maxwellovih jednadžbi koja bi bili paralelni s tom kongruencijom, i taj se teorem naziva Robinsonovim teoremom, no potreban je i još jedan pomoćni teorem o rješivosti skupa jednadžbi.

Teorem 6.5. *Dovoljan i potreban uvjet da neki skup jednadžbi*

$$A^a\nabla_a\phi = f \qquad B^a\nabla_a\phi = g$$

ima rješenje, gdje je ϕ neko skalarno polje, a A^a i B^a su takva vektorska polja da „zatvaraju površinu", tj. da za njih vrijedi:

$$A^a\nabla_a B^b\nabla_b - B^a\nabla_a A^b\nabla_b = \alpha A^a\nabla_a + \beta B^a\nabla_a \tag{6.43}$$

je da vrijedi:

$$A^a\nabla_a g - B^a\nabla_a f = \alpha f + \beta g \tag{6.44}$$

Za dokaz provjeriti teorem (2.8.1) u [19].

Teorem 6.6 (Robinson). *Ako postoji u prostor-vremenu kongruencija svjetlosnih geodezika bez smika, onda postoji algebarski specijalno rješenje Maxwellovih jednadžbi sa ponovljenim glavnim smjerom duž krivulja kongruencije, tj. kao tangentno polje tih krivulja kongrunecije.*

Dokaz. Kako bismo provjerili postoji li rješenje problema kao što se tvrdi u Robinsonovom teoremu uzmimo spinornu bazu tako da je duž krivulje:

$$Do^A = D\iota^A = 0$$

To možemo tako uzeti jer je ϵ i π moguće pogodnim transformacijama postaviti u nulu, dok je $\kappa = 0$ iz uvjeta teorema. S druge strane,da je kongruencija bez smika znači da je $\sigma = 0$.

Za polje $\phi_{AB} = \phi o_A o_B$ imamo kao u prošlom teoremu samo $\phi^{00} = \phi \neq 0$. Maxwellove jednadžbe za $\mathbf{AA}' = 11$ i $\mathbf{AA}' = 10$ su zbog $\kappa = 0$ i $\sigma = 0$ iz pretpostavki teorema suvišne, no zato za $\mathbf{AA}' = 01$ i $\mathbf{AA}' = 00$ dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \phi(\tau - 2\beta) \\ D\phi &= \rho\phi \end{aligned} \tag{6.45}$$

Ako stavimo supstituciju $\theta = \ln(\phi)$ dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} \delta\theta &= (\tau - 2\beta) \\ D\theta &= \rho \end{aligned} \tag{6.46}$$

Iz djelovanja operatora $D\delta - \delta D$ na neko skalarno polje:

$$\begin{aligned} (D\delta - \delta D)\eta &= (l^a\nabla_a(m^b\nabla_b) - m^a\nabla_a(l^b\nabla_b))\eta \\ &= \big((Dm^b)\nabla_b + l^a m^b \nabla_{[a}\nabla_{b]} - \delta(l^b)\nabla_b\big)\eta \\ &= -\delta(l^b)\nabla_b\eta = \big((\beta + \bar{\alpha})D - \bar{\rho}\delta\big)\eta \end{aligned} \tag{6.47}$$

zaključujemo da l^a i m^a zatvaraju površinu kao i polja A^a i B^a u jednadžbi (6.43).

S druge strane, ako primijenimo operator $D\delta - \delta D$ na polje θ dobivamo:

$$\begin{aligned} (D\delta - \delta D)\theta &= D(\tau - 2\beta) - \delta(\rho) \\ &= \rho\tau + \psi_1 + \Phi_{01} - 2(\beta\bar{\rho} + \psi_1) - ((\bar{\alpha} + \beta)\rho + \tau(\rho - \bar{\rho}) - \psi_1 + \Phi_{01}) \\ &= (\bar{\alpha} + \beta)\rho + \bar{\rho}(\tau - 2\beta) = \big((\bar{\alpha} + \beta)D + \bar{\rho}\delta\big)\theta \end{aligned} \tag{6.48}$$

gdje smo u izračunu gornjeg izraza koristili NP jednadžbe (c), (d) i (i) na str. 248. i 249. u [5]. Odakle zaključujemo, po teoremu 6.5, postoji skalarno polje θ koje zadovoljava jednadžbe (6.46), te je time dokazan teorem. □

Teorem 6.7 (Goldberg-Sachsov teorem). *Riemannov tenzor u praznom nigdje ravnom prostoru $A \subset M$ ($R_{ab} = 0$) ima ponovljeni smjer, tj. tipa je II ili specijalniji, ako i samo ako taj ponovljeni smjer definira kongruenciju svjetlosnih geodezika bez smika. Matematički izraženo:*

$$\kappa = \sigma = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = 0 \tag{6.49}$$

Dokaz. Kao što smo vidjeli u poglavlju 4.8 Bianchijev identitet u vakuumu daje jednadžbe (4.167), iz kojih direktno slijedi da za $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ i $\Psi_{ABCD} \neq 0$ nužno slijedi $\kappa = \sigma = 0$.

S druge strane, ako pretpostavimo $\kappa = \sigma = 0$, te reparametrizacijom krivulja učinimo da je $\epsilon = 0$ iz NP jednadžbe (b) ([5] na 248. str.) odmah slijedi:

$$\Psi_0 = 0 \tag{6.50}$$

NP jednadžba (d) iz ([5] 249. str.) za $\sigma = \kappa = 0$ glasi:

$$\delta\rho = \tau(\rho - \bar{\rho}) + \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \Psi_1 \tag{6.51}$$

Kada bi bilo da je $\rho = 0$, odmah bismo iz te jednadžbe imali $\Psi_1 = 0$.

Pretpostavimo,dakle, da je ipak $\rho \neq 0$, moguće je sada učiniti prikladnu transformaciju $\iota \to \iota + \omega o$ tako da $\tau \to 0$ uz $\kappa = \sigma = 0$. Jednadžba (c)(248. str [5]), uz napomenu da je $\pi = -\tau'$, sada postaje:

$$\Psi_1 = -\rho\bar{\pi} \tag{6.52}$$

dok prve dvije Bianchijeve jednadžbe u (4.167) sada glase:

$$\begin{aligned} \delta\Psi_1 &= 2\beta\Psi_1 \\ D\Psi_1 &= 4\rho\Psi_1 \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \delta(ln\Psi_1) &= 2\beta \\ D(ln\Psi_1) &= 4\rho \end{aligned} \tag{6.53}$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} (\delta D - D\delta)(ln\Psi_1) &= 4\delta\rho - 2D\beta \\ &= 4(\rho(\bar{\alpha} + \beta) - \Psi_1) - 2(\beta\bar{\rho} + \Psi_1) \\ &= 4\rho(\bar{\alpha} + \beta) - 2\beta\bar{\rho} - 6\Psi_1 \end{aligned} \tag{6.54}$$

gdje su korištene NP jednadžbe (i) i (d). S druge strane, analogno kao u jednadžbi (6.47), uz razliku da nismo unaprijed stavili π u nulu (stavili smo $\tau \to 0$ pa smo dobili jednadžbu (6.52)), imamo za neki skalar η:

$$(\delta D - D\delta)\eta = \big(-(\bar{\pi} + \beta + \bar{\alpha})D + \bar{\rho}\delta\big)\eta \tag{6.55}$$

pa za $\eta = ln(\Psi_1)$ slijedi:

$$\begin{aligned}(\delta D - D\delta)ln(\Psi_1) &= \big(-(\bar{\pi}+\beta+\bar{\alpha})D + \bar{\rho}\delta\big)ln(\Psi_1)\\ &= -(\beta+\bar{\alpha})4\rho + 2\bar{\rho}\beta - 4\bar{\pi}\rho\end{aligned} \tag{6.56}$$

usporedbom sa (6.54) mora vrijediti:

$$\begin{aligned}4\bar{\pi}\rho &= 6\Psi_1\\ \Psi_1 &= \frac{2}{3}\bar{\pi}\rho\end{aligned} \tag{6.57}$$

usporedbom te jednadžbe sa izrazom (6.52) daje:

$$\begin{aligned}-\bar{\pi} &= \frac{2}{3}\bar{\pi}\\ \Rightarrow \bar{\pi} &= 0 \Rightarrow \Psi_1 = 0\end{aligned} \tag{6.58}$$

