Krivulje nastale razmotavanjem valjaka i stožaca

Sklepić, Barbara

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:145920

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Sklepić

KRIVULJE NASTALE RAZMOTAVANJEM VALJAKA I STOŽACA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Hvala mojim roditeljima što su mi uvijek bili podrška.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Pravčaste plohe **3**
1.1 Pravčaste plohe 4

2 Cilindrične plohe **9**
2.1 Razmatanje elipse iz kružnog cilindra 10
2.2 Presječna krivulja dvaju cilindara 11
2.3 Razmatanje krivulje s bilo kojeg cilindra 12
2.4 Razmatanje krivulje s kružnog cilindra 13
2.5 Rotiranje glavnog cilindra 17
2.6 Probušeni cilindri 19
2.7 Rezanje nakošenim valjkom 21

3 Konusne plohe **25**
3.1 Razmatanje krivulje iz uspravnog kružnog stošca 25
3.2 Razmatanje baze i očuvanje duljine kružnog luka 26
3.3 Reformulirani problem u terminima stropne projekcije 27
3.4 Stropna projekcija i kišobranska transformacija 29
3.5 Razmatanje konike sa stošca na stožac 29
3.6 Razmatanje konike sa stošca u ravninu 30
3.7 Primjeri generaliziranih konika 33

Bibliografija **37**

Uvod

Tema ovog diplomskog rada su krivulje nastale razmotavanjima valjaka i stožaca, odnosno plaštevima takvih tijela, kao razvojnih pravčastih ploha. Radi jednostavnosti govorit ćemo najčešće o razmotavanju valjaka (cilindara) i stožaca (konusa). Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju bavimo se plohama općenito, odnosno definiranjem važnih pojmova koji će nam koristiti tijekom bavljenja ovom temom. Krenut ćemo najprije od pravčastih ploha, u koje spadaju i cilindrične i konusne plohe, uz definiranje bitnih pojmova i navođenje nekoliko primjera. Od pravčastih ploha posebno nas zanimaju razvojne pravčaste plohe, pa ćemo i za njih navesti nekoliko primjera.

U drugom poglavlju riječ je o krivuljama nastalima razmotavanjem valjka. Motivacijski primjer koji ćemo prvi proučiti glasi: "Umočimo li soboslikarski valjak u kantu s bojom pod nekim određenim kutem, kako će izgledati krivulja nastala na zidu nakon bojanja tim valjkom?". Ovaj primjer svodi se na razmatanje elipse iz kružnog cilindra. Pokazat će se da jednadžba krivulje nastale razmotavanjem presječne elipse ovisi o radijusu r, te o kutu β između baze cilindra i presječne ravnine tako da se u ravnini razmotavanja dobiva krivulja $u(x) = r \operatorname{tg}\beta \sin \frac{x}{r}$.

Primjer koji također nalazi primjenu u praksi je i presjek dvaju cilindara. Većina spomenutih primjera ima primjenu u graditeljstvu, gdje se rješavanje navedenih problema koristi u dobivanju kupola ili lukova nastalih na neki od navedenih načina, primjerice, kao presjek dvaju cilindara. Tipično, imamo "glavni" cilindar čija je os postavljena usporedno sa z-osi, a generirajuća krivulja ima jednadžbu $m(x, y) = 0$. Presijecajući cilindar ima os paralelnu s y-osi, a profilna krivulja mu je $p(t, z) = 0$. Razmatanjem presječne krivulje C u xz-ravninu dobiva se krivulja C_u s jednadžbom $u(x, z) = p(r \sin \frac{x}{r}, z)$. Osim u graditeljstvu, ova tema ima primjene i u strojarstvu. Često se cilindrične cijevi režu ili savijaju pod nekim kutem, presijecaju s drugim cijevima, te obrađuju na mnoge druge načine u kojima je rezultat krivulja na cilindru za koju je od velike važnosti dobiti njen izgled i jednadžbu u slučaju da se cilindar razmota.

Osim razmatanja elipse s valjka, bavit ćemo se i izgledom općenite krivulje, najprije

kad se razmata s općenito bilo kakvog valjka, a zatim i s kružnog valjka. Zatim se bavimo obrnutim problemom: krivulja na valjku ostat će fiksirana, a nas zanima kako izgledaju njezine projekcije, gledamo li krivulju dok se valjak rotira. Naposljetku dolazimo također do dvaju problema koji imaju primjenu u stvarnom životu. Prvi je kako izgleda prodorna krivulja probušimo li cilindar cilindričnom bušilicom. Posebno nas zanima kako ta krivulja izgleda kad mijenjamo radijus te bušilice ili pak promatramo njezin položaj u odnosu na valjak koji bušimo. Drugi problem je rezanje nakošenim valjkom, točnije kako krivulja nastala rezanjem valjka nakošenim valjkom mijenja izgled u ovisnosti o kutu pod kojim je prvi valjak nagnut nad drugim.

U trećem poglavlju tema su krivulje nastale razmotavanjima stožaca. Poglavlje ćemo započeti s razmatanjima krivulja s uspravnog kružnog stošca. Posebno nas zanima kad je krivulja nastala razmotavanjem krivulje sa stošca u ravninu konika. Nakon toga odgovorit ćemo na pitanje što se dogodi kad bazu odmotamo za neki kut. Slično kao i u drugom poglavlju, mnogi od primjera iz ovog poglavlja imaju primjenu uglavnom u strojarstvu ili graditeljstvu. Često se svrdla izrađuju u obliku stošca, razni spremnici također, a zanimljivi su i zupčanici u obliku krnjih stožaca.

Pokazat će se da je za istraživanje pitanja vezanih uz razmatanje stošca korisna stropna projekcija, a to je projekcija na ravninu koja prolazi vrhom stošca okomito na njegovu os. Ako stropna projekcija krivulje C na stošcu ima polarnu jednadžbu $r = r(\varphi)$, tada razmotana slika krivulje C ima jednadžbu $R(\theta) = kr(k\theta)$. Pritom je φ kut za koji se odmota baza stošca, pripadnog polumjera ρ, a θ je središnji kut kružnog luka radijusa s (duljine izvodnice stošca) u koji se pritom odmota kružni luk duljine $\rho\varphi$ na bazi. Zbog čuvanja udaljenosti, budući da je konus razmotljiva ploha, vrijedi jednostavna relacija $s\theta = \rho\varphi$. Spomenimo i korisnu "kišobransku" transformaciju stošca, koju zorno opisujemo kao otvaranje kišobrana koji se može otvoriti tako da bude skroz ravan i paralelan sa stropom. Osim općenitih krivulja na stošcu, posebno ćemo razmotriti krivulje dobivene tako da se konika s jednog stošca namota na drugi stožac, ili razmota u ravninu. Razmotavanjem u ravninu nastaju krivulje koje nazivamo generaliziranim konikama, budući da im je polarna jednadžba oblika $R(\theta) = \frac{R_0}{1+\lambda \sin(k\theta)}$, pri čem su R_0 i λ nenegativne konstante, a k realna konstanta. Na samom kraju navodimo nekoliko primjera generaliziranih konika.

Poglavlje 1

Pravčaste plohe

U ovom poglavlju definirat ćemo najprije plohe, te dati nekoliko uvodnih primjera. Nakon toga ćemo se posvetiti proučavanju pravčastih ploha, a među pravčastim plohama posebnu pažnju posvećujemo razmotljivim plohama među koje spadaju i valjak i stožac.

