Slobodna ekspanzija anyona

Kustura, Katja

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:781541

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Katja Kustura

SLOBODNA EKSPANZIJA ANYONA

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKA FIZIKA

Katja Kustura

Diplomski rad

Slobodna ekspanzija anyona

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Hrvoju Buljanu na zanimljivoj temi, kao i na uloženom vremenu i brojnim poučnim razgovorima tijekom izrade ovog rada. Također, hvala dr. Dariju Jukiću, dr. Karlu Lelasu i posebno Teni Dubček, na konstruktivnim primjedbama, korisnim objašnjenjima i poučnim diskusijama, kroz koje mi je puno toga postalo jasnije. I na kraju, hvala roditeljima na bezuvjetnoj podršci tijekom cijelog mog školovanja.

Sažetak

Anyoni su čestice čija se svojstva kontinuirano interpoliraju između bozona i fermiona, a čije je postojanje teorijski dozvoljeno u dvodimenzionalnom svijetu. Prilikom zamjene dvaju anyona, njihova valna funkcija poprima proizvoljnu fazu $e^{i\pi\alpha}$, gdje parametar $\alpha \in [0, 1]$ opisuje statistiku sustava ($\alpha = 0$ odgovara Bose-Einsteinovoj, a $\alpha = 1$ Fermi-Diracovoj statistici). Razvoj eksperimentalnih metoda omogućio je realizaciju efektivno dvodimenzionalnih sustava zamrzavanjem stupnjeva slobode u trećoj dimenziji, što otvara mogućnost realizacije anyona kao kvazičestica u takvim sustavima. Glavna motivacija za proučavanje anyona je njihova potencijalna uloga u realizaciji topološkog kvantnog računala.

U ovom radu proučena je dinamika neinteragirajućeg anyonskog sustava u kontekstu ultrahladnih atomskih plinova kao jedne od mogućih platformi za njihovu realizaciju. Analitički i numerički analizirana je slobodna ekspanzija anyonskog sustava iz svojstvenog stanja harmoničkog oscilatora, što je jedna od standardnih metoda za proučavanje svojstava atomskih plinova. Uočena je interpolacija jednočestične prostorne gustoće (SD) i raspodjele impulsa (MD) u ovisnosti o statističkom parametru α. Anyonska SD i MD nemaju isti oblik, za razliku od fermionskog i bozonskog slučaja. Dobivena je vremenska ovisnost tijekom slobodne ekspanzije, koja pokazuje samosličnо ponašanje SD u vremenu, dok MD mijenja oblik i asimptotski postaje proporcionalna početnoj prostornoj gustoći. Promjena MD u vremenu je donekle iznenađujuća jer ona karakterizira interagirajuće sustave, i ukazuje na značajniju ulogu statistike čestica α u vremenskoj evoluciji sustava.

Free Expansion of Anyons

Abstract

Anyons are particles with properties continuously interpolating from bosons to fermions, which are theoretically allowed to exist in a two-dimensional world. An exchange of two anyons causes the wave function to pick up a phase $e^{i\pi\alpha}$, where the parameter $\alpha \in [0, 1]$ describes the statistics of the system ($\alpha = 0$ corresponds to Bose-Einstein, and $\alpha = 1$ to Fermi-Dirac statistics). Developments in experimental methods have enabled freezing out degrees of freedom in a system, thus creating effective two-dimensional systems. This opens up the possibility of realization of anyons as quasiparticles in such systems. The main motivation for studying anyons comes from their potential significance in fault-tolerant topological quantum computation.

In this thesis, the dynamics of a non-interacting anyon system was studied in the context of ultracold atomic gases, as one of the possible platforms for their realization. Free expansion of anyons, one of the standard methods in studying atomic systems, was examined analytically and numerically. Interpolation of one-particle space density (SD) and momentum distribution (MD) in dependence on the statistical parameter α was obtained. Anyon SD and MD do not have the same shape, unlike bosonic and fermionic case. Time evolution during free expansion was obtained, and self-similar behavior of SD in time was observed, while anyonic MD changes shape with time and asymptotically becomes proportional to the initial SD. Change of MD in time is somewhat surprising, as it is a property of interacting systems, and indicates a greater role of statistics α in time evolution of the system.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Osnovne karakteristike anyona **3**
2.1 Anyonska priroda dvodimenzionalnih čestica 3
2.1.1 Frakcionalan spin 3
2.1.2 Frakcionalna statistika 3
2.2 Model anyona kao kompozitnih čestica 5
2.3 Bozonsko i anyonsko baždarenje 6

3 Anyoni u potencijalu harmoničkog oscilatora **8**
3.1 Dva anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora. Osnovno stanje . . 8
3.2 Tri i više anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora 9
3.3 Jednočestična reducirana matrica gustoće i raspodjela impulsa 10

4 Slobodna ekspanzija iz potencijala harmoničkog oscilatora **12**
4.1 Egzaktno rješenje nestacionarnog problema u harmoničkom oscilatoru 12
4.2 Poopćenje na sustav N anyona. Jednočestična reducirana matrica gustoće i raspodjela impulsa 13
4.3 Pitanje ispravnog baždarenja 14
4.4 Ponašanje raspodjele impulsa na velikim vremenima 15

5 Numerička analiza slobodne ekspanzije sustava anyona **17**
5.1 Monte Carlo integracija 17
5.2 Analitički rezultati za bozone i fermione 18
5.3 Numerički rezultati za anyone 19
5.3.1 Prostorna gustoća u svojstvenom stanju harmoničkog oscilatora 19
5.3.2 Vremenska evolucija prostorne gustoće tijekom slobodne ekspanzije 21
5.3.3 Bozonska i fermionska raspodjela impulsa u dva baždarenja . . 22
5.3.4 Raspodjela impulsa u svojstvenom stanju harmoničkog oscilatora i tijekom slobodne ekspanzije 22

6 Zaključak **25**

Dodaci **27**

A $\psi_A(\{\mathbf{r_i}\}, t)$ je rješenje slobodne ekspanzije **27**

B Kod za numerički izračun jednočestičnih opservabli **30**

1 Uvod

U kvantnoj fizici, višečestični sustav opisan je valnom funkcijom koja zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu i ima određena simetrijska svojstva s obzirom na zamjenu identičnih čestica. U trodimenzionalnom svijetu, dopuštene su samo simetrične i antisimetrične valne funkcije, što dovodi do postojanja dviju velikih grupa čestica: bozona i fermiona [1]. Bozonske valne funkcije su simetrične na zamjenu čestica, dok su fermionske antisimetrične. Bozoni imaju cjelobrojan spin i Bose-Einsteinovu statistiku, a fermioni polucjelobrojan spin i Fermi-Diracovu statistiku. Fermioni zadovoljavaju Paulijev princip isključenja, iz čega slijede obilježja fermionskih sustava, koja su znatno različita od bozonskih. Kemijski elementi i periodni sustav elemenata imaju svoj izgled, strukturu i svojstva baš zbog toga što su elektroni fermioni. S druge strane, bozoni mogu tvoriti Bose-Einsteinove kondenzate, a laseri (koherentno zračenje) su mogući jer su fotoni bozoni [2,3]. Nemoguće je dovoljno naglasiti važnost bozonske i fermionske prirode čestica u određivanju svojstava višečestičnih sustava.

Međutim, pokazuje se da je ova dvojnost prirode prisutna samo u trodimenzionalnim sustavima. Još prije četrdesetak godina, teorijski su konstruirane čestice u dvije dimenzije koje nisu ni bozoni ni fermioni [4, 5]. Pokazano je da je u dvodimenzionalnom svijetu moguća frakcionalna statistika i frakcionalan iznos spina, te su takve čestice nazvane *anyoni* [5]. Ako dva anyona zamijene mjesta, njihova valna funkcija dobiva proizvoljnu fazu $e^{i\pi\alpha}$, gdje je $\alpha \in [0, 1]$. Ovakvi anyoni nazivaju se Abelovim anyonima. Postoje i tzv. ne-Abelovi anyoni, opisani nekomutativnom teorijom, kod kojih faza prilikom zamjene N anyona ovisi o redoslijedu zamjene (za precizniju definiciju vidi [2]).

Iako je pokazano da ovakve čestice postoje u dvodimenzionalnom (2D) svijetu, ovo ne mijenja činjenicu da je naš svemir trodimenzionalan i da se sastoji samo od bozona i fermiona. Anyoni kao elementarne čestice u 3D svijetu ne postoje. Međutim, razvoj tehnologije i eksperimentalnih tehnika omogućio je realizaciju efektivno dvodimenzionalnih sustava, u kojima su stupnjevi slobode u trećoj dimenziji zamrznuti. U fizici čvrstog stanja, moguće je elektrone ograničiti na gibanje samo na granici dva poluvodiča, a kao rezultat dobiva se 2D elektronski plin [2]. U atomskoj fizici, ultrahladne atomske plinove moguće je laserima ograničiti na gibanje u dvije dimenzije, uvođenjem jakog ograničavajućeg potencijala u trećoj dimenziji [6].

Razvoj dvodimenzionalnih eksperimenata i dalje ne mijenja činjenicu da se naš trodimenzionalni svemir sastoji samo od bozona i fermiona. Međutim, fizičari se na-

daju da će u ovim dvodimenzionalnim sustavima biti moguće konstruirati anyone kao kvazičestice. Danas je već poznat jedan fenomen u kojem su kolektivna pobuđenja anyonska, a to je frakcionalni kvantni Hallov efekt, upravo u 2D elektronskom plinu [3].

Interes za eksperimentalnom realizacijom anyonskih sustava je velik, ne samo zbog njihove fundamentalne važnosti u razumijevanju kvantne statistike, nego i zato što su anyoni potencijalni kandidati za realizaciju topološkog kvantnog računala [2, 7]. Upravo se za ne-Abelove anyone pretpostavlja da bi mogli biti ključni za izradu topološkog kvantnog računala. Zbog toga što faza valne funkcije ovisi samo o redoslijedu zamjene, a ne i o samim položajima anyona, kvantna informacija bi u ovakvim sustavima mogla biti topološki zaštićena i otporna na perturbacije iz okoline, što je veliki problem u uobičajenim ne-anyonskim modelima kvantnih računala, koji dovodi do brze dekoherencije sustava i čini kvantni račun vrlo podložnim pogreškama. Naprotiv, anyonsko topološko kvantno računalo bilo bi otporno na takve greške (*fault-tolerant*) i samim time puno efikasnije [8].

Područje kvantnog računanja s anyonima tek je u svom začetku, a prvi korak u daljnjem istraživanju je eksperimentalna realizacija anyonskih sustava i mogućnost precizne detekcije anyonske statistike i dinamike sustava [2].

U skladu s time napravljen je i ovaj rad. Cilj je bio proučiti ponašanje anyonskog sustava u potencijalu harmoničkog oscilatora i ispitati njegovu slobodnu ekspanziju, odnosno ponašanje sustava nakon što se vanjski potencijal isključi. Slobodna ekspanzija ili *time-of-flight* metoda jedna je od metoda za detekciju kvantnih stanja u ultrahladnim atomskim sustavima, koji su idealni za pripremu, manipulaciju i detekciju kvantnih stanja [6]. Upravo zato okrećemo se atomskim sustavima i metodama u kontekstu realizacije i detekcije anyona. Cilj je vidjeti može li se anyonska statistika sustava u slobodnoj ekspanziji eksperimentalno uočiti i mjeriti. Dakle, analizirano je ponašanje anyonskog sustava za koji smo pretpostavili da je realiziran u ultrahladnom atomskom sustavu te se za njega mogu koristiti uobičajene metode. Samo pitanje eksperimentalne realizacije nije bilo tema ovog rada.