Čime smo dokazali tvrdnju teorema. □

6.4 *Nasljeđivanje simetrija elektromagnetskog polja*

U proučavanju statičnih ili stacionarnih Einstein-Maxellovih rješenja Einsteinove jednadžbe (rješenja Einsteinove jednadžbe u prostoru u kojem je tenzor energije i impulsa T_{ab} različit od nule zbog EM zračenja), često se pretpostavlja da je i sam F_{ab} statičan ili stacionaran, no eksplicitni protuprimjeri se vide u članku [20] .

Ipak postoje ograničenja na nenasljeđivanje simetrija, u Todovom članku [21] se korištenjem spinornog zapisa EM tenzor energije impulsa, između ostalog, pokaže, kao što ćemo i mi pokazati, da je Liejeva derivacija F_{ab} duž Killingovog vektora, ako je različita od nule, onda je nužno proporcionalna Hodgeovom dualu od F_{ab}. Iz toga slijedi i da je $SO(3)$ simetrija T_{ab} očuvana za F_{ab} bez ponovljenog smjera.

Definicija 6.9. Stacionarno je ono prostor-vrijeme u kojem postoji realni vremenski Killingov vektor, tj. vektorsko polje K^a za koje vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a &= 0\\ K_a K^a &= a > 0\end{aligned} \tag{6.59}$$

gdje je $\mathfrak{L}_K$ oznaka za Liejevu derivaciju (definicija G.2).

Napomena 6.9.1. u nekom koordinatnom sustavu to je ostvareno ako metrika g_{ab} u tom sustavu ne ovisi o vremenskoj koordinati

Definicija 6.10. Statičko prostor-vrijeme je stacionarno prostor-vrijeme u kojem K^a nema vremensku ovisnost

Napomena 6.10.1. u statičkom prostor vremenu u koordinatnom sistemu interval ds^2 je invarijantan na inverziju vremenske koordinate ($t \to -t$)

Može se pokazati da je liejeva derivacija Riemannovog tenzora duž bilo kojeg Killingovog vektora jednak nuli, iz toga slijedi:

$$\mathfrak{L}_K G_{ab} = \mathfrak{L}_K (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) = 0 \tag{6.60}$$

Odatle mora slijediti da je i Liejeva derivacija samog tenzora energije i impulsa jednaka nuli:

$$\mathfrak{L}_K T_{ab} = 0 \tag{6.61}$$

pretpostavlja se često odavde da slijedi da je i $\mathfrak{L}_K F_{ab} = 0$, no iz spinornog zapisa slijedi:

$$\mathfrak{L}_K \frac{2}{\mu_0} (\phi_{AB} \bar{\phi}_{AB}) = \frac{2}{\mu_0} \mathfrak{L}_K (\phi_{AB} \bar{\phi}_{AB}) \tag{6.62}$$

$$= \frac{2}{\mu_0} (\bar{\phi}_{AB} \mathfrak{L}_K \phi_{AB} + \phi_{AB} \mathfrak{L}_K \bar{\phi}_{AB}) = 0 \tag{6.63}$$

iz realnosti vektora K^a i operatora ∇_a slijedi da je gornji izraz zadovoljen ako:

$$\mathfrak{L}_K \phi_{AB} = ia\phi_{AB} \tag{6.64}$$

gdje je a neka skalarna veličina. Iz toga slijedi da je dozvoljena „dualna rotacija” tenzora F_{ab} u vremenu tako da:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_K F_{ab} &= -a{*}F_{ab} \\ \mathfrak{L}_K {*}F_{ab} &= aF_{ab} \end{aligned} \tag{6.65}$$

Time je na vrlo brz način pokazano da F_{ab} nema nužno istu simetriju kao i T_{ab}. Još je moguće pokazati (pogledati [21]) da u slučaju kada je F_{ab} takav da nema ponovljeni smjer nužno slijedi da skalar proporcionalnosti a zapravo konstanta. No ako je F_{ab} algebarski specijalan, tj. ako ima ponovljeni svjetlosni smjer, onda je ili a konstanta ili ponovljeni smjer definira geodezik bez smika i bez rotacije.

Očuvanje $SO(3)$ simetrije kod F_{ab} bez ponovljenog smjera se vidi na sljedeći način: neka prostor-vrijeme ima $SO(3)$ simetriju generiranu s Killingovim vektorima X_1, X_2 i X_3, koji tvore algebru prema

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k \qquad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \tag{6.66}$$

gdje je ϵ_{ijk} trodimenzionalni Levi-Civita tenzor, uz $\epsilon_{123} = 1$. Nadalje, iz jednadžbi (6.65) znamo da je:

$$\mathfrak{L}_{X_i} F_{ab} = -a_i * F_{ab}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.67}$$

Koristeći osnovna svojstva Liejeve derivacije imamo:

$$\mathfrak{L}_{X_1} \mathfrak{L}_{X_2} F_{ab} - \mathfrak{L}_{X_2} \mathfrak{L}_{X_1} F_{ab} = \mathfrak{L}_{[X_1, X_2]} F_{ab} \tag{6.68}$$

Ako je F_{ab} algebarski općenit, tj. bez ponovljenog smjera , po Todovom članku znamo da su a_i konstante, te je onda Liejeva strana gornje jednakosti nula, a desna daje $\mathfrak{L}_{X_3} F_{ab} = -a_3 * F_{ab}$, odakle slijedi $a_3 = 0$ (pod pretpostavkom da sam tenzor $*F_a b$ ne iščezava). Analogno, cikličkom zamjenom indeksa, dobije se i $a_1 = a_2 = 0$.

7 Zaključak

Nakon početnih algebarskih razmatranja i povezivanja spinora i tenzora i pripadajućih vektorskih prostora, uspostavili smo (lokalno) vezu spinora i vektora kao objekata definiranih na mnogostrukosti, tako definirani spinori poslužili su za definiciju i izgradnju svih veličina i formula „Einsteinove" tenzorske opće teorije relativnosti.

Bogatija algebarska struktura kompleksnih spinora i spinorne formulacije je višestruko korisna, te nosi svoja predviđanja za koje uobičajeni tenzorski račun nije dovoljan ili je previše kompliciran.