Definicija 1.0.1. *Preslikavanje $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, klase je $C^1(U)$ ako postoje sve parcijalne derivacije od f i neprekidne su na U.*
Preslikavanje je klase C^p, $p > 1$ ili p-puta neprekidno diferencijabilno ako sve parcijalne derivacije do uključivo p-tog reda postoje i neprekidne su.
Preslikavanje je klase C^∞ ili glatko ako sve parcijalne derivacije svih redova postoje i neprekidne su.

Definicija 1.0.2. *Krivulja (parametrizirana krivulja) c u $\mathbb{R}^n$ je glatko preslikavanje s otvorenog intervala $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$.*

$$c : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$$

U slučaju kad $n = 3$ pišemo: $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, t je ovdje parametar.
Za derivaciju c imamo:

$$\frac{dc}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Definicija 1.0.3. *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ i preslikavanje x: $U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je homeomorfizam otvorenih skupova, te glatko preslikavanje.*

Preslikavanje x nazivamo parametrizacijom (lokalnim koordinatama, (koordinatnom) kartom (eng. patch)) okoline točke p plohe S. Pišemo x=$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
Parcijalne derivacije po parametrima u i v označavamo:

$$\mathrm{x}_u := \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u}, \mathrm{x}_v := \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial v}$$

Navedimo i dva vjerojatno najpoznatija primjera ploha:

Primjer 1.0.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^3$ nekolinearni vektori. Ravninu zadajemo parametarskom jednadžbom*

$$x(u, v) = au + bv + c,$$

$$u, v \in \mathbb{R}$$

pri čemu je c konstantni vektor u $\mathbb{R}^3$. Vrijedi:

$$x_u = a, x_v = b$$

Primjer 1.0.5. *Jediničnu sferu zadajemo parametarskom jednadžbom*

$$\phi : \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}^3,\ \phi(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

1.1 Pravčaste plohe

Definicija 1.1.1. *Krivulju $c : I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo regularnom ako je $\dot{c}(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$. Točku krivulje za koju $\dot{c}(t) = 0$ nazivamo singularnom točkom.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $c : I \to R$ regularna krivulja, $e = e(u)$ jedinično vektorsko polje duž c. Ploha koja dopušta parametrizaciju*

$$x(u, v) = c(u) + ve(u), u \in I, v \in \mathbb{R}$$

naziva se pravčastom plohom.

Među pravčastim plohama razlikujemo razvojne plohe i vitopere plohe. Razvojne plohe su one plohe koje se mogu "razmotati" u ravninu bez rastezanja ili stezanja (tj. izometrički), a vitopere su one pravčaste plohe za koje to nije moguće. Oba tipa pravčastih ploha moguće je egzaktno definirati uz pomoć Gaussove zakrivljenosti (za razvojne plohe Gaussova zakrivljenost je jednaka 0, a za vitopere je različita od 0). Također, promatrajući izvodnice pravčastih ploha, za razvojne plohe dvije "neizmjerno bliske" izvodnice se sijeku, a za vitopere pohe su takve izvodnice mimosmjerne.

To jest, jednostavnije rečeno, pravčasta ploha je jednoparametarski skup neprekinuto povezanih pravaca, a pravce toga skupa nazivamo izvodnicama pravčaste plohe. Drukčije rečeno, ploha se naziva pravčastom ako kroz sve njene točke prolazi barem jedan pravac

koji je čitav sadržan u plohi.

U razvojne pravčaste plohe spadaju cilindrične plohe i konusne plohe kojima ćemo se ovdje ustvari i baviti.

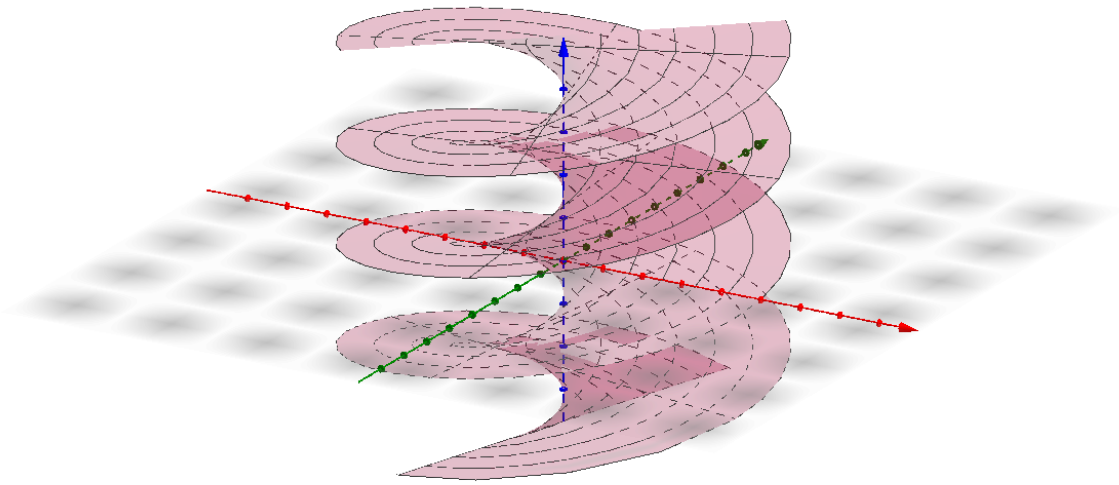
Pravčasta ploha je vitopera kad za barem jednu njezinu točku ne postoji nijedan pravac koji je čitav sadržan u plohi.
Takve se plohe ne mogu razmotati u ravninu, no takve plohe nam sada nisu u središtu zanimanja.

Osim valjaka i stožaca, navest ćemo još neke primjere pravčastih ploha:

Primjer 1.1.3. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

nazivamo helikoidom.
Helikoid nastaje istovremenom rotacijom i translacijom pravca oko zadanog fiksnog pravca na koji je okomit, pri čemu brzina translacije mora biti proporcionalna brzini rotacije.



Slika 1.1: Helikoid zadan parametarskom jednadžbom $x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 1.6u)$

Primjer 1.1.4. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (\cos u + v\cos\tfrac{u}{2}\cos u, \sin u + v\cos\tfrac{u}{2}\sin u, v\sin\tfrac{u}{2}) \\ &= (\cos u, \sin u, 0) + v(\cos\tfrac{u}{2}\cos u, \cos\tfrac{u}{2}\sin u, \sin\tfrac{u}{2}) \end{aligned}$$

nazivamo Möbiusovom trakom.

Razvojne pravčaste plohe

U ovom radu u središtu zanimanja biti će nam cilindrične plohe i konusne plohe. Kod nabrajanja primjera razvojnih pravčastih ploha ne bismo smijeli zaboraviti trivijalan primjer razvojne pravčaste plohe: ravninu, no o njoj smo ono bitno napisali na samom početku ovog rada.

Prvi, te jedan od važnijih primjera razvojnih pravčastih ploha kojima ćemo se baviti u ovom radu su cilindrične plohe:

Primjer 1.1.5. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x(u,v) = c(u) + ve$$

gdje je c regularna krivulja, a e je konstantno jedinično polje duž c nazivamo cilindričnom plohom.

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se kružnim cilindrima, eliptičkim, hiperboličkim i paraboličkim cilindrima, ali spomenut ćemo i primjere cilindara kojima baza nije krivulja drugog reda.

Još jedan od važnih primjera razvojnih pravčastih ploha, kojima ćemo se također baviti su konusne plohe:

Primjer 1.1.6. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x(u,v) = p + ve(u)$$

gdje je p fiksna točka nazivamo konusnom plohom. Vrh p konusa iznimno ćemo smatrati točkom plohe, iako joj po definiciji plohe ne pripada.

Slično kao i kod cilindričnih ploha, u ovom diplomskom radu bavit ćemo se kružnim konusima, eliptičkim, hiperboličkim i paraboličkim konusima, ali spomenut ćemo i primjere konusa kojima baza nije krivulja drugog reda.