Rad je strukturiran na sljedeći način. U poglavlju 2 iznijet ću pregled osnovnih karakteristika anyona. U poglavlju 3 prikazat ću rješenje anyonskog problema u potencijalu harmoničkog oscilatora, koje je korišteno u daljnjoj analizi dinamike anyonskog sustava. U poglavlju 4 analitički ću ispitati problem slobodne ekspanzije sustava i na temelju postojećih analitičkih metoda izvesti izraze za slobodnu ekspanziju anyonske valne funkcije te jednočestičnih opservabli reducirane matrice gustoće i raspodjele impulsa. U poglavlju 5 numerički su računati izvedeni izrazi te su dobiveni i diskutirani rezultati za slobodnu ekspanziju anyonskog sustava. Poglavljem 6 zaključujem ovaj rad te dajem pregled budućih kratkoročnih i dugoročnih planova istraživanja vezanih za ovu temu. Na kraju se nalazi dodatak A, u kojem je detaljnije izveden rezultat iz poglavlja 4, i dodatak B, u kojem je dan kod koji sam napisala u sklopu ovog rada, korišten za dobivanje navedenih numeričkih rezultata.

2 Osnovne karakteristike anyona

U ovom poglavlju ukratko su opisani najvažniji rezultati vezani za anyonsku prirodu čestica. Objašnjena je razlika između dvije i tri dimenzije i zašto anyoni postoje u 2D sustavima [4]. Uveden je model anyona kao kompozitnih čestica, pomoću kojeg se može dobiti anyonski Hamiltonijan za rješavanje proizvoljnih kvantno-mehaničkih problema [5]. Nakon toga, raspravljena su različita baždarenja za prikaz anyonske valne funkcije i Hamiltonijana.

2.1 Anyonska priroda dvodimenzionalnih čestica

2.1.1 Frakcionalan spin

Anyoni su čestice frakcionalnog spina i statistike. Mogućnost postojanja frakcionalnog spina u dvije dimenzije posljedica je razlike između algebre momenta impulsa u dvije i tri (ili više) dimenzija. U tri dimenzije, algebra momenta impulsa definirana je komutacijskim relacijama:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k; \quad i = x, y, z \tag{2.1}$$

Jedna od posljedica ovih relacija je ograničenje da spin može biti samo cjelobrojan (bozoni) ili polucjelobrojan (fermioni) [1]. S druge strane, u dvije dimenzije moguća je samo rotacija unutar xy ravnine, odnosno postoji samo jedna os rotacije i jedna komponenta spina (S_z). Dakle, u dvije dimenzije nema komutacijskih relacija koje bi spin morao zadovoljavati, iz čega slijedi da nema nikakvog ograničenja na S_z i on može poprimiti bilo koju vrijednost, što odgovara anyonima.

Spin i statistika čestice povezani su „spin-statistika" teoremom prema kojem čestice cjelobrojnog spina slijede Bose-Einsteinovu statistiku, a čestice polucjelobrojnog spina Fermi-Diracovu [1]. Primjenom teorema na anyonske čestice frakcionalnog spina, slijedi da njima odgovara frakcionalna statistika.

2.1.2 Frakcionalna statistika

Statistika čestica odnosi se na fazu koju valna funkcija dobiva prilikom zamjene dviju identičnih čestica, pri čemu se zamjena čestica odnosi na fizikalan, adijabatski transport jedne čestice oko druge. Zamjenom bozona (fermiona), valna funkcija dobiva fazu $e^{i0} = 1$ ($e^{i\pi} = -1$). Posljedično, bozoni prate Bose-Einsteinovu, a fermioni Fermi-Diracovu statistiku.

Proučavanjem konfiguracijskog prostora dviju čestica može se pokazati da su u tri dimenzije to jedine mogućnosti, dok je u dvije dimenzije dozvoljena bilo koja faza $e^{i\pi\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$ i frakcionalna statistika [4]. Neka je sustav dviju identičnih čestica u n dimenzija opisan vektorima $\mathbf{r_1}$ i $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_i} \in \xi_n$, gdje je ξ_n n-dimenzionalan Euklidski prostor. Ukupan konfiguracijski prostor para čestica je ξ_n^2/Z_2, gdje je Z_2 ciklična grupa dva elementa kojom se postiže identifikacija točaka $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})$ i $(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1})$. Prelaskom na koordinate centra mase i relativnog pomaka, $\mathbf{R} = (\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2})/2$ i $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$, konfiguracijski prostor može se zapisati kao

$$\xi_n^2/Z_2 = \xi_n \times \left(\frac{r(n,2) - \{0\}}{Z_2} \right), \tag{2.2}$$

gdje je ξ_n prostor centra mase, invarijantan na zamjenu čestica, a $r(n,2)$ je prostor razapet relativnim vektorom. Iz tog prostora potrebno je izdvojiti ishodište $\{0\}$ ($\mathbf{r_1} = \mathbf{r_2}$), jer se u protivnom trajektorije presijecaju i ne možemo odrediti je li došlo do zamjene. Osim toga, cikličnom grupom Z_2 potrebno je identificirati vektore $\mathbf{r}$ i $-\mathbf{r}$ koji označavaju identične konfiguracije.

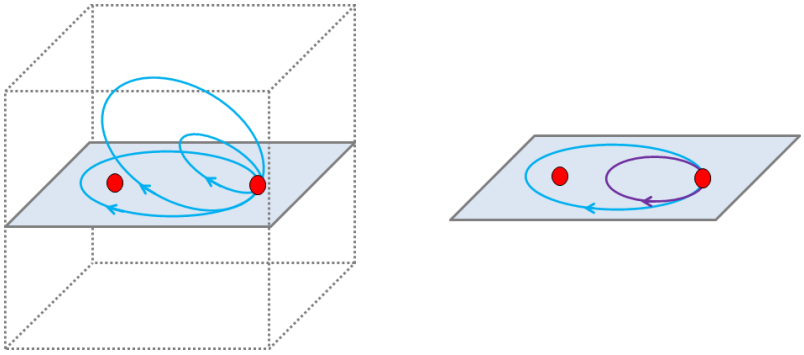
Kako je koordinata centra mase invarijantna na zamjenu čestica, dovoljno je proučavati samo relativni dio. Dvostruka zamjena čestica u relativnom prostoru odgovara zatvorenoj putanji jedne čestice oko druge. Zanima nas klasifikacija svih takvih putanja, za što se u teoriji grupa definira *povezanost* [9], koja odgovara broju klasa na koje možemo podijeliti zatvorene putanje u nekom prostoru, pri čemu svaku klasu čine krivulje koje se mogu kontinuirano deformirati jedna u drugu.

U tri dimenzije, relativan prostor dviju čestica je $\left(r(3,2) - \{0,0,0\}\right)/Z_2$ i on je jednostruko povezan [10], što znači da se sve zatvorene putanje mogu svesti u istu klasu i topološki su ekvivalentne točki. To znači da je dvostruka zamjena čestica u tri dimenzije trivijalna transformacija koja ne može u valnoj funkciji prouzročiti nikakvu dodatnu fazu. Iz toga slijedi da jednostrukom zamjenom valna funkcija može dobiti samo fazu e^{i0} ili $e^{i\pi}$, što odgovara bozonskoj i fermionskoj prirodi trodimenzionalnih čestica.

S druge strane, relativan prostor u dvije dimenzije je $\left(r(2,2) - \{0,0\}\right)/Z_2$ i on je mnogostruko povezan [10], što daje beskonačno mnogo klasa putanja, iz čega onda slijedi i beskonačno mnogo faza koje valna funkcija može dobiti pri zamjeni.

Razlika povezanosti dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora može se lako razumjeti. U dvije dimenzije, izuzimanje ishodišta dovodi do toga da se sve zatvorene krivulje koje se namataju oko ishodišta n puta ne mogu svesti na točku (jer će uvijek unutar krivulje ostati ishodište) i kao takve nisu ekvivalentne zatvorenim krivuljama koje ne okružuju ishodište, niti su ekvivalentne jedna drugoj jer klasa putanje ovisi i o tome koliko je puta namotana oko ishodišta. U tri dimenzije, izuzimanje ishodišta nema isti učinak jer se svaka putanja, baš zbog dodatne dimenzije, može deformirati tako da zaobiđe ishodište.

Grafički je ova situacija prikazana na sl. 2.1. U tri dimenzije, zatvorena putanja jedne čestice oko druge može se transformirati u točku bez prolaska kroz ishodište



(a) Transformacija putanje u trivijalnu u tri dimenzije.

(b) Nemogućnost transformacije u trivijalnu putanju u dvije dimenzije.

Slika 2.1: Putanja jedne čestice oko druge koja ilustrira razliku zamjene dviju čestica u dvo- i trodimenzionalnom prostoru.

(presijecanje putanje s drugom česticom), dok u dvije dimenzije to nije moguće.

Zamjena dvaju anyona uzrokuje u valnoj funkciji fazu $e^{i\pi\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$. Faktor α naziva se statistički parametar i on „mjeri" anyonsku prirodu čestica, od $\alpha = 0$ za bozone do $\alpha = 1$ za fermione. Anyonska valna funkcija nije jednoznačna niti (anti)simetrična te za nju prilikom zamjene dviju čestica vrijedi:

$$\psi(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1}) = e^{i\pi\alpha}\psi(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}). \tag{2.3}$$

2.2 Model anyona kao kompozitnih čestica

Čestice koje zadovoljavaju anyonsku statistiku moguće je konstruirati kao kompozite nabijenih čestica naboja q i magnetskog toka Φ (beskonačno tanka zavojnica koja prolazi kroz česticu) [5]. Ovakve kompozitne čestice uzrokuju vektorski potencijal

$$\mathbf{A}(r, \varphi) = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\varphi}. \tag{2.4}$$

Kada jedna takva čestica kruži oko druge, njena će valna funkcija pod utjecajem vektorskog potencijala dobiti dodatnu fazu (Aharonov-Bohm efekt [11])

$$\psi(r, \varphi + \Delta\varphi) = e^{\frac{iq}{\hbar}\int \mathbf{A}\mathrm{dl}}\psi(r, \varphi) = e^{i\frac{q\Phi}{\hbar}\Delta\varphi}\psi(r, \varphi), \tag{2.5}$$

što odgovara anyonima. U sustavu N kompozitnih 2D-čestica, ukupan vektorski potencijal koji osjeća jedna čestica je

$$\mathbf{A_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^2}, \tag{2.6}$$

gdje su $\mathbf{r_i}$ položaji čestica, a $\hat{\mathbf{z}}$ je jedinični vektor okomit na ravninu u kojoj se nalaze čestice. Za Hamiltonijan N neinteragirajućih anyona mase m, modeliranih kao

kompozitne čestice, može se pisati:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p_i} - q\mathbf{A_i}\right)^2 . \tag{2.7}$$

2.3 Bozonsko i anyonsko baždarenje

Vektorski potencijal (2.4) moguće je eliminirati baždarnom transformacijom:

$$A'_\varphi = A_\varphi - \partial_\varphi \lambda = 0, \qquad \lambda = \Phi\varphi/2\pi. \tag{2.8}$$

Istovremeno, valna se funkcija transformira u:

$$\psi'(r,\varphi) = e^{iq\lambda}\psi(r,\varphi) = e^{iq\Phi\varphi/2\pi}\psi(r,\varphi). \tag{2.9}$$

Nova valna funkcija nije jednoznačna i prilikom kruženja jedne čestice oko druge, što odgovara povećanju kuta φ za 2π, dobiva fazu: $\psi'(r,\varphi+2\pi) = e^{iq\Phi}\psi'(r,\varphi)$, što odgovara anyonskoj statistici (u sustavu dviju ili više čestica, koordinate (r,φ) odnose se na relativni vektor dviju čestica koje izmjenjujemo).

Dakle, baždarnom transformacijom moguće je eliminirati vektorski potencijal, no njegov se utjecaj ipak pojavljuje i u novom baždarenju, kroz „čudne" rubne uvjete na valnu funkciju, koja sada više nije jednoznačna. Prema tome, sustav kompozitnih čestica s vektorskim potencijalom baždarnom je transformacijom moguće svesti na sustav neinteragirajućih čestica opisanih nejednoznačnom valnom funkcijom i anyonskom statistikom.

