# Upravljivost konačno-dimenzionalnim sustavom ODJ

**Mišak, Adrian**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:278311

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-28**




*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb









**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Adrian Mišak

# UPRAVLJIVOST KONAČNO-DIMENZIONALNIM SUSTAVIMA ODJ

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Zahvaljujem se profesoru Marku Vrdoljaku zbog potpore i pomoći pri izradu rada. Također, moje iskrene zahvale idu i profesoru Martinu Lazaru, koji me upoznao sa temom rada i čiji su brojni savjeti značajno poboljšali kvalitetu rada.*

# Sadržaj

**Sadržaj** **iv**

**1 Uvodno poglavlje** **1**
1.1 Neki rezultati teorije ODJ . . . . . 1
1.2 Rješivost sustava . . . . . 3
1.3 Upravljivost . . . . . 4
1.4 Dokaz Teorema 1.3.2. . . . . 6
1.5 Kalmanov teorem . . . . . 9
1.6 Hilbertova metoda jedinstvenosti HUM . . . . . 14

**2 Parametrizirani linearni sustavi** **16**
2.1 Slabi pohlepan algoritam . . . . . 19
2.2 Primjena slabog pohlepnog algoritma . . . . . 21
2.3 Konstrukcija aproksimativnog prostora $Y_n^0$ . . . . . 24
2.4 Konstrukcija aproksimativne ulazne funkcije $u_\nu^*$ . . . . . 28

**3 Numerički primjeri** **30**
3.1 Provjera pretpostavki . . . . . 33
3.2 Jednadžba provođenja . . . . . 35
3.3 Valna jednadžba . . . . . 38
3.4 Zaključak . . . . . 42

**Bibliografija** **45**

# Poglavlje 1

# Uvod

## 1.1 Neki rezultati teorije ODJ

U ovom radu analiziramo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi dan sa:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Prva se jednadžba naziva jednadžba stanja, a druga jednadžba izlaza. Varijabla $t$ predstavlja vrijeme, $x(t)$ je funkcija stanja, $u(t)$ je ulazna i $y(t)$ izlazna funkcija. Nadalje, matrica $A$ određuje dinamiku sustava, a $B$ se naziva operator upravljanja. U općem slučaju pretpostavljamo:

$$u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p$$

i pretpostavljamo da su matrice $A, B, C, D$ realne te odgovarajućih dimenzija tako da gornji izrazi imaju smisla. U ovom uvodnom poglavlju analiziramo rješivost gornjeg sustava i definiramo glavni pojam ovog rada: upravljivost.

Općenito, sustav diferencijalnih jednadžbi se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje je $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Glavni rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti je dan sljedećim teoremom, čiji se dokaz može naći u knjizi [7].

**Teorem 1.1.1.** *Neka je* $(t_0, x_0^{(1)}, ..., x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ *te neka su* $a, b > 0$*. Zadan je zatvoreni pravokutnik*

$$R = \{(t, x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \mathbb{R}^{1+n} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_\infty \leq b\},$$

*i funkcije $f_i : R \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ koje su neprekidne na R i Lipschitz neprekidne na R po svim $x_i$ varijablama. Tada postoji $\delta > 0$ i jedinstvene funkcije $x_i : \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, takve da vrijedi (1.2).*

U ovom je radu naglasak na linearne nehomogene sustave, koji su dani izrazom:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + g(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da bi prikazali eksplicitno rješenje sustava (1.3), uvodimo prvo jednu definiciju:

**Definicija 1.1.1:** *Linearnom sustavu*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

*možemo pridružiti matričnu jednadžbu*

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t), \\ X(0) &= I. \end{aligned} \tag{1.4}$$

*Matrična funkcija koja je rješenje sustava (1.4) se naziva eksponencijalna matrična funkcija. Vrijednost te funkcije u točki $t \in \mathbb{R}$ označavamo s $e^{At}$.*

**Teorem 1.1.2.** *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ konstantna matrica. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\frac{d}{dx} e^{Ax} = Ae^{Ax}$,

2. $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$,

3. $(e^A)^* = e^{A^*}$.

Sljedeći rezultat daje izraz za rješenje sustava (1.3), koji se koristi u nastavku rada.

**Teorem 1.1.3.** *Ako je g neprekidna funkcija, rješenje sustava (1.3) je dano izrazom*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(x-t)} g(t) dt. \tag{1.5}$$

## 1.2 Rješivost sustava

Funkcija $u(t)$ će općenito biti iz prostora $(L^2[0,T])^m$. Promatramo prostor $L^2$ jer želimo promatrati veći skup funkcija od skupa neprekidnih funkcija, a od svih $L^p$ prostora, $L^2$ je Hilbertov.

Ako je funkcija $u$ neprekidna, onda prema prethodnom teoremu znamo da je rješenje (funkcija stanja) jednadžbe (1.1) oblika

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{1.6}$$

i ovako definirana $x(t)$ je sigurno diferencijabilna i njena derivacija je neprekidna. No, ako je funkcija $u$ iz prostora $L^2$, onda funkcija $x$ u izrazu (1.6) nije nužno diferencijabilna pa se postavlja pitanje: je li problem (1.1) dobro postavljen? U ovom dijelu bih htio ukratko odgovoriti na to pitanje. Za početak, jedna lema koja će biti potrebna kasnije i za koju je bitno da problem promatramo na kompaktnom skupu $[0,T] \subset \mathbb{R}$.

**Lema 1.2.1.** *Neka je $u \in L^2(\Omega)$ gdje je $\Omega \in B(\mathbb{R})$ omeđen ($B(\mathbb{R})$ je familija Borelovih skupova). Tada je $u \in L^1(\Omega)$.*

Dokaz:
Ovo direktno slijedi iz Holderove nejednakosti:

$$\int_\Omega |u|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\lambda(\Omega)}.$$

QED

U nastavku koristimo sljedeći teorem (više u knjizi [1]):

**Teorem 1.2.2.** *Funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je apsolutno neprekidna ako i samo ako je*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt,$$

*za neku integrabilnu $f$ na $[a,b]$.*

Izraz za funkciju stanja glasi:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

*Lema 1.2.1* govori da je podintegralna funkcija u drugom članu iz prostora $L^1[0,T]$ ako je $u \in (L^2[0,T])^m$, pa je prema *Teoremu 1.2.2* drugi član apsolutno neprekidan. Prvi je član glatka funkcija, iz čega slijedi da je $x(t)$ apsolutno neprekidna funkcija, za koju vrijedi da ima derivaciju u klasičnom smislu gotovo svuda. Dakle, $x(t)$ je gotovo svuda diferencijabilna, i toj derivaciji dajemo oznaku $x'(t)$.

## 1.3 Upravljivost

U ovom dijelu proučavamo sustav oblika:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

tj., ne promatramo funkciju izlaza $y$. Rješenje ovog sustava je dano sa

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{1.8}$$

Prema izrazu (1.8), funkcija stanja linearno ovisi o funkciji $u$. U nastavku nas zanima kako promjena ulazne funkcije utječe na funkciju stanja. Drugim riječima, zanima nas u koja sva stanja $x(T)$ je moguće dovesti sustav promjenom funkcije ulaza $u$, za koju pretpostavljamo da leži u prostoru $(L^2([0,T]))^m$ za neki $T \geq 0$.

**Definicija 1.3.1:** *Za zadaću (1.7) definiramo skup dostižnih stanja kao:*

$$R_T = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \quad (\exists u \in (L^2([0,T]))^m) \quad x(T) = \xi\}. \tag{1.9}$$

Riječima, skup $R_T$ predstavlja skup svih mogućih vektora u $\mathbb{R}^n$ u koje sustav (1.7) može stići za neku ulaznu funkciju $u$. Treba imati na umu da promatramo sustav sa homogenim početnim uvjetom, kasnije će se analizirati opći slučaj.

**Lema 1.3.1.** *Za svaki $T \geq 0$, $R_T$ je potprostor od $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz:
Neka su $x, y \in R_T$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dovoljno je pokazati da je $\alpha x + \beta y \in R_T$. Prema definiciji, znamo da postoje $u_1, u_2 \in L^2([0,T])$ takvi da

$$x_1(T) = x, \quad x_2(T) = y,$$

gdje je $x_1$ rješenje sustava

$$x'(t) = Ax(t) + Bu_1(t), \quad x(0) = 0,$$

a $x_2$ rješenje od

$$x'(t) = Ax(t) + Bu_2(t), \quad x(0) = 0.$$

Sa početka poglavlja znamo da su rješenja oblika

$$x_i(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u_i(s) ds,$$

za $i = 1, 2$. Budući da je $L^2([0,T])$ vektorski prostor, znamo da je $\alpha u_1 + \beta u_2 \in L^2([0,T])$ i promatramo sustav

$$x'(t) = Ax(t) + B(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)), \quad x(0) = 0. \tag{1.10}$$

Za njegovo rješenje vrijedi

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T e^{A(T-s)} B(\alpha u_1(s) + \beta u_2(s)) ds = \alpha \int_0^T e^{A(T-s)} B u_1(s) ds + \beta \int_0^T e^{A(T-s)} B u_2(s) ds \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2. \end{aligned}$$

Konstruirali smo ulaznu funkciju koja rješenje sustava (1.10) dovodi u prema $\alpha x_1 + \beta x_2$, pa je po definiciji $\alpha x_1 + \beta x_2 \in R_T$.
QED

**Definicija 1.3.2.:** *Jednadžbi $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ pridružujemo matricu*

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

*Sliku te matrice nazivamo upravljivim potprostorom i dajemo mu oznaku $C_{AB}$.*

$C_{AB}$ je potprostor od $\mathbb{R}^n$ i pripadajuća matrica se nalazi u prostoru $M_{n,nm}$.

**Definicija 1.3.3.:** *Za svaki $T > 0$ definiramo Gramijan (operator upravljivosti) sa:*

$$W_T = \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^* s} ds \in M_n(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$

**Teorem 1.3.2.** *Za svaki $T > 0$ vrijedi:*

$$R_T = C_{AB} = ImW_T. \tag{1.12}$$

Ovaj teorem povezuje na neočekivani način prethodne tri definicije i opisuje skup dostižnih stanja, čime daje odgovar na pitanje sa početka potpoglavlja: koja su stanja dostižna?
Radi lakoće čitanja, dokaz je podijeljen u nekoliko manjih dijelova. Ideja je dokazati sljedeće inkluzije:

$$R_T \subset C_{AB} \subset \mathrm{Im}W_T \subset R_T,$$

što će biti napravljeno u koracima po uzoru na knjigu [5].

## 1.4 Dokaz Teorema 1.3.2.

**1. Korak:** $R_T \subset C_{AB}$

*Dokaz prvog koraka:*
Neka je $\xi \in R_T$ proizvoljno dostižno stanje za neki $T > 0$. Prema definiciji, znamo da postoji ulazna funkcija $u(t)$ takva da je

$$\xi = \int_0^T e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Prema Hamilton-Cayley teoremu, znamo da je $A^n \in \mathrm{span}\{I, A, ..., A^{n-1}\}$ ($n$ je red matrice $A$). Budući da je $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$, postoje funkcije $Y_0(t), ..., Y_{n-1}(t)$ takve da

$$e^{At} = Y_0(t)I + ... + Y_{n-1}(t)A^{n-1},$$

jer se sve potencije matrice $A$ (nakon, i uključujući $n$) mogu zapisati kao linearne kombinacije u prostoru $\mathrm{span}\{I, A, ..., A^{n-1}\}$. Pomoću ovog rezultata možemo $\xi$ zapisati kao

$$\xi = \int_0^T Y_0(T-s)Bu(s)ds + ... + \int_0^T Y_{n-1}(T-s)A^{n-1}Bu(s)ds,$$

iz čega slijedi

$$\xi = \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^T Y_0(T-s)u(s)ds \\ ... \\ \int_0^T Y_{n-1}(T-s)u(s)ds \end{bmatrix},$$

gdje je desni vektor iz $\mathbb{R}^{nm}$. Iz ovoga direktno slijedi da je $\xi \in C_{AB}$ jer smo dobili $\xi$ kao linearnu kombinaciju stupaca matrice koja generira $C_{AB}$.
QED

**2. Korak:** $C_{AB} \subset \mathrm{Im}W_T$

Koristimo pomoćni rezultat:

**Lema 1.4.1.** *Ako je $V$ konačno dimenzionalan unitaran prostor te neka su $L, M$ njegovi potprostori takvi da je $M^\perp \subset L^\perp$, onda je $L \subset M$.*

Dokaz:
Neka je $x \in L$. U konačnodimenzionalnim prostorima vrijedi $M^{\perp\perp} = M$, pa ako dokažemo da je $x$ okomit na prostor $M^\perp$, onda znamo da je $x \in M^{\perp\perp} = M$ i dokaz je gotov. Zato uzmimo $y \in M^\perp$ proizvoljan. Zbog inkluzije $M^\perp \subset L^\perp$ znamo da je $y \in L^\perp$, pa je po definiciji $\langle x, y\rangle = 0$. Zbog proizvoljnosti elementa $y$, dokaz je gotov.
QED

Ovaj nam rezultat govori da je dovoljno pokazati da je $(\mathrm{Im}W_T)^\perp \subset C_{AB}^\perp$. Budući da je $W_T$ hermitska matrica, vrijedi:

$$(\mathrm{Im}W_T)^\perp = \ker(W_T^*) = \ker W_T.$$

Stoga se tvrdnja koraka svodi na inkluziju $\ker W_T \subset C_{AB}^\perp$.

*Dokaz drugog koraka:*
Neka je $\xi \in \ker W_T$ proizvoljan. Tada posebno vrijedi

$$\xi^* W_T \xi = 0.$$

Tada preko izraza (1.11) dobivamo

$$\int_0^T (\xi^* e^{As} B)(B^* e^{A^* s}\xi) ds = 0.$$

Uz substituciju $y(t) = B^* e^{A^* s}\xi$ izraz se pretvara u

$$\int_0^T y^*(s) y(s) ds = \int_0^T \|y(s)\|^2 ds = 0.$$

Iz ovoga slijedi $y^*(s) = 0$, za sve $s \in [0, T]$, što znači da su derivacije proizvoljnog reda zdesna u $s = 0$ jednake 0:

$$\frac{d^k y^*}{ds^k}(0) = \xi^* A^k B = 0, \quad k \geq 0.$$

Konačno se dobiva

$$\xi^* \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

iz čega slijedi da je $\xi \in C_{AB}^\perp$.
QED

**Treći korak:** $\mathrm{Im}W_T \subset R_T$

*Dokaz trećeg koraka:*
Fiksiramo proizvoljno vrijeme $T > 0$ i stanje $\xi \in \mathrm{Im}W_T$. Tada prema definiciji, postoji $v \in \mathbb{R}^m$ takav da je

$$\xi = W_T v.$$

Pomoću tog vektora definiramo funkciju

$$u(s) = B^* e^{A^*(T-s)} v,$$

na $[0, T]$. Tada je rješenje od (1.7) u trenutku $T$ dano sa

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T e^{A(T-s)} B u(s) ds = \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* e^{A^*(T-s)} v ds \\ &= \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^* s} ds v = W_T v = \xi, \end{aligned}$$

gdje smo za prijelaz između dva reda koristili substituciju. Dakle, dobili smo da je za proizvoljan $\xi \in \mathrm{Im}W_T$ moguće naći funkciju ulaza koja će funkciju stanja u trenutku $T$ dovesti do $\xi$. Dakle, $\xi \in R_T$.
QED

Ovime je dokazan *Teorem 1.3.2*, koji govori da su $R_T$, $C_{AB}$ i $\mathrm{Im}W_T$ zapravo isti skupovi, iako su definirani naizgled nezavisno. Kada pogledamo te tri strukture, vidimo da samo jedna od njih ne ovisi o vremenu: matrica $W_T$ je realna matrica sa konstantnim koeficijentima ali ovisi o izboru $T \geq 0$. $R_T$ govori o dostižnim stanjima u nekom danom trenutku i nije jasno kakva je veza između $R_S, R_T$ za različite $S, T$ i konačno, upravljiv potprostor $C_{AB}$ neovisan je o vremenu i potpuno je određen sa sustavom matricama $A, B$ iz (1.7). Dakle, prva zanimljiva posljedica:

**Korolar 1.4.2.** *Neka su $S, T > 0$ proizvoljni. Tada je $x \in R_S$ ako i samo ako $x \in R_T$.*

Dokaz:
Neka je $x \in R_S$. Tada je prema Teoremu 1.3.2, $x \in C_{AB}$. Prema istom Teoremu je $C_{AB} = R_T$, dakle $x \in R_T$. Drugi smjer ide analogno.
QED

Riječima, ako dokažemo da je npr. moguće utjecati na sustav tako da se nakon prve sekunde nalazi u stanju $y$, onda je moguće sustav dovesti do $y$ u proizvoljnom trenutku (sa odgovarajućom ulaznom funkcijom).
Druga zanimljiva posljedica je da početni uvjet ne utječe na upravljivost.