Posljednji od primjera razvojnih pravčastih ploha koji navodimo ovdje, ali se njima nećemo posebno baviti su tangentne plohe.

Primjer 1.1.7. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x = c(u) + vc'(u)$$

gdje je c regularna krivulja, a c' njezino tangentno polje nazivamo tangentnom plohom.

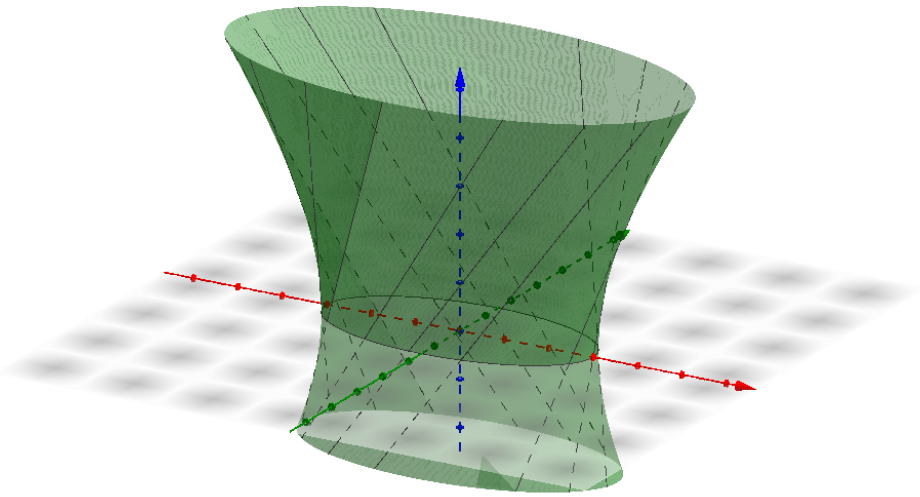
Vitopere pravčaste plohe

Vitopere plohe nisu nam u središtu zanimanja, pa ćemo spomenuti samo nekoliko primjera:

Primjer 1.1.8. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x(u, v) = (a \cos u - av \sin u,\ bv \cos u + b \sin u,\ cv)$$
$$= (a \cos u,\ b\sin u,\ 0) + v(-a \sin u,\ b \cos u,\ c)$$

nazivamo jednoplošnim hiperboloidom.



Slika 1.2: Hiperboloid s jednadžbom $x(u, v) = (4 \cos u - 4v \sin u, 1.5v \cos u + 1.5 \sin u, 4v)$

Spomenimo još i hiperbolički paraboloid, odnosno hipar:

Primjer 1.1.9. *Skup točaka zadanih parametarskom jednadžbom*

$$x(u,v)=(au,0,u^2) + v(a,\pm b,2u)$$

nazivamo hiperboličkim paraboloidom.

Poglavlje 2

Cilindrične plohe

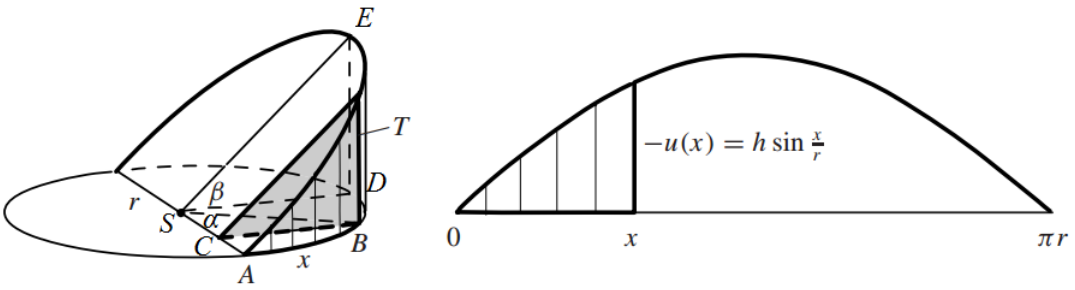
U ovom poglavlju bavit ćemo se krivuljama koje nastaju razmatanjem cilindrične plohe u ravninu. Primjerice, slikovito rečeno, kad bismo umočili soboslikarski valjak u kantu s bojom pod nekim određenim kutem, te da određena krivulja na valjku razgraničava obojeni i suhi dio valjka, mogli bismo promatrati kakve će geometrijske oblike taj valjak ocrtati na zidu. Bavit ćemo se i inverznim problemom: imamo li zadanu krivulju u ravnini, odnosno na ravnom listu papira, promatramo kako će ta krivulja izgledati zamotamo li taj list papira u oblik valjka. Pritom možemo mijenjati promjer valjka, kao i smjer iz kojeg se promatra rezultat zamatanja. Pokazat će se da već i najjednostavniji primjeri vode do velikog broja različitih mogućnosti.



Slika 2.1: Soboslikarski valjak umočen u kantu s bojom

2.1 Razmatanje elipse iz kružnog cilindra

Promatrajmo najprije uvodni problem: prerežemo li kružni cilindar pod nekim kutem β u odnosu na ravninu baze, očigledno je da će se krivulja po kojoj smo rezali cilindar prilikom razmotavanja cilindra u ravninu razmotati u sinusoidnu krivulju, te da jednadžba te krivulje ovisi o radijusu cilindra, ali i o veličini kuta β.



Slika 2.2: Valjak prerezan pod kutem β u odnosu na ravninu baze

Neka je r radijus tog cilindra, te neka je $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ kut pod kojim režemo cilindar, ali režemo samo polovicu tog cilindra, tj. bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da režemo njegovu desnu polovicu.

Ono što nas ovdje zanima je kolika je visina neke proizvoljne točke T na cilindru u odnosu na bazu cilindra, tj. ravninu do koje smo izrezali polovicu cilindra. Neka je točka B ortogonalna projekcija točke T na bazu, tj. ravninu do koje smo rezali, a točka A je točka na rubu onog promjera baze do kojeg smo rezali, te smo upravo u točki A prerezali cilindar.

Slovom x označit ćemo duljinu kružnog luka između točaka A i B, s $u(x)$ označimo udaljenost točaka B i T, a slovom h označimo maksimalnu visinu sinusoide. Iz klina na slici koji je nastao presijecanjem valjka u elipsi izdvojimo 2 pravokutna trokuta: $\triangle ABT$ osjenčan na slici, te trokut SDE čija je donja kateta polumjer baze valjka. Očigledno je da su ta 2 trokuta slična po $K - K$ poučku o sličnosti trokuta jer njihove hipotenuze s donjom katetom zatvaraju kut β. Neka je točka S središte baze valjka, a s α označimo središnji kut te baze koji zatvaraju dužine $\overline{AS}$ i $\overline{BS}$

Promatrajmo najprije $\triangle SBC$ koji je pravokutan s katetama $\overline{BC}$ duljine $r \sin\beta$ i $\overline{CS}$, te hipotenuzom $\overline{BS}$ duljine r. Kateta $\overline{CS}$ zatvara s hipotenuzom kut veličine α. Duljinu stranice $\overline{BC}$ možemo računati kao:

$$\overline{BC} = r \sin\alpha$$

Duljinu kružnog luka x tada možemo zapisati ovako:

$$x = \frac{2r\pi\alpha}{2\pi} = r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \overline{BC} = r\sin\frac{x}{r}$$

Uspoređujući sada slične trokute $\triangle ABT$ i $\triangle SDE$ uočavamo da:

$$\frac{|BC|}{|DS|} = \frac{|BT|}{|DE|}$$

$$\frac{r\sin\frac{x}{r}}{r} = \frac{u(x)}{h}$$

$$u(x) = hsin\frac{x}{r}$$

Time smo izveli jednadžbu krivulje nastale razmotavanjem presječne elipse. Jednadžba ovisi o radijusu r, a onda i o kutu β između baze cilindra i presječne ravnine budući da vrijedi $\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{r}$.