Naravno, ova dva baždarenja su ekvivalentna i opisuju istu situaciju, samo je razlika kako smo u kojem baždarenju prikazali statistiku. Pretpostavit ćemo da su čestice o kojima govorimo bozoni ukoliko je magnetski tok kroz tanku zavojnicu nula. U prvom baždarenju, čestice međudjeluju vektorskim potencijalom i opisane su jednoznačnim valnim funkcijama. Ovo baždarenje stoga ćemo zvati *bozonsko* ili *regularno* baždarenje [10,12], jer se valna funkcija ne mijenja zbog same zamjene čestica, već zbog postojanja vektorskog potencijala, u kojemu je sadržana sva informacija o statistici. Hamiltonijan sustava N neinteragirajućih anyona u ovom je baždarenju dan formulom (2.7).

Baždarnom transformacijom prelazi se u *anyonsko* ili *singularno* baždarenje, gdje je interakcija među česticama eliminirana (preciznije, prebačena u rubni uvjet za valnu funkciju na zamjenu čestica), ali je valna funkcija sad višeznačna. Informacija o statistici sadržana je u fazi koju valna funkcija dobije prilikom zamjene bilo kojih dviju čestica:

$$\psi(\mathbf{r_1},...,\mathbf{r_j},...,\mathbf{r_i},...,\mathbf{r_N}) = e^{i\pi\alpha}\psi(\mathbf{r_1},...,\mathbf{r_i},...,\mathbf{r_j},...,\mathbf{r_N}). \tag{2.10}$$

Hamiltonijan N neinteragirajućih anyona u ovom je slučaju samo:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p_i}^2}{2m}. \tag{2.11}$$

Prelazak iz bozonskog u anyonsko baždarenje postiže se transformacijom valne funkcije i Hamiltonijana [12]:

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}) &= \prod_{i<j} \exp\left\{i\alpha\varphi_{ij}\right\} \psi(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}), \\ H' &= \prod_{i<j} \exp\left\{-i\alpha\varphi_{ij}\right\} H \prod_{i<j} \exp\left\{i\alpha\varphi_{ij}\right\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

gdje je φ_{ij} kut relativnog vektora $\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}$ u polarnom zapisu.

Prema tome, anyone je moguće prikazati kao „normalne" čestice koje međudjeluju dugodosežnim vektorskim potencijalom, ili kao neinteragirajuće čestice opisane valnom funkcijom s neobičnim rubnim uvjetima. Pristupi su ekvivalentni i u oba slučaja, situacija je kompliciranija od problema neinteragirajućih bozona ili fermiona, kao što ćemo vidjeti u idućem poglavlju.

3 Anyoni u potencijalu harmoničkog oscilatora

U ovom poglavlju, ukratko je opisan problem i rješenje anyonskog sustava u potencijalu harmoničkog oscilatora. Dano je jedino poznato analitičko rješenje za osnovno stanje - ono za dva anyona, koje je izvedeno u referenci [5]. Zatim je navedeno i jedno od poznatih rješenja za tri anyona, koje ne predstavlja osnovno stanje [12]. Diskutirana je važnost navedenog stanja te je ono odabrano za daljnju analizu anyonskog sustava. Na kraju su još definirane jednočestične opservable od eksperimentalnog značaja, na čiji se izračun koncentriramo u idućim poglavljima.

3.1 Dva anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora. Osnovno stanje

Valnu funkciju dva anyona možemo prikazati pomoću koordinata centra mase i relativnog pomaka:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2})/2 = (R, \Theta) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} = (r, \varphi) \tag{3.2}$$

U ovim koordinatama, zamjena čestica može se jednostavno prikazati kao promjena kuta φ za π, te za valnu funkciju u anyonskom baždarenju vrijedi:

$$\psi(R, \Theta, r, \varphi + \pi) = e^{i\pi\alpha}\psi(R, \Theta, r, \varphi). \tag{3.3}$$

Za $\alpha = 0\ (1)$, dobivamo poznate zahtjeve simetričnosti (antisimetričnosti) valne funkcije za bozone (fermione). Anyonska priroda čestica nema utjecaja na koordinatu centra mase.

Budući da je Hamiltonijan u potencijalu harmoničkog oscilatora frekvencije ω u koordinatama $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ u anyonskom baždarenju također separabilan:

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{CM} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_{rel} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2\right), \tag{3.4}$$

gdje je $M = 2m$ ukupna masa sustava, a $\mu = m/2$ reducirana masa, rješenje se može pisati kao umnožak valne funkcije centra mase, što je običan 2D harmonički oscilator, i valne funkcije relativne koordinate, za koju se može pokazati da također odgovara

harmoničkom oscilatoru, no u kojem je zbog zahtjeva (3.3) kvantni broj L zamijenjen sa $L-\alpha$ [4, 5, 13]:

$$\psi(R,\Theta,r,\varphi) = \mathcal{N}\exp\left[iL_c\theta + i(L_r-\alpha)\varphi\right] R^{|L_c|} r^{|L_r-\alpha|} \times \\ \times\, e^{-\frac{\omega}{2\hbar}\left(MR^2+\mu r2\right)} L_{N_c}^{L_c}\left(\frac{M\omega R^2}{2\hbar}\right) L_{N_r}^{L_r-\alpha}\left(\frac{\mu\omega r^2}{2\hbar}\right), \quad (3.5)$$

$$E = \hbar\omega(2+N_c+N_r+|L_c|+|L_r-\alpha|),$$

gdje su $N_c, N_r = 0,1,2,...$, $L_c = 0,\pm1,\pm2,...$ i $L_r = 0,\pm2,\pm4,...$ kvantni brojevi, $L_n^k(x)$ je generalizirani Laguerrov polinom, a $\mathcal{N}$ je normalizacija.

U osnovnom stanju, svi kvantni brojevi su nula i valna funkcija je:

$$\psi_0(z_1,z_2) = \mathcal{N}\left(z_1-z_2\right)^{\alpha} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)}, \\ E = \hbar\omega(2+\alpha), \quad (3.6)$$

gdje su koordinate prebačene natrag u $(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ i izražene kao kompleksni brojevi $\mathbf{r}_1 \equiv z_1 = x_1+iy_1$, $\mathbf{r}_2 \equiv z_2 = x_2+iy_2$.

Energija osnovnog stanja dva anyona linearno se interpolira između bozonskog ($2\hbar\omega$) i fermionskog kraja ($3\hbar\omega$). Valna funkcija osnovnog stanja ne može se zapisati kao umnožak jednočestičnih valnih funkcija, iako među anyonima nema nikakve interakcije. Dakle, već i na ovom jednostavnom primjeru uočava se komplikacija koja se inače javlja kod višečestičnih kvantnih sustava, a zbog anyonske prirode čestica. Stvar postaje još kompliciranija za više anyona, te osim ovog i još nekoliko jednostavnih problema i potencijala, sustav N anyona ne može se riješiti analitički [12, 14].

3.2 Tri i više anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora

Kada se sustav sastoji od više od 2 anyona, ponašanje valne funkcije kod zamjene čestica je komplicirano, čak i kada se radi zamjena samo dvije čestice, jer faza ovisi o tome je li druga čestica, na svom putu oko prve, obišla i neku od preostalih čestica.

Za tri anyona u harmoničkom oscilatoru, Hamiltonijan sustava u anyonskom baždarenju glasi:

$$H = -\frac{2\hbar^2}{m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_i^*} + \frac{1}{2}m\omega^2\sum_{i=1}^{3} z_i z_i^*, \quad (3.7)$$

gdje su koordinate čestica opet, umjesto vektorima, prikazane kao kompleksni brojevi:

$$\mathbf{r_i} \equiv z_i = x_i + iy_i, \qquad \frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right). \quad (3.8)$$

Y. S. Wu je pronašao jedno rješenje Schrödingerove jednadžbe $H\psi = E\psi$ za ovaj sustav, za proizvoljne nenegativne cijele kvantne brojeve [12]. Za sve kvantne brojeve jednake nuli, njegovo rješenje svodi se na:

$$\psi = \mathcal{N} \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} (z_i - z_j)^{\alpha} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} \sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 \right), \tag{3.9}$$

gdje je $N = 3$. Energija ovog stanja je

$$E = \hbar\omega(3 + 3\alpha). \tag{3.10}$$

Štoviše, valna funkcija (3.9) je rješenje harmoničkog oscilatora za proizvoljan broj anyona N, a energija sustava u tom stanju je [15]:

$$E = \hbar\omega \left(N + \frac{N(N-1)}{2}\alpha \right). \tag{3.11}$$

Međutim, ovo stanje *nije* osnovno stanje ni za tri ni više anyona. To se može odmah vidjeti iz izraza za energiju (3.10), jer se za 3 fermiona ($\alpha = 1$) dobiva energija $E = 6\hbar\omega$, dok je energija osnovnog stanja 3 fermiona $5\hbar\omega$. S druge strane, za bozone ($\alpha = 0$) se dobiva ispravna energija osnovnog stanja $3\hbar\omega$. Postoji mogućnost da je ovo osnovno stanje u blizini $\alpha = 0$ te da povećanjem α dolazi do presijecanja nivoa (*level-crossing*) te se oko $\alpha = 1$ javlja novo osnovno stanje [12].

Iako valna funkcija (3.9) nije osnovno stanje za $N \geq 2$ anyona, ipak je značajna jer predstavlja jedno egzaktno svojstveno stanje te omogućava detaljniju analizu kvantne dinamike anyonskog sustava i usporedbu s bozonskim i fermionskim rješenjima, što je i proučavano u nastavku rada.

3.3 Jednočestična reducirana matrica gustoće i raspodjela impulsa

U nastavku je proučavan problem N anyona s valnom funkcijom (3.9). Za početak, pitanje je kako se anyonsko stanje razlikuje od bozonskog i fermionskog. Kako se radi o višečestičnom 2D sustavu s $2N$ stupnjeva slobode, sama valna funkcija je nepraktična jer se ne može niti eksperimentalno mjeriti niti grafički prikazati. Umjesto toga, proučavamo jednočestične opservable, reduciranu matricu gustoće i raspodjelu impulsa [16]. Ove veličine dobiju se integriranjem po položajima svih čestica osim jedne, što u biti znači da proučavamo ponašanje jedne čestice u sustavu, ako je položaj svih drugih čestica nepoznat, što eksperimentalno znači mjerenje samo jedne čestice, neovisno o svim ostalima.

Jednočestična reducirana matrica gustoće (OBRDM - *one-body reduced density matrix*) dobije se integriranjem valne funkcije po stupnjevima slobode svih čestica osim jedne [17]:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N \int \mathrm{d}\mathbf{r_2} ... \mathrm{d}\mathbf{r_N} \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_N}) \psi(\mathbf{y}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_N}). \tag{3.12}$$

Jednočestična prostorna gustoća (SD - *space density*) je $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ i predstavlja vjerojatnost nalaženja čestice na položaju $\mathbf{x}$, neovisno o tome gdje se nalaze druge čestice.

Jednočestična raspodjela impulsa (MD - *momentum distribution*), definirana je kao Fourierov transformat OBRDM [17]:

$$n(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.13}$$

Jednočestične opservable SD i MD mogu se iskoristiti za proučavanje svojstvenog stanja anyonskog sustava u potencijalnu harmoničkog oscilatora, a osim toga, može se proučavati i njihova dinamika tijekom slobodne ekspanzije, što je detaljnije analizirano u idućem poglavlju.

4 Slobodna ekspanzija iz potencijala harmoničkog oscilatora

U eksperimentima s ultrahladnim atomima, jedna od standardnih metoda je slobodna ekspanzija atomskog plina i postiže se naglim isključivanjem vanjskog potencijala [6]. Sustav, koji se do tad ($t < 0$) nalazio u svojstvenom stanju potencijala, nakon isključivanja potencijala ($t = 0$) započinje vremensku evoluciju i ekspandira. Ova metoda je značajna zato što slika sustava nakon mnogo vremena ekspanzije daje informacije o prirodi samog sustava, interakcijama među česticama i početnom stanju. Na primjer, u sustavima neinteragirajućih bozona i fermiona, slobodna ekspanzija pokazuje samosličnо ponašanje valne funkcije [18].