## 1.5 Kalmanov teorem

Motivirani prošlom cjelinom, definiramo jedan od centralnih pojmova ovog rada: upravljivost.
**Definicija 1.5.1.:** *Sustav*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

*je upravljiv ako za svaki* $T \geq 0$ *i svaka dva vektora* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ *postoji funkcija* $u \in (L^2[0,T])^m$ *(svaka komponenta je u* $L^2([0,T])$*) takva da za rješenje sustava (1.1) vrijedi* $x(T) = x_1$.

Iz *Teorema 1.3.2.* se dobiva sljedeći bitan rezultat (zvan Kalmanov teorem), koji daje karakterizaciju upravljivosti za sustave gdje inicijalan uvjet nije homogen:

**Teorem 1.5.1.** *Sustav*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

*je upravljiv u* $T > 0$ *ako i samo ako je* $r([B, AB, ..., A^{n-1}B]) = n$*, gdje je n red matrice A.*

Dokaz:
Prvo dokazujemo da upravljivost sustava povlači, da je tada

$$r([B, AB, ..., A^{n-1}B]) = n$$

i koristimo rezultat *Teorema 1.3.2.*.

Neka je sustav upravljiv i fiksirajmo $\tau > 0$. Postoji ulazna $u$ takva da je $x(\tau) = 0$. Definirajmo funkciju $y(t) = x(t + \tau)$ za koju vrijedi:

$$y'(t) = x'(t + \tau) = Ax(t + \tau) + Bu(t + \tau) = Ay(t) + Bu(t + \tau), \quad y(0) = 0.$$

Dakle, dobili smo sustav sa homogenim početnim uvjetom. Zbog upravljivosti početnog sustava vrijedi da je $R_T = \mathbb{R}^n$, pa je prema *Teoremu 1.3.2*, $r([B, AB, ..., A^{n-1}B]) = n$.
Preostaje pokazati obratan smjer, odnosno da pretpostavka $r([B, AB, ..., A^{n-1}B]) = n$ povlači upravljivost sustava u proizvoljnom trenutku $T$. Uz tu pretpostavku znamo da je sustav (1.7) upravljiv, pri čemu je rješenje sustava dano s:

$$x_H(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Upravljivost početnog sustava dokazujemo po definiciji. Uzimamo proizvoljne $T > 0$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ i pokažimo da postoji ulazna funkcija $u$ takva da za rješenje od

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad t \in [0,T], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

vrijedi $x(T) = x_1$. Rješenje ove zadaće je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Prema *Teoremu 1.3.2*, za sustav sa homogenim početnim uvjetom vrijedi da je $R_T = \mathbb{R}^n$, dakle postoji ulazna funkcija $u$ takva da za rješenje sustava uz homogen početni uvjet vrijedi

$$x_H(T) = \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds = x_1 - e^{AT}x_0.$$

Ako tu istu ulaznu funkciju stavimo u izraz za rješenje početnog sustava, dobiva se:

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds = e^{AT}x_0 + x_1 - e^{AT}x_0 = x_1,$$

čime je dokaz gotov. QED

**Primjer:**
Promotrimo jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Upravljivost ovo sustava ćemo odrediti korištenjem Kalmanovog teorema. Vrijedi da je

$$r([B, AB]) = r(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = 1 < 2$$

iz čega slijedi da sustav nije upravljiv. Da li je to očekivani rezultat? Iz sustava dobivamo dvije jednadžbe:

$$x_1'(t) = x_1(t)$$
$$x_2'(t) = x_2(t) + u(t)$$

Vidimo da je riječ o sustavu sa separiranim varijablama, tj. da varijabla $x_1$ ne ovisi o $x_2$ i obratno. Vidimo da su dvije jednadžbe nezavisne u smislu da $x_1$ ne ovisi o $x_2$ i da $x_2$ ne ovisi o $x_1$. $u(t)$ se javlja samo u jednadžbi sa $x_2$, dakle nije za očekivati da je ovaj sustav upravljiv jer ne možemo utjecati na komponentu $x_1$. Recimo da dodamo početni uvjet $x_1(0) = x_{1,0}, \quad x_2(0) = x_{2,0}$. U trenutku $\tau > 0$ će neovisno o funkciji ulaza $u$ vrijediti $x_1(\tau) = x_{1,0}e^{\tau}$. Ako odaberemo cilj $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ takvu da je $\alpha \neq x_{1,0}e^{\tau}$, onda nije moguće doći u tu točku niti za jednu funkciju ulaza. Ali, prema *Teoremu 1.3.2*, uz homogene početne uvjete znamo da je

$$C_{AB} = \text{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

upravljiv potprostor, dakle sve točke oblika $(x_{1,0}e^{\tau}, \mu)$ su dostižne za sve $\mu \in \mathbb{R}$, što se slaže sa činjenicom da upravo s $x_2$ komponentom možemo upravljati.

**Lema 1.5.2.** *Funkcija ulaza nije jedinstvena.*

Dokaz:
Recimo da želimo naći funkciju ulaza takvu da za sustav

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0,$$

vrijedi $x(T) = x_1$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $v_1 \in (L^2[0, \frac{T}{2}])^m$. Ona će dovesti rješenje sustava u neku točku $x(\frac{T}{2}) = X$, iz koje se može doći u $x(T) = x_1$ pomoću nekog ulaza $v_2 \in (L^2[\frac{T}{2}, T])^m$ zbog upravljivosti sustava. Dakle, ulazna funkcija $v$ koja zadovoljava $v = v_1$ na $[0, \frac{T}{2}]$ i $v = v_2$ na $[\frac{T}{2}, T]$ (gotovo svuda) je u prostoru $(L^2[0, T])^m$ i za odgovarajuću funkciju stanja vrijedi $x(T) = x_1$. Zbog proizvoljnosti $v_1$ vidimo da ulazna funkcija nije jedinstvena.
QED

**Teorem 1.5.3.** *Sustav (1.13) je upravljiv u trenutku $T$ ako i samo ako za adjungirani sustav*

$$\begin{aligned} -y' + A^*y = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ y(T) = y^0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

*vrijedi sljedeće:*
*postoji $C = C(T)$ takva da za sva rješenja $y$ adjungiranog sustava (1.14) vrijedi*

$$\|y^0\|^2 \le C \int_0^T |B^*y|^2 dt. \tag{1.15}$$

Dokaz:
Dokaz je po uzoru na knjigu [8]. Prvo dokazujemo da nejednakost (1.15) povlači upravljivost sustava (1.13). Pretpostavimo da vrijedi napisana nejednakost i definiramo kvadratni funkcional $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa

$$J(y^0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^*y(t)|^2 dt - \langle x_1, y^0 \rangle + \langle x_0, y(0) \rangle, \tag{1.16}$$

gdje je $y$ rješenje sustava (1.14).

Neka funkcional $J$ ima minumum (kasnije ćemo dokazati da minimum postoji) u $y^0_{min}$. Tada je $DJ(y^0_{min}) = 0$ i ulazna funkcija $u = B^*y_{min}$ je takva da funkcija stanja zadovoljava $x(T) = x_1$ ($y_{min}$ je rješenje adjungiranog sustava (1.14) uz $y(T) = y^0_{min}$). Uzmimo $\phi^0, \psi^0 \in \mathbb{R}^n$ proizvoljne. Tada vrijedi:

$$\langle \nabla J(\psi^0), \phi^0 \rangle = \int_0^T \langle B^*\psi(t), B^*\phi(t) \rangle dt - \langle x_1, \phi^0 \rangle + \langle x_0, \phi(0) \rangle.$$

Dakle, $\nabla J(y^0_{min}) = 0$ ako i samo ako je

$$\int_0^T \langle B^*y_{min}(t), B^*y(t) \rangle dt - \langle x_1, y^0 \rangle + \langle x_0, y(0) \rangle = 0 \quad \forall y^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Prethodna se jednadžba uz oznaku $u(t) = B^* y_{min}(t)$ može zapisati u obliku

$$\int_0^T \langle Bu(t), y(t)\rangle dt - \langle x_1, y^0\rangle + \langle x_0, y(0)\rangle = 0 \quad \forall y^0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.17}$$

Množenje sustava $x'(t) + Ax(t) = Bu(t)$ sa proizvoljnim rješenjem zadaće (1.14) daje

$$\int_0^T (x' + Ax)y dt = \int_0^T \langle Bu(t), y(t)\rangle dt. \tag{1.18}$$

Lijeva se strana pomoću parcijalne integracije transformira u

$$\int_0^T (x' + Ax)y dt = \int_0^T x(-y' + A^* y)dt + \langle x(T), y^0\rangle - \langle x_0, y(0)\rangle.$$

Iz prethodna tri izraza se dobiva

$$\langle x(T) - x_1, y^0\rangle = 0 \quad \forall y^0 \in \mathbb{R}^n,$$

iz čega slijedi $x(T) = x_1$. Dakle, ako preslikavanje $J$ ima minimum, onda se preko njega može definirati ulazna funkcija koja stanje sustava dovodi u $x_1$.

Preostaje dokazati da $J$ ima minimum. Budući da je $J$ neprekidna, kvadratična, konveksna i definirana na Euklidskom prostoru, dovoljno je provjeriti koercitivnost (više u [2]):

$$\lim_{\|y^0\|\to\infty} J(y^0) = \infty.$$

Budući da vrijedi nejednakost

$$\|y^0\|^2 \leq C \int_0^T |B^* y|^2 dt,$$

imamo da vrijedi

$$J(y^0) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^* y(t)|^2 dt - \langle x_1, y^0\rangle + \langle x_0, y(0)\rangle \geq \alpha\|y^0\|^2 + \langle a, y^0\rangle,$$

za neke $\alpha > 0, a \in \mathbb{R}^n$. Vidimo da vrijedi (za odgovarajuće $\beta_i > 0, c_i, d$)

$$J(x_1, ..., x_n) \geq \sum_{i=0}^{n} \beta_i (x_i - c_i)^2 + d,$$

iz čega slijedi koercitivnost (nisu toliko bitne vrijednosti $c_i, d$ nego oblik funkcije). Time je dokazan jedan smjer.
Preostaje dokazati da upravljivost sustava (1.13) povlači nejednakost (1.15).

Fiksiramo $x_1 = 0$. Tada za svaki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji $v_{x_0} \in (L^2[0,T])^m$ t.d. funkcija stanja zadovoljava $x(T) = 0$. Pretpostavimo na trenutak da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaki $x_0$

$$\|v_{x_0}\|_{L^2} \leq C\|x_0\|_2. \tag{1.19}$$

Sličnim postupkom kao u (1.18), dobiva se

$$-\langle x_0, y(0)\rangle = \int_0^T \langle u(t), B^* y(t)\rangle dt, \tag{1.20}$$

gdje je $y$ rješenje sustava (1.14). Iz (1.19) i (1.20) se primjenom Cauchy-Schwartz nejednakosti dobiva

$$|\langle x_0, y(0)\rangle| \leq C\|x\|_2 \|B^* y\|_{L^2},$$

što daje

$$\|y(0)\|_2 \leq C\|B^* y\|_{L^2}. \tag{1.21}$$

Iz (1.21) direktno slijedi nejednakost koju želimo dokazati jer vrijedi

$$y(0) = e^{TA^*} y^0,$$

$$y^0 = (e^{TA^*})^{-1} y(0),$$

$$\|y^0\|_2 \leq K\|y(0)\|_2 \leq KC\|B^* y\|_{L^2},$$

što je trebalo pokazati.
Preostaje dokazati ocjenu (1.19), što radimo preko teorema o zatvorenom grafu. Neka je $X = \mathbb{R}^n$, $Y = (L^2[0,T])^m$. Prema teoremu o zatvorenom grafu, ako je $A : X \to Y$ linearan operator sa zatvorenim grafom, onda je $A$ ograničen. U našem je slučaju $A : X \to Y$ operator koji proizvoljnom vektoru $x_0$ pridružuje ulaznu funkciju $v \in Y$ takvu da je $x(T) = 0$ (sjetimo se, fiksirali smo $x_1 = 0$ na početku). U prostoru $X \times Y$ je norma dana sa $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ i vrijedi da $\lim_n (x_n, y_n) = (x,y)$ ako i samo ako je $x = \lim_n (x_n), y = \lim_n (y_n)$.
Preostaje nam dokazati zatvorenost grafa, tj. skupa $S = \{(x, Ax) : \quad x \in X\}$ u prostoru $X \times Y$. Neka je $(x_n, u_n)_n$ niz u $S$ koji konvergira prema $(\overline{x}, \overline{v}) \in X \times Y$. To povlači dvije stvari:
1) $\overline{x} = \lim_n (x_n)$ u normi $X$ i $\overline{v} = \lim_n (v_n)$ u normi $Y$,
2) za funkciju stanja koju ima kao funkciju ulaza $v_n$ vrijedi $x(0) = x_n$.