2.2 Presječna krivulja dvaju cilindara

Cilindrična ploha je svaka ploha generirana pravcem koji se giba duž neke ravninske krivulje, ostajući pritom paralelan jednom zadanom pravcu (odnosno, giba se zadržavajući zadani smjer). Tu krivulju zovemo direktrisom, a pravac generatorom ili izvodnicom te cilindrične plohe. Radi jednostavnosti, cilindričnu plohu kratko ćemo zvati cilindar. Naravno, direktrisa nije jedinstvena, jer direktrisa je svaka presječna krivulja koju dobijemo kad cilindar prerežemo ravninom. Kada cilindar prerežemo ravninom okomitom na izvodnicu, dobivenu direktrisu nazivamo profilom cilindra. Direktrisa u xy - ravnini ima implicitnu jednadžbu u Kartezijevom koordinatnom sustavu oblika:

$$m(x, y) = 0$$

U trodimenzionalnom koordinatnom sustavu ova jednadžba opisuje cilindar čiji profil ima navedenu jednadžbu u xy - ravnini s izvodnicom paralelnom sa z-osi. Analogno tome, jednadžba $p(x, z) = 0$ označava cilindar s izvodnicom paralelnom s y-osi, a jednadžba $q(y, z) = 0$ označava cilindar s izvodnicom paralelnom sa x-osi. Proučimo najprije vertikalni cilindar u xyz - koordinatnom sustavu s jednadžbom $m(x, y) = 0$, koji još nazivamo i glavnim cilindrom, te ga smjestimo u koordinatni sustav tako da profil prolazi ishodištem, a os z je ujedno i generator. Prerežimo glavni cilindar s horizontalnim cilindrom $p(x, z) = 0$ koji nazivamo još i presjecajućim cilindrom. Skup točaka (x, y, z) koji zadovoljava i jednadžbu $m(x, y) = 0$ i $p(x, z) = 0$ tvori krivulju koju označavamo sa C. Neka je krivulja C_p

profil presjecajućeg cilindra, a ujedno i ortogonalna projekcija presjecajućeg valjka na ravninu xz, odnosno, pogledamo li paralelno s izvodnicama presjecajućeg valjka, vidjet ćemo samo direktrisu, ali i ortogonalnu projekciju krivulje C na tu ravninu. Zbog toga xz-ravninu zovemo ravninom pogleda, a jednadžbu $p(x, z) = 0$ profilnom jednadžbom.

2.3 Razmatanje krivulje s bilo kojeg cilindra

Razmotamo li glavni cilindar na xz-ravninu, tada tu ravninu nazivamo ravninom razmotavanja. Krivulja C s tog cilindra razmota se u ravninsku krivulju C_u u xz-ravnini. Krivulja C_u tada ima jednadžbu oblika $u(x, z) = 0$ koju nazivamo jednadžbom razmotavanja, i može se dobiti iz profilnih jednadžbi $m(x, y) = 0$ i $p(x, z) = 0$ kojima je definirana krivulja C. Budući da je svaki cilindar razmotljiva ploha, to znači da njegovo razmotavanje čuva udaljenosti između točaka, odnosno svaki luk određene duljine na vodoravnom profilu $m(x, y) = 0$ preslika se u luk iste duljine na x-osi.

Kako bismo to zapisali kao jednadžbu, bilo koju točku P na profilu tog cilindra opisat ćemo pomoću parametra t i $s(t)$, pri čemu je $s(t)$ duljina kružnog luka kružnog isječka na profilu pridruženog točki P, a t je ortogonalna projekcija tog kružnog luka na x-os. Razmotamo li cilindar, točka P preslika se u točku na xz-ravnini s koordinatama $(s(t), 0)$. Odnosno, bilo koja točka na krivulji C s visinom z u odnos na točku P preslika se u točku s koordinatama $(s(t), z)$, pri čemu z zadovoljava jednadžbu $p(t, z) = 0$. Posljedica toga je da su u jednadžbi $u(x, z) = 0$, x i z povezani tako da $x = s(t)$, a z zadovoljava jednadžbu $p(t, z) = 0$

Kako bismo izrazili u pomoću p, pretpostavit ćemo da postoji isječak od C za koji funkcija $x = s(t)$ ima inverz, tako da se t može izraziti pomoću x kao $s^{-1}(x)$. Pod tim uvjetima imamo sljedeći teorem:

Teorem 2.3.1. *Krivulja C s profilnom jednadžbom $p(t, z) = 0$ i krivulja C_p i s jednadžbom razmotavanja $u(x, z) = 0$ povezane su na sljedeći način:*

$$u(x, z) = p(s^{-1}(x), z) \tag{2.1}$$

$$p(t, z) = u(s(t), z) \tag{2.2}$$

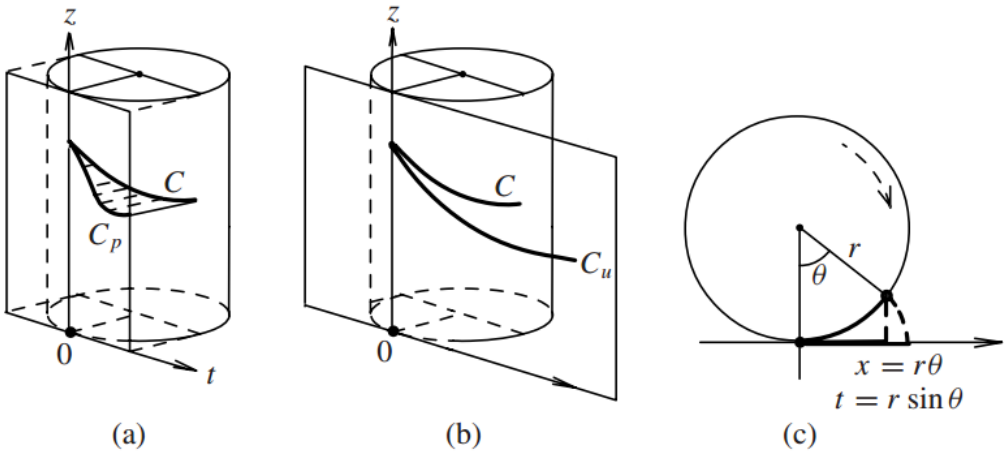
Kad su krivulje C_p i C_u opisane eksplicitnim jednadžbama, koristimo iste oznake: p za profilnu i u za jednadžbu razmotavanja (eng. unwrapping), te pišemo: $z = p(t)$ i $z = u(x)$. U tom slučaju (2.1) i (2.2) postaju:

$$u(x, z) = p(s^{-1}(x), z)$$

$$p(t) = u(s(t))$$

Korolar 2.3.2. *Za linearnu funkciju razmotavanja $u(x) = x$, profilna funkcija duljine kružnog luka glasi: $p(t) = s(t)$, dok je za profilnu linearnu funkciju $p(t) = t$ funkcija razmotavanja inverz funkcije duljine kružnog luka: $u(x) = s^{-1}(x)$*

2.4 Razmatanje krivulje s kružnog cilindra



Slika 2.3: Krivulja C i njezini profili

Razmotamo li cilindar radijusa r u ravninu, promatrat ćemo što se događa s nekom krivuljom C na njemu. Na slici 2.1 c vidljivo je, pogledamo li cilindar odozgo, da se kružni luk duljine $r\theta$ razmota u dužinu duljine x, a njegova ortogonalna projekcija na pravac koji je okomit na jedan krak kuta θ je duljine $t = r\sin\theta$. Budući da je $\theta = \frac{x}{r}$, funkcija duljine kružnog luka je $x = s(t) = r\arcsin\frac{t}{r}$, a njezin inverz je $t = s^{-1}(x) = r\sin\frac{x}{r}$.