U ovom poglavlju analizirano je ponašanje sustava anyona tijekom slobodne ekspanzije. Prvo je opisana transformacija skaliranja, metoda za određivanje vremenske evolucije sustava u potencijalu harmoničkog oscilatora promjenjive frekvencije [19]. Ova metoda zatim je primijenjena na anyonski sustav te je određena dinamika jednočestične reducirane matrice gustoće i raspodjele impulsa tijekom slobodne ekspanzije. Diskutirana je ovisnost dobivenih izraza o baždarenju i asimptotsko ponašanje raspodjele impulsa.

4.1 Egzaktno rješenje nestacionarnog problema u harmoničkom oscilatoru

Zanima nas rješenje Schrödingerove jednadžbe:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\omega^2(t)x^2\Psi, \tag{4.1}$$

gdje je $m = \hbar = 1$ (odnosno, radimo u prirodnim jedinicama sustava harmoničkog oscilatora frekvencije ω, gdje su duljine izražene u jedinici $\ell = \sqrt{\hbar/m\omega}$). Frekvencija ω ima proizvoljnu vremensku ovisnost, uz rubne uvjete

$$\omega(t) \to \begin{cases} \omega_-, & t \to -\infty \\ \omega_+, & t \to \infty \end{cases} \tag{4.2}$$

Ako je $\xi(t)$ rješenje klasičnog harmoničkog oscilatora $\ddot{\xi} + \omega^2(t)\xi = 0$ uz početni uvjet $\xi \propto e^{i\omega_- t}$, tada se za ξ može pisati [19]:

$$\xi(t) = b(t)e^{i\omega_-\tau(t)}, \tag{4.3}$$

gdje $b(t)$ predstavlja prostornu skalu problema, a $\tau(t)$ vremensku. Da bi izraz (4.3) bio rješenje klasičnog oscilatora, $b(t)$ i $\tau(t)$ moraju zadovoljavati sljedeće relacije:

$$\ddot{b} + \omega^2(t)b = \omega_-/b^3, \tag{4.4}$$

$$\tau(t) = \int^t \mathrm{d}t'/b^2(t'). \tag{4.5}$$

Za rješenje kvantnog harmoničkog oscilatora tada se može pretpostaviti rješenje oblika [19]:

$$\Psi(x,t) = [b(t)]^{-1/2} e^{i\Phi(x,t)} \chi_- \left(\frac{x}{b}, \tau\right), \tag{4.6}$$

gdje je $\chi_- \left(\frac{x}{b}, \tau\right)$ rješenje za $\omega = \omega_-$. Uvrštavanjem ansatza (4.6) u početnu jednadžbu (4.1), slijedi da je $\Phi = \dot{b}x^2/2b$. U slučaju slobodne ekspanzije, frekvencija ima ponašanje u vremenu:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Iz relacija (4.4) i (4.5), slijedi

$$b(t) = \sqrt{1+t^2}, \qquad \tau(t) = \arctan(t), \tag{4.8}$$

gdje je uzeto $\omega_0 = 1$.

Za česticu koja se u vremenu $t < 0$ nalazila u i-tom svojstvenom stanju harmoničkog oscilatora $\Phi(x, t < 0) = \Phi_i(x)$ tada slijedi vremenska evolucija tijekom slobodne ekspanzije:

$$\Psi(x,t) = b^{-\frac{1}{2}} \Phi_i \left(\frac{x}{b}\right) \exp\left[i\frac{\dot{b}}{b}\frac{x^2}{2} - iE_i\tau\right], \tag{4.9}$$

gdje je E_i energija i-tog stanja harmoničkog oscilatora.

4.2 Poopćenje na sustav N anyona. Jednočestična reducirana matrica gustoće i raspodjela impulsa

Formulu (4.9) može se lako poopćiti na više neinteragirajućih čestica i više dimenzija [20], jer su svi ti stupnjevi slobode međusobno nezavisni. Na primjer, za fermione se valna funkcija može pisati kao determinanta: $\Phi(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}) = (1/\sqrt{N!})\det_{j,k=1}^{N} \Phi_j(\mathbf{r_k}, t)$, iz čega onda slijedi vremenska evolucija za N-čestičnu fermionsku valnu funkciju u d dimenzija:

$$\Phi_F(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}; t) = b^{-\frac{Nd}{2}} \Phi_F(\mathbf{r_1}/b, ..., \mathbf{r_N}/b; 0) \exp\left[i\frac{\dot{b}}{b}\sum_j \frac{\mathbf{r_j}^2}{2} - i\sum_j E_j\tau\right]. \tag{4.10}$$

Za valnu funkciju N anyona može se također pretpostaviti vremenska evolucija zadana formulom (4.10), gdje je $d = 2$ i početna valna funkcija je anyonska valna funkcija zadana formulom (3.9):

$$\Phi_A(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}; t) = b^{-N}\Phi_A(\mathbf{r_1}/b, ..., \mathbf{r_N}/b; 0) \exp\left[i\frac{\dot{b}}{b}\sum_j \frac{\mathbf{r_j}^2}{2} - i\sum_j E_j\tau\right]. \tag{4.11}$$

Za valnu funkciju zadanu gornjom relacijom može se pokazati da zadovoljava anyonski rubni uvjet na zamjenu čestica $\psi(\mathbf{r_j}, \mathbf{r_i}) = e^{i\pi\alpha}\psi(\mathbf{r_i}, \mathbf{r_j})$ za svaki par i i j i Schrödingerovu jednadžbu (4.1), gdje je frekvencija dana sa (4.7), što je pokazano u dodatku A. Teorem o jedinstvenosti rješenja osigurava da je to traženo rješenje slobodne ekspanzije anyonskog sustava.

Uvrštavanjem valne funkcije (4.11) u definicije (3.12) i (3.13), dobivamo izraze za vremensku evoluciju OBRDM i MD u skaliranoj formi:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \frac{1}{b^2}\rho\left(\frac{\mathbf{x}}{b}, \frac{\mathbf{y}}{b}; 0\right) \exp\left[-\frac{i\dot{b}}{2b}\left(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2\right)\right], \tag{4.12}$$

$$n(\mathbf{k}, t) = \frac{b^2}{4\pi^2}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) \exp\left[ib\left(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - i\frac{\dot{b}}{2}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\right)\right], \tag{4.13}$$

gdje je $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) = N\int \mathrm{d}\mathbf{r_2}...\mathrm{d}\mathbf{r_N}\Phi_A^*(\mathbf{x}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_N}; 0)\Phi_A(\mathbf{y}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_N}; 0)$ matrica gustoće u početnom trenutku.

Izraze (4.12) i (4.13) koristit ćemo u idućem poglavlju za numeričku analizu vremenske evolucije anyonskog sustava.

4.3 Pitanje ispravnog baždarenja

Opservable nikad ne ovise o baždarenju, pa je prema tome svejedno hoćemo li anyonsku valnu funkciju prikazati u anyonskom ili bozonskom baždarenju (poglavlje 2.3). Na primjer, za prostornu gustoću $\rho_0(\mathbf{x})$ se lako vidi da je ista u oba baždarenja jer faza iščezava kada stavimo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ u formuli (3.12).

Međutim, veličina definirana formulom (3.13) kao Fourierov transformat jednočestične reducirane matrice gustoće $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, što smo nazvali raspodjelom impulsa, ovisi o baždarenju u kojem se računa. Iako to na prvi pogled djeluje kontradiktorno, to zapravo samo znači da izraz (3.13) u različitim baždarenjima definira različite veličine. Odnosno, prelaskom iz jednog u drugo baždarenje ne mijenja se samo valna funkcija, nego i definicije operatora (a očekivana vrijednost - mjerena opservabla - ostaje invarijantna). Postavlja se pitanje u kojem baždarenju izraz (3.13) predstavlja upravo raspodjelu impulsa mjerenu u laboratoriju.

Da bismo odgovorili na to pitanje, potrebno je razlikovati kinetički i kanonski impuls. Kinetički je impuls onaj koji ima čestica i koji se može mjeriti u eksperimentu (dakle, on je opservabla i prema tome baždarno invarijantan): $\mathbf{p}_{kin} = m\dot{\mathbf{r}}$. Kanonski

je impuls konjugirana varijabla generalizirane koordinate u Lagrangijanu, i u prvoj kvantizaciji on odgovara operatoru $-i\hbar\nabla$. U slučaju kada je potencijal uniforman, ova dva impulsa se podudaraju [21]. U sustavu s elektromagnetskom interakcijom, kanonski i kinetički impuls povezani su relacijom $\mathbf{p}_{kan} = \mathbf{p}_{kin} + q\mathbf{A}$, gdje je $\mathbf{A}$ vektorski potencijal i q naboj čestice. Kanonski impuls nije baždarno invarijantna veličina [22].

S obzirom da je kanonski impuls onaj koji je konjugiran prostornoj koordinati, raspodjela impulsa koju dobivamo kao Fourierov transformat OBRDM odgovara raspodjeli kanonskog, a ne kinetičkog impulsa. Iz toga slijedi da formulu (3.13) možemo smatrati raspodjelom kinetičkog impulsa samo u anyonskom baždarenju, gdje nema vektorskog potencijala i ta su dva impulsa jednaka. Prema tome, iako je za samu prostornu gustoću svejedno u kojem se baždarenju računa, za dobiti raspodjelu kinetičkog impulsa, relevantnog za eksperiment, račun treba raditi u anyonskom baždarenju.

4.4 Ponašanje raspodjele impulsa na velikim vremenima

Puno vremena nakon početka slobodne ekspanzije, eksponencijalan član u izrazu (4.13), proporcionalan s $b = \sqrt{1+t^2}$, postaje jako oscilatoran, te se za izračun integrala u tom režimu može upotrijebiti aproksimacija stacionarne faze.

Integral u n dimenzija $\int \mathrm{d}^n\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{i\lambda g(\mathbf{r})}$ se u slučaju jako velike varijable λ može aproksimirati kao [23]:

$$\int \mathrm{d}^N\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{i\lambda g(\mathbf{r})} \overset{\lambda\gg 1}{\approx} f(\mathbf{r_0}) |\det\mathcal{A}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i\lambda g(\mathbf{r}_0) + i\frac{1}{4}\pi\sigma\right)\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}, \tag{4.14}$$

gdje je

$$\nabla g\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} = 0$$
$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r_i \partial r_j}\right)\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}}$$
$$\sigma = N_+ - N_-$$

pri čemu je $N_{+/-}$ broj pozitivnih/negativnih svojstvenih vrijednosti matrice $\mathcal{A}$. U našem slučaju (4.13), integracija ide po četverodimenzionalnom vektoru $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i vrijedi:

$$f(\mathbf{r}) \to \tfrac{1}{4\pi^2}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0)$$
$$g(\mathbf{r}) \to \mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \tfrac{\dot{b}}{2}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)$$
$$\mathbf{r_0} = \left(\tfrac{\mathbf{k}}{\dot{b}}, \tfrac{\mathbf{k}}{\dot{b}}\right)$$
$$\lambda = \sqrt{1+t^2}$$
$$\det\mathcal{A} = \dot{b}^4, \quad \sigma = 0$$

Korištenjem aproksimacije (4.14), slijedi za raspodjelu impulsa na velikim vremenima:

$$n(\mathbf{k},t) \overset{t\gg 1}{\approx} \rho_0\left(\frac{k_x}{b},\frac{k_y}{b};0\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right), \tag{4.15}$$

odnosno, u limesu $\lim_{t\to\infty} n(\mathbf{k}) = \rho_0(\mathbf{k};0)$.