Mi želimo pokazati da je $(\overline{x}, \overline{v}) \in S$. Za to je potrebno provjeriti da sustav

$$x'(t) = Ax(t) + B\overline{v}(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.22}$$

$$x(0) = \overline{x}, \tag{1.23}$$

zadovoljava $x(T) = 0$. Opće je rješenje oblika

$$x(t) = e^{At}\overline{x} + \int_0^t e^{A(t-s)} B\overline{v}(s) ds.$$

Vrijedi

$$x(T) = e^{AT}\overline{x} + \int_0^T e^{A(T-s)}B\overline{v}(s)ds.$$

Zbog 2) znamo da vrijedi

$$0 = e^{AT}x_n + \int_0^T e^{A(T-s)}Bv_n(s)ds, \quad \forall n.$$

Oduzimanje ove dvije relacije daje

$$x(T) = e^{AT}(\overline{x} - x_n) + \int_0^T e^{A(T-s)}B(\overline{v}(s) - v_n(s))ds, \quad \forall n.$$

Kada $n$ ide u beskonačnost, desna strana se približava nuli, zbog konvergencija u 1), pa vrijedi $x(T) = 0$. Dakle, prelikavanje $x_0 \to v_{x_0}$ je omeđeno pa zbog definicije omeđenosti operatora slijedi nejedakost (1.19).
QED

**Napomena:**
Iz dokaza se vidi da varijacijski pristup konstruira jednu ulaznu funkciju, no može se pokazati i više: da ulazna funkcija konstruirana na taj način ima najmanju $L^2$-normi od svih dopustivih ulaznih funkcija. Radi jednostavnosti, pretpostavimo $x_1 = 0$. Neka je $u$ proizvoljna ulazna funkcija, a $v$ ona dobivena varijacijskim pristupom. Postupkom sličnim kao u (1.18) se za funkcije $u, v$ dobiva:

$$\int_0^T \langle u, B^*y(t)\rangle dt = \int_0^T \langle v, B^*y(t)\rangle dt = -\langle x_0, y(0)\rangle.$$

Kao i prije, neka je $y^0_{min}$ minimizator funkcionala $J$ i $y_{min}$ pripadno rješenje adjungiranog sustava preko kojeg je definirana ulazna funkcija $v = B^*y_{min}$. Uvrštavanjem $y = y_{min}$ u prethodni izraz se dobiva:

$$\int_0^T uB^*y_{min}dt = \int_0^T vB^*y_{min}dt = \int_0^T |v|^2dt,$$

iz čega slijedi ocjena:

$$\|v\|^2_{L^2} \leq \int_0^T |uB^*y_{min}|dt \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Konačno, $\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$.

## 1.6 Hilbertova metoda jedinstvenosti HUM

Ova cjelina uvodi Hilbertovu metodu koja svodi problem upravljivosti na jednostavniji problem traženja vektora, što je motivirano dosadašnjim rezultatima. Analiza je po uzoru na knjigu [3].

**Teorem 1.6.1.** *Neka su $E, F$ Hilbertovi prostori i $A : F \to E$ neprekidan linearan operator takav da je $A^*$ injektivan. Tada vrijedi:*

$$ImA = \{u \in E : (\exists C > 0)(\forall Y \in E')| < Y, u >_{E' \times E} | \leq C||A^* Y||_F\}. \tag{1.24}$$

U našem je slučaju operator $A$ jednak Gramijanu upravljivosti,

$$W_T = \int_0^T e^{As} BB^* e^{A^* s} ds$$

čija je slika jednaka skupu dostižnih stanja (*Teorem 1.3.2*). Budući da smo u konačno-dimenzionalnim prostorima ($E = F = \mathbb{R}^n$), vrijedi $\mathrm{Im}W_T = (\mathrm{ker}W_T^{\nu,*})^\perp$. Prema prethodnom teoremu, ako je $\mathrm{ker}W_T^{\nu,*} = 0$, onda je sustav upravljiv jer je zadovoljeno $\mathrm{Im}W_T = \mathbb{R}^n$. Budući da je podintegralna matrica simetrična, $W_T$ je također simetrična, tako da je za upravljivost dovoljno provjeriti da je $W_T$ injekcija, što je ekvivalentno tome da za proizvoljne $p, q \in \mathbb{R}^n$, sustav $W_T p = q$ ima najviše jedno rješenje.
Motivirani dokazom prethodnog teorema, tražimo rješenje sustava

$$W_T y_0 = x_1 - e^{TA} x_0.$$

Ako je matrica punog ranga, onda znamo da rješenje postoji i sa tim vektorom kao uvjetom u adjungiranoj zadaći (1.14) se dobiva rješenje $y$ za koje vrijedi da je $u = B^* y$ ulazna funkcija početnog sustava koja dovodi funkciju stanja do $x_1$ kao što želimo.

Dakle, sveli smo problem upravljivosti na problem rješavanja linearnog sustava. Druga bitna stvar je da ova metoda daje i konstrukciju ulazne funkcije: pomoću rješenja linearnog sustava dobivamo rješenje adjungiranog linearnog sustava (1.14) (znamo egzaktnu formulu za rješenje) i konačno dobivamo ulaznu funkciju pomoću relacije $u = B^* y$. Kao što je pokazano na kraju prošlog potpoglavlja, tako konstruirana funkcija $u$ također ima svojstvo da je ulazna funkcija najmanje norme.

# Poglavlje 2

# Parametrizirani linearni sustavi

U prošlom poglavlju smo analizirali linearan sustav oblika

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sada pretpostavljamo da je sustav podložen parametriziranim perturbacijama (po uzoru na rad [6]) koje na određen način djeluju na sustav. Drugim riječima, promatramo klasu linearnih sustava oblika

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t,\nu) &= A(\nu)x(t,\nu) + B(\nu)u(t,\nu), \\ x(0,\nu) &= x_\nu^0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdje smo uveli parametar $\nu$ u opis problema i znamo egzaktnu ovisnost elemenata $A(\nu)$, $B(\nu)$, $x_\nu^0$ o tom parametru. U primjenama, modeli su rijetko u potpunosti određeni, već su podloženi greškama koje mogu biti posljedica ignoriranja nekog efekta (npr. kada pretpostavimo da je Zemlja inercijski sustav) no greške mogu biti i slučajne prirode. Tu razliku između potpuno točnog i našeg početnog modela (2.1) nastojimo popraviti uvođenjem dodatnog parametra $\nu$.

Kao i prije, $A : K \to \mathbb{R}^{n,n}$ je matrica koja opisuje slobodno gibanje sustava (u slučaju $u(t,\nu) = 0$), $B : K \to \mathbb{R}^{n,m}$ govori kako ulazna funkcija utječe na funkciju stanja $x(t,\nu) \in \mathbb{R}^n$ i $x_\nu^0$ je početni uvjet. Uvodimo tri dodatne pretpostavke za daljnju analizu:

1. $A, B, x_\nu^0$ su Lipschitz-neprekidne funkcije, tj. postoje konstante $L_A, L_B, L_x$ takve da

$$\begin{aligned} \|A(\nu_1) - A(\nu_2)\| &\leq L_A\|\nu_1 - \nu_2\|, \\ \|B(\nu_1) - B(\nu_2)\| &\leq L_B\|\nu_1 - \nu_2\|, \\ \|x_{\nu_1}^0 - x_{\nu_2}^0\| &\leq L_x\|\nu_1 - \nu_2\|. \end{aligned}$$

2. $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktan skup. Budući da je $\mathbb{R}^d$ konačnodimenzionalan, ekvivalentno je reći da je $K$ zatvoren i omeđen.

3. Sustav (2.2) je upravljiv za svaki $\nu \in K$.

Pretpostavka (3) će biti zadovoljena čim su Lipschitz-ove konstante funkcija $A(\nu), B(\nu)$ "dovoljno male" s obzirom na veličinu skupa $K$, o čemu preciznije govori sljedeći rezultat.

**Lema 2.0.1.** *Neka su $\nu \to A(\nu), \nu \to B(\nu)$ Lipschitz neprekidne funkcije i neka je sustav (2.2) upravljiv za neki $\nu_0 \in K$. Tada postoji okolina oko $\nu_0$ za čije je vrijednosti $\nu$ sustav (2.2) upravljiv.*

Dokaz:
Za početak, ako su $f, g$ dvije Lipschitz-neprekidne funkcije zadane na kompaktnom skupu $K$, onda su i $f+g, fg$ Lipschitz-neprekidne. Naime, vrijedi:

$$\begin{aligned}\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\| &\le \|f(x)-f(y)\| + \|g(x)-g(y)\| \\ &\le L_f\|x-y\| + L_g\|x-y\| = (L_f+L_g)\|x-y\|, \\ \|f(x)g(x)-f(y)g(y)\| &\le \|f(x)\|\cdot\|g(x)-g(y)\| + \|g(y)\|\cdot\|f(x)-f(y)\| \\ &\le M_f L_g\|x-y\| + M_g L_f\|x-y\| \le L_{fg}\|x-y\|,\end{aligned}$$

pri čemu su $L_f, L_g$ Lipschitzove konstante funkcija $f, g$ i $M_f = \max\{\|f(x)\| : x \in K\}, M_g = \max\{\|g(x)\| : x \in K\}$. Vrijednosti $M_f, M_g$ su dobro definirane jer je domena kompaktan skup.

Neka je sustav upravljiv u $\nu_0$. Prema Kalmanovom teoremu, to znači da je matrica

$$C_{\nu_0} = [B_{\nu_0}, ..., A_{\nu_0}^{n-1}B_{\nu_0}]$$

punog ranga: $r(C_{\nu_0}) = n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prvih $n$ stupaca linearno nezavisno i sa svim retcima čine podmatricu $\widetilde{C}_{\nu_0}$ t.d. $\det(\widetilde{C}_{\nu_0}) \neq 0$. Determinanta je zbroj, gdje je svaki pribrojnik umnožak $n$ Lipschitz-neprekidnih funkcija. Primjetimo da ako je matrična funkcija $A(\nu)$ Lipschitz-neprekidna, da su onda i komponente te matrice Lipschitz-neprekidne funkcije. Prema napomeni sa početka dokaza, det je Lipschitz-neprekidna funkcija. Stoga za $\nu \in K$ proizvoljan vrijedi

$$|\det(\widetilde{C}_\nu) - \det(\widetilde{C}_{\nu_0})| \le L_C\|\nu - \nu_0\|.$$

Dakle, ako je konstanta $L_C$ dovoljno mala, onda će vrijediti $\det(\widetilde{C}_\nu) \neq 0$, i pripadni će sustav na temelju Kalmanovog teorema biti upravljiv. QED

Treća pretpostavka govori da za svaku vrijednost $\nu \in K$ znamo da postoji ulazna funkcija $u(t, \nu)$ koja vodi funkciju stanja u $x(T) = x^1$. No, znamo i više od toga. Glavna posljedica *Teorema 1.5.3* je što daje konstrukciju takve ulazne funkcije koja je ujedno ona minimalne $(L^2([0,T]))^m$-norme (sjetimo se, ulazne funkcije nisu jedinstveno određene). Zbog njene važnosti, ovdje ponavljamo tu konstrukciju, koju kasnije koristimo. U dokazu *Teorema 1.5.3* definirao se kvadratni funkcional

$$J(y^0) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*y(t)|^2 dt - \langle x^1, y^0\rangle + \langle x_0, y(0)\rangle, \tag{2.3}$$

gdje je $y(t)$ rješenje adjungiranog sustava (1.14) sa uvjetom $y(T) = y^0$. Pokazalo se da funkcional ima jedinstven minimum, koji označujemo sa $y^0_{min}$. Uz $y^0_{min}$ kao početni uvjet, adjungirani sustav ima za rješenje funkciju

$$y(t) = e^{A^*(T-t)}y^0_{min}, \tag{2.4}$$

koja preko relacije $u = B^*y$ daje egzaktan izraz za ulaznu funkciju koja funkciju stanja dovodi u $x^1$. U ovom je poglavlju drugačije to što promatramo cijele familije sustava u ovisnosti o paramteru $\nu$, no za fiksan paramter $\nu$, konstrukcija je ista i ulazna je funkcija oblika

$$u_\nu = B^*_\nu e^{A^*_\nu(T-t)}y^0_{min,\nu}. \tag{2.5}$$

Izrazom (2.5) je dobro definirano preslikavanje iz $K$ u $(L^2[0,T])^m$, koje je zbog pretpostavke (1) sa početka poglavlja Lipschitz-neprekidno.

Zanima nas kako odrediti konačno mnogo $\nu_1, ..., \nu_l \in K$ čije pridružene ulazne funkcije (prema prethodno definiranom preslikavanju), nam omogućuju dobru aproksimaciju ulazne funkcije za proizvoljan parametar $\nu \in K$. Preciznije, ovaj problem formuliramo na sljedeći način:

**Problem 1:**
*Za proizvoljne $T > 0, x^0_\nu, x^1 \in \mathbb{R}^n$, promatramo skup ulaznih funkcija najmanje $L^2$ norme, u(t,K), koje odgovaraju svim mogućim vrijednostima $\nu \in K$ i zadovoljavaju uvjet $x(T,\nu) = x^1$. Taj skup je kompaktan u $[L^2(0,T)]^m$.*
*Za dan $\epsilon > 0$ tražimo konačan skup parametara $K_l = \{\nu_1, ..., \nu_l\} \subset K$ (gdje l ovisi o $\epsilon$) i njima odgovarajuće ulazne funkcije $u_1, ..., u_l$ koje razapinju prostor $V_l = [\{u_1, ..., u_l\}]$ takav da*

$$(\forall \nu \in K)(\exists u^* \in V_l) \quad \|x(T,\nu) - x^1\| \leq \epsilon,$$

*gdje je $x(t,\nu)$ funkcija stanja pridružena ulaznoj funkciji $u^*$ preko relacije*

$$x(t,\nu) = e^{tA_\nu}x^0_\nu + \int_0^t e^{A_\nu(t-s)}Bu^*(s)ds. \tag{2.6}$$

Prije nastavka, zbog važnosti dokazujemo jednu tvrdnju iz gornje formulacije:

**Lema 2.0.2.** *Skup $u(t,K)$ je kompaktan u $[L^2(0,T)]^m$*

Dokaz:
Za početak, znamo da ako su $X, Y$ normirani prostori, $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $K \subset X$

kompaktan skup, da je onda $f(K) \subset Y$ također kompaktan. Naime, ako je $(y_n) \subset f(K)$ proizvoljan niz, znamo da postoji niz $(x_n) \subset K$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n) = y_n.$$

Budući da je $K$ kompaktan, $(x_n)$ ima konvergentan podniz $(x_{p(n)})$ koji konvergira prema $x \in K$. Dakle, za proizvoljan niz $(y_n)$ dobili smo podniz $(y_{p(n)})$, gdje je $y_{p(n)} = f(x_{p(n)})$ koji konvergira prema $f(x)$ zbog neprekidnosti funkcije $f$.

Prostori $\mathbb{R}^d, [L^2(0,T)]^m$ su normirani, pa je dovoljno naći funkciju koja povezuje $K$ i $u(t,K)$ te pokazati da je ona neprekidna. Ta je funkcija dana relacijom (2.5), a neprekidnost slijedi zbog pretpostavke (1) sa početka poglavlja. QED

Vidimo da na neki način odustajemo od definicije upravljivosti iz prošlog poglavlja jer sada za dan parametar $\nu$ tražimo ulaznu funkciju koja vodi stanje sustava *dovoljno blizu* fiksiranoj točki, a ne nužno u tu točku. Drugim riječima, ovdje od funkcije stanja očekujemo

$$\|x(T,\nu) - x^1\| \leq \epsilon,$$

dok smo prije očekivali $x(T,\nu) = x^1$, iako prema pretpostavci (3) znamo da je sustav upravljiv u smislu prethodnog poglavlja. Formalno, *egzaktno upravljanje* iz prethodnog poglavlja zamjenjujemo *aproksimativnim upravljanjem*. Pretpostavka (3) ovdje zapravo služi kao opravdanje za egzistenciju ulaznih funkcija $u_1, ..., u_l$ koje definiraju vektorski potprostor $V_l \leq [L^2(0,T)]^m$ u kojem ćemo tražiti ulaznu funkciju za proizvoljan $\nu \in K$.