Za početak, u spinornom se zapisu često brže uočavaju simetrije nekih tenzora kao što je slučaj sa tenzorom energije i impulsa elektromagnetskog polja zapisanog pomoću spinora, kao što smo vidjeli u poglavlju 5.1, te poglavljima o Goldberg-Sachsovom teoremu i primjeru iz Todovog članka [21] o ne-nasljeđivanju simetrija EM polja.

Nadalje, spinorni formalizam se pokazao i korisnim u opisu kongruencija krivulja zakrivljenog prostora.

Naposljetku, zbog važnosti spinora u opisu gibanja čestica u kvantnoj mehanici i relativističkoj kvantnoj mehanici, spinorni formalizam klasične opće teorije relativnosti nam je dao prirodan način proširenja relativističke kvantne mehanike na zakrivljene prostore, kao što smo vidjeli u poglavlju 5.2. Dobivene formule bi se moglo podvrgnuti eksperimentalnoj analizi, te bi to značilo pomak u važnom pitanju kvantne mehanike na zakrivljenim prostorima.

Za budućnost još ostaje vidjeti koliko spinorni formalizam nosi prednosti u opisu prirode u odnosu na uobičajeni tenzorski formalizam, kao npr. kakve su mogućnosti proširenja spinornog formalizma na proizvoljan broj dimenzija.

Dodaci

Dodatak A Vektorski prostori

Pogledati [7] za više detalja.

Definicija A.1. Polje je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ gdje je $\mathbb{F}$ skup za čije elemente a,b,c su definirane binarne operacije $+$:$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i $\cdot$:$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ za koje vrijedi:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{A.1}$$

$$\exists 0 \in \mathbb{F} : \forall a \in \mathbb{F}, a+0 = a \tag{A.2}$$

$$\forall a \in \mathbb{F} \; \exists -a : a + (-a) = 0 \tag{A.3}$$

$$a+b = b+a \tag{A.4}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{A.5}$$

$$\exists 1 : \forall a \in \mathbb{F}, 1 \cdot a = a \tag{A.6}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{A.7}$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{A.8}$$

Definicija A.2. Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ gdje je V neprazan skup za čije elemente su definirane operacije zbrajanja $+$:$V \times V \to V$ i množenja skalarom iz polja $\mathbb{F} \cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ tako da vrijedi za svaki ζ, η, ϕ iz V te $a, b, 1$ iz $\mathbb{F}$:

1. asocijativnost zbrajanja

$$(\zeta + \eta) + \phi = \zeta + (\eta + \phi) \tag{A.9}$$

2. postoji nula za zbrajanje

$$\exists \mathbf{0} \in V : \forall \zeta \in V, \zeta + \mathbf{0} = \zeta \tag{A.10}$$

3. postoji inverz za zbrajanje

$$\forall \zeta \in V \; \exists -\zeta \in V : \zeta + (-\zeta) = \mathbf{0} \tag{A.11}$$

4. komutativnost zbrajanja

$$\zeta + \eta = \eta + \zeta \tag{A.12}$$

5. asocijativnost množenja skalarom

$$a \cdot (b \cdot \phi) = (a \cdot b) \cdot \phi \tag{A.13}$$

6. postojanje jedinice za množenje skalarom

$$\exists 1 \in \mathbb{F}: \ 1 \cdot \zeta = \zeta \tag{A.14}$$

7. distributivnost množenja s obzirom na zbrajanje vektora

$$a \cdot (\eta + \phi) = a \cdot \eta + a \cdot \phi \tag{A.15}$$

8. distributivnost množenja s obzirom na zbrajanje skalara

$$(a + b) \cdot \eta = a \cdot \eta + b \cdot \eta \tag{A.16}$$

Definicija A.3. Za dani skup $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n\} \subset V$ kažemo da je linearno nezavisan ako ($a_i \in \mathbb{F}$):

$$\sum_1^n a_i \zeta_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{A.17}$$

Napomena A.3.1. Skup $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n\} \subset V$ bismo nazvali linearno zavisnim ako postoji $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{F}$,gdje je bar jedan $a_j \neq 0$, takav da $\sum_1^n a_i \zeta_i = 0$

Definicija A.4. Za dani skup $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n\} \subseteq V$ kažemo da razapinje V ako za svaki x iz V postoji bar jedan skup skalara (brojeva) $\{a_1, \ldots, a_n\}$ iz $\mathbb{F}$ takav da:

$$x = \sum_1^n a_i \zeta_i \tag{A.18}$$

Definicija A.5. Bazu vektorskog prostora definiramo kao linearno nezavisni skup iz V koji ujedno razapinje V

Definicija A.6. Dimenzijom vektorskog prostora nazivamo broj elemenata baze tog vektorskog skupa

Definicija A.7. Dualni vektor je preslikavanje iz vektorskog prostora u polje iznad kojega je definiran vektorski prostor. Dualni vektor je element dualnog vektorskog prostora.

Dodatak B 4-Vektori

Definicija B.1. 4-vektori (npr. U, V) su elementi 4-dimenzionalnog vektorskog prostora(označimo ga s $L(4)$) nad poljem realnih brojeva gdje je definirana binarna relacija (unutarnji produkt) $\cdot$ sa svojstvima:

1. komutativnost(simetričnost)

$$U \cdot V = V \cdot U \tag{B.1}$$

2. bilinearnost

$$(aU) \cdot V = U \cdot (aV) = aU \cdot V \tag{B.2}$$

$$(W + U) \cdot V = W \cdot V + U \cdot V \tag{B.3}$$

3. nedegeneriranost (postoji samo jedna nula)

4. posjeduje signaturu $(+, -, -, -)$

Napomena B.1.1. signatura $(+, -, -, -)$ znači da postoji ortonormirana baza $\mathbf{a_i}$ prostora L za koju vrijedi :

$$a_{\mathbf{i}} \cdot a_{\mathbf{j}} = \eta_{\mathbf{ij}} \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{B.4}$$

$$\text{gdje je } \eta_{\mathbf{ij}} = \begin{cases} 0 & \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{i} = \mathbf{j} = 0 \\ -1 & \mathbf{i} = \mathbf{j},\ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \tag{B.5}$$

Napomena B.1.2. vektor $U \in L(4)$ je moguće zapisati u bazi kao

$$U = U^{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \tag{B.6}$$

Definicija B.2. Unutarnji produkt 4-vektora sa samim sobom nazivamo Lorentzova norma:

$$\|U\| = (U^{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}) \cdot (U^{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}) \tag{B.7}$$

$$= U^{\mathbf{i}} U^{\mathbf{j}} \eta_{\mathbf{ij}} \tag{B.8}$$

$$= (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 \tag{B.9}$$

Definicija B.3. 4-Vektore za koje vrijedi $\|U\| > 0$ nazivamo vremenskim, $\|U\| < 0$ prostornim, a za koje vrijedi $\|U\| = 0$ svjetlosnim. Jednim imenom vektore za koje vrijedi $\|U\| \geq 0$ nazivamo kauzalnim.