Raspodjela impulsa nakon puno vremena postaje jednaka početnoj prostornoj gustoći (u prirodnim jedinicama sustava). Također, asimptotski izraz ovisi samo o opservabli $\rho_0(\mathbf{k};0)$, a ona je invarijantna na baždarenje. Dakle, nakon dovoljno dugo vremena, izrazi za $n(\mathbf{k},t)$ u dva različita baždarenja se podudaraju.

5 Numerička analiza slobodne ekspanzije sustava anyona

U ovom poglavlju, numerički je analizirana slobodna ekspanzija anyonskog sustava iz stanja opisanog valnom funkcijom (3.9). Numerički je evaluirana vremenska evolucija jednočestične reducirane matrice gustoće i raspodjele impulsa, korištenjem izraza izvedenih u prethodnom poglavlju. U tu svrhu napisan je program u programskom jeziku Julia u kojem su svi integrali evaluirani metodom Monte Carlo integracije. Na početku je ukratko opisana Monte Carlo metoda kojom su izračunati svi integrali. Zatim su dani analitički rezultati za bozonski i fermionski slučaj (stanje (3.9) sa statističkim parametrom $\alpha = 0$ ili 1), koji nam služe kao test numerike. Nakon toga, prikazani su numerički rezultati ekspanzije za razne statističke parametre.

5.1 Monte Carlo integracija

U sustavima više čestica, izračun bilo kakvih jedno- ili dvočestičnih opservabli, relevantnih za usporedbu s eksperimentom, zahtjeva računanje višedimenzionalnih integrala po cijeloj domeni tipa (3.12) ili (3.13). Kada je valna funkcija kompliciranа i analitičko rješenje integrala nije poznato, okrećemo se numeričkim rješenjima, međutim za jako velike dimenzije sustava (puno čestica), obična deterministička metoda integracije na mreži postaje vremenski jako zahtjevna i neefikasna. U tom slučaju, puno je efikasnija metoda Monte Carlo integracije (MC), koja se temelji na izvrjednjavanju funkcije u nasumično odabranim točkama [24].

Kod je napisan na principu Monte Carlo *importance sampling* algoritma, koji odabire nasumične točke, ali iz zadane distribucije. Ako je $f(x) = g(x)h(x)$ funkcija čiji nas integral zanima, pri čemu je $g(x)$ neka distribucija, tada se integral može aproksimirati kao srednja vrijednost funkcije $h(x)$, evaluirane za razne x iz distribucije g

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{n_1}\sum_{\substack{i=1\\ x_i\in g}}^{n_1} h(x_i), \tag{5.1}$$

gdje je n_1 broj nasumičnih evaluacija funkcije $h(x)$. Veći n_1 daje precizniji rezultat. Budući da se metoda temelji na nasumičnom generiranju brojeva, nijedna dva izvrjednjavanja formule (5.1) neće dati isti rezultat. Konačan rezultat dobivamo računanjem izraza (5.1) n_2 puta i provođenjem računa pogreške za tih n_2 rezultata.

S obzirom da je valna funkcija (3.9) oblika Gaussijan$\times$polinom$^{\alpha}$, odnosno sadrži

članove oblika e^{-x^2} za svaku dimenziju i česticu, integrale (3.12) i (3.13), moguće je računati gore opisanom Monte Carlo metodom.

Jednočestična reducirana matrica gustoće

Konkretno, valna funkcija je (3.9), što znači da je OBRDM:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = N\int \mathrm{d}\mathbf{r_2}...\mathrm{d}\mathbf{r_N} e^{-\sum_{i=2}^{N}\mathbf{r_i}^2}\times \\ \times\left[e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)}\prod_{i=2}^{N}(z_x-z_i)^{*\alpha}(z_y-z_i)^{\alpha}\prod_{2\le i\ne j\le N}|z_i-z_j|^{2\alpha}\right], \quad (5.2)$$

gdje je $\mathbf{r_i} = (u_i, v_i) \equiv z_i \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d}\mathbf{r_i} = \mathrm{d}u_i\mathrm{d}v_i$ i $\mathbf{x} \equiv z_x, \mathbf{y} \equiv z_y$. Integral je $2(N-1)$-dimenzionalan. Monte Carlo metodom, izraz (5.2) može se izračunati generiranjem nasumičnih vrijednosti varijabli u_i, v_i iz normalne distribucije širine $\sigma = 1/\sqrt{2}$ i izvrjednjavanjem izraza u uglatoj zagradi. Vremensku evoluciju OBRDM dobivamo uvrštavanjem rezultata u (4.12), a SD dobivamo za $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Raspodjela impulsa

Uvrštavanjem definicije matrice gustoće (3.12) u izraz za vremensku evoluciju raspodjele impulsa (4.13), dobivamo za $n(\mathbf{k}, t)$ $2(N+1)$-dimenzionalan integral:

$$n(\mathbf{k},t) = N\int \mathrm{d}\mathbf{x_1}\mathrm{d}\mathbf{x_2}\mathrm{d}\mathbf{u_2}...\mathrm{d}\mathbf{u_N}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\mathbf{x_i}^2\right)\exp\left(-\sum_{i=2}^{N}\mathbf{u_i}^2\right)\times \\ \times\left[\prod_{i=2}^{N}(z_1-w_i)^{*\alpha}(z_2-w_i)^{\alpha}\prod_{2\le i\ne j\le N}|w_i-w_j|^{2\alpha}\exp\left(ib\mathbf{k}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})+\frac{bb}{2}(\mathbf{x_1}^2-\mathbf{x_2}^2)\right)\right], \quad (5.3)$$

gdje je $\mathbf{x_i} \equiv z_i$ i $\mathbf{u_i} \equiv w_i$ ($z_i, w_i \in \mathbb{C}$). MC metodom, integral se izračuna generiranjem varijabli $\mathbf{x_i}$ iz normalne distribucije sa $\sigma = 1$ i varijabli $\mathbf{u_i}$ iz normalne distribucije sa $\sigma = 1/\sqrt{2}$, te izvrjednjavanjem izraza u uglatoj zagradi.

Ova metoda implementirana je u programskom jeziku Julia te je napisan kod za računanje $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ i $n(\mathbf{k}, t)$, koji je priložen u Dodatku B. Rezultati prikazani u nastavku odnose se na sustav $N = 3$ anyona.

5.2 Analitički rezultati za bozone i fermione

Prije izlaganja rezultata numeričkih simulacija, ovdje su dani analitički rezultati za 3 bozona i fermiona, korišteni za testiranje ispravnosti numeričkih rezultata.

Bozoni

U slučaju 3 bozona ($\alpha = 0$) u harmoničkom oscilatoru, valna funkcija (3.9) predstavlja osnovno stanje:

$$\Psi_B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2)} \tag{5.4}$$

Za prostornu gustoću i raspodjelu impulsa lako se rješavanjem integrala (3.12) i (3.13) dobije:

$$\rho_B(x, y; 0) = \frac{3}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, \tag{5.5}$$

$$n_B(k_x, k_y; t) = \frac{3}{\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)}. \tag{5.6}$$

Fermioni

U slučaju 3 fermiona ($\alpha = 1$), valna funkcija (3.9) predstavlja prvo pobuđeno stanje. Ima oblik Gaussijan$\times$polinom, te se svi integrali mogu lako analitički izračunati u programskom paketu *Mathematica*. Za prostornu gustoću i raspodjelu impulsa dobiva se:

$$\rho_F(x, y; 0) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)} \left[1 + (1 + x^2 + y^2)^2\right], \tag{5.7}$$

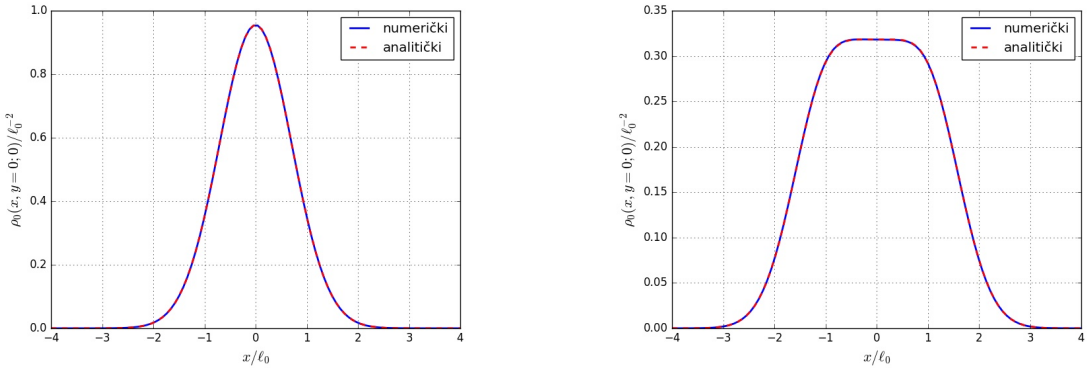
$$n_F(k_x, k_y; t) = \frac{1}{2\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)} \left[1 + (1 + k_x^2 + k_y^2)^2\right]. \tag{5.8}$$

Raspodjela impulsa ne mijenja se u vremenu, što je karakteristika neinteragirajućih sustava u slobodnoj ekspanziji. U ova dva slučaja, normalizaciju valne funkcije $\mathcal{N}$ može se eksplicitno izračunati, što je i napravljeno te su gornji izrazi normirani. U slučaju anyona, normalizacija se ne može dobiti jednostavnim integriranjem jer valna funkcija ima kompliciraniji oblik Gaussijan$\times$polinom$^\alpha$. Normalizacija bi se u tom slučaju mogla računati numerički, ali je zbog jednostavnosti taj dio izostavljen i proučavane su nenormirane anyonske valne funkcije.

5.3 Numerički rezultati za anyone

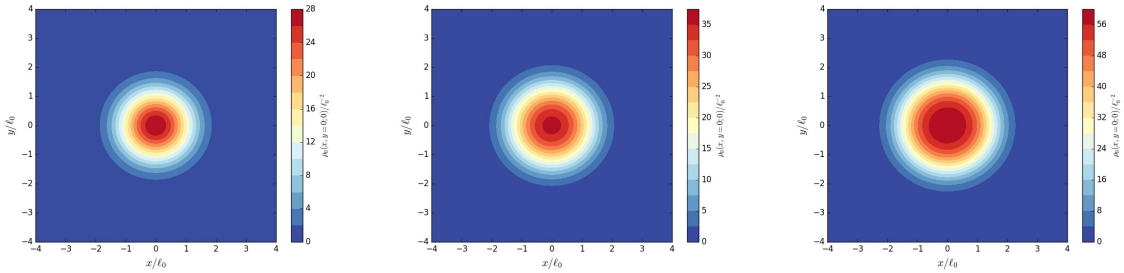
5.3.1 Prostorna gustoća u svojstvenom stanju harmoničkog oscilatora

Za početak, na sl. 5.1 prikazana je prostorna gustoća SD u harmoničkom oscilatoru za bozone i fermione, izračunata analitički i numerički. Prostorna koordinata izražena je u jedinicama prirodne duljine harmoničkog oscilatora frekvencije ω_0, $\ell_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$. S obzirom da je SD sferno simetrična za bozone i fermione (formule (5.5) i (5.7)), crtan je samo presjek. U MC integraciji, korišteno je $n_1 = 10^6$ (broj nasumičnih



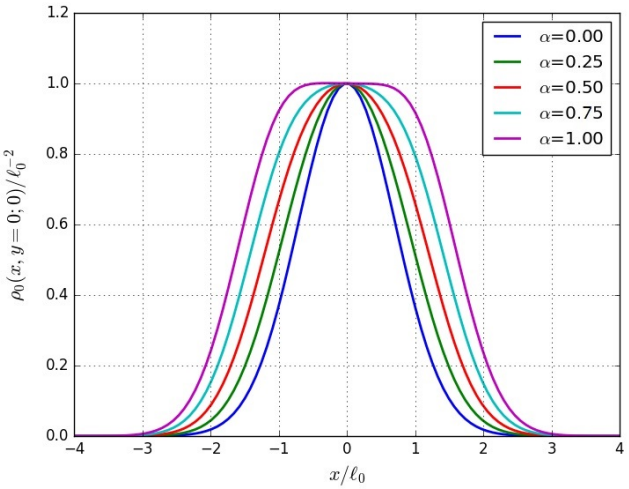
(a) Bozoni. (b) Fermioni.