Na ovaj način izbjegavamo konstrukciju ulazne funkcije za svaku novu vrijednost parametra $\nu$ što može biti vremenski zahtjevno za velike sustave (no i dalje teorijski moguće). Ovdje je potrebno samo jednom odrediti ulazne funkcije za odabrane parametre $\nu_i, i = 1, ..., l$. Znamo da rješenje *Problema 1* postoji, jer prema pretpostavci (3) za dan $\nu \in K$ postoji jedna ulazna funkcija $u_{\nu,egz}$ koja egzaktno vodi funckiju stanja u $x^1$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $u_\nu(t) \to x(t,\nu)$, znamo da postoji okolina oko te ulazne funkcije čija pripadna funkcija stanja zadovoljava uvjet iz problema. Prva ideja je uzeti dovoljno profinjenu mrežu nad skupom $K$, i uzeti vrijednosti te mreže kao dovoljne $\nu_1, ..., \nu_l$ iz kojih dalje gradimo ulazne funkcije. Zbog neprekidnosti $\nu \to x(t,\nu)$ znamo da je taj algoritam dobar, no mi želimo da broj izabranih parametara bude najmanji mogući. U tu svrhu se služimo *slabim pohlepnim algoritmom* kojeg uvodimo i analiziramo u sljedećem potpoglavlju.

## 2.1 Slabi pohlepan algoritam

Ovdje uvodimo algoritam kojim na efikasan način želimo aproksimirati kompaktan $K$ u Banachovom prostoru $X$ nekim konačnodimenzionalnim prostorom $V_n$ dimenzije $n$. Algoritam se uvodi za proizvoljan Banachov prostor, no analizirat ćemo konvergenciju u Hilbertovim prostorima, što je

prikladno jer su prostori nama od interesa Hilbertovi.

Za analizu uvodimo sljedeću definiciju:
**Definicija 2.1.1.** *Neka je X Banachov i $K \subset X$ kompaktan. Kolmogorovljeva n-širina je definirana pomoću*

$$d_n = \inf\{\sup\{dist(x, V) : x \in K\} : V \leq X, dim(V) = n\}. \tag{2.7}$$

Za fiksan konačnodimenzionalan prostor $V \leq X$, $\sup\{dist(x, V) : x \in K\}$ je najveća udaljenost elemenata skupa $K$ od potprostora $V$. Dakle, $d_n$ traži po svim potprostorima dimenzije $n$ od $X$ onaj za koji je ta udaljenost najmanja. Drugim riječima, $d_n$ nam govori koliko se dobro može aproksimirati kompaktan $K$ pomoću potprostora dimenzije $n$.

Uvedena Kolmogorovljeva $n$-širina je teoretska vrijednost. Kako bi se za dan skup odredio najbolji aproksimativan potprostor dimenzije $n$, služimo se pohlepnim algoritmom koji se predstavlja u nastavku.

**Slabi pohlepni algoritam**

- Fiksiramo $\gamma \in \langle 0, 1]$.
- Uzimamo element $g_0 \in K$ takav da $\|g_0\| \geq \gamma \max\{\|g\| : g \in K\}$.
- Pretpostavimo da smo za $n \in \mathbb{N}$ odabrali $\{g_0, ..., g_{n-1}\}$ i definiramo prostor $V_n = [\{g_0, ..., g_{n-1}\}]$. Sljedeći element biramo tako da zadovoljava

  $$g_n \in K, \quad dist(g_n, V_n) \geq \gamma \max\{dist(g, V_n) : g \in K\}.$$

  Algoritam staje kada vrijedi

  $$\max\{dist(g, V_n) : g \in K\} < \epsilon,$$

  za neku unaprijed dogovorenu vrijednost $\epsilon$.

Paralelno uz konstrukciju niza $g_n$ definiramo i dodatan niz $(\sigma_n)_n$ sa

$$\sigma_0 := \max\{\|g\| : g \in K\}, \tag{2.8}$$
$$\sigma_n := \sup\{\inf\{\|g - v\| : v \in V_n\} : g \in K\}. \tag{2.9}$$

Koja je interpretacija broja $\sigma_n$? Znamo da je za fiksan $g \in K$, $\inf\{\|g - v\| : v \in V_n\}$ udaljenost tog elementa od potprostora $V_n$. Dakle, $\sigma_n$ predstavlja najmanju gornju među na udaljenost elemenata

od $K$ do prostora $V_n$. Kada je zadovoljen uvjet $\sigma_n < \epsilon$, znamo da za proizvoljan element $g \in K$, u njegovoj $\epsilon$ okolini se nalazi neki element iz prostora $V_n$. Niz $(\sigma_n)_n$ je monoton, nerastući.

Za vrijednost $\gamma = 1$, gornji algoritam se naziva *pohlepni algoritam*.

Niz $g_n$ kojeg algoritam generira nije jedinstven, što nam govori da nisu toliko bitni sami elementi niza $(g_n)$, već koliko dobro linearna ljuska elemenata aproksimira kompaktan skup $K$. Algoritmi staju kada je zadovoljen uvjet $\sigma_n < \epsilon$, za neku unaprijed definiranu toleranciju $\epsilon > 0$. Dakle, algoritam daje konačnodimenzionalan prostor $V_n$ koji aproksimira $K$ do na toleranciju $\epsilon$.

Pri izvođenju slabog pohlepnog algoritma, dva se problema javljaju:

1. Skup $K$ može sadržavati beskonačno mnogo vektora.
2. U primjenama, skup $K$ nije uvijek poznat.

Prvi se problem rješava tako da umjesto cijelog skupa $K$ promatramo konačan podskup. Naime, kako je $K$ kompaktan, znamo da se za dani $\delta > 0$ može pokriti sa konačno mnogo kugala radijusa $\delta$. Da bi izbjegli drugi problem, zamjenjujemo udaljenost $dist(g, V_n)$ nekom drugom ekvivalentnom vrijednošću koju je lakše odrediti. O tome se bavi sljedeće potpoglavlje. Za kraj, dajemo rezultat o konvergenciji slabog pohlepnog algoritma, čiji se dokaz može naći u [4].

**Teorem 2.1.1.** *Za slabi, pohlepni algoritam sa konstantom $\gamma$ u Hilbertovom $X$ vrijedi sljedeće: ako je kompaktan $K$ takav da za neke $\alpha > 0, C > 0$ vrijedi*

$$d_n \leq C_0 n^{-\alpha},$$

*onda vrijedi*

$$\sigma_n \leq C_1 n^{-\alpha}, \tag{2.10}$$

*gdje je $C_1 = C_0 \gamma^{-2} 2^{5\alpha+1}$.*

Drugim riječima, red konvergencije za niz $\sigma_n$ je jednak redu konvergencije za $d_n$. Budući da vrijedi $d_n \leq \sigma_n$, očekivano je bilo da je red konvergencije niza $(\sigma_n)$ sporiji ili jednak onome od niza $(d_n)$ i ovaj rezultat govori da je red upravo jednak. Također, zanimljivo je vidjeti da izbor $\gamma$ ne utječe na red konvergencije već samo na konstantu $C_1$.

## 2.2 Primjena slabog pohlepnog algoritma

U ovom potpoglavlju prvo izvodimo ekvivalentnu formulaciju *Problema 1* na temelju prethodnih rezultata i nakon toga opisujemo primjenu pohlepnog algoritma na njegovo rješavanje.

Sjetimo se, ulazna funkcija minimalne $L^2$-norme je oblika $u = B_\nu^* y$, gdje je $y(t) = e^{A_\nu^*(T-t)} y^0_{min,\nu}$ i $y^0_{min,\nu}$ minimizator modificiranog funkcionala iz *Teorema 1.5.3* (uveden je parametar $\nu$). Sljedeća tvrdnja karakterizira minimizator tog funkcionala $J_\nu$.

**Lema 2.2.1.** *Minimizator $y^0_{min,\nu}$ funkcionala $J_\nu$ danog sa*

$$J_\nu(y^0) = \frac{1}{2}\int_0^T \|B_\nu^* e^{(T-t)A_\nu^*} y^0\|^2 dt - \langle x^1, y^0\rangle + \langle x_\nu^0, e^{TA_\nu^*} y^0\rangle,$$

*se može dobiti kao rješenje linearnog sustava*

$$W_T^\nu y^0 = x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, \tag{2.11}$$

*gdje je*

$$W_T^\nu = \int_0^T e^{A_\nu s} B_\nu B_\nu^* e^{A_\nu^* s} ds.$$

Dokaz:
Za proizvoljan $y^0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} J_\nu(y) &= \frac{1}{2}\int_0^T \langle B_\nu^* e^{A_\nu^*(T-t)} y^0, B_\nu^* e^{A_\nu^*(T-t)} y^0\rangle dt - \langle x^1, y^0\rangle + \langle x_\nu^0, e^{TA_\nu^*} y^0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle y^0, W_T^\nu y^0\rangle - \langle x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, y0\rangle, \end{aligned}$$

gdje je $W_T^\nu$ Gramijan, pri čemu smo koristili činjenicu: $(e^A)^* = e^{A^*}$. Dakle, kvadratni funkcional smo zapisali u standardnom obliku:

$$J_\nu(y_0) = \frac{1}{2} W_T^\nu y^0 \cdot y^0 - (x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0) \cdot y0. \tag{2.12}$$

Ako je $y^0$ minimizator, onda je posebno stacionarna točka, pa vrijedi $\nabla J(y^0) = W_T^\nu y^0 - (x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0) = 0$, što je upravo sustav (2.11). QED

Pretpostavili smo da je sustav upravljiv, za svaku vrijednost $\nu \in K$, što je automatski zadovoljeno ako vrijedi

$$W_- I \le W_T^\nu \le W_+ I, \tag{2.13}$$

za neke pozitivne konstante $W_-, W_+$. Naime, u tom je slučaju Gramijan regularna matrica i sustav (2.11) je riješiv.

Na temelju ovih rezultata, znamo da je ulazna funkcija minimalne norme jedinstveno određena relacijom

$$u_\nu = B_\nu^* e^{(T-t)A^*} y_{min,\nu}^0, \tag{2.14}$$

gdje je $y_{min,\nu}^0$ jedinstveni minimizator funkcionala, koji se može dobiti kao rješenje linearnog sustava

$$W_T^\nu y_{min,\nu}^0 = x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0. \tag{2.15}$$

Relacija (2.15) govori kako dobiti ulaznu funkciju jednom kada je poznat vektor $y_{min,\nu}^0$, pa je dovoljno aproksimirati taj vektor, da bi se našla aproksimacija za $u_\nu$ (preslikavanje $y_\nu \to u_\nu$ je neprekidno).

Ovime smo definirali preslikavanje $y^0 : K \to \mathbb{R}^N$ koje proizvoljnom parametru $\nu$ pridružuje rješenje sustava (2.11) i za koje vrijedi da je $y^0(K) \subset \mathbb{R}^N$ kompaktan (dokaz kasnije). Zbog te veze između ulaznih funkcija $u_\nu$ i pridruženih minimizatora $y^0(\nu) = y_\nu^0$, originalan problem se može napisati na ekvivalentan način:

**Problem 2:**
*Neka su zadani $T > 0$ te proizvoljni $x^1, x_\nu^0 \in \mathbb{R}^N$. Tražimo elemente $\nu_1, ..., \nu_n \in K$ takve da odgovarajući minimizatori $y_1^0, ..., y_n^0$ koji razapinju prostor $Y_n^0$ zadovoljavaju: $(\forall \nu \in K)(\exists y_\nu^{0,*} \in Y_n^0)$ t.d. ulazna funkcija $u_\nu^*$ vodi sustav u stanje $x^*(T)$ koje je u $\epsilon$ okolini od $x^1$. Ulazna funkcija $u_\nu^*$ je dana relacijom*

$$u_\nu^* = B_\nu^* e^{A_\nu^*(T-t)} y_\nu^{0,*}. \tag{2.16}$$

Razlog za ovu formulaciju je što ovdje aproksimiramo $n$-dimenzionalne vektore, umjesto $[L^2(0,T)]^m$ funkcija, tj. za dani $\nu$ aproksimiramo $y_\nu^{0,*} \in \mathbb{R}^n$ umjesto da direktno aproksimiramo $u_\nu^* \in [L^2(0,T)]^m$.

Sljedeći je rezultat bitan jer se pohlepni algoritmi zasnivaju na tome da skup kojeg aproksimiramo je kompaktan.

**Lema 2.2.2.** *Skup $Y(K) \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan.*

Dokaz:
Kao i prije, dovoljno je pokazati da je $Y$ neprekidno preslikavanje. Iz relacije (2.11) vrijedi

$$Y(\nu) = (W_T^\nu)^{-1}(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0),$$

koje je neprekidno zbog neprekidnosti preslikavanja $A(\nu), B(\nu), x_\nu^0$. QED

## 2.3 Konstrukcija aproksimativnog prostora $Y_n^0$

Potpoglavlje započinjemo definicijom koja nam kasnije olakšava računanje izraza $dist(y_\nu^0, Y_n^0)$.
**Definicija 2.3.1.** *Kažemo da su dvije metrike $d_1, d_2$ ekvivalentne na prostoru X ako za svaki $x \in X$ postoje $\alpha > 0, \beta > 0$ takvi da za svaki $y \in X$ vrijedi:*

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

*Za ekvivalenciju koristimo oznaku $\simeq$.*

U svakom koraku opisanog pohlepnog algoritma se zahtjeva računanje udaljenosti $Y(K)$ od prostora razapetog sa već odabranim elementima, što povlači rješavanje sustava

$$W_T^\nu y_\nu^0 = x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0,$$

za svaku vrijednost $\nu$. Dakle, u ovom slučaju, kompaktan skup $y^0(K)$ koji aproksimiramo, nije dan eksplicitno i zato uvodimo prikladnu zamjenu za udaljenost $dist(y_\nu^0, Y_n^0)$, koja će zamijeniti spomenuti korak

$$dist(y_\nu^0, Y_n^0) \simeq dist(W_T^\nu y_\nu^0, W_T^\nu Y_n^0) \tag{2.17}$$
$$= dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_n^0), \tag{2.18}$$

gdje je $W_T^\nu Y_n^0 = [\{W_T^\nu y_1^0, ..., W_T^\nu y_n^0\}]$. Ekvivalencija u izrazu (2.17) je opravdana jer je $W_T^\nu$ pozitivno definitna matrica za svaki $\nu$ i zbog pretpostavke (2.13). Ideja iza ove zamjene je što smo u izrazu (2.18) zamijenili nepoznat vektor $y_\nu^0$ izrazom $W_T^\nu y_\nu^0 = x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0$, kojeg je lakše odrediti.

Izraz (2.18) govori koliko dobro izbori $\{y_1^0, ..., y_n^0\}$ koji razapinju prostor $Y_n^0$ aproksimiraju za proizvoljnu vrijednost parametra $\nu$ njegov pripadni vektor $y_\nu^0$. Prema dosadašnjim rezultatima, znamo da se pomoću vektora $y_\nu^0$ konstruira ulazna funkcija

$$u_\nu = B_\nu^* e^{A_\nu^*(T-t)} y_\nu^0,$$

za čiju funkciju stanja vrijedi $x(T) = x^1$.