Definicija B.4. Moguće je prijeći iz jedne ortonormirane baze 4-vektora u drugu transformacijom:

$$\hat{a}_{\hat{\mathbf{i}}} = \Lambda_{\hat{\mathbf{i}}}{}^{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}} \tag{B.10}$$

Ako su $\{\hat{a}_{\hat{\mathbf{j}}}\}$ 4-vektori nove baze također ortonormirani kao i prošli tu transformaciju nazivamo Lorentzovom:

$$\hat{a}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{a}_{\mathbf{j}} = \eta_{\mathbf{ij}} \Leftrightarrow \Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \Lambda_{\mathbf{j}}{}^{\mathbf{l}} \eta_{\mathbf{kl}} = \eta_{\mathbf{ij}} \tag{B.11}$$

Svaku je Lorentzovu transformaciju $\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}}$ moguće napisati uz pomoć generatora Lorentzove grupe X_{ij} , parametara θ_{ij} i skupa od 4 matrice $A_{(\mathbf{n})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}}$ (pogledati poglavlje 16.3 u [14]):

$$\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}} = A_{(\mathbf{n})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} (e^{\theta^{ij} X_{ij}})_{\mathbf{k}}{}^{\hat{\mathbf{j}}} \tag{B.12}$$

Četiri matrice

$$A_{(\mathbf{0})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \equiv \delta_{\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}}$$

$$A_{(\mathbf{1})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{(\mathbf{2})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{(\mathbf{3})\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}} \equiv -\delta_{\mathbf{i}}{}^{\mathbf{k}}$$

definiraju 4 disjunktne klase Lorentzovih transformacija među kojima nema prijelaza neprekidnim mijenjanjem parametara θ_{ij}. Spomenute klase su:

1. Ograničene transformacije	$\Lambda_0{}^0 > 0$	$\det(\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}}) = 1$
2. inverzija vremena	$\Lambda_0{}^0 < 0$	$\det(\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}}) = 1$
3. refleksija prostora	$\Lambda_0{}^0 > 0$	$\det(\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}}) = -1$
4. refleksija prostora i inverzija vremena	$\Lambda_0{}^0 < 0$	$\det(\Lambda_{\mathbf{i}}{}^{\hat{\mathbf{j}}}) = -1$

Od tih klasa samo klasa ograničenih Lorentzovih transformacija čini pravu podgrupu Lorentzovih transformacija, jer jedina sadrži jediničnu transformaciju.

Dodatak C Neke matematičke definicije

Definicija C.1. za dva skupa W, V preslikavanje $f : W \to V$ je pravilo po kojem svakom x iz W pridružujemo y iz V

Definicija C.2. za dva skupa W, V preslikavanje $f : W \to V$ je surjekcija ako

$$\forall y \in V \;\; \exists x : f(x) = y \tag{C.1}$$

Definicija C.3. za dva skupa W, V preslikavanje $f : W \to V$ je injekcija ako vrijedi:

$$x_1, x_2 \in W : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \tag{C.2}$$

Definicija C.4. za dva skupa W, V preslikavanje $f : W \to V$ je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Definicija C.5. Za dva vektorska prostora W, V nad $\mathbb{F}$ je neko preslikavanje $f : W \to V$ homomorfizam ako za svaki x i y iz W te za neki a iz $\mathbb{F}$ ne mijenja strukturu operacija, tj. vrijedi:

1. linearnost

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C.3}$$
$$f(ax) = af(x) \tag{C.4}$$

2. ako je definirana neka druga binarna operacija u V i W, npr. $\cdot$, onda vrijedi:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \tag{C.5}$$

Definicija C.6. Ako postoji homomorfizam između W i V kažemo da su ta dva prostora homomorfni

Definicija C.7. Ako je homomorfizam $f : W \to V$ bijektivan, f nazivamo izomorfizmom, a prostore W i V nazivamo izomorfnim

Napomena C.7.1. može se vidjeti da izomorfni prostori imaju istu dimenziju

Definicija C.8. anti-izomorfizam bi bio izomorfizam sa razlikom da umjesto svojstva (C.4) vrijedi:

$$f(ax) = \bar{a}f(x) \tag{C.6}$$

Dodatak D Totalno refleksivni vektorski prostori

U ovom dodatku koristimo konvenciju apstraktnih indeksa koja je uvedena u poglavlju 2.3, te koristimo tamo definirane pojmove vanjskog produkta, ali s proširenjem na općenite vektorske prostore.

Definicija D.1. Refleksivnim vektorskim prostorom nazivamo prostor V^a ako je izomorfan svom dualnom prostoru V_a

Definicija D.2. Vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ je **potpuno refleksivan** ako je svako multilinearno preslikavanje $A : V^{a_1} \cdots \times V^{a_n} \times V_{b_1} \times \cdots V_{b_m} \to \mathbb{F}$ moguće napisati kao linearnu kombinaciju vanjskih produkata vektora $(v^{(i)}, w^{(i)}, \ldots)$ iz V i dualnih vektora $(x_{(i)}, y_{(i)}, \ldots)$ iz dualnog vektorskog prostora V^*, tj. ako je svaki A ,uz $\alpha \in \mathbb{F}$, sa svojstvima:

$$A_{a_1 \ldots a_n}{}^{b_1 \ldots b_m} : V^{a_1} \cdots \times V^{a_n} \times V_{b_1} \times \cdots V_{b_m} \to \mathbb{F} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned} A_{a_1 \ldots a_n}{}^{b_1 \ldots b_m} v(1)^{a_1} (v(i)^{a_i} + \alpha w(i)^{a_i}) \cdots v(n)^{a_n} x(1)_{b_1} \cdots x(n)_{b_n} = \\ A_{a_1 \ldots a_n}{}^{b_1 \ldots b_m} v(1)^{a_1} v(i)^{a_i} \cdots v(n)^{a_n} x(1)_{b_1} \cdots x(n)_{b_n} + \\ \alpha A_{a_1 \ldots a_n}{}^{b_1 \ldots b_m} v(1)^{a_1} w(i)^{a_i} \cdots v(n)^{a_n} x(1)_{b_1} \cdots x(n)_{b_n} \end{aligned} \tag{D.2}$$

moguće zapisati kao

$$A_{a_1 \ldots a_n}{}^{b_1 \ldots b_m} = \sum_i v^{b_1(i)} \cdots w^{b_n(i)} x_{a_1(i)} \cdots y_{a_n(i)} \tag{D.3}$$

Napomena D.2.1. Iz definicije slijedi:

$$A_{a_1 \dots a_n}{}^{b_1 \dots b_m} \in V_{a_1} \cdots \times V_{a_n} \times V^{b_1} \times \cdots V^{b_m} \tag{D.4}$$

Teorem D.1. *Dovoljan, no ne i nužan, uvjet da refleksivni vektorski prostor bude potpuno refleksivan je to da posjeduje konačnu bazu.*

Dokaz. provjeriti poglavlje 2.3 u [5] □

Teorem D.2. *Vektorsko polje definirano na Hausdorff parakompaktnoj mnogostrukosti (kao u F), čiji skalari $S \in \mathcal{F}, S : M \to \mathbb{F}$ nisu prestrogo definirane funkcije ($C^0, C^1, \dots, C^\infty$ ali ne i C^ω, tj. jedanput dvaput,...,beskonačno puta derivabilne funkcije su dobre definicije, ali zahtjev analitičnosti je prestrog), te ako barem lokalno postoji baza tog polja, je potpuno refleksivno*

Dokaz. Pogledati poglavlje 2.4 u [5] □

Dodatak E Mnogostrukost

Za više pojedinosti oko ovog poglavlja pogledati 4. poglavlje knjige Penrosea i Rindlera [5].