Slika 5.1: Prostorna gustoća za tri bozona i fermiona u potencijalu harmoničkog oscilatora.



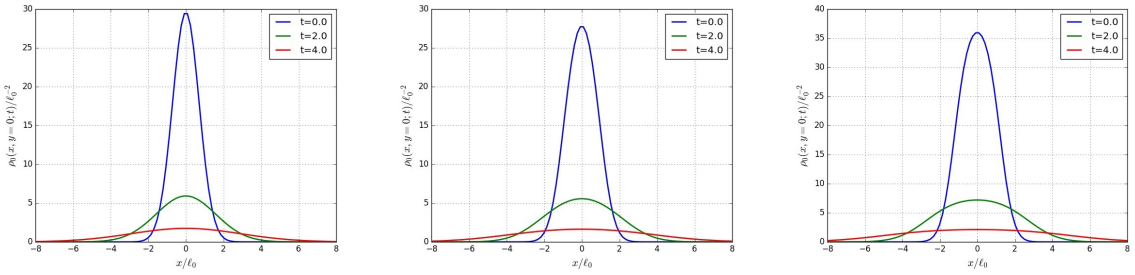
(a) $\alpha = 0.25$ (b) $\alpha = 0.50$ (c) $\alpha = 0.75$

Slika 5.2: Prostorna gustoća za razne statističke parametre.

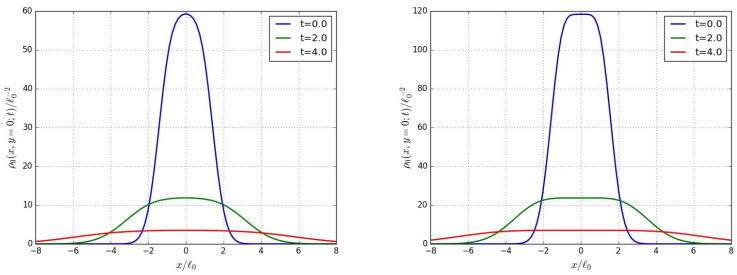


Slika 5.3: Presjek prostorne gustoće za razne statističke parametre, normirano tako da je maksimalna vrijednost za svaki α jednaka jedinici.

evaluacija) i $n_2 = 5$ (za račun pogreške). Iz ovih grafova, koji nam služe kao test, vidimo da numerički račun s navedenim n_1 i n_2 daje odlično slaganje s analitičkim rezultatom, pa su ti brojevi onda korišteni i za izračun anyonske SD. SD za razne statističke parametre prikazana je na sl. 5.2. Kao prvo, iz grafova vidimo da je



(a) $\alpha = 0.0$ (b) $\alpha = 0.25$ (c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 0.75$ (e) $\alpha = 1.0$

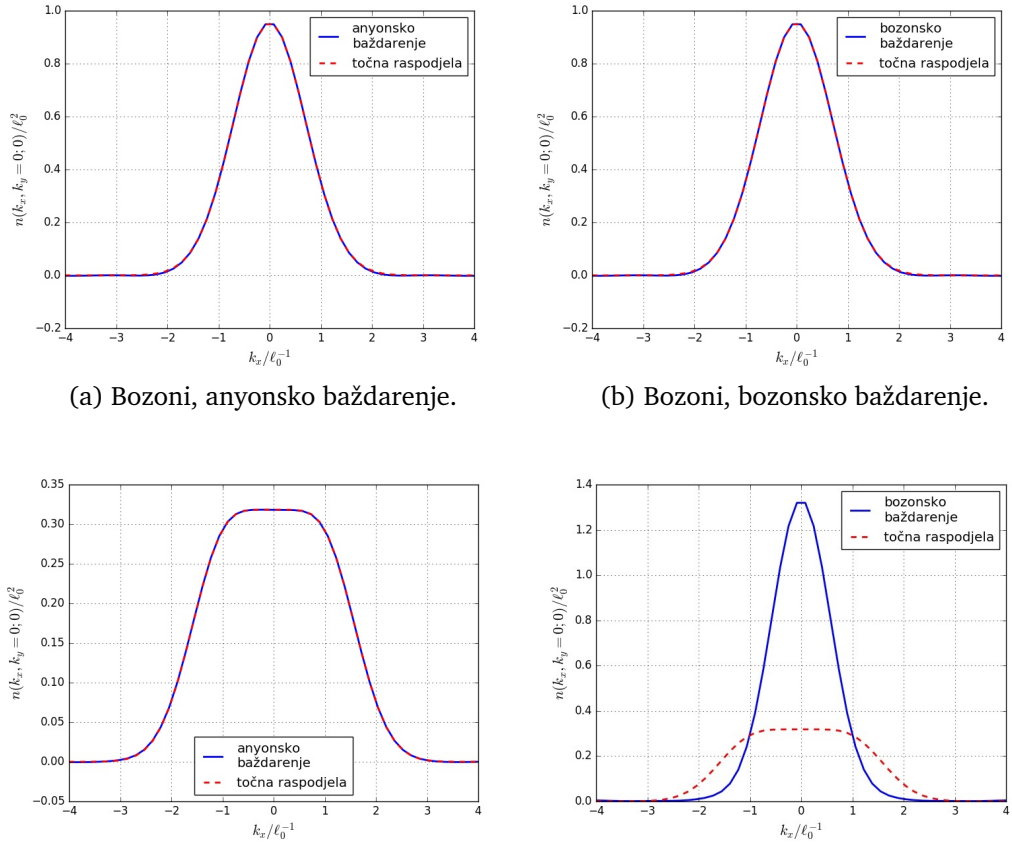
Slika 5.4: Prostorna gustoća tijekom slobodne ekspanzije za razne statističke parametre.

i anyonska SD sferno simetrična. Ovo nije iznenađujuće i grafovi su napravljeni samo kao provjera, kako bi ubuduće i za anyone mogli crtati samo presjek, za koji treba manje vremena, a i daje bolju predodžbu o izgledu funkcije. Bozonska SD je Gaussijan, a fermionska već i za tri fermiona pokazuje karakteristike Fermijevog ruba. Anyonska SD postepeno se mijenja od bozonske do fermionske povećanjem α.

Na sl. 5.3 prikazane su SD za nekoliko različitih α na istom grafu, normirane tako da im maksimalna vrijednost bude jednaka jedinici, da se jasnije vidi prijelaz iz bozona u fermione. Između bozonske i fermionske prostorne gustoće postoji kontinuirani anyonski prijelaz. Za male α, anyonska funkcija nalikuje bozonskoj, dok se povećanjem α prema jedinici svojstva približavaju fermionskim.

5.3.2 Vremenska evolucija prostorne gustoće tijekom slobodne ekspanzije

Polazeći od SD danih na sl. 5.3, isključivanjem harmoničkog potencijala započinje slobodna ekspanzija sustava, a vremenska evolucija SD za razne statističke parametre dana je grafovima na sl. 5.4. Vrijeme je izraženo u jedinicama $1/\omega_0$. U svim slučajevima uočava se brza ekspanzija sustava, neovisno o statistici čestica. SD zadržava početni oblik, iako sustav već nakon malo vremena jako ekspandira i maksimum SD teži u nulu.



(a) Bozoni, anyonsko baždarenje.

(b) Bozoni, bozonsko baždarenje.

(c) Fermioni, anyonsko baždarenje.

(d) Fermioni, bozonsko baždarenje.

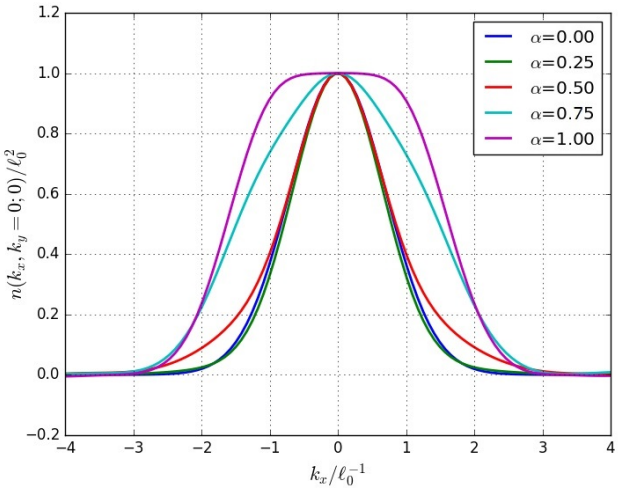
Slika 5.5: Raspodjela impulsa u dva baždarenja.

5.3.3 Bozonska i fermionska raspodjela impulsa u dva baždarenja

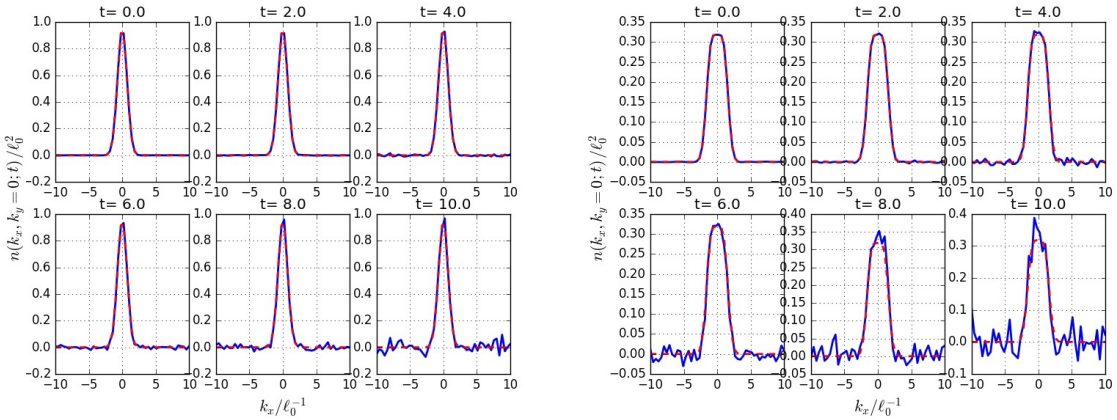
Na sl. 5.5 dane su jednočestične raspodjele impulsa MD u harmoničkom oscilatoru za bozonski i fermionski sustav, u dva baždarenja, skupa s analitičkim rezultatima (5.6) i (5.8). Bozonska MD ne ovisi o baždarenju, što je i očekivano jer je $\alpha = 0$ i u tom slučaju svejedno je u kojem baždarenju radimo jer je sustav uvijek neinteragirajući. Fermionska MD u anyonskom baždarenju odgovara analitičkom rezultatu, dok se u bozonskom razlikuje. Ovo potvrđuje raspravu iz poglavlja 4.3, da MD u anyonskom baždarenju odgovara raspodjeli impulsa koja nas zanima u eksperimentu, te se na račun u anyonskom baždarenju i fokusiramo u nastavku.

5.3.4 Raspodjela impulsa u svojstvenom stanju harmoničkog oscilatora i tijekom slobodne ekspanzije

Na sl. 5.6 prikazana je raspodjela impulsa u harmoničkom oscilatoru, odnosno u početnom trenutku slobodne ekspanzije, za nekoliko različitih α, opet normirana tako da maksimalna vrijednost bude jednaka jedinici. I u ovom slučaju, vidimo postepen prijelaz iz bozonske u fermionsku MD povećanjem statističkog parametra. Ovo



Slika 5.6: Presjek raspodjele impulsa za razne statističke parametre, normirano tako da je maksimalna vrijednost za svaki α jednaka jedinici.