Teorem 2.4.1. *Na kružnom cilindru radijusa r, neka je C krivulja definirana profilom C_p horizontalnog presjecajućeg cilindra, a C_u je njezina razmotana slika. Tada je jednadžba krivulje C_p zadana kao $p(t, z) = 0$, a jednadžba krivulje C_u je $u(x, z) = 0$, te su one povezane na sljedeći način:*

$$u(x, z) = p(r\sin\frac{x}{r}, z) \tag{2.3}$$

$$p(t, z) = u(r\arcsin\frac{t}{r}, z) \tag{2.4}$$

Ovo nam pokazuje da je funkcija sinus uvijek prisutna kad se radi o razmotavanju krivulje s kružnog cilindra. Kada su C_p i C_u opisane eksplicitnom jednadžbom, npr. kao

$z = p(t)$ i $z = u(x)$, tada (2.3) i (2.4) postaju:

$$u(x) = p(r \sin \frac{x}{r}) \tag{2.5}$$

$$p(t) = u(r \arcsin \frac{t}{r}) \tag{2.6}$$

Kada je $r = 1$, tada je $\arcsin t = s(t)$, a duljina pripadajućeg kružnog luka je t. Primijenimo sad Teorem 2.4.1. na sljedeće primjere:

Primjer 2.4.2. *(Linearna profilna funkcija p(t)=c(t)).*
U ovom slučaju, presjecajući cilindar je ravnina kroz pravac $z = ct$, gdje je c konstanta. Iz jednadžbe (2.5) slijedi da je funkcija razmotavanja zadana jednadžbom $u(x) = cr \sin \frac{x}{r}$, čiji graf je sinusoidna krivulja s periodom $2\pi r$.

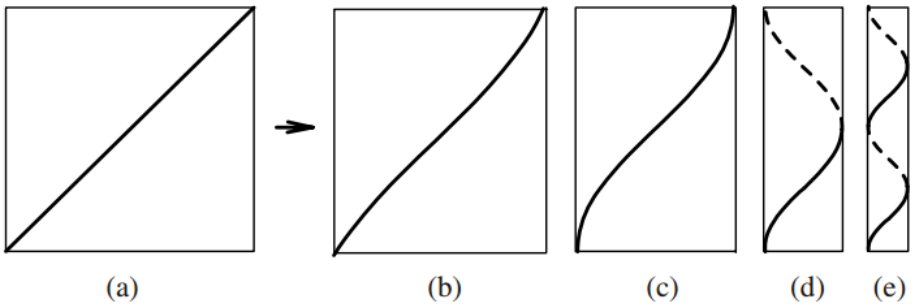
U slučaju da je presjecajuća krivulja nagnuta pod kutem β u odnos na horizontalni promjer cilindra, tada je $c = \operatorname{tg}\beta$, a funkcija razmotavanja je $u(x) = h \sin \frac{x}{r}$, pri čemu je $h = r \operatorname{tg}\beta$, što je kao rezultat dobiveno još u odjeljku "Razmatanje elipse iz kružnog cilindra". Oblik presječne krivulje C ovisi o smjeru iz kojeg gledamo. Gledamo li rub presjecajuće krivulje, vidimo profil C_p kao dužinu. Kasnije ćemo u primjerima pokazati da, iz kojeg god smjera gledali, presječna krivulja je uvijek elipsa, iako je u pojedinim slučajevima ona degenerirana.

Primjer 2.4.3. *(Linearna funkcija razmotavanja $u(x) = c(x)$).*
Ovaj primjer objašnjava nam što se događa kad imamo ravnu liniju na prozirnici koju zatim zamotamo u cilindar radijusa r. Pripadajuća profilna jednadžba koja slijedi iz (2.6) glasi:

$$p(t) = cr \arcsin \frac{t}{r}$$

Budući da su kod razmotavanja cilindra udaljenosti očuvane, dužina na razmotanom cilindru (koja je najkraća spojnica dviju točaka) postaje geodetska krivulja (najkraći put, tj. spojnica) na cilindru, bez obzira kako usko ga zamotali. Drugim riječima, na svakom kružnom cilindru profilna krivulja geodetske krivulje je dio krivulje arkus sinusa. Na slici 2.4 prikazan je pravac s jednadžbom $u(x) = x$ na razmotanoj ravnini (slika a), dok je na slikama lijevo od slike označene slovom a prikazno zamatanje te ravnine u valjak, te kako se, gledano slijeva na desno, smanjuje radijus baze tog valjka.

Iz slike se jasno vidi da su to sinusoide, baš kao što je rečeno u Teoremu 1. Iako na lijevim slikama krivulja ne izgleda na prvi pogled poput sinusoide, ukoliko u nekom od alata dinamičke geometrije nacrtamo sinusoidu, te malo zumiramo dio slike oko ishodišta, jasno će se vidjeti da krivulja na lijevim slikama sliči sinusoidi koju smo nacrtali. Na slici

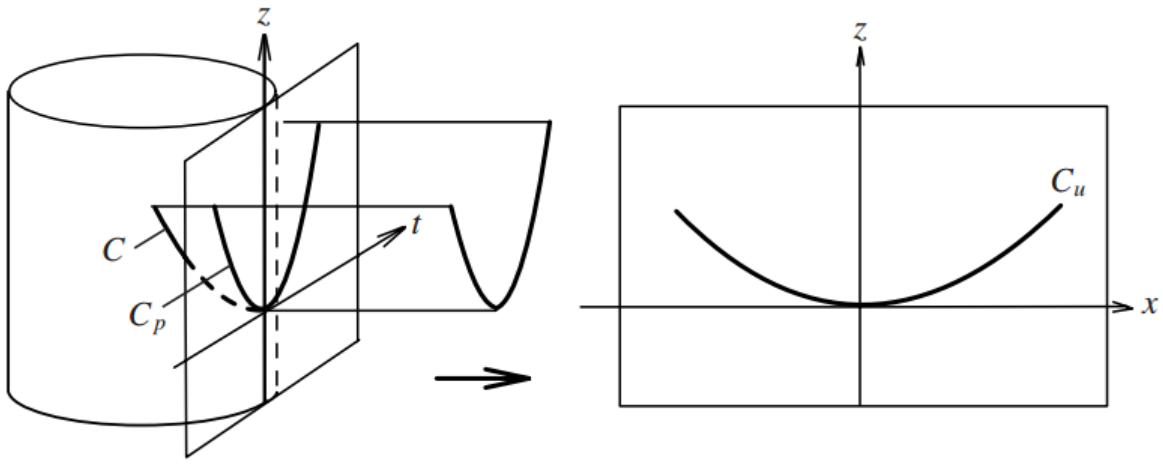


Slika 2.4: Namatanje pravca oko valjka

d prikazan je valjak s upravo takvim radijusom da se krajevi papira s nacrtanim dijelom pravca dodiruju, odnosno pravac je točno jedanput omotan oko tog valjka. Točnije rečeno, ako je širina papira jednaka o, tada je polumjer valjka $r = \frac{o}{2\pi}$. *Na slici e je prikazan valjak s radijusom takvim da je pravac 2 puta omotan oko tog valjka, odnosno, polumjer valjka je u tom slučaju* $r = \frac{o}{4\pi}$.