Definicija E.1. Mnogostrukost M je skup točaka čija su svojstva određena nepraznim skupom $\mathcal{F}$, gdje je $f \in \mathcal{F}$ (f nazivamo skalarom) preslikavanje:

$$f : M \to \mathbb{R} \tag{E.1}$$

Neki skup je mnogostrukost ako zadovoljava sljedeće aksiome:

Aksiom 1. Ako $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{F}$ i ako je $F : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ beskonačno puta derivabilna funkcija r realnih varijabli, onda je $F(f_1(P), f_2(P), \dots, f_r(P)) \in \mathcal{F}$, gdje je $P \in M$

Napomena E.1.1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to C$ je beskonačno derivabilna (uobičajena oznaka je $f \in C^\infty$), gdje je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta vrijednost, pa je $f(P) \in \mathcal{F}$. Skup svih konstantnih preslikavanja, označimo ga s $\mathcal{R}$, je očito izomorfan sa $\mathbb{R}$.

Za $f, g \in C^\infty$ slijedi $f + g \in C^\infty$ i $fg \in C^\infty$ iz toga slijedi da je $\mathcal{F}$ komutativni prsten (za definiciju pogledati [8]), a također je $\mathcal{F}$ i vektorski prostor nad $\mathcal{R}$

Definicija E.2. Neka je $f \in \mathcal{F}$ i neka $f(P) \neq 0$ za neku točku $P \in M$.

$\mathcal{F}$-okolina točke P je skup:

$$A = \{x \in M : f(x) \neq 0\} \tag{E.2}$$

Očito je presjek dvaju $\mathcal{F}$-okolina također $\mathcal{F}$-okolina, jer ako je A skup za koji $f(x) \neq 0$ i B skup za koji $g(x) \neq 0$, onda je $C = A \cap B$ skup točaka x za koje $h(x) = f(x)g(x) \neq 0$.

Definicija E.3. Podskup od M nazivamo otvorenim akko je unija $\mathcal{F}$-okolina

Teorem E.1. *Svaki element iz $\mathcal{F}$ je neprekidna funkcija, tj. za svaki $f \in \mathcal{F}$ i V otvoreni podskup od $\mathbb{R}$ vrijedi:*

$$f^{-1}(V) = \{x \in M : f(x) \in V\} \tag{E.3}$$

je otvoreni skup

Dokaz. Budući su i unija i presjek otvorenih skupova otvoren skup dovoljno je dokazati neprekidnost svih $f \in \mathcal{F}$ za jedan otvoreni podskup od $\mathbb{R}$:

$$V =< a, b >= \{y \in \mathbb{R} : a < y < b\} \tag{E.4}$$

Neka je $B_{a,b} \in C^\infty$ dan kao:

$$B_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \wedge x \geq b \\ 1 & a < x < b \end{cases} \tag{E.5}$$

Sada za svaki $f \in \mathcal{F}$ skup

$$A = \{x \in M : B_{a,b}(f(x)) \neq 0\} \tag{E.6}$$

predstavlja skup svih $x \in M$ takvih da je $f(x)$u intervalu $< a, b >$,tj.

$$A = \{x \in M : f(x) \in V\} \tag{E.7}$$

Po definiciji $\mathcal{F}$-okoline iz (E.6) slijedi da je A $\mathcal{F}$-okolina neke točke, pa je prema tome A otvoren skup $\square$

Aksiom 2. ako $g : M \to \mathbb{R}$ i ako za svaku točku P iz M postoji $\mathcal{F}$-okolina A od točke P i $f \in \mathcal{F}$ unutar koje $f = g$, onda $g \in \mathcal{F}$

Aksiom 3. Za svaki $P \in M$ postoji $\mathcal{F}$-okolina A od P i n elemenata $x^1, x^2 \ldots, x^n \in \mathcal{F}$ takvih da:

1. za dvije različite točke $P_1, P_2 \in M$ bar je jedan od n elemenata različit u te dvije točke,tj.:

$$\exists \mathbf{i} \in \{1, 2, \ldots, n\} : \quad x^{\mathbf{i}}(P_1) \neq x^{\mathbf{i}}(P_2) \tag{E.8}$$

2. svaki $f \in \mathcal{F}$ može se izraziti kao C^∞ funkcija od $x^1, x^2 \ldots, x^n$

Aksiom 3 otkriva M kao lokalno sličan $\mathbb{R}^n$. Skalare $x^1, x^2 \ldots, x^n$ nazivamo lokalnim koordinatama oko P, okolinu A lokalnom koordinatnom okolinom, a par $(A, \{x^1, x^2 \ldots, x^n\})$ lokalnim koordinatnim sistemom. Za dva koordinatna sistema $(A, \{x^1, x^2 \ldots, x^n\})$ i $(B, \{y^1, y^2 \ldots, y^n\})$ iz druge točke aksioma 3 slijedi da u točkama presjeka od A i B jedne koordinate moraju se moći napisati kao C^∞ funkcije drugih.

Teorem E.2. *M je Hausdorffov topološki prostor, tj. u njemu vrijedi da za svake dvije različite točke $P, R \in M$ postoje dvije disjunktne $\mathcal{F}$-okoline od kojih svaka sadrži jednu od te dvije točke.*

Dokaz. Slijedi iz aksioma 2 i 3, za točan dokaz pogledati 183. stranicu iz [5]. □

Postoje još dva aksioma koja pobliže opisuju M:

Aksiom 4. Pomoću prebrojivo mnogo $\mathcal{F}$-okolina $\{A_1, \ldots, A_n\}$ moguće je svaku $\mathcal{F}$-okolinu izraziti kao uniju nekih od tih okolina.

Ovaj aksiom na mnogostrukosti osigurava parakompaktnost. Za definiciju parakompaktnosti i više detalja pogledati str.53. u [9]. Svojstvo parakompaktnosti, uz dodatno svojstvo da je mnogostrukost Hausdorffovog tipa, osigurava potpunu refleksivnost vektorskog polja definiranog na mnogostrukosti. Za više detalja pogledati poglavlje 2.4 u [5].

Aksiom 5. M je povezan, tj. on nije unija dva ili više disjunktnih skupova

Taj posljednji aksiom je uobičajen za prostorno-vremensku mnogostrukost.

Dodatak F Vektorska polja

Definicija F.1. Neka je $k \in \mathcal{R}$ tj. konstantno preslikavanje, te $f, g \in \mathcal{F}$. Kontravarijantno vektorsko polje V na mnogostrukosti M se definira kao preslikavanje $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ sa svojstvima:

1. preslikavanje konstante u nulu

$$V(k) = 0 \tag{F.1}$$

2. linearnost

$$V(f+g) = V(f) + V(g) \tag{F.2}$$

3. Leibnizovo pravilo deriviranja

$$V(fg) = V(f)g + fV(g) \tag{F.3}$$

Skup svih vektorskih polja označavamo sa $\mathcal{L}$

Neka imamo preslikavanje $\mathbf{W} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ u nekom koordinatnom sustavu $(A, x^{\mathbf{i}})$ dano kao:

$$\mathbf{W}(f) = W^{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathbf{i}}} \tag{F.4}$$

gdje je

$$W^{\mathbf{i}} \in \mathcal{F}, \ \forall \, \mathbf{i} \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{F.5}$$

te se parcijalna derivacija uzima kao

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mathbf{i}}} = \frac{\partial f(P)}{\partial x^{\mathbf{i}}} \tag{F.6}$$

$$= \lim_{\delta x^{\mathbf{i}} \rightarrow 0} \frac{f(P_2) - f(P)}{\delta x^{\mathbf{i}}} \tag{F.7}$$

gdje su koordinate od $P \ (x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n)$ a od $P_2 \ (x^1, x^2, \ldots, x^i + \delta x^i, \ldots, x^n)$. U okolini A na kojoj su definirane lokalne koordinate će se često uzimati da je točka $P \in M$ zapravo funkcija koordinata. Odatle je moguće vidjeti da operator $\mathbf{W}$ zadovoljava uvjete iz definicije F.1. Štoviše, dokazat ćemo da je zapravo svaki $\mathbf{W} \in \mathcal{L}$ moguće napisati u obliku kao u izrazu (F.4).