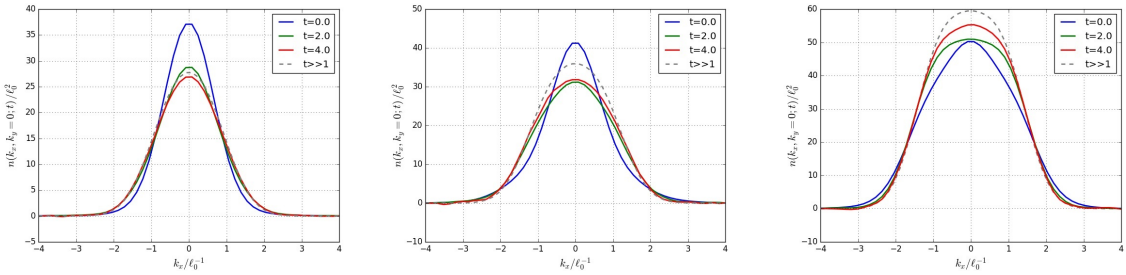
(a) Bozoni.

(b) Fermioni.

Slika 5.7: Vremenska evolucija raspodjele impulsa. Puna plava linija predstavlja numeričke rezultate, a crtkana crvena analitičke.

potvrđuje ideju da se anyonske veličine kontinuirano interpoliraju između bozonskih i fermionskih. Ipak, oblik anyonskih MD različit je od anyonskih SD (sl. 5.3), što je drukčije od bozonskog i fermionskog slučaja, gdje gustoće u realnom i recipročnom prostoru imaju isti oblik.

Što se tiče vremenske evolucije, na sl. 5.7 dana je MD za nekoliko vremenskih trenutaka za bozone i fermione, gdje nam poznato analitičko rješenje opet služi kao test numerike. Za manja vremena, numerički dobivena bozonska raspodjela vrlo se dobro slaže s analitičkom. Međutim, za veća vremena račun postaje neprecizan. To je posljedica oscilatornog člana u izrazu (5.3), kojemu je argument proporcionalan s $b = \sqrt{1 + t^2}$, što znači da oscilacije povećanjem vremena postaju sve veće. Zbog velikih oscilacija i MC račun postaje neprecizniji, što se može popraviti povećanjem



(a) $\alpha = 0.25$ (b) $\alpha = 0.50$ (c) $\alpha = 0.75$

Slika 5.8: Vremenska evolucija raspodjele impulsa za razne statističke parametre.

n_1 i n_2, ali račun tada postaje vremenski zahtjevan.

Situacija je još problematičnija na fermionskom kraju (sl. 5.7b), gdje je račun proveden s 10 puta više ponavljanja, a rezultati su na većim vremenima još neprecizniji. Iz tog razloga, prilikom proučavanja anyonskih MD, nisu računate raspodjele na prevelikim vremenima.

Na sl. 5.8, prikazana je vremenska evolucija raspodjele impulsa u slobodnoj ekspanziji za razne statističke parametre. Prva stvar koja se može uočiti jest da se anyonska MD mijenja u vremenu, odnosno, samo za $\alpha = 0$ i 1, raspodjela je konstantna. Ovo je donekle iznenađujući rezultat s obzirom na to da su čestice neinteragirajuće, i ukazuje na to da frakcionalna statistika ipak utječe na vremensku evoluciju tijekom slobodne ekspanzije, kao da među česticama postoji interakcija. Zapravo, sad kad znamo ove rezultate, fermioni se mogu smatrati kao poseban slučaj anyona, za koji je statistička interakcija točno takva da promjena MD iščezava, iako u općenitom slučaju to ne vrijedi (dok je u bozonskom slučaju statistička interakcija jednaka nuli pa nemijenjanje raspodjele u vremenu ne iznenađuje).

Osim same vremenske promjene, također uočavamo i promjenu oblika raspodjele u vremenu - MD nakon puno vremena nije sama sebi slična, kao u bozonskom i fermionskom slučaju, već poprima oblik SD. Na grafu je prikazana i asimptotska vrijednost $n(\mathbf{k}; t \gg 1)$, dobivena metodom stacionarne faze i dana formulom (4.15). Raspodjela nakon dovoljno dugo vremena teži u asimptotsku vrijednost, iako na ovdje računatim vremenima asimptotski režim još nije postignut.

Iz dobivenih rezultata, vidimo da je već pomoću ovih jednočestičnih opservabli moguće detektirati anyonsku prirodu sustava. SD i MD se kontinuirano interpoliraju između bozonske i fermionske krivulje, i ta odstupanja od očekivanih bozonskih i fermionskih grafova bi se mogla u nekom budućem eksperimentu koristiti kao potvrda anyonske statistike. Osim toga, anyonska MD mijenja se u vremenu, čak i za neinteragirajuće anyone, što je značajno razlikuje od statičnih bozonskih i fermionskih MD, što znači da se i mjerenje raspodjele impulsa u slobodnoj ekspanziji sustava također može korisiti kao metoda detekcije anyonske statistike u sustavu.

6 Zaključak

U ovom radu proučeno je svojstveno stanje anyonskog sustava u potencijalu harmoničkog oscilatora i njegova dinamika tijekom slobodne ekspanzije sustava. Konkretno, proučavane su jednočestične opservable, prostorna gustoća (SD) i raspodjela impulsa (MD), a cilj je bio pronaći potpis anyonske statistike u tim veličinama. U prostornoj gustoći, uočena je kontinuirana interpolacija između bozonskog i fermionskog kraja, koja postoji kako u harmoničkom oscilatoru, tako i tijekom slobodne ekspanzije, tijekom koje SD zadržava isti oblik, ali uz skaliranje prostorne i vremenske koordinate.

U raspodjeli impulsa uočene su značajnije razlike između bozonskog/fermionskog i anyonskog slučaja. Anyonska MD mijenja se u vremenu, za razliku od konstantne bozonske i fermionske. Promjena MD znak je da postoje interakcije u sustavu, a kako smo mi radili s neinteragirajućim anyonima (slobodni Hamiltonijan), promjena MD u vremenu ukazuje na značajniju ulogu statistike čestica u vremenskoj evoluciji. Štoviše, u ovakvoj slici fermioni su samo posebna vrsta anyona, kod kojih je statistička interakcija točno takva da se poništi promjena MD u vremenu, dok u općenitoj situaciji to ne mora biti tako. Anyonska MD pokazuje značajno odstupanje od bozonske i fermionske, što znači da se MD može koristiti kao prvi korak u detekciji anyonske statistike u sustavu.

Za daljnji smjer istraživanja ove teme postoji nekoliko koraka. Cilj je još ispitati i ponašanje raspodjele impulsa za velike $\mathbf{k}$, budući da se interakcije na malim $\mathbf{x}$ u realnom prostoru preslikavaju na ponašanje Fourierovog transformata u recipročnom prostoru. Ovaj je problem ispitan u slučaju 1D interagirajućih bozona [20], a sada je cilj analizu proširiti i na 2D anyone. Osim toga, ubuduće će nas zanimati i dvočestične opservable, na primjer korelacije položaja dviju čestica.

Cilj je i proširiti numerički račun na $N > 3$, pri čemu bi već i $N \sim 10$ bio dovoljno dobar broj za simulaciju sustava mnoštva čestica. Postojeći kod napravljen je za proizvoljan N, međutim zbog vremenske zahtjevnosti rezultati za veći broj čestica nisu prikazani. Zato je potrebno optimizirati postojeći kod. U ovom slučaju, bilo bi zanimljivo vidjeti kako se mijenja jednočestična ili dvočestična prostorna gustoća i raspodjela impulsa dodavanjem novih anyona u sustav, te prelazi li sustav u režim srednjeg polja za dovoljno velik broj čestica.

I konačno, cilj je i pronaći pravo osnovno anyonsko stanje u harmoničkom oscilatoru. Svi računi napravljeni u ovom radu odnosili su se na svojstveno, ali ne i osnovno stanje. Iako su dali dovoljan uvid u anyonsku prirodu sustava, u konačnici nas ipak

zanima osnovno stanje, koje je relevantnije za eventualnu buduću eksperimentalnu realizaciju anyonskog sustava.

Osim navedenih planova usko vezanih za ovaj projekt, ostaje naravno i vrlo bitno pitanje same eksperimentalne realizacije. Dosad su već objavljeni određeni prijedlozi [25], no zbog zahtjevnosti eksperimentalno još nisu napravljeni. Pitanje eksperimenata s anyonskim česticama ostaje i dalje otvoreno i jedan bitan smjer budućih istraživanja s anyonima.

Dodaci

Dodatak A $\psi_A(\{\mathbf{r_i}\}, t)$ je rješenje slobodne ekspanzije

Po uzoru na valnu funkciju sustava N fermiona tijekom slobodne ekspanzije (4.10) konstruirali smo anyonsku valnu funkciju (4.11):

$$\Phi_A(z_1, ..., z_N; t) = b^{-N}\Phi_A(z_1/b, ..., z_N/b; 0) \exp\left[i\frac{\dot{b}}{b}\sum_j \frac{|z_i|^2}{2} - i\sum_j E_j\tau\right], \tag{A.1}$$

gdje je

$$\Phi_A(z_1/b, ..., z_N/b; 0) = \prod_{1\leq i\neq j\leq N}\left(\frac{z_i}{b} - \frac{z_j}{b}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{2b^2}\sum_{i=1}^N |z_i|^2\right), \tag{A.2}$$

$\sum_j E_j = E$ je ukupna energija svih anyona, funkcije $b(t)$ i $\tau(t)$ definirane su relacijom (4.8), a koordinate čestica opet su prikazane kao kompleksni brojevi, $\mathbf{r_i} \equiv z_i$. Opet radimo u prirodnim jedinicama sustava, $m = \hbar = \omega = 1$.

Valna funkcija (A.1) je traženo rješenje u slobodnoj ekspanziji ako zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu i anyonski rubni uvjet kod zamjene čestica tijekom cijele ekspanzije, što je pokazano u ovom dodatku.

Anyonski rubni uvjet

Budući da valna funkcija (A.1) ovisi o statistici α samo kroz početnu valnu funkciju $\Phi_A(z_1/b, ..., z_N/b; 0)$, koja zadovoljava anyonski uvjet zamjene čestica (2.10), trivijalno slijedi da i valna funkcija tijekom svakog trenutka slobodne ekspanzije zadovoljava isti uvjet, odnosno opisuje sustav anyona statistike α.

Schrödingerova jednadžba

Hamiltonijan sustava u slobodnoj ekspanziji je:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right) \tag{A.3}$$

Treba pokazati da valna funkcija (A.1) zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu $H\psi_A = i\frac{\partial\psi_A}{\partial t}$.