Neka je $y^0 \in Y_n^0$ proizvoljan vektor. Prema definiciji, $y^0$ je linearna kombinacija vektora $\{y_1^0, ..., y_n^0\}$ koji su nastali iz odabranih parametara $\nu_1, ..., \nu_n$. Zanima nas koliko dobro $y^0$ aproksimira $y_\nu^0$, gdje uspješnost mjerimo gledajući odgovarajuće funkcije stanja u trenutku $t = T$. Pomoću vektora $y^0$ konstruiramo ulaznu funkciju

$$u_\nu = B_\nu^* e^{A_\nu^*(T-t)} y^0,$$

za čiju pripadnu funkciju stanja vrijedi

$$\widetilde{x}(T) = W_T^\nu y^0 + e^{TA_\nu} x_\nu^0.$$

Kada usporedimo dvije funkcije stanja u trenutku $t = T$, dobivamo:

$$\|x(T) - \widetilde{x}(T)\| = \|x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0 - W_T^\nu y^0\|, \tag{2.19}$$

dok je prema definiciji,

$$dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_n^0) = \inf\{\|x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0 - W_T^\nu y^0\| : y^0 \in Y_n^0\}. \tag{2.20}$$

Uspoređivajući izraze (2.19) i (2.20), vidimo da $dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_n^0)$ mjeri koliko se možemo približiti točki $x^1$, ako vektor $y_\nu^0$ zamjenimo njegovom projekcijom u prostoru $Y_n^0$. Ako za svaku vrijednost $\nu$ možemo naći vektor $y^0 \in Y_n^0$ takav da je $\|x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0 - W_T^\nu y^0\| < \epsilon$, za neku unaprijed fiksiranu vrijednost $\epsilon$, onda smo riješili *Problem 2*. U suprotnom, prostor $Y_n^0$ nije dovoljno dobar i moramo konstruirati prostor veće dimenzije na način koji je opisan u sljedećem algoritmu.

U nastavku potpoglavlja je prezentiran algoritam za konstrukciju aproksimativnog potprostora $Y_n^0$, dok u sljedećem potpoglavlju dajemo konstrukciju aproksimacije vektora $y_\nu^0$ za proizvoljan $\nu \in K$, koja je potrebna za rješenje *Problema 2*.

**Algoritam za konstrukciju $Y_n^0$**
Za početak, fiksiramo toleranciju $\epsilon > 0$, ovisno o tome koliko se blizu želimo približiti završnoj točki $x^1$.

1. *Diskretizacija*
   Odabiremo konačan podskup $\overline{K} \subset K$ t.d.

   $$(\forall \nu \in K) \quad \mathrm{d}(\nu, \overline{K}) < \delta,$$

   gdje je $\delta > 0$ konstanta koja ovisi o $\epsilon$ (kasnije više o izboru $\delta$).

2. *Izbor prvog elementa*
   Ako vrijedi nejednakost

   $$\max\{|x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0| : \nu \in \overline{K}\} < \frac{\epsilon}{2},$$

   zaustavljamo algoritam. U suprotnom,

   $$\nu_1 = \arg\max\{|x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0| : \nu \in \overline{K}\},$$

   i stavljamo da je $y_1^0$ minimizator pripadnog funkcionala $J_{\nu_1}$.

3. *Izbor elementa $\nu_{j+1}$*
   Pretpostavimo da smo odabrali $\{\nu_1, ..., \nu_j\}$. Ako je zadovoljena nejednakost,

   $$\max\{dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_j^0) : \nu \in \overline{K}\} < \frac{\epsilon}{2}, \tag{2.21}$$

   stajemo sa algoritmom. U suprotnom, sljedeći je element definiran kao

   $$\nu_{j+1} = \arg\max\{dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_j^0) : \nu \in \overline{K}\},$$

   te odabiremo $y_{j+1}^0$ kao minimizator od $J_\nu$ koji odgovara $\nu = \nu_{j+1}$. Ponavljaj korak (3).

Prvi korak algoritma rješava jedan od problema koji je bio spomenut u potpoglavlju sa pohlepnim algoritmima, da kompaktan skup $K$ ima beskonačno mnogo elemenata. Zato se iterira samo po konačnom podskupu $\overline{K}$, koji je "dovoljno gust" u smislu da se za svaki element $\nu \in K$, u njegovoj $\delta$-okolini nalazi element iz $\overline{K}$.

Algoritam daje aproksimativan prostor $Y_n^0 = [\{y_1^0, ..., y_n^0\}]$ dimenzije $n$, gdje su $\{y_1^0, ..., y_n^0\}$ linearno nezavisni. Naime, prema raspravi prije izlaganja algoritma, kada bi u određenom koraku vektor $y_{j+1}^0$ bio linearno ovisan o vektorima $y_1^0, ..., y_j^0$, onda bi lijeva strana u (2.21) bila jednaka 0, što je kontradikcija. Dakle, svaki korak algoritma povećava aproksimativan prostor. Algoritam završava nakon $n \leq N$ koraka i zadovoljava pretpostavke za slabi pohlepni algoritam kao što govori sljedeći teorem (dokaz po uzoru na [6]).

**Teorem 2.3.1.** *Neka je $\nu \to (A(\nu), B(\nu))$ Lipschitz neprekidna i neka vrijedi pretpostavka (2.13) za neke konstante $W_-, W_+$. Nadalje, neka je $C_y$ Lipschitzova konstanta preslikavanja $\nu \to y_\nu^0$.*
*Ako za dani $\epsilon > 0$ uzimamo $\delta$ iz intervala $\langle 0, \frac{\epsilon}{2C_y W_-}]$, onda gornji algoritam daje slabu pohlepnu aproksimaciju kompaktnog skupa $Y(K)$ sa konstantom*

$$\gamma = \frac{W_-}{2W_+} \leq \frac{1}{2}, \tag{2.22}$$

*i sa greškom aproksimacije manjom od $\frac{\epsilon}{W_-}$.*

Dokaz:
Potrebno je pokazati dvije stvari:

- Vektori $y_i^0$ pridruženi parametrima $\nu_i$ zadovoljavaju

$$\|y_1^0\| \geq \gamma \max\{\|y_\nu^0\| : \nu \in K\} \tag{2.23}$$

$$dist(y_{j+1}^0, Y_j^0) \geq \gamma \max\{dist(y_\nu^0, Y_j^0) : \nu \in K\}, \quad j = 1, ..., n-1, \tag{2.24}$$

  gdje je $\gamma = \frac{W_-}{2W_+}$.

- Algoritmom postignuta aproksimacija zadovoljava nejednakost:

$$\sigma_n(y^0(K)) \leq \frac{\epsilon}{W_-}.$$

Dokaz provodimo u dva koraka.

1. Za početak, dokazujemo da vrijedi

$$\|y_1^0\| \geq \gamma \max\{\|y_\nu^0\| : \nu \in K\}.$$

Već smo dokazali da se vektor $y_1^0$ može dobiti rješavanjem pripadnog linearnog sustava. Nadalje, pretpostavka (2.13) kao posljedicu ima:

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n) \quad |W_-|\|y\| \leq \|W_T^\nu y\| \leq |W_+|\|y\|. \tag{2.25}$$

Naime, za svaki $\nu$, $W_T^\nu$ je hermitski operator nad konačnodimenzionalnim prostorom, pa se može dijagonalizirati, tj. postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora: $\{e_1^\nu, ..., e_n^\nu\}$ (elementi baze ovise o $\nu$). Neka je $y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan.

$$\begin{aligned}\|W_T^\nu y\|^2 &= \langle W_T^\nu y, W_T^\nu y\rangle = \langle W_T^\nu(\sum_{i=1}^n \alpha_i^\nu e_i^\nu), W_T^\nu(\sum_{j=1}^n \alpha_j^\nu e_j^\nu)\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n (\alpha_i^\nu \lambda_i^\nu e_i^\nu), \sum_{j=1}^n (\alpha_j^\nu \lambda_j^\nu e_j^\nu)\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i^\nu|^2 |\lambda_i^\nu|^2,\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz ortonormiranosti baze ($W_i^\nu$ su pridružene svojstvene vrijednosti). Zbog pretpostavke (2.13) vrijedi $\lambda_- \leq \min\{\lambda_i^\nu : i = 1, ..., n\}, \lambda_+ \geq \max\{\lambda_i^\nu : i = 1., , , n.\}$, za svaku $\nu \in K$, iz čega slijedi tražena nejednakost (2.25).

Prema definiciji parametra $\nu_1$ i prethodnoj raspravi, znamo da za svaki $\overline{\nu} \in \overline{K}$ vrijedi

$$W_+\|y_1^0\| \geq \|W_T^{\nu_1} y_1^0\| \geq \|x^1 - e^{TA_{\overline{\nu}}} x_\nu^0\| = \|W_T^{\overline{\nu}} y_{\overline{\nu}}^0\| \geq W_-\|y_{\overline{\nu}}^0\|,$$

dakle dobili smo ocjenu $\|y_1^0\| \geq 2\gamma\|y_{\overline{\nu}}^0\|$, koja vrijedi za sve $\overline{\nu} \in \overline{K}$. Preostaje napraviti prijelaz sa skupa $\overline{K}$ na cijeli $K$, što nam omogućava Lipschitz neprekidnost preslikavanja $\nu \to y_\nu^0$. Uzmimo sada proizvoljan $\nu \in K$. Skup $\overline{K}$ smo konstruirali sa ciljem da bude dovoljno "gust" u skupu $K$, tj. da postoji $\overline{\nu} \in \overline{K}$ takav da $\overline{\nu} \in B(\nu, \delta)$, gdje je $\delta$ kao u iskazu teorema. Tada $y_\nu^0 = Y(\nu)$ zadovoljava

$$\begin{aligned}\|y_\nu^0\| &\leq \|y_\nu^0 - y_{\overline{\nu}}^0\| + \|y_{\overline{\nu}}^0\| \leq C_y\|\nu - \overline{\nu}\| + \frac{W_+}{W_-}\|y_1^0\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2W_-} + \frac{W_+}{W_-}\|y_1^0\|.\end{aligned}$$

Sjetimo se, prema konstrukciji $\nu_1$ zadovoljava

$$\|x^1 - e^{TA_{\nu_1}} x_\nu^0\| \geq \frac{\epsilon}{2},$$

pa zato vrijedi

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \|W_T^{\nu_1} y_1^0\| \leq W_+\|y_1^0\|.$$

Kombiniranjem prethodne tri relacije se dobiva upravo ono što se tražilo:

$$(\forall \nu \in K) \quad \|y_1^0\| \geq \gamma\|y_\nu^0\|.$$

Sličnim se argumetima dokazuje odgovarajuća nejednakost za $j-$tu iteraciju. Uzmimo proizvoljan $\nu \in K$ i $\overline{\nu} \in B(\nu, \delta) \cap \overline{K}$. Dobivamo

$$\begin{aligned} dist(y_\nu^0, Y_j^0) &\leq \|y_\nu^0 - y_{\overline{\nu}}^0\| + dist(y_{\overline{\nu}}^0, Y_j^0) \\ &\leq C_Y\|\nu - \overline{\nu}\| + \frac{1}{W_-} dist(W_T^{\overline{\nu}} y_{\overline{\nu}}^0, W_T^{\overline{\nu}} Y_j^0) \\ &\leq \frac{1}{W_-}(\frac{\epsilon}{2} + dist(W_T^{\overline{\nu}} y_{j+1}^0, W_T^{\overline{\nu}} Y_j^0)) \\ &\leq 2\frac{W_+}{W_-} dist(y_{j+1}^0, Y_j^0), \end{aligned}$$

čime smo dokazali (2.24).

2. Nakon izvršenog algoritma (u kojem je izvršeno $n$ iteracija), zadovoljena je nejednakost

$$\max\{dist(x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0, W_T^\nu Y_j^0) : \nu \in \overline{K}\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kao u prethodnom računu, dobivamo

$$\begin{aligned} dist(y_\nu^0, Y_j^0) &\leq \|y_\nu^0 - y_{\overline{\nu}}^0\| + dist(y_{\overline{\nu}}^0, Y_j^0) \\ &\leq \frac{1}{W_-}(\frac{\epsilon}{2} + dist(W_T^{\overline{\nu}} y_{j+1}^0, W_T^{\overline{\nu}} Y_j^0)), \end{aligned}$$

za proizvoljan $\nu \in K, \overline{\nu} \in B(\nu, \delta) \cap \overline{K}$. Kombiniranjem prethodne dvije relacije, dobiva se traženi rezultat.

QED

## 2.4 Konstrukcija aproksimativne ulazne funkcije $u_\nu^*$ za proizvoljnu vrijednost parametra $\nu \in K$

Glavni razlog za konstrukciju prostora $Y_n^0$ je što ga želimo koristiti za aproksimaciju (oznaka: $u_\nu^*$) ulaznih funkcija $u_\nu$ za proizvoljne vrijednosti parametra $\nu \in K$, i to se opisuje u ovom potpoglavlju. Aproksimacija je dana izrazom

$$u_\nu^* = B_\nu^* e^{(T-t)A_\nu^*} y^0, \tag{2.26}$$

gdje je $y^0$ aproksimacija vektora $y_\nu^0$ (koji je pridružen $\nu$ prema linearnom sustavu (2.11)) u prostoru $Y_n^0$, koji je unaprijed generiran algoritmom iz prethodnog potpoglavlja.

Takva ulazna funkcija dovodi sustav u stanje

$$\widetilde{x}(T) = W_T^{\nu} y^0 + e^{TA_\nu} x_\nu^0. \tag{2.27}$$

Cilj je naći $y^0$ za koji izraz $I = \|\widetilde{x}(T) - x^1\|$ postiže minimum (preko relacije (2.27)). Ovo možemo napisati na ekvivalentan način:

$$I = \|W_T^{\nu} y^0 - (x^1 - e^{TA_\nu} x^0)\| \tag{2.28}$$

Vrijedi općenita tvrdnja: ako je $H$ Hilbertov i $M$ zatvoren potprostor u $H$, onda za svaki $v \in H$ postoje jedinstveni $a \in M, b \in M^\perp$ takvi da je $v = a + b$. Također, vrijedi $\|v\| = \|a\| + \|b\|$. Izborom vektora $y^0$ prolazimo po prostoru $M = \mathrm{Im}(W_T^{\nu})$, koji je zatvoren u Hilbertovom $\mathbb{R}^n$ (jer je konačnodimenzionalan). Ako primijenimo prethodnu tvrdnju na vektor $v = W_T^{\nu} y^0 - (x^1 - e^{TA_\nu} x^0)$, vidimo da je

$$I = \|a\| + \|b\| \geq \|b\|,$$

tj. promjenom vektora $y^0$ ne možemo utjecati na dio iz $M^\perp$, pa izraz prima minimum kada je $a = 0$, a to je upravo kada je $W_T^{\nu} y^0$ ortogonalna projekcija vektora $x^1 - e^{TA_\nu} x_\nu^0$ na prostor $M$.

Na temelju ovih zaključaka, definiramo aproksimaciju od $y_\nu^0$ kao

$$y^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^0, \tag{2.29}$$

gdje su koeficijent $\alpha_i$ takvi da je $\sum_{i=1}^n \alpha_i W_T^{\nu} y_i^0$ projekcija vektora $x^1 - e^{TA_\nu} x^0$ na prostor $W_T^{\nu} Y_n^0$. Time smo riješili *Problem 2* čije je rješenje iskazano sljedećim rezultatom (više u [6]):

**Teorem 2.4.1.** *Neka je $\nu \to (A(\nu), B(\nu))$ Lipschitz neprekidna i neka vrijedi pretpostavka o uniformnoj upravljivosti (2.13).*
*Za dan $\epsilon > 0$, neka je $Y_n^0 = [\{y_1^0, ..., y_n^0\}]$ aproksimativan prostor konstruiran pohlepnim algoritmom, gdje je diskretizacijska konstanta dana sa*

$$\delta \leq \frac{1}{2} \cdot \min\{\frac{\epsilon}{C}, \frac{\epsilon}{CW_-}\}.$$

*Tada za svaki $\nu \in K$, aproksimativna ulazna funkcija $u_\nu^*$ definirana izrazom (2.16) dovodi sustav u $\epsilon$ okolinu točke $x^1$, tj.*

$$\widetilde{x}(T) \in B(x^1, \epsilon).$$

# Poglavlje 3

# Numerički primjeri

Za kraj se okrećemo primjenama spomenutih algoritama na primjerima valne jednadžbe i jednadžbe provođenja. Semidiskretizacijom tih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se dobivaju sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi oblika (2.2), kao što će biti pokazano u sljedećem potpoglavlju.