Teorem F.1. *Ako je dan $\mathbf{W} \in \mathcal{L}$, definiran kao u F.1, tada u bilo kojem lokalnom sustavu koordinata $(A, x^{\mathbf{i}})$ vrijedi :*

$$\mathbf{W} = W^{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} \tag{F.8}$$

gdje je $W^{\mathbf{a}} \in \mathcal{F}$

Dokaz.

1. da je $W^{\mathbf{a}} \in \mathcal{F}$ slijedit će ako je $\mathbf{W}$ doista moguće napisati u obliku (F.8) jer vrijedi:

$$\mathbf{W}(x^{\mathbf{a}}) = W^{\mathbf{b}} \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{b}}} = W^{\mathbf{b}} \delta^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} = W^{\mathbf{a}} \tag{F.9}$$

2. da je doista svaki $\mathbf{W} \in \mathcal{L}$ moguće napisati u obliku (F.8) slijedi iz: neka je $f \in \mathcal{F}$, $(A, x^{\mathbf{i}})$ koordinatni sustav, a P, X točke iz $A \subset M$. Koordinate od X u A

su $(X^1, \ldots, X^n)$ a od P su $(x^1, \ldots, x^n)$, slijedi:

$$\begin{aligned}
f(x^1, \ldots, x^n) &= f(X^1, \ldots, X^n) \\
&+ \int_0^1 \frac{d}{dt} f(X^1 - tX^1 + tx^1, \ldots, X^n - tX^n + tx^n) dt \\
&= f(X^1, \ldots, X^n) \\
+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial(X^{\mathbf{a}} - tX^{\mathbf{a}} + tx^{\mathbf{a}})} &\big(f(X^1 - tX^1 + tx^1, \ldots, X^n - tX^n + tx^n)\big) \\
&\cdot \left(\frac{\partial(X^{\mathbf{a}} - tX^{\mathbf{a}} + tx^{\mathbf{a}})}{\partial t}\right) dt \\
&= f(X^1, \ldots, X^n) \\
+(x^{\mathbf{a}} - X^{\mathbf{a}}) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial(X^{\mathbf{a}} - tX^{\mathbf{a}} + tx^{\mathbf{a}})} &\big(f(X^1 - tX^1 + tx^1, \ldots, X^n - tX^n + tx^n)\big) dt
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Ako sada na $f(x^1, \ldots, x^n)$ djelujemo sa $\mathbf{W}$ držeći položaj X fiksnim, a varirajući položaj od P, uz oznaku

$$g_{\mathbf{a}}(P) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial(X^{\mathbf{a}} - tX^{\mathbf{a}} + tx^{\mathbf{a}})} \big(f(X^1 - tX^1 + tx^1, \ldots, X^n - tX^n + tx^n)\big) dt \tag{F.11}$$

slijedi:

$$\mathbf{W}(f(P)) = \mathbf{W}(x^{\mathbf{a}}) g_{\mathbf{a}}(P) + (x^{\mathbf{a}} - X^{\mathbf{a}}) \mathbf{W}(g_{\mathbf{a}}(P)) \tag{F.12}$$

Izvrijednjeno u točki $P = X$, i definirajući $\mathbf{W}(x^{\mathbf{a}}) = W^{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(f(P = X)) &= \mathbf{W}(x^{\mathbf{a}}) g_{\mathbf{a}}(P = X) \\
&= \mathbf{W}(x^{\mathbf{a}}) \frac{\partial f(P)}{\partial x^{\mathbf{a}}} \\
&= W^{\mathbf{a}} \frac{\partial f(P)}{\partial x^{\mathbf{a}}}
\end{aligned} \tag{F.13}$$

□

Definicija F.2. definiramo zbrajanje vektorskih polja i množenje skalarom:

1. zbrajanje

$$(\mathbf{W} + \mathbf{V})(f) = \mathbf{W}(f) + \mathbf{V}(f) \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{F.14}$$

2. množenje skalarom, $h \in \mathcal{F}$

$$(h\mathbf{W})(f) = h(\mathbf{W}(f)) \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{F.15}$$

Teorem F.2. *$\mathcal{L}$ je vektorski prostor nad $\mathcal{F}$*

Dokaz. lako se provjeri iz definicije F.2 jer su $h\mathbf{W}$ i $\mathbf{W} + \mathbf{V}$ elementi iz $\mathcal{L}$. □

Budući je $\mathcal{L}$ potpuno refleksivni vektorski prostor (pogledati teorem D.2) moguće je definirati dualni vektorski prostor (i polje) od prostora $\mathcal{L}$, te kao u sekciji 2.3 uvesti oznake apstraktnih indeksa, npr.:

$$\mathcal{L}^{ad}{}_{eg} = \mathcal{L}^a \times \mathcal{L}^d \times \mathcal{L}_e \times \mathcal{L}_g \tag{F.16}$$

$$V^{ad}{}_{eg} \in \mathcal{L}^{ad}{}_{eg} : \mathcal{L}_a \times \mathcal{L}_d \times \mathcal{L}^e \times \mathcal{L}^g \to \mathcal{F} \tag{F.17}$$

Dodatak G Koordinatna derivacija i afina koneksija

U lokalnom sustavu koordinata $(A, x^{\mathbf{a}})$ na mnogostrukosti M **koordinatna baza** je dana kao :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \mathbf{g}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \ldots, \mathbf{g}_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{G.1}$$

dok dualna baza glasi:

$$\mathbf{g}_1 = dx^1, \mathbf{g}_2 = dx^2 \ldots, \mathbf{g}_n = dx^n \tag{G.2}$$

Po uzoru na poglavlje 4.1 imamo za dualnu bazu u zapisu pomoću apstraktnih indeksa:

$$g_a^{\mathbf{a}} = \nabla_a x^{\mathbf{a}} \tag{G.3}$$

te je dualna baza $g_{\mathbf{a}}^a$ definirana u izrazu:

$$g_a^{\mathbf{a}} g_{\mathbf{b}}^a = \delta_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \tag{G.4}$$

Svaki je tenzor moguće zapisati pomoću tih dvaju baza, a koeficijenti tenzora su dani kao:

$$G^{\mathbf{ab}\ldots}_{\mathbf{cd}\ldots} = G^{ab\ldots}_{cd\ldots} g_a^{\mathbf{a}} g_b^{\mathbf{b}} \ldots g_{\mathbf{c}}^c g_{\mathbf{d}}^d \ldots \tag{G.5}$$