Za početak, umjesto u koordinatama (x_i, y_i), Hamiltonijan možemo zapisati preko koordinata (z_i, z_i^*):

$$H = -2\sum_i \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_i^*}\right). \tag{A.4}$$

Valnu funkciju možemo podijeliti na 3 dijela:

$$\psi_A = f(t) \times P(\{z_i\}) \times G(\{z_i, z_i^*\}; t), \tag{A.5}$$

gdje je

$$f(t) = b^{-N}(b^{-\alpha})^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{-iE\tau},$$

$$P(\{z_i\}) = \prod_{1\le i\ne j\le N} (z_i - z_j)^\alpha,$$

$$G(\{z_i, z_i^*\}; t) = \exp\left(-\frac{1-it}{2b^2}\sum_{i=1}^N z_i z_i^*\right).$$

Djelovanje Hamiltonijana (A.4) na valnu funkciju tada daje:

$$H\psi_A = -2f(t)\sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial z_i}\frac{\partial G}{\partial z_i^*} + P\frac{\partial^2 G}{\partial z_i \partial z_i^*}\right). \tag{A.6}$$

Derivacije od G je lako izračunati:

$$\frac{\partial G}{\partial z_i^*} = G\left(-\frac{1-it}{2+2t^2}\right) z_i \equiv GAz_i, \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z_i \partial z_i^*} = G\left(-\frac{1-it}{2+2t^2}\right)\left[1 + \left(-\frac{1-it}{2+2t^2}\right)|z_i|^2\right] \equiv GA(1 + A|z_i|^2), \tag{A.8}$$

gdje je uvedena pokrata

$$A \equiv -\frac{1-it}{2+2t^2} = \frac{-1}{2+2it}. \tag{A.9}$$

Derivaciju od P možemo zapisati kao:

$$\frac{\partial P}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(z_i - z_j)^\alpha \prod_{j=i+1}^{N}(z_j - z_i)^\alpha\right] \prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ j,k\ne i}} (z_k - z_j)^\alpha. \tag{A.10}$$

Prvih $i-1$ članova u uglatoj zagradi kad se deriviraju član po član, svaki ima derivaciju

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(z_i - z_j)^\alpha = (z_i - z_j)^\alpha \frac{\alpha}{z_i - z_j}. \tag{A.11}$$

Preostali članovi u uglatoj zagradi pri deriviranju daju

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(z_j - z_i)^\alpha = (z_j - z_i)^\alpha \frac{-\alpha}{z_j - z_i}. \tag{A.12}$$

Sve skupa, za derivaciju funkcije P dobivamo:

$$\frac{\partial P}{\partial z_i} = \alpha P \left[\sum_{j=1}^{i-i} \frac{1}{z_i - z_j} - \sum_{j=i+i}^{N} \frac{1}{z_j - z_i} \right] = \alpha P \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{1}{z_i - z_j}. \tag{A.13}$$

Uvrštavanjem derivacija funkcija P i G u izraz (A.6), dobiva se:

$$H\psi_A = -2\psi_A A \left[\alpha \sum_{i,j \neq i} \frac{z_i}{z_i - z_j} + N + A \sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 \right]. \tag{A.14}$$

Prva suma u izrazu može se izračunati:

$$\sum_{i,j \neq i} \frac{z_i}{z_i - z_j} = \sum_{j<i} \left(\frac{z_i}{z_i - z_j} + \frac{z_j}{z_j - z_i} \right) = \sum_{j<i}^{N} 1 = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{A.15}$$

Budući da je energija sustava N anyona u stanju (A.2) $E = N + \alpha \frac{N(N-1)}{2}$ [15], slijedi da se izraz (A.14) uvrštavanjem sume (A.15) svodi na:

$$H\psi_A = -2A\psi_A \left[E + A \sum_i |z_i|^2 \right]. \tag{A.16}$$

Preostaje još izračunati vremensku derivaciju $i\partial\psi_A/\partial t$:

$$i\frac{\partial \psi_A}{\partial t} = iP \left(\frac{\partial G}{\partial t} f + G \frac{\partial f}{\partial t} \right). \tag{A.17}$$

Vremenske derivacije funkcija f i G lako se dobiju lančanim deriviranjem ili u *Mathematici*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2ifAE, \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -GA \frac{1}{t - i} \sum_i |z_i|^2. \tag{A.19}$$

Uvrštavanjem derivacija u izraz (A.17) dobiva se nakon sređivanja

$$i\frac{\partial \psi_A}{\partial t} = -2A\psi_A \left[E + A \sum_i |z_i|^2 \right]. \tag{A.20}$$

Kako su izrazi (A.16) i (A.20) jednaki, slijedi da je Schrödingerova jednadžba zadovoljena te je valna funkcija (A.1) rješenje anyonske slobodne ekspanzije.

Dodatak B Kod za numerički izračun jednočestičnih opservabli

U ovom dodatku dan je kod napisan u sklopu ovog rada, u programskom jeziku Julia, za računanje jednočestičnih varijabli reducirane matrice gustoće i raspodjele impulsa anyonskog sustava pomoću formula iz poglavlja 5. Kod je napisan za proizvoljan broj čestica u sustavu. Ovdje je dan samo dio koda u kojem se definiraju funkcije za izračun jednočestične reducirane matrice gustoće, prostorne gustoće i raspodjele impulsa, dok je dio koji se odnosi na crtanje raznih grafova izostavljen.

```
using Distributions

# valna funkcija (bez Gaussijana --> MC)
function mc_fi(x::Array{Float64,2}, alpha::Float64)
    # x - lista koordinata, dimenzija Nx2
    N = round(Int,length(x)/2) # N - broj čestica
    fac = 1
    for i = 1:N
        for j = (i+1):N
            fac *= ((x[j,1]+1.0*im*x[j,2])-(x[i,1]+1.0*im*x[i,2]))
        end
    end
    return fac^alpha
end

# one-body reduced density matrix rho(x,y,t)
function rho(N::Int, a1::Float64, b1::Float64, a2::Float64, b2::Float64,
t::Float64, alpha::Float64, num::Int)
    # N - broj čestica
    # a1, b1, a2, b2 - koordinate u kojima računamo rho(x,y,t)
    # t - vrijeme
    # alpha - statistika
    # num - preciznost MC integracije [n1 iz formule 5.1]
    b = sqrt(1+t^2)
    b_deriv = t/sqrt(1+t^2)

    # rho(x/b,y/b,0)

    #integral
    sigma = 1/sqrt(2)
    function mc_integral()
        val = 0
        for i = 1:num
            u = rand(Normal(0,sigma),((N-1),2))
            w1 = zeros(N,2); w2 = zeros(N,2)
            w1[1,1] = a1/b; w1[1,2] = b1/b
            w2[1,1] = a2/b; w2[1,2] = b2/b
            for i = 2:N
                w1[i,1] = u[i-1,1]; w2[i,1] = u[i-1,1]
```

```
                w1[i,2] = u[i-1,2]; w2[i,2] = u[i-1,2]
            end
            val += N*conj(mc_fi(w1,alpha))*mc_fi(w2,alpha)*
            exp(-(1/(2*b^2))*(a1^2+b1^2+a2^2+b2^2))
        end
        val /= num; val *= (sqrt(2*pi)*sigma)^(2*(N-1))
        return val
    end

    # mean & error
    rep = 5        # broj MC integracija za račun pogreške [n2]
    srand(123)
    vals_r = zeros(rep); mean_r = 0; err_r = 0
    vals_i = zeros(rep); mean_i = 0; err_i = 0
    for i = 1:rep
        temp = mc_integral()
        vals_r[i] = real(temp); mean_r += vals_r[i]
        vals_i[i] = imag(temp); mean_i += vals_i[i]
    end
    mean_r /= rep; mean_i /= rep
    for i = 1:rep
        err_r += abs(vals_r[i]-mean_r)^2
        err_i += abs(vals_i[i]-mean_i)^2
    end
    err_r = (err_r/(rep*(rep-1)))^(0.5)
    err_i = (err_i/(rep*(rep-1)))^(0.5)

    # rho(x,y,t) = rho(x/b,y/b,0) x exp(-ib'/2b*(x^2-y^2))/b^2
    fac =(exp(-(1.0*im*b_deriv/(2*b))*(a1^2+b1^2-a2^2-b2^2)))/b^2
    mean =(mean_r+1.0*im*mean_i)*fac
    return mean, err_r, err_i
end

# space density rho(x,x,t)
function rho_diag(N::Int, a1::Float64, b1::Float64, t::Float64,
alpha::Float64, num::Int)
   return real(rho(N,a1,b1,a1,b1,t,alpha,num)[1])
end

# momentum distribution n(k,t)
function nt(N::Int, k::Float64, l::Float64, t::Float64,
alpha::Float64, num::Int)
    sigma1 = 1/sqrt(2); sigma2 = 1
    b=sqrt(1+t^2); b_deriv=t/sqrt(1+t^2)

    #integral
    function mc_integral()
        val = 0
        for i = 1:num
            u = rand(Normal(0,sigma1),((N-1),2))
            x = rand(Normal(0,sigma2),(2,2))
            w1 = zeros(N,2); w2 = zeros(N,2)
            w1[1,1] = x[1,1]; w1[1,2] = x[1,2];
            w2[1,1] = x[2,1]; w2[1,2] = x[2,2]
            for i = 2:N
                w1[i,1] = u[i-1,1]; w2[i,1] = u[i-1,1]
                w1[i,2] = u[i-1,2]; w2[i,2] = u[i-1,2]
            end
            val += conj(mc_fi(w1,alpha))*mc_fi(w2,alpha)*
            exp(+1.0*im*k*b*(x[1,1]-x[2,1])+1.0*im*l*b*(x[1,2]-x[2,2]))*
            exp(-1.0*im*b*(b_deriv/2)*(x[1,1]^2+x[1,2]^2-x[2,1]^2-x[2,2]^2))*b^2
        end
```

```
        val /= num
        val *= N*(sqrt(2*pi)*sigma1)^(2*(N-1))*(sqrt(2*pi)*sigma2)^4/(2*pi)^2
        return val
    end

    #mean & error
    rep = 5; srand(123)
    vals = zeros(rep); mean = 0; err = 0
    for i = 1:rep
        vals[i] = real(mc_integral());  mean += vals[i]
    end
    mean /= rep
    for i = 1:rep
        err += abs(vals[i]-mean)^2
    end
    err = (err/(rep*(rep-1)))^(0.5)
    return mean, err
end
```

Literatura

[1] G. Auletta, M. Fortunato, and G. Parisi, *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2009.

[2] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma. Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation.// *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 1083-1155.

[3] A. Stern. Anyons and the quantum Hall effect - a pedagogical review.// *Annals of Physics* **323** (2008), 204-249.

[4] J. M. Leinaas, J. Myrheim. On the Theory of Identical Particles.// *Nuovo Cimento* **37B** (1977), 1-23.

[5] F. Wilczek. Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles.// *Phys. Rev. Lett* **49** (1982), 957-959.

[6] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger. Many-Body Physics with Ultracold Gases.// *Rev. Mod. Phys*. **80** (2008), 885.

[7] A. Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond.// *Annals of Physics* **321** (2006), 2–111.

[8] Graham P. Collins. Computing with Quantum Knots.// *Scientific American* **294** (2006), 57-63.

[9] K. Kumerički, *Grupe, simetrije i tenzori u fizici*. Bilješke za predavanja. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2012.

[10] S. Rao. An Anyon Primer.// hep-th/9209066.

[11] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice-Hall, 1999.

[12] Y. S. Wu. Multiparticle Quantum Mechanics Obeying Fractional Statistics.// *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 111-114.

[13] F. S. Levin, *An Introduction to Quantum Theory*. Cambridge University Press, 2002.

[14] S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen, R. Rietman. Solution of the Three–Anyon Problem.// *Phys. Lett. B* **348** (1995), 473-480.

[15] G. Date, M. V. N. Murthy, R. Vathsan. Classical and Quantum Mechanics of Anyons.// cond-mat/0302019v2.

[16] D. Jukić, B. Klajn, H. Buljan. Momentum Distribution of a freely expanding Lieb-Liniger gas.// *Phys. Lett. A* **79** (2009), 033612.

[17] K. Sakmann, *Many-Body Schrödinger Dynamics of Bose–Einstein Condensates*. Springer, 2011.

[18] N. Read, N. R. Cooper. Free expansion of lowest-Landau-level states of trapped atoms: A wave-function microscope.// *Phys. Rev. A* **68** (2003), 035601.

[19] V. S. Popov, A. M. Perelomov. Parametric Excitation of a Quantum Oscillator. II.// *Sov. Phys. JTEP* **30** (1970), 910-913.

[20] A. Minguzzi, D. M. Gangardt. Exact Coherent States of a Harmonically Confined Tonks-Girardeau Gas.// *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005), 240404.

[21] H. Goldstein, C. Pole, J. Safko, *Classical Mechanics*. 3rd ed. Addison Wesley, 2001.

[22] Charged Particle in a Magnetic Field, http://galileo.phys.virginia.edu/classes/752.mf1i.spring03/ParticleMagneticField.htm, 14.6.2016.

[23] J. P. McClure, R. Wong. Multidimensional stationary phase approximation: boundary stationary point *.// *J. Comput. Appl. Math.* **30** (1990), 213-225.

[24] Numerical methods for physicists, University of Freiburg, http://physics.unifr.ch/fr/page/543/, 24.3.2016.

[25] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, P. Zoller. $\frac{1}{2}$ -Anyons in Small Atomic Bose-Einstein Condensates.// *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001), 010402.