Zadaća valne jednadžbe u jednoj dimenziji na ograničenoj domeni je oblika

$$\begin{aligned} \partial_{tt} v(t,x) - \nu_1 \partial_{xx} v(t,x) &= 0, \quad \langle 0,T\rangle \times \langle 0,L\rangle, \\ v(t,0) &= 0, \\ v(t,1) &= u_\nu(t), \\ v(0,x) &= v_{0,\nu_2}(x), \\ \partial_t v(0,x) &= v_{1,\nu_2}(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje je $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Vidimo da ulazna funkcija $u_\nu$ ima interpretaciju desnog rubnog uvjeta.

Jednadžba provođenja u jednoj dimenziji na ograničenoj domeni je dana sa

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) - \nu_1 \partial_{xx} v(t,x) &= 0, \quad \langle 0,T\rangle \times \langle 0,L\rangle, \\ v(t,0) &= 0, \\ v(t,1) &= u_\nu(t), \\ v(0,x) &= v_{0,\nu_2}(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Semidiskretizacija**

Za početak, potrebno je iz parcijalnih diferencijalnih jednadžbi doći do sustava oblika (2.2), za koji smo razvili teoriju u prethodnom poglavlju. Uvodimo ekvidistantnu mrežu oblika:

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = L,$$

gdje će u oba slučaja vrijediti $L = 1$. Naziv semidiskretizacija dolazi iz činjenice da se parcijalne diferencijalne jednadžbe diskretiziraju samo po prostornoj varijabli. Jedan od načina te diskretizacije je metoda konačnih diferencija, koja se ovdje provodi.

Prvo izvodimo sustav za valnu jednadžbu. Za proizvoljan $i \in \{1, ..., n\}$ konačnim diferencijama se dobiva

$$\partial_{tt} v(t, x_i) = \nu_1 \partial_{xx} v(t, x_i) \approx \nu_1 \frac{v(t, x_{i-1}) - 2v(t, x_i) + v(t, x_{i+1})}{h^2}, \tag{3.3}$$

gdje je $h = \frac{1}{n+1}$ prostorni korak. Uvodimo $n$ funkcija koje predstavljaju vrijednost rješenja na diskretnom skupu točaka $\{x_1, ..., x_n\}$ i da bi oznake bile konzistente onima iz prethodnog poglavlja, te funkcije dobivaju naziv $x_i$, dakle vrijedi

$$x_i(t) = v(t, x_i), \quad i = 1, ..., n.$$

Dakle, funkcija $x_i(t)$ govori kako se rješenje valne jednadžbe mijenja kroz vrijeme na dijelu domene gdje je $x = x_i$. Ovim oznakama se iz (3.3) dobiva

$$x_i''(t) = \frac{\nu_1}{h^2}(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)), \quad i = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

Rubni uvjeti iz (3.1) daju eksplicitan izraz za $x_0(t), x_{n+1}(t)$:

$$x_0(t) = v(t, 0) = 0, \tag{3.5}$$

$$x_{n+1}(t) = v(t, 1) = u_\nu(t). \tag{3.6}$$

Pomoću (3.5)-(3.6), sustav (3.4) možemo kompaktno zapisati u matričnom obliku:

$$X''(t) = \frac{\nu_1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix} X(t) + \frac{\nu_1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_\nu(t) \tag{3.7}$$

$$= \lambda \widetilde{A}_\nu X(t) + \lambda \widetilde{B}_\nu u_\nu(t), \tag{3.8}$$

gdje je $\lambda = \frac{\nu_1}{h^2}$. Vidimo da je matrica $\widetilde{A}_\nu$ kvadratna, tridijagonalna i dimenzija je jednaka broju unutarnjih točaka mreže (dakle, finija mreža povlači veći linearan sustav). Da bi dobili poznati izraz iz prethodnog poglavlja, preostaje zamijeniti derivacije drugog reda derivacijama prvog reda, što će kao posljedicu imati da je matrica u novom sustavu dvostruko veće dimenzije, no i dalje će biti rijetka.

Za $i = 1, ..., n$ uvodimo nove funkcije $x_{n+i}$ preko relacije

$$x_{n+i}(t) = \frac{d}{dt}x_i(t). \tag{3.9}$$

Definiranjem funkcija uvedenih relacijom (3.9), možemo zamijeniti derivacije drugog reda derivacijama prvog reda:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \lambda\widetilde{A}_\nu & 0 \end{bmatrix} x(t) + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_\nu(t) \tag{3.10}$$

$$= A_\nu x(t) + B_\nu u_\nu(t), \tag{3.11}$$

gdje je $\lambda = \frac{\nu_1}{h^2} = (n+1)^2\nu_1$. Matrica $A_\nu$ je reda $2n$, a $B_\nu$ je matrica sa jednim stupcem i $2n$ redaka. Preostaje odrediti inicijalni uvjet $x(0)$ iz početnih uvjeta u (3.1):

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \\ x_{n+1}(0) \\ \vdots \\ x_{2n}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \\ x_1'(0) \\ \vdots \\ x_n'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0, x_1) \\ v(0, x_2) \\ \vdots \\ v(0, x_n) \\ \partial_t v(0, x_1) \\ \vdots \\ \partial_t v(0, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,\nu_2}(x_1) \\ v_{0,\nu_2}(x_2) \\ \vdots \\ v_{0,\nu_2}(x_n) \\ v_{1,\nu_2}(x_1) \\ \vdots \\ v_{1,\nu_2}(x_n) \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Ovime završava izvod linearnog sustava iz valne jednadžbe.

Za jednadžbu provođena je postupak isti, samo što u ovom slučaju nema potrebe za uvođenjem novih funkcija kako bi se smanjio red jednadžbi jer se javlja samo prva vremenska parcijalna derivacija. Dobiva se sustav:

$$x'(t) = \lambda \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix} x(t) + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_\nu(t), \tag{3.13}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} v_{0,\nu}(x_1) \\ v_{0,\nu}(x_2) \\ \vdots \\ v_{0,\nu}(x_n) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Prije nastavka, potrebno je provjeriti da su zadovoljene pretpostake na kojima su se temeljili rezultati u prošlom poglavlju, i to se radi u sljedećem potpoglavlju.

## 3.1 Provjera pretpostavki

Jedna od glavnih pretpostavki u prošlom poglavlju je bila to da su $A(\nu), B(\nu)$ Lipschitz neprekidne s obzirom na $\nu$, i to prvo provjeravamo.

**Lema 3.1.1.** *Preslikavanja $\nu = (\nu_1, \nu_2) \to A(\nu)$, $(\nu_1, \nu_2) \to B(\nu)$ su Lipschitz-neprekidna.*

Dokaz:
Dokaz se provodi za preslikavanje $(\nu_1, \nu_2) \to A(\nu)$, postupak je analogan za $(\nu_1, \nu_2) \to B(\nu)$. Projekcija $p(\nu_1, \nu_2) = \nu_1$ je Lipschitz neprekidna funkcija:

$$|p(\nu_1^1, \nu_2^1) - p(\nu_1^2, \nu_2^2)| = |\nu_1^1 - \nu_1^2| \leq \sqrt{(\nu_1^1 - \nu_1^2)^2 + (\nu_2^1 - \nu_2^2)^2} = \|(\nu_1^1, \nu_2^1) - (\nu_2^2, \nu_2^2)\|_2. \tag{3.15}$$

Iz oblika matrice $A_\nu$ vidimo da je klase $C^1$ s obzirom na argument $\nu$. Vrijedi i jača tvrdnja, ali za ostatak dokaza je $C^1$ dovoljna glatkoća. Budući da je domena kompaktan skup, znamo da je $\nu \to A(\nu)$ Lipschitz neprekidno preslikavanje:

$$\|A(\nu_1) - A(\nu_2)\| = \|A'(\overline{\nu})\|\|\nu_1 - \nu_2\| \leq \max\{\|A'(\nu)\| : \nu \in K\}\|\nu_1 - \nu_2\|, \tag{3.16}$$

gdje prva jednakost slijedi iz teorema o srednjoj vrijednosti, a znamo da se maksimum postiže jer je $A \in C^1$. Preostaje uočiti da je preslikavanje $(\nu_1, \nu_2) \to A(\nu)$ zapravo kompozicija spomenuta dva preslikavanja, i da je kompozicija Lipschitz neprekidnih funkcija ponovo Lipschitz neprekidna funkcija. Naime, ako su $f, g$ Lip. neprekidne sa konstantama $L_f, L_g$, vrijedi:

$$|f(g(x)) - f(g(y))| \leq L_f|g(x) - g(y)| \leq L_f L_g|x - y|. \tag{3.17}$$

QED

Preostaje pokazati da je za svaku vrijednost $(\nu_1, \nu_2) \in K$, izveden sustav upravljiv. Prema Kalmanovom teoremu, dovoljno je pokazati da za svaku vrijednost $\nu$, vrijedi

$$r\Big(\begin{bmatrix} B_\nu & A_\nu B_\nu & \dots & A_\nu^{n-1} B_\nu \end{bmatrix}\Big) = n, \tag{3.18}$$

gdje je $n$ red matrice $A_\nu$. Za valnu jednadžbu, matrice $A_\nu, B_\nu$ su dane sa:

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \lambda\widetilde{A} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix},$$

a za jednadžbu provođenja su dane relacijama

$$A_\nu = \lambda\widetilde{A},$$
$$B_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Sljedeća lema olakšava računanje matrice iz izraza (3.18) (dokaz se provodi indukcijom), koja je posljedica blok-strukture matrice $A_\nu$:

**Lema 3.1.2.** *U primjeru valne jednadžbe, za $i \in \mathbb{N}$, vrijedi:*

$$A_\nu^{2i} = \begin{bmatrix} \lambda^i\widetilde{A^i} & 0 \\ 0 & \lambda^i\widetilde{A^i} \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

$$A_\nu^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^i\widetilde{A^i} \\ \lambda^{i+1}\widetilde{A}^{i+1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Budući da je u ovom posebnom slučaju matrica $B_\nu$ jednostupčasta, sa samo zadnjim netrivijalnim elementom, vrijedi sljedeća korisna tvrdnja:

**Lema 3.1.3.** *U oba primjera, izraz $r(\begin{bmatrix} B_\nu & A_\nu B_\nu & \dots & A_\nu^{n-1}B_\nu \end{bmatrix})$ ne ovisi o parametru $\nu$.*

Dokaz:
Dokaz provodimo za primjer valne jednadžbe, za jednadžbu provođenja je ekvivalentan dokaz. Budući da $B_\nu$ ima samo jedan stupac, svaka matrica oblika $A_\nu^i B_\nu$ doprinosi samo jedan stupac u matricu $M = \begin{bmatrix} B_\nu & A_\nu B_\nu & \dots & A_\nu^{n-1}B_\nu \end{bmatrix}$, koja je u ovom slučaju kvadratna, reda $n$.

Koristeći prethodnu lemu i činjenicu da $B_\nu$ ima samo jedan netrivijalan element (zadnji), znamo da je $A_\nu^i B_\nu$ zadnji stupac matrice $A_\nu^i$ skaliran za $\lambda$. Po definiciji znamo da se rang proizvoljne matrice $P$ ne mijenja ako se neki stupac skalira za $\alpha \neq 0$. Iz toga slijedi da se svaki stupac matrice $M$ može skalirati određenom potencijom od $\lambda$ tako da taj stupac više ne ovisi o $\lambda = \frac{\nu}{h^2}$ (dakle, više ne ovisi o $\nu$).
QED

Neka je $n = 50$, tj. da mreža prostorne diskretizacije ima 50 unutarnjih točaka (i još dvije rubne). To znači da je matrica $A_\nu$ reda 100 za valnu i reda 50 za jednadžbu provođenja. Koristeći Matlab, pokazuje se da je zadovoljen uvjet (3.18) u oba slučaja za jednu fiksnu vrijednost parametra $\nu_1$, pa su odgovarajuće matrice punog ranga i prema Kalmanovom teoremu, oba sustava su upravljiva. Prema prethodnoj propoziciji, znamo da je sustav upravljiv za sve $\nu$, i time smo dokazali da vrijede sve pretpostavke prošlog poglavlja.

## 3.2 Jednadžba provođenja

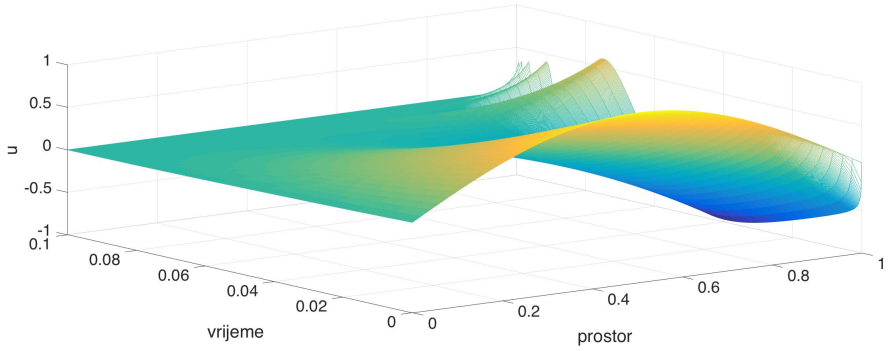
Promatramo zadaću jednadžbe provođenja (3.2) za $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in K \subset \mathbb{R}^2$, gdje je $\nu_1$ koeficijent difuzije i $\nu_2$ parametar u početnom uvjetu.

Analiza numeričkih primjera se sastoji od tri dijela. U prvom dijelu fiksiramo vrijednost $\nu_2$ i želimo riješiti *Problem 2* za $\nu_1 \in K_1 \subset \mathbb{R}$ tako da nakon vremena $T = 0.1$ za funkciju stanja vrijedi $x(T) = 0$. U svim primjerima ovog rada je završno stanje $x(T) = 0$ i prostorna je domena dana sa $[0, 1]$. Nakon toga se fiksira neka vrijednost $\nu_1$ i *Problem 2* se rješava za $\nu_2 \in K_2 \subset \mathbb{R}$. Za kraj rješavamo problem za $(\nu_1, \nu_2) \in K \subset \mathbb{R}^2$.

U prvom dijelu pretpostavljamo da je $\nu_2 = \pi$ konstantan, pa je početni uvjet dan sa $v_{0,\nu_2}(x) = \sin(\pi x)$. Parametar $\nu_1$ se nalazi u skupu $[1, 2]$ koji je diskretiziran sa 100 točaka.

Algoritam za konstrukciju aproksimativnog prostora staje nakon 3 iteracije uz toleranciju $\epsilon = 0.001$. Odabrani parametri za $\nu_1$ su $1, 1.161, 1.434$, u tom redoslijedu. Zanimljivo je vidjeti da nijedan parametar ne prelazi 1.5 što je polovica skupa.

Iz tog razloga želimo aproksimirati ulaznu funkciju vezanu uz parametar $\nu_1 = 2$ pomoću generiranih vektora (provjeravamo da li vrijednosti parametra manje od 1.5 zaista dobro aproksimiraju parametre veće od 1.5). Na slici 3.1 vidimo graf funkcije stanja koja je konstruirana preko aproksimacije ulazne funkcije kao što je objašnjeno algoritmom iz drugog poglavlja.