Definicija G.1. Za neku općenitu bazu $g_{\mathbf{a}}^a, g_a^{\mathbf{a}}$, ne nužno povezanu sa koordinatnom derivacijom (tj. koordinatnom bazom) kao u izrazima (G.1)-(G.4), definiramo simbole koneksije afinog prostora kao:

$$\Gamma_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{c}} = (\nabla_a g_{\mathbf{b}}^b) g_{\mathbf{a}}^a g_b^{\mathbf{c}} \tag{G.6}$$

Moguće je reći da afina koneksija označava promjenu same baze od točke do točke. Pomoću simbola afine koneksije moguće je izraziti komponente kovarijantne derivacije kontravarijantnog vektora:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_a V^b) g^a_{\mathbf{a}} g^{\mathbf{c}}_b &= (\nabla_a (g^b_{\mathbf{b}} V^{\mathbf{b}})) g^a_{\mathbf{a}} g^{\mathbf{c}}_b && \text{(G.7)}\\
&= \left(\nabla_a (g^b_{\mathbf{b}}) V^{\mathbf{b}} + g^b_{\mathbf{b}} \nabla_a (V^{\mathbf{b}})\right) g^a_{\mathbf{a}} g^{\mathbf{c}}_b && \text{(G.8)}\\
&= \Gamma_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{c}} V^{\mathbf{b}} + \nabla_a (V^{\mathbf{c}}) g^a_{\mathbf{a}} && \text{(G.9)}\\
&= \Gamma_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{c}} V^{\mathbf{b}} + \nabla_{\mathbf{a}} V^{\mathbf{c}} && \text{(G.10)}
\end{aligned}
$$

Sada iz izraza:

$$
0 = \nabla_{\mathbf{a}}(\delta^{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}}) = \nabla_{\mathbf{a}}(g^{\mathbf{c}}_b g^b_{\mathbf{d}}) = \nabla_{\mathbf{a}}(g^{\mathbf{c}}_b) g^b_{\mathbf{d}} + g^{\mathbf{c}}_b \nabla_{\mathbf{a}}(g^b_{\mathbf{d}}) \tag{G.11}
$$

slijede komponente kovarijantne derivacije kovarijantnog vektora:

$$
(\nabla_a V_b) g^a_{\mathbf{a}} g^b_{\mathbf{b}} = \nabla_{\mathbf{a}} V_{\mathbf{b}} - \Gamma_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{c}} V_{\mathbf{c}} \tag{G.12}
$$

Teorem G.1. *Za kovarijantnu derivaciju tenzora općenitog ranga vrijedi:*

$$
(\nabla_a T^{df\ldots}_{bc\ldots}) g^a_{\mathbf{a}} g^b_{\mathbf{b}} g^c_{\mathbf{c}} g^{\mathbf{d}}_d g^{\mathbf{f}}_f \ldots = (\nabla_{\mathbf{a}} T^{\mathbf{df}\ldots}_{\mathbf{bc}\ldots}) - \Gamma_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{g}} T^{\mathbf{df}\ldots}_{\mathbf{gc}\ldots} - \ldots + \Gamma_{\mathbf{ag}}{}^{\mathbf{d}} T^{\mathbf{gf}\ldots}_{\mathbf{bc}\ldots} + \ldots \tag{G.13}
$$

Teorem G.2. *Moguće je iz toga vidjeti da mnogi izrazi ne ovise o afinoj koneksiji, tj. o derivaciji baza u kojima su zapisane. Takvi izrazi poprimaju iste oblike za bilo koju kovarijantnu derivaciju u bilo kojem sustavu koordinata. Neki primjeri izraza koji su invarijantni za bestorzijske kovarijantne derivacije:*

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{[a} A_{b_1\ldots b_n]} && \text{(G.14)}\\
&U^a \nabla_a V^b - V^a \nabla_a U^b && \text{(G.15)}\\
&U^a \nabla_a A_{bc} + A_{ac} \nabla_b U^a + A_{ba} \nabla_c U^a && \text{(G.16)}
\end{aligned}
$$

Dokaz. 1. dvije kovarijantne derivacije razlikuju se do na derivacije baza:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_a - \widetilde{\nabla}_a)(V^b) &= (\nabla_a - \widetilde{\nabla}_a)(V^{\mathbf{b}} g^b_{\mathbf{b}})\\
&V^{\mathbf{b}} (\nabla_a - \widetilde{\nabla}_a)(g^b_{\mathbf{b}}) && \text{(G.17)}
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoristili to da su sve kovarijantne derivacije skalara iste jer su samo slike od df (pogledati poglavlje 4.1).

2. izraz (G.16) ne sadrži derivacije baze:

$$\begin{aligned}
U^a\nabla_a A_{bc} + A_{ac}\nabla_b U^a + A_{ba}\nabla_c U^a =& \\
&= U^a\nabla_a(g_b^{\mathbf{b}} g_c^{\mathbf{c}} A_{\mathbf{bc}}) + A_{ac}\nabla_b(g_{\mathbf{a}}^a U^{\mathbf{a}}) + A_{ba}\nabla_c(g_{\mathbf{a}}^a U^{\mathbf{a}}) \qquad \text{(G.18)} \\
&= U^a\left(\nabla_a(g_b^{\mathbf{b}})A_{\mathbf{b}c} + \nabla_a(g_c^{\mathbf{c}})A_{b\mathbf{c}} + \nabla_a(A_{\mathbf{bc}})g_b^{\mathbf{b}} g_c^{\mathbf{c}}\right) \\
&+ A_{ac}\left(\nabla_b(g_{\mathbf{a}}^a)U^{\mathbf{a}} + g_{\mathbf{a}}^a\nabla_b(U^{\mathbf{a}})\right) \qquad \text{(G.19)} \\
&+ A_{ba}\left(\nabla_c(g_{\mathbf{a}}^a)U^{\mathbf{a}} + g_{\mathbf{a}}^a\nabla_c(U^{\mathbf{a}})\right) \\
&= U^a A_{\mathbf{b}c}\left(\nabla_a(g_b^{\mathbf{b}}) - \nabla_b(g_a^{\mathbf{b}})\right) \\
&+ U^a A_{b\mathbf{c}}\left(\nabla_a(g_c^{\mathbf{c}}) - \nabla_c(g_a^{\mathbf{c}})\right) \qquad \text{(G.20)} \\
&+ U^a\nabla_a(A_{\mathbf{bc}})g_b^{\mathbf{b}} g_c^{\mathbf{c}} + A_{\mathbf{a}c}\left(\nabla_b U^{\mathbf{a}}\right) + A_{b\mathbf{a}}\left(\nabla_c U^{\mathbf{a}}\right) \\
&= U^a\nabla_a(A_{\mathbf{bc}})g_b^{\mathbf{b}} g_c^{\mathbf{c}} + A_{\mathbf{a}c}\left(\nabla_b U^{\mathbf{a}}\right) + A_{b\mathbf{a}}\left(\nabla_c U^{\mathbf{a}}\right) \qquad \text{(G.21)}
\end{aligned}$$

gdje je u (G.20) korišteno (G.11), a u (G.21) činjenica da je svaki element iz $\mathcal{L}_a$ moguće napisati kao $\nabla_a f; f \in \mathcal{F}$ pa slijedi da

$$\nabla_a(g_c^{\mathbf{c}}) - \nabla_c(g_a^{\mathbf{c}}) \propto T_{ac}{}^d X_d = 0 \qquad \text{(G.22)}$$

3. Na sličan način se dokazuju i ostala dva izraza.

□

Izrazi (G.15) i (G.16) su posebni oblici operacije koja je neovisna o afinoj koneksiji. Ta operacija se zove liejeva derivacija.