Ovo se lako prouči i uz pomoć praktičnog pokusai u kojem na prozirnicu nacrtamo pravac, te zatim zamatamo prozirnicu u valjak. Promatramo kakav je taj pravac s obzirom na stiskanje valjka, odnosno smanjenje njegovog radijusa.

Primjer 2.4.4. *(Paraboličkи presjecajući cilindar)*



Slika 2.5: Presjek kružnog i paraboličkog cilindra

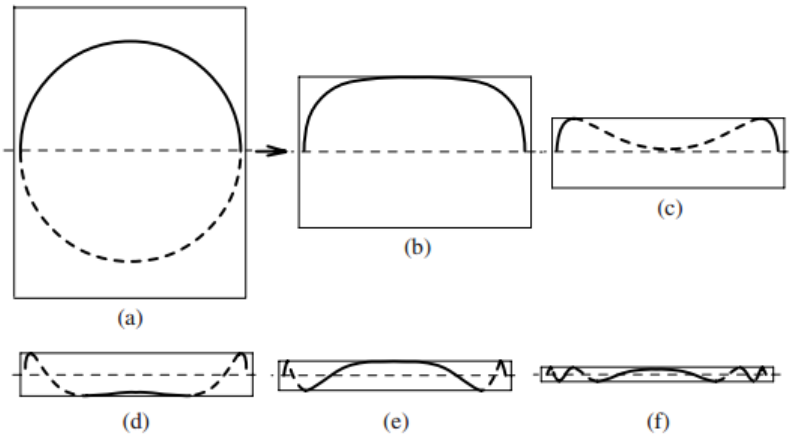
Na desnom dijelu slike 2.5 prikazana je parabola s profilnom jednadžbom $p(t) = ct^2$ za neku konstantu $c > 0$. Iz (2.5) slijedi da je pripadajuća funkcija razmotavanja zadana jednadžbom

$$u(x) = cr^2 \sin^2 \frac{x}{r} \tag{2.7}$$

Primjeri ovog tipa imaju i praktičnu primjenu. Uzmemo primjerice pravokutni komad lima na kojemu je izrezana parabola poput one na gornjoj slici, te ga zamotamo u kružni cilindar radijusa r. Krivulja C izrezana na tom cilindru pokazuje nam mjesto prodiranja paraboličnog žlijeba, odnosno cilindra s profilnom jednadžbom $p(t) = ct^2$ u taj kružni cilindar.

Primjer 2.4.5. *(Zamatanje kruga u cilindar)*
Na komadu prozirne plastike nacrtamo jediničnu kružnicu, te zatim tu plastiku zamotamo u glavni kružni cilindar. Ovdje nas zanima kako će ta kružnica izgledati nakon zamatanja. Kružnica će se namatanjem ravnine u valjak zamotati u krivulju C, čiji profil C_p ćemo promatrati. Gornju polovicu kružnice nacrtanu na razmotanom komadu plastike opisuje jednadžba $u_+(x) = \sqrt{1 - x^2}$, a donju polovicu opisuje jednadžba $u_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Obje jednadžbe obuhvaćene su implicitnom jednadžbom

$$p^2(t) = 1 - (\arcsin \frac{x}{r})^2$$



Slika 2.6: Zamatanje komada plastike s nacrtanom kružnicom u valjak kojemu se radijus smanjuje.

Na slici 2.6 tamnom linijom prikazano je kako krivulja izgleda s prednje strane valjka, a isprekidanom linijom kako izgleda sa stražnje strane.

2.5 Rotiranje glavnog cilindra

Neka je na kružnom cilindru radijusa r zadana krivulja C eksplicitnom jednadžbom $z = p(t)$. Cilindar rotiramo oko svoje osi za kut α, a ravnina pogleda ostane fiksirana. Profilna jednadžba rotirane krivulje na ravnini pogleda ovisi o α, a njezinu ordinatu označimo sa z_α. Teorem koji slijedi govori o ovisnosi z_α o p.

Teorem 2.5.1. *Neka je na cilindru radijusa r zadana krivulja C s profilnom jednadžbom $z = p(t)$ na ravnini pogleda. Rotiramo li cilindar oko svoje osi za neki kut α, tada rotirana krivulja na toj istoj ravnini pogleda ima jednadžbu*

$$z_\alpha = p(t\cos\alpha + \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha) \tag{2.8}$$

Dokaz:
Rotiranje cilindra za neki kut α ekvivalentno je pomicanju kružnog luka duljine $x = r\theta$ za $r\alpha$. Stoga je jednadžba razmotavanja krivulje C $u(x)$, a rotacija cilindra za kut α, mjerimo li u smjeru kretanja kazaljke na satu kad gledamo odozgo, zamjenjuje x s $x + r\alpha$, te jednadžba razmotavanja rotirane krivulje C postaje prema (2.5)

$$z_\alpha = u(x + r\alpha) = p(r\sin\frac{x + r\alpha}{r})$$

Iz formule za sinus zbroja slijedi da

$$r\sin(\frac{x}{r} + \alpha) = r\sin\frac{x}{r}\cos\alpha + r\cos\frac{x}{r}\sin\alpha.$$

Budući da je $t = r\sin\frac{x}{r}$, a $r\cos\frac{x}{r} = \sqrt{r^2 - t^2}$, tada vrijedi:

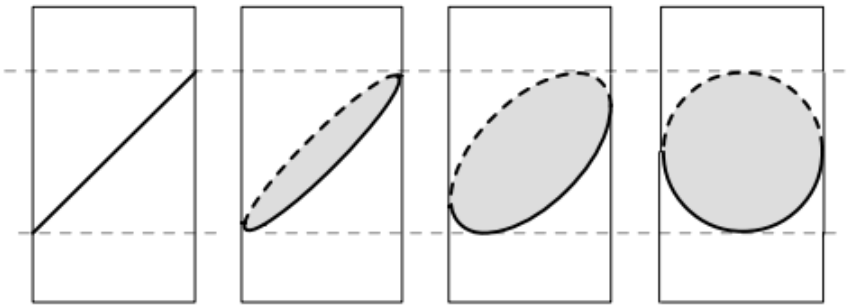
$$z_\alpha = p(r\sin\frac{x + r\alpha}{r} = p(t\cos\alpha + \sqrt{r^2 - t^2}$$

što dokazuje teorem. Možemo primijetiti da vrijedi $z_0 = p(t)$.

Linearna kombinacija $t\cos\alpha + \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha$ u (2.8) podsjeća na desnu stranu jednadžbe $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ za zamjenu koordinata iz bilo kojeg xy-koordinatnog sustava u $x'y'$- koordinatni sustav rotiranjem za kut α.

Korolar 2.5.2. *(Okomiti pogled)*
Kada je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dobivamo profilnu jednadžbu $z_{\frac{\pi}{2}} = p(\sqrt{r^2 - t^2})$

Primjer 2.5.3. *(Rotirani pogled nakošene ravnine presijecanja)*
Ako je $p(t) = t$, što odgovara rezanju cilindra ravninom nagnutom pod kutom od $45°$,



Slika 2.7: Rotiranje valjka presiječenog u elipsi.

jednadžba (2.8) postaje

$$z_\alpha = t\cos\alpha + \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha$$

iz čega nakon sređivanja dobivamo:

$$z_\alpha - t\cos\alpha = \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha$$

Nakon kvadriranja dobivamo:

$$z_\alpha^2 - 2z_\alpha t\cos\alpha + t^2\cos^2\alpha = r^2\sin^2\alpha - t^2\sin^2\alpha$$

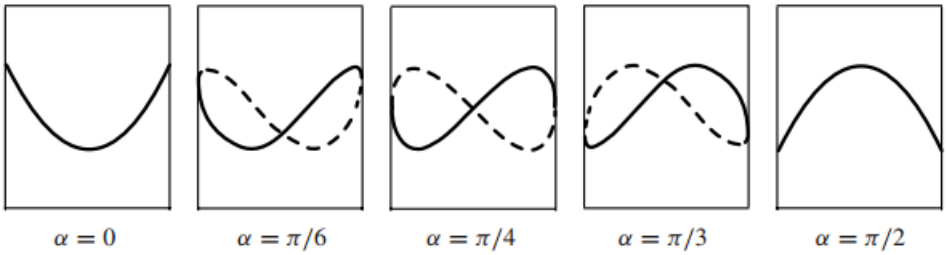
$$z_\alpha^2 - 2z_\alpha t\cos\alpha + t^2 = r^2\sin^2\alpha$$

Kao što je bilo i očekivano, dobili smo jednadžbu elipse (moguće da je degenerirana) u tz_α ravnini. Kada je $\alpha = 0$, profil je dužina s jednadžbom $z = t$, $t \in [0, r]$, dok u slučaju $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je kružnica s jednadžbom $z^2 + t^2 = r^2$.