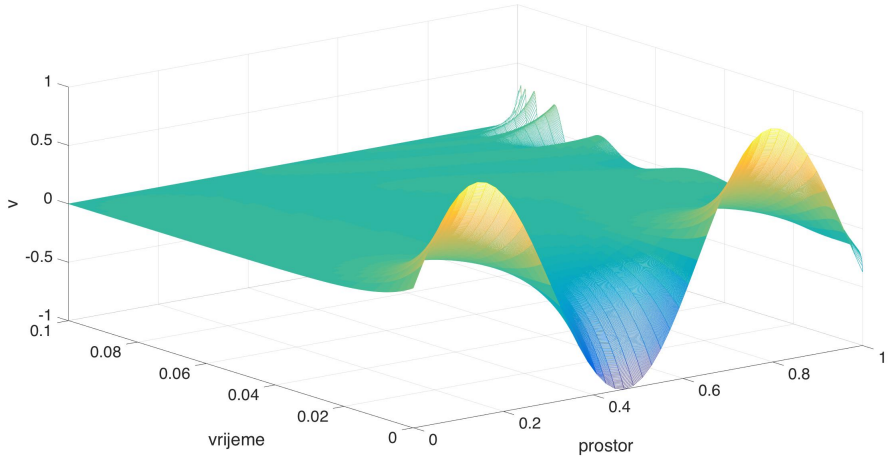

Slika 3.1: Jednadžba provođenja, $\nu_1 = 2$

Vidimo sa slike 3.1 da aproksimacija ulazne funkcije dovodi funkciju stanja dovoljno blizu završne točke. Preciznije, vrijedi:

$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\|_2 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Sada fiksiramo vrijednost $\nu_1 = 1$ i provodimo algoritam za konstrukciju aproksimativnog prostora za $\nu_2 \in [0, 10]$ sa tolerancijom $\epsilon = 0.001$. U ovom slučaju su matrice $A_\nu, B_\nu$ konstantne jer ovise samo o parametru $\nu_1$, dok je početni uvjet dan sa $v_{0,\nu_2}(x) = sin(\nu_2 x)$.

Algoritam ponovo staje nakon 3 iteracije i izbacuje vrijednosti: $2.626, 5.858, 9.090$. Aproksimacija ulazne funkcije za $\nu_2 = 10$ u generiranom trodimenzionalnom prostoru daje ulaznu funkciju $u^*$ i pripadna funkcija stanja $\widetilde{x}$ je dana na slici 3.2.



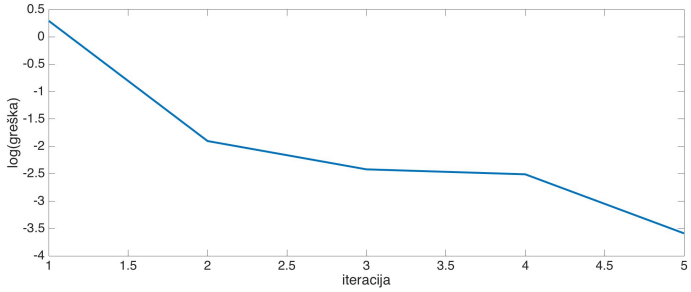

Slika 3.2: Jednadžba provođenja, $\nu_2 = 10$

Kao i prije, iako algoritam staje nakon naizgled malo iteracija (samo 3), aproksimacija ulazne funkcije ponovo dovodi funkciju stanja $\widetilde{x}$ dovoljno blizu završne točke:

$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\|_2 = 7 \cdot 10^{-5}.$$

Za kraj potpogavlja provodimo isti postupak za $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in [1, 2] \times [0, 10]$ uz toleranciju $\epsilon = 0.001$. Kao i u prošlom slučaju, početni je uvjet dan sa $v_{0,\nu_2}(x) = sin(\nu_2 x)$. Algoritam staje nakon 5 iteracija. Na slici 3.3. se vidi kako se ponašala greška aproksimacije pri konstruiranju aproksimativnog prostora. Na y-osi je prikazana vrijednost logaritam greške aproksimacije koraka:

$$\log(\max\{dist(x^1 - e^{TA_\nu}x_\nu^0, W_T^\nu Y_j^0) : \nu \in \overline{K}\}).$$

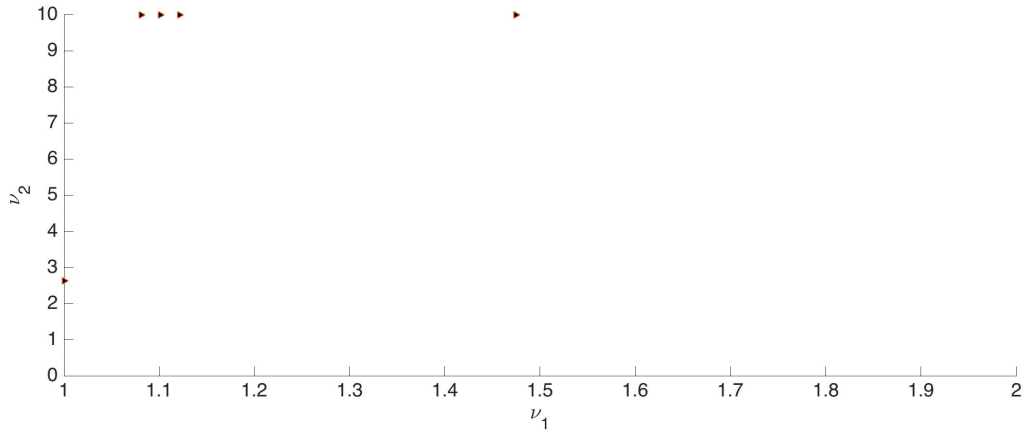



Slika 3.3: Logaritam greške aproksimacije

Odabrani parametri se mogu vidjeti na slici 3.4., i oni iznose:

$$(1, 2.626), (1.475, 10), (1.101, 10), (1.212, 10), (1.080, 10).$$

Vidimo da svi osim prvog generiranog parametra imaju zajedničku drugu komponentu: $\nu_2 = 10$. Iz



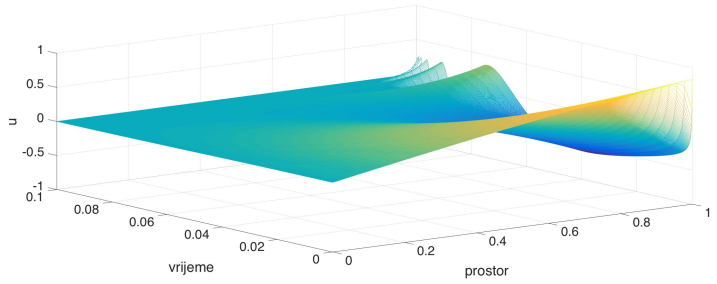

Slika 3.4: Jednadžba provođenja, $\nu_2 = 10$

tog razloga provodimo postupak aproksimacije ulazne funkcije pridružene vrijednosti $(2, 1)$. Cilj je bio odabrati vrijednost koja je udaljena od vrijednosti koje su generirane algoritmom, a da se nalazi u domeni. Graf funkcije stanja pridružene generiranoj aproksimaciji $u^*$ se nalazi na slici 3.5.

Funkcija stanja zadovoljava

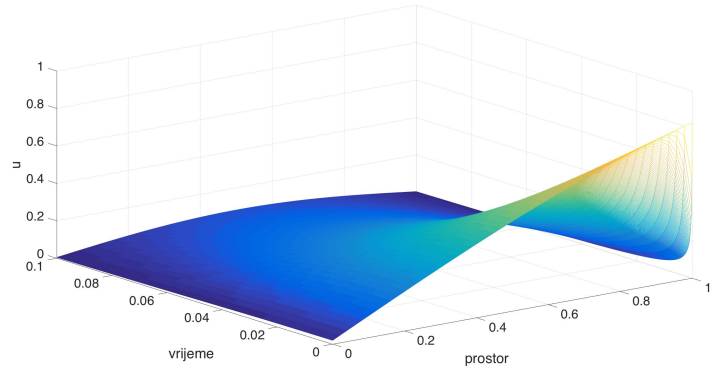
$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\|_2 = 9 \cdot 10^{-6},$$

tako da je ponovo aproksimacija dovoljno dobra.




Slika 3.5: Jednadžba provođenja, $(\nu_1, \nu_2) = (2, 1)$

Radi potpunosti promatramo jednadžbu provođenja pridruženu parametru $\nu = (2, 1)$, bez ulazne funkcije ($u = 0$). Graf rješenja $\widetilde{x}$ se nalazi na slici 3.6. Posebno nas zanima usporedba grafova sa

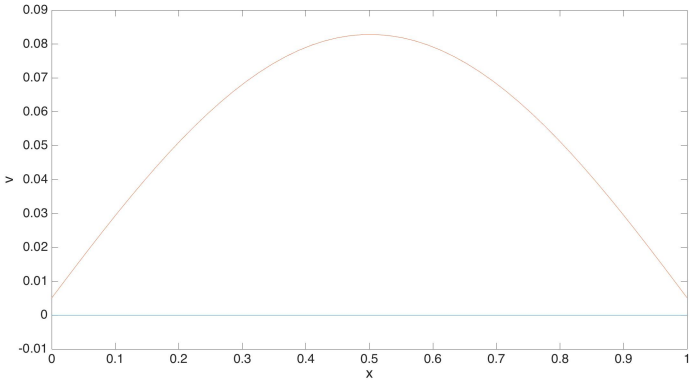



Slika 3.6: Jednadžba provođenja, $(\nu_1, \nu_2) = (2, 1)$, $u = 0$

slika 3.5, 3.6 na dijelu $t = T$, i ta je usporedba vidljiva na slici 3.7 gdje je plavom bojom prikazan vektor $\widetilde{x}(T)$ (funkcija stanja sa ulaznom funkcijom) a crvenom bojom je dan vektor $\widetilde{\widetilde{x}}(T)$, za koji vrijedi

$$||x^1 - \widetilde{\widetilde{x}}(T)||_2 = 0.42.$$

## 3.3 Valna jednadžba

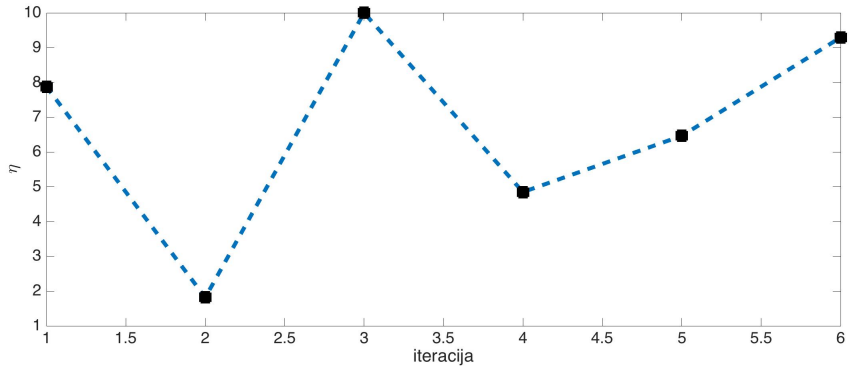



Slika 3.7: Usporedba rješenja sa i bez ulazne funkcije

Ovdje provodimo sličnu analizu kao u prethodnom potpoglavlju, za primjer sa valnom jednadžbom, sa $T = 3, L = 1$. U nastavku vrijedi:

$$v_{0,\nu_2}(x) = \sin(\nu_2 x),$$
$$v_{1,\nu_2}(x) = 0.$$

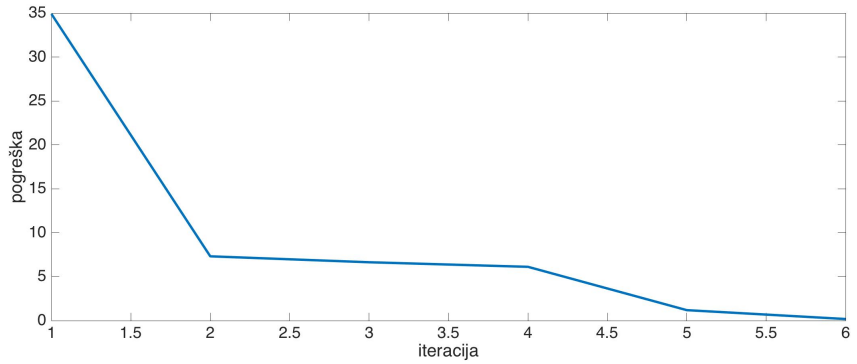
Počinjemo sa fiksnim $\nu_1 = 1$ i rješavamo *Problem 2* za $\nu_2 \in K_2 = [0, 10]$ ($K_2$ je diskretiziran sa 100 ekvidistantnih točaka) i tolerancijom $\epsilon = 0.5$. Algoritam staje nakon 6 iteracija, i odabrani su parametri vidljivi na slici 3.8. Konvergencija algoritma za konstrukciju aproksimativnog prostora



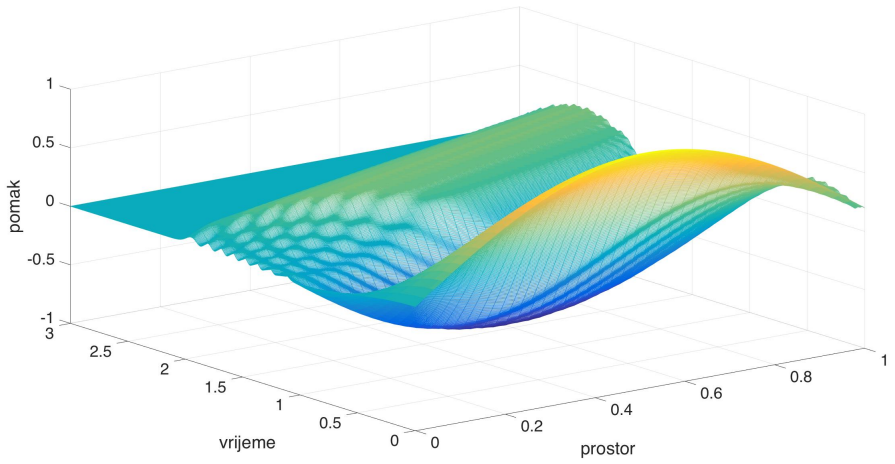

Slika 3.8: Valna jednadžba, $\nu_1 = 1$, izbor parametara

se vidi na slici 3.9 Aproksimiramo ulaznu funkciju pridruženu parametru $\nu_2 = 3$, i funkcija stanja pridružena aproksimaciji $u^*$ je dana slikom 3.10. Za funkciju stanja vrijedi

$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\|_2 = 1 \cdot 10^{-2},$$




Slika 3.9: Valna jednadžba, $\nu_1 = 1$, analiza konvergencije



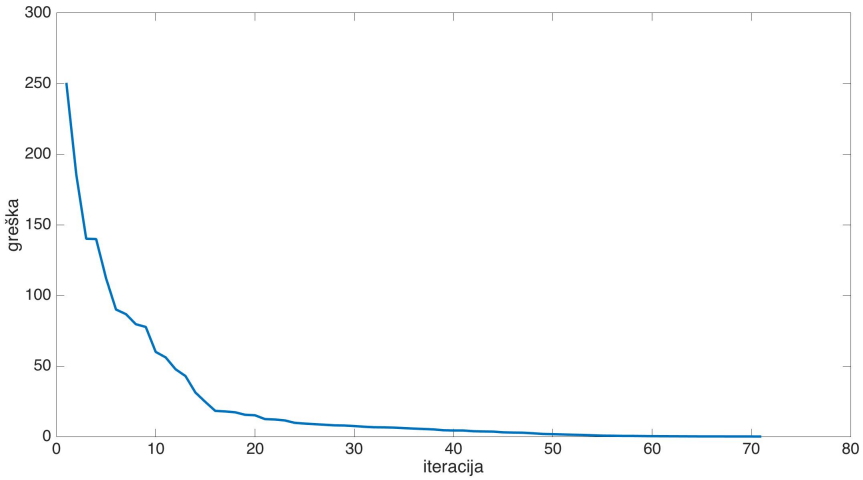

Slika 3.10: Valna jednadžba, $\nu_1 = 1$, aproksimacija za $\nu_2 = 3$

tako da aproksimacija $u^*$ dovodi funkciju stanja dovoljno blizu $x^1$.