Definicija G.2. Za vektorsko polje X^a **liejeva derivacija** duž polja X^a, označeno s $\mathfrak{L}_X$, je derivacija čije je djelovanje na tenzore definirano kao:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X(T^{ab\dots}_{fg\dots}) =& X^e\nabla_e T^{ab\dots}_{fg\dots} - \nabla_e(X^a)T^{eb\dots}_{fg\dots} - \nabla_e(X^b)T^{ae\dots}_{fg\dots} - \dots \\
&+ \nabla_f(X^e)T^{ab\dots}_{eg\dots} + \nabla_g(X^e)T^{ab\dots}_{fe\dots} + \dots
\end{aligned} \qquad \text{(G.23)}$$

Definicija G.3. Konformni Killingov vektor K^a je vektorsko polje za koje vrijedi:

$$\mathfrak{L}_K g_{ab} \propto g_{ab} \qquad \text{(G.24)}$$

Definicija G.4. Killingov vektor je vektorsko polje K^a za kojeg vrijedi:

$$\mathfrak{L}_K g_{ab} = 0 \qquad \text{(G.25)}$$

Napomena G.4.1. svaki Killingov vektor je ujedno i konformni Killingov vektor

Definicija G.5. Djelovanje Liejeve derivacije duž polja X^a na spinore se može definirati samo ako je X^a konformni Killingov vektor (pogledati poglavlja 6.5 i 6.6 u [6]). Uobičajeno je onda djelovanje $\mathfrak{L}_X$ na spinore definirati kao:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X(\psi^{A\dots B'\dots}_{C\dots D'\dots}) = X^a\nabla_a(\psi^{A\dots B'\dots}_{C\dots D'\dots}) - h_E{}^A(\psi^{E\dots B'\dots}_{C\dots D'\dots}) - \dots \\
-\bar{h}_{E'}{}^{B'}(\psi^{A\dots E'\dots}_{C\dots D'\dots}) - \dots + h_C{}^E(\psi^{A\dots B'\dots}_{E\dots D'\dots}) + \dots + \bar{h}_{D'}{}^{E'}(\psi^{A\dots B'\dots}_{C\dots E'\dots}) + \dots
\end{aligned} \qquad \text{(G.26)}$$

gdje je ${h_A}^B$ dan kao:

$$ {h_A}^B = \frac{1}{2}\big(\nabla_{AC'}X^{BC'} - \frac{1}{4}{\epsilon_A}^B\nabla_c X^c\big) \tag{G.27} $$

Definicija G.6. Baze 4-dimenzionalnog prostora $\eta^a_{\mathbf{a}} = (t^a, x^a, y^a, z^a)$ i

$$ W^a_{\mathbf{AA'}} = \begin{pmatrix} l^a & m^a \\ \bar{m}^a & n^a \end{pmatrix}_{\mathbf{AA'}} \tag{G.28} $$

su vektori baze koju nazivamo „**vielbeinska**” baza ili baza **okvira**, a povezane su sa koordinatnim bazama izrazima:

$$ {\eta^{\hat{\mathbf{a}}}}_{\mathbf{a}} g_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}(P) {\eta^{\hat{\mathbf{b}}}}_{\mathbf{b}} = \eta_{\mathbf{ab}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mathbf{ab}} \tag{G.29} $$

$$ {W^{\hat{\mathbf{a}}}}_{\mathbf{AA'}} g_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}(P) {W^{\hat{\mathbf{b}}}}_{\mathbf{BB'}} = \epsilon_{\mathbf{AB}}\epsilon_{\mathbf{A'B'}} \tag{G.30} $$

gdje su indeksi sa kapicom oznake da su izrazi zapisani u nekoj koordinatnoj bazi, a $g_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}(P)$ je metrika određena na monogostrukosti M u koordinatnom zapisu kao funkcija položaja P.

Literatura

[1] F. Klein, The Mathematical Theory of the Top, Charles Scribners Sons, New York (1897). Republished in 2004 (Dover, Mineola).

[2] Cartan, E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bulletin de la Société Mathématique de France Volume: 41 (1913) str. 53-96, Pariz, Société mathématique de France

[3] Steane, A., Lecture Courses,Symmetry and Relativity (2012/13), Spinors: `http://www.physics.ox.ac.uk/users/iontrap/ams/teaching/rel_C_spinors.pdf`, 8.4.2014.

[4] O'Donnell, P. Introduction to 2-Spinors in General Relativity. Singapore, World Scientific, 2003.

[5] Penrose, R. & Rindler, W. Spinors and Space-Time: Volume 1 - Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[6] Penrose, R. & Rindler, W. Spinors and Space-Time: Volume 2 - Spinor and Twistor Methods in Space-time Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[7] Bakić, D., predavanja, Vektorski prostori, `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/la/dodatno/poglavlje2.pdf`, 8.4.2014

[8] Širola, B. predavanja 2007/2008, Algebarske strukture `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/2007-08/predavanjaPRSTENI.pdf`, 20.5.2014

[9] Smolić, I., Topologija i fizika, Radne bilješke,(17.12.2013) `http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/.pdf`, 20.5.2014

[10] Brana, J. Opća teorija relativnosti- Einsteinova teorija gravitacije -prvi dio . Osijek, Odjel za fiziku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, 2011

[11] Griffiths, D.J. Introduction to Electrodynamics. New Jeresey, Pearson Education, 1999

[12] Jackson, J.D. Classical Electrodynamics - Third Edition. New Jeresey, Wiley, 1998

[13] Langacker, P. Grand Unified Theories and Proton Decay. Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 72, No. 4 (1981) str. 185-385. North-Holland Publishing Company

[14] Greiner, W. Relativistic Quantum Mechanics -Third Edition. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2000

[15] Peskin, M.E. Schroeder, D.V. An Introduction to Quantum Field Theory. Colorado, Westview Press, 1995

[16] Freedman, D.Z. &Van Proeyen, A. , Supergravity. Cambridge, Cambridge University Press, 2012

[17] Bandyopadhyay A. , Improvement of Stress-Energy Tensor Using Space-Time Symmetries, Doktorski rad, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001. http://research.physics.illinois.edu/Publications/theses/copies/Bandyopadhyay/Chapter_3.pdf 3.7.2014

[18] Cain, G. Complex Analysis (1.5.2009) http://people.math.gatech.edu/~cain/winter99/ch1.pdf 7.7.2014

[19] Stewart, J. Advanced general relativity, New York, Cambridge University Press, 1990

[20] MacCallum, M. A. H., van der Bergh, N. Noninheritance of static symmetry by Maxwell fields. Galaxies, axisymmetric systems and relativity; Essays presented to W. B. Bonnor on his 65th birthday . str. 138-148. Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1985,

[21] Tod, P. Conditions for non-existenece of static or stationary, Einstein-Maxwell, non-inheriting black holes. General Relativity and Gravitation Volume 39, Issue 2 , February 2007 , str. 111.-127. New York, Springer US