Primjer 2.5.4. *(Rotirani pogled paraboličnog reza)*
U slučaju kad $p(t) = ct^2$, jednadžba (2.8) ima oblik:

$$z_\alpha = c(t\cos\alpha + \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha)^2$$

Kada je $c = 1$, na slici imamo prikazanu profilnu krivulju C_p za različite vrijednosti α. Zanimljivo je da kad cilindar rotiramo za pravi kut, profil je zrcalna slika početne parabole reflektirane s obzirom na pravac s jednadžbom $z = \frac{r^2}{2}$. Punom crtom na slici je označen dio krivulje s prednje strane valjka, dok je isprekidanom linijom označen dio na stražnjoj strani.



Slika 2.8: Rotiranje valjka presiječenog u paraboli.

2.6 Probušeni cilindri

Izbušimo li rupu kroz glavni cilindar radijusa r cilindričnom bušilicom radijusa a, čije osi su okomite na ravninu pogleda na udaljenosti d od osi zadanog cilindra, gdje je $0 \leq d \leq r+d$. Rub te izbušene rupe je krivulja C na zadanom cilindru koja izgleda kao dio kružnice promatramo li je odozgo uzduž osi bušenja. Ravnina kroz os glavnog cilindra paralelna je ravnini pogleda, te dijeli cilindar na 2 simetrična dijela s obzirom na nju: na prednji i na stražnji dio. Krivulja C je također podijeljena na 2 simetrična dijela, jedan na prednjoj te drugi na stražnjoj strani valjka. Ta 2 dijela mogu biti povezana ili razdvojena, ovisno o veličini i poziciji izbušene rupe. Pripadajuća odmotana krivulja također je simetrična s obzirom na vertikalan pravac čija je jednadžba $x = \frac{\pi r}{2}$.
Smjestimo os bušenja tako da presijeca os t ravnine pogleda ortogonalno u $(d, 0)$. Kako bismo odredili jednadžbu $z = u(x)$ krivulje C, prvo moramo pronaći profilnu jednadžbu $z = p(t)$, a zatim prema (2.6) imamo $u(x) = p(r \sin xr)$. Kad je $r = 1$, tada $u(x) = p(\sin x)$. Kako bismo dobili $p(t)$, primijetimo da svaka projicirana točka $(t, p(t))$ u ravnini pogleda pripada krugu radijusa a sa središtem u točki $(d, 0)$, pa je $p^2(t)+(d-t)^2 = a^2$. Zaključujemo da gornja i donja polovica kružne rupe imaju profilnu jednadžbu

$$p^2(t) = a^2 - (d - t)^2 \tag{2.9}$$

Pripadajuća jednažba razmotavanja glasi ovako:

$$u^2(x) = a^2 - (d - r \sin \frac{x}{r})^2 \tag{2.10}$$

Sljedeći primjeri pokazuju nam zanimljivu familiju razmotanih krivulja kad se a, d i r uzimaju kao parametri.

Primjer 2.6.1. *(Bušenje bušilicom radijusa jednakog radijusu zadanog cilindra, d je varijabilan)*

Neka je $a = r = 1$, *a* $0 < d < 2$. *Kada je* $d = 2$, *prodorna krivulja dodiruje glavni cilindar u jednoj točki, pa se razmotavanjem dobiva samo jedna točka* $(\frac{\pi}{2}, 0)$. *Kad je* $d = 1$, *jednadžba razmotavanja je*

$$u^2(x) = 2\sin x - sin^2 x$$

Kako se d smanjuje, rupa mijenja oblik, te dosiže svoju maksimalnu veličinu kad je $d = 0$, *a tada os bušilice prolazi kroz os glavnog cilindra. Jednadžba razmotavanja tada glasi*

$$u^2(x) = 1 - sin^2 x = cos^2 x$$

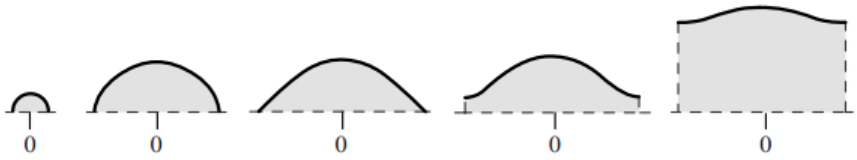


Slika 2.9: Gornje polovice razmotanih krivulja nastalih bušenjem cilindara jediničnih radijusa u različitim dijelovima valjka.

Na slici 2.9 prikazane su gornje polovice razmotanih krivulja za nekoliko različitih vrijednosti varijable d, poredanih kako se d smanjuje. Svaka krivulja prikazana na toj slici uključuje i razmotanu simetričnu sliku sa stražnje polovice glavnog cilindra, s vertikalnom osi simetrije $x = \frac{\pi}{2}$. *U oba slučaja donja polovica krivulje, koja nije prikazana na slici, može se dobiti reflektiranjem krivulje kroz x-os. Primijetimo još da graf* $z = \mid \cos x \mid$, *zajedno sa simetričnim grafom* $z = -\mid \cos x \mid$, $\mid x \mid \leq \frac{\pi}{2}$ *predstavlja razmotani presjek dvaju međusobno okomitih cilindara jediničnih radijusa. U tom slučaju presječna krivulja tih cilindara je elipsa.*

Primjer 2.6.2. *(Centrirana bušilica varijabilnog radijusa)*
Ako je $r = 1$ *i* $d = 0$, *rupa je centrirana na osi glavnog cilindra, jednadžba (2.10) pojednostavljuje se u* $u^2(x) = a^2 - \sin^2 x$, *što predstavlja familiju razmotanih krivulja ovisnih o radijusu a te rupe. U ovom primjeru i jednadžba i geometrijski prikaz nam pokazuju da je svaka razmotana krivlja simetrična s obzirom na pravac* $x = 0$. *Na slici 2.10 prikazano je nekoliko krivulja iz te familije,* $z = \sqrt{a^2 - \sin^2 x}$, *pri čemu se a povećava slijeva na desno. Na trećoj slici je krivulja s jednadžbom* $z = \mid \cos x \mid$. *prikazana i na slici 2.9.*

Primjer 2.6.3. *(Rotiranje pogleda na izbušenu kružnu rupu) Vraćamo se na jednadžbu (2.9) koja opisuje projicirani pogled na rupu napravljenu bušenjem rupe u glavnom cilindru radijusa r cilindričnom bušilicom radijusa a čija os je okomita na ravninu pogleda i udaljena za d od osi zadanog cilindra, pri čemu* $0 \leq d \leq r + a$. *Promatrat ćemo kako*