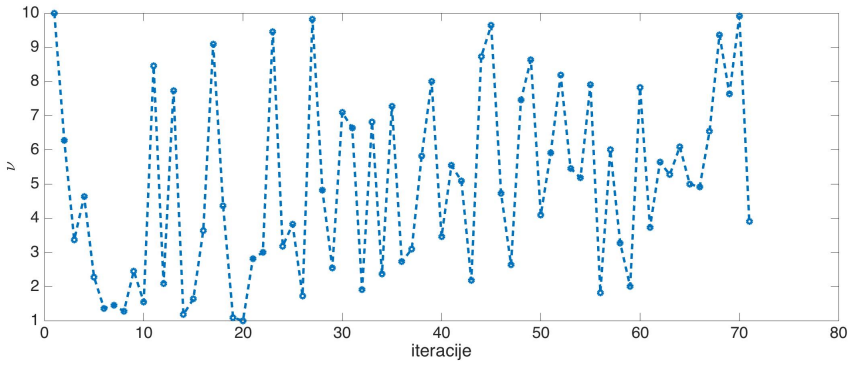
Sljedeće fiskiramo $\nu_2 = \pi$ i rješavamo *Problem 2* za $\nu_1 \in [1, 10]$, uz toleranciju $\epsilon = 0.1$. Algoritam staje nakon 71 iteracije i konvergencija algoritma je vidljiva na grafu 3.11. Također, na slici 3.12 se mogu vidjeti odabrani parametri (i u kojem redoslijedu su generirane), te slika 3.13. sadrži funkciju stanja pridruženu aproksimaciji $u^*$ za parametar $\nu_1 = \sqrt{2}$.

Iako je u ovom slučaju bilo potrebno više iteracija, i dalje je aproksimacija ulazne funkcije bila dovoljno dobra:

$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\| = 0.03.$$




Slika 3.11: Valna jednadžba, $\nu_2 = \pi$, konvergencija

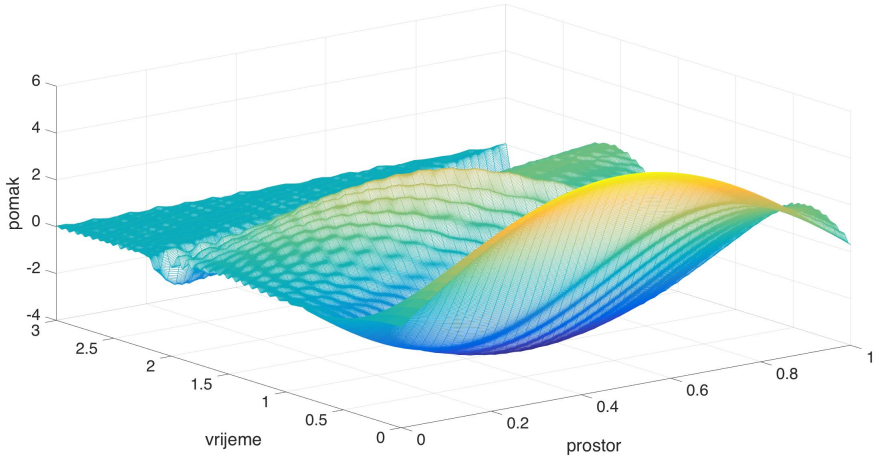



Slika 3.12: Valna jednadžba, $\nu_2 = \pi$, parametri

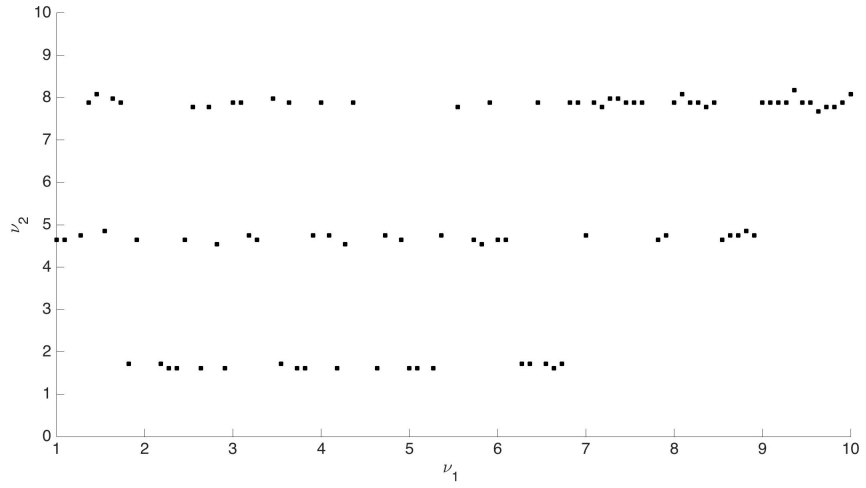
Za kraj, promatramo primjer gdje se aproksimiraju parametri $(\nu_1, \nu_2) \in [1, 10] \times [0, 10]$ (oba segmenta su diskretizirana sa 100 točaka), sa preciznošću $\epsilon = 0.5$. Aproksimativan prostor $Y_n^0$ je generiran nakon 88 iteracija, i odabrani parametri se nalaze na slici 3.14 (na $x$-osi su parametri $\nu_1$, a na $y$-osi parametri $\nu_2$). Konvergencija algoritma se može vidjeti na slici 3.15, gdje se na $y$-osi nalaze logaritamske vrijednosti greške aproksimacije u svakom koraku. Završavamo primjer aproksimacijom ulazne funkcije pridružene parametru $(\nu_1, \nu_2) = (10, 10)$. Graf pridružene funkcije stanja se nalazi na slici 3.16. Funkcija stanja zadovoljava:

$$\|x^1 - \widetilde{x}(T)\|_2 = 1 \cdot 10^{-2},$$

tako da je *Problem 2* uspješno riješen.



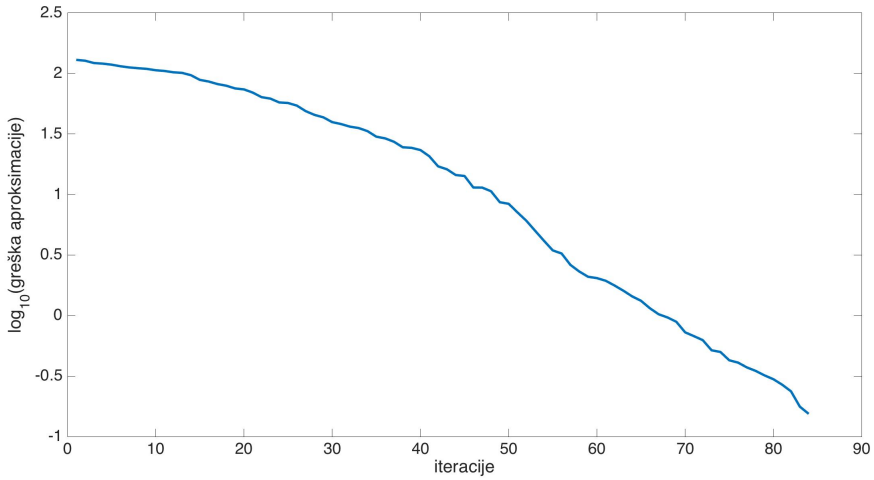

Slika 3.13: Valna jednadžba, $\nu_2 = \pi$, aproksimacija za $\nu_1 = \sqrt{2}$



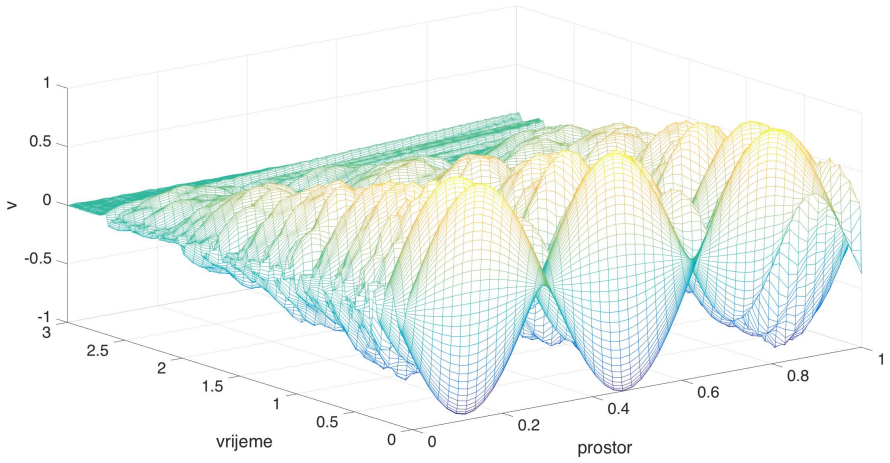

Slika 3.14: Valna jednadžba, izbor parametara

## 3.4 Zaključak

U ovom smo poglavlju pokazali primjenu algoritma za konstrukciju aproksimativnog prostora i algoritma za aproksimaciju ulazne funkcije (koji su uvedeni u drugom poglavlju) na primjerima valne jednadžbe i jednadžbe provođenja. Cilj je bio riješiti *Problem 2* na dva primjera). Pri rješavanju tog




Slika 3.15: Valna jednadžba, konvergencija




Slika 3.16: Valna jednadžba, graf

problema, u literaturi se prvi dio (konstrukcija aproksimativnog prostora) naziva *offline*, a drugi dio (konstrukcija $u^*$) naziva *online* dio. Kao što su numerički primjeri pokazali, *offline* dio je vremenski vrlo zahtjevan, no za dani se problem provodi samo jednom. Nakon njegovog izvršavanja, sa lakoćom se riješi drugi dio, i problem traženja aproksimacije $u^*$ traje značajno kraće (do 10 puta) od egzaktnog traženja ulazne funkcije za dan $v \in K$.

Za jednadžbu provođenja smo promatrali proces na malom vremenskom intervalu $T = 0.1$ zbog svojstva rješenja jednadžbe da trne. Zbog tog razloga je i *offline* dio trajao kratko u tim primjerima (3-5 iteracija). Dakle, za jednadžbu provođenja se spomenuti algoritmi mogu provesti brzo i efikasno.

Valna jednadžba nema to svojstvo, pa je *offline* dio trajao značajno dulje (do par dana), no jednom kada je bio konstruirao aproksimativan prostor, funkcija $u^*$ se konstruirala u par minuta. Iako je primjer sa valnom jednadžbom bio kompleksniji, i dalje su algoritmi bili primjenjivi na problem kako bi se dobilo efikasno rješenje (funkcija stanja se dovela dovoljno blizu završne točke za $t = T$.)

# Bibliografija


[1] K.B. Athreya i S.N. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2006, ISBN 9780387329031, https://books.google.hr/books?id=9tv0taI8l6YC.

[2] H.H. Bauschke i P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing, 2017, ISBN 9783319483115, https://books.google.hr/books?id=PrM-DgAAQBAJ.

[3] Zuazua Dager, *Wave propagation and control in 1-d flexible multi-structures*.

[4] Ronald DeVore, Guergana Petrova i Przemyslaw Wojtaszczyk, *Greedy Algorithms for Reduced Bases in Banach Spaces*, Constructive Approximation **37** (2013), br. 3, 455–466, https://doi.org/10.1007/s00365-013-9186-2.

[5] Paganini Dullerud, *A Course in Robust Control Theory*, Springer, 2000.

[6] Martin Lazar i Enrique Zuazua, *Greedy controllability of finite dimensional linear systems*, Automatica **74** (2016), 327 – 340, ISSN 0005-1098, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109816303338.

[7] Maja Starčević, *Sustavi diferencijalnih jednadžbi*, PMF-MO (skripta za kolegij), 2015.

[8] Enrique Zuazua, *Controlability and Observability of Partial Differential Equations*.

# Sažetak

Ovaj se rad bavi linearnim sustavima običnih diferencijalnih jednadžbi koji su parametrizirani elementom $\nu \in K$, gdje je $K$ kompaktan skup. U primjenama nas zanima konstrukcija ulazne funkcije $u_\nu$ koja za zadan $\nu \in K$ dovodi funkciju stanja do $x(T) = x^1$, za unaprijed određenu vrijednost $x^1$. Takva je konstrukcija prezentirana u *Teoremu 1.5.3*. Numerički, da bismo došli do takve funkcije je potrebno riješiti linearan sustav (2.11), što može biti vremenski zahtjevno za velike sustave.

Ideja je pronaći konačno reprezentativnih ulaznih funkcija $u_1, ..., u_n$ (koje razapinju prostor $V_n \subset (L^2[0,T])^m$) pomoću kojih se za proizvoljan $\nu \in K$ može naći aproksimacija $u^*$ iz $V_n$ egzaktne ulazne funkcije $u_\nu$ za čiju pripadnu funkciju stanja vrijedi

$$\|x(T) - x^1\| < \epsilon,$$

za unaprijed definiran $\epsilon$. Dakle, želimo ubrzati proces traženja ulazne funkcije za dan $\nu$ i pritom žrtvujemo preciznost, tj. više nemamo egzaktnu upravljivost nego aproksimativnu upravljivost. Na kraju testiramo uvedene algoritme na primjerima valne jednadžbe i jednadžbe provođenja.

# Summary

In this thesis, we analyse linear systems of ordinary differential equations, which are parametrised by $\nu \in K$, where $K$ is a compact set (in our case, $K \subset \mathbb{R}^n$, for some $n$). In applications, we want to construct a function $u_\nu$, called an *input function*, which for a given $\nu \in K$, drives the state function $x(t)$ to state $x^1$ at $t = T$, where $x^1$ is determined beforehand. Such a construction is described in the proof of *Theorem 1.5.3*. Numerically, to construct such a function, we need to solve a linear system of equations (2.11), which can take a long time, and the matrix can be ill-conditioned.

So, we wish to determine a finite number of representative input functions $u_1, ..., u_n$ (which span a space $V_n \subset (L^2[0,T])^m$) such that for every $\nu \in K$, we can approximate the relevant input function in the space $V_n$ in the way that the following holds:

$$\|x(T) - x^1\| < \epsilon,$$

where $\epsilon$ is fixed. So, we wish to speed up the process of find the input function, but we lose the precision by requiring *approximate controllability* instead of *exact controllability*. In the last chapter, the proposed method is shown on two examples: for the wave equation and for the heat equation.

# Životopis

Rođen sam 21. svibnja 1993. u Varaždinu, gdje sam završio osnovnu školu i gimnaziju. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike na županijskoj razini te natjecanjima iz fizike i kemije na državnoj razini.

2012. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Motiviran interesom za fizikom, paralelno upisujem Preddiplomski studij fizike (istraživački smjer) na Fizičkom odsjeku 2014. godine. Sa željom otkrivanja raznih primjena matematičkih metoda, 2015. upisujem Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika i 2016. dobivam nagradu za uspjeh na diplomskom studiju. Krajem prve godine diplomskog studija, zaposlio sam se u privatnoj tvrtci *Bellabeat Inc.* i zbog vremenskih ograničenja pauziram studij fizike.