Slika 2.10: Famiija razmotanih krivulja ovisnih o radijusu a.

izgleda projekcija rupe na ravninu pogleda nakon što glavni cilindar zarotiramo za pravi kut. Primijenit ćemo općenitu formulu rotiranja (2.8), pri čemu je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, *a* $p(t)$ *je dan u (2.9), te ćemo ustanoviti da gornja i donja polovica rupe u rotiranom cilindru zadovoljavaju jednadžbu*

$$z^2 = a^2 - (d - \sqrt{r^2 - t^2})^2. \tag{2.11}$$

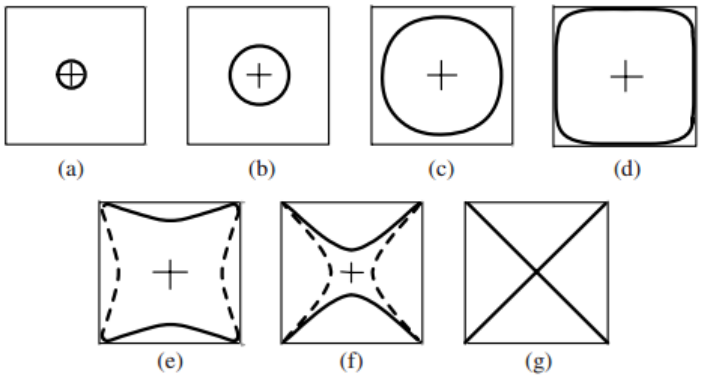
To možemo zapisati i kao $z^2 = a^2 - d^2 - r^2 + t^2 + 2d\sqrt{r^2 - t^2}$, *odnosno kao* $(z^2 - a^2 + d^2 + r^2 - t^2)^2 = 4d^2(r^2 - t^2)$, *dakle u oba slučaja je to jednadžba 4. stupnja izražena u svakoj od varijabli t ili u z.*
Kad je $d = r + a$, *bušilica tangira glavni cilindar. Kako se d smanjuje, odnosno približava nuli, projekcija rotirane rupe mijenja svoj izgled. Kad je* $d = 0$, *bušilica prolazi kroz os glavnog cilindra i jednadžba tada glasi* $t^2 - z^2 = r^2 - a^2$, *što predstavlja jednakokračnu hiperbolu ukoliko je* $a \neq r$. *Hiperbola ima horizontalnu os kad je* $a < r$, *odnosno vertikalnu os kad je* $a > r$. *Ako je* $a = r$, *radijus bušilice je jednak radijusu glavnog cilindra, a projekcija rotirane krivulje je par pravaca zadanih jednadžbama* $z = \pm t$. *Na slici 2.11 prikazano je kako se projekcija mijenja kad* $r = a = 1$, *a os bušilice giba se prema osi glavnog cilindra.*

Na slici 2.12 vidimo odgovarajući slijed krivulja kad je $r = 1$ *i* $a = \frac{1}{2}$. *Kad je* $a > 1$ *projekcije izgledaju poput ovih na toj slici, samo što su zakrenute za* $90°$.

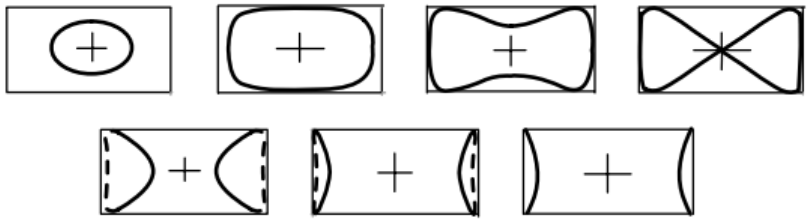
2.7 Rezanje nakošenim valjkom

Do sada smo proučavali profil krivulje C izrezane iz glavnog cilindra pomoću cilindra koji je na njega okomit. U nacrtnoj geometriji i u primjenama na rezanje metalnih ploča ta dva cilindra nisu uvijek okomita, već je jedan nagnut s obzirom na drugi za neki kut β. Zanima nas kako izgleda razmotana krivulja C_u kako bismo mogli prerezati razmotani cilindar uzduž te krivulje. Kako bismo odredili C_u moramo prvo pronaći horizontalnu projekciju C_p koja je povezana s profilom kosog cilindra. Ta veza iskazana je u sljedećem teoremu:

Teorem 2.7.1. *Neka je C presječna krivulja glavnog cilindra s horizontalnim profilom* $y = m(t)$ *koji je izrezan iz cilindra nakošenog pod kutem* β, *s profilnom jednadžbom* $z' = q(t)$.



Slika 2.11: Izgled projekcije rotirane rupe u ovisnosi o udaljenosti osi bušilice od osi cilindra .



Slika 2.12: Izgled projekcije rotirane rupe kad je $r = 1$ i $a = \frac{1}{2}$.

Tada je horizontalna projekcija od C $z = p(t)$ *povezana s funkcijom* $z' = q(t)$ *jednadžbom*

$$q(t) = p(t)\cos\beta + m(t)\sin\beta. \tag{2.12}$$

Posebni slučajevi:

a) Ako je $\beta = 0$, to nam daje da $q(t) = p(t)$.

b) Ako je $\beta = \frac{\pi}{2}$, (2.12) postaje $z' = m(t)$. To je bilo i očekivano jer je smjer gledanja uzduž osi glavnog cilindra, a svaka krivulja na glavnom cilindru je dio njegovog profila.

c) Ako je $p(t) = 0$, (2.12) se pojednostavi u $z' = m(t)\sin\beta$, što je skalirana verzija profila glavnog cilindra. Ako glavni cilindar ima kružni profil $m(t) = r - \sqrt{r^2 - t^2}$, tada kad $\beta \neq 0$, jednadžba $z' = m(t)\sin\beta$ se može zapisati i drukčije:

$$m(t) = r - \sqrt{r^2 - t^2}$$

$$r - m(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$$
$$r - \frac{z'}{\sin\beta} = \sqrt{r^2 - t^2}$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$(r - \frac{z'}{\sin\beta})^2 = r^2 - t^2$$

Nakon dijeljenja s r^2 dobivamo:

$$(1 - \frac{z'}{r\sin\beta})^2 = 1 - \frac{t^2}{r^2}$$

$$\frac{t^2}{r^2} + (\frac{z' - r\sin\beta}{r\sin\beta})^2 = 1$$

To je jednadžba elipse sa središtem u $(0, r\sin\beta)$ u tz' - ravnini s poluosima duljine r i $r\sin\beta$. U ovom slučaju krivulja C je kružnica radijusa r na glavnom cilindru, koja izgleda kao elipsa kad se projicira na nakošenu ravninu.

d) Promatramo slučaj kad je $\cos\beta \neq 0$. Iz jednadžbe (2.12) tada dobivamo

$$p(t) = q(t)\sec\beta - m(t)\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

dakle, linearnu kombinaciju dviju profilnih krivulja $q(t)$ i $m(t)$. Ako je cilindar kojim smo rezali kružni cilindar radijusa a, a cilindar koji smo rezali ima radijus r, i rezali smo pod kutem β, tada (2.13) možemo izraziti kao $q(t) = \sqrt{a^2 - t^2}$, a $m(t) = r - \sqrt{r^2 - t^2}$.

Primjer 2.7.2. *(Presjek dvaju kružnih cilindara)*
Pogledajmo specijalan slučaj u slučaju d)., kad $a = r$. Tada je $z = p(t)$, a (2.13) možemo zapisati kao

$$z + r\,\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{a^2 - t^2}(\sec\beta + \mathrm{tg}\,\beta),$$

ili kao

$$\frac{t^2}{r^2} + (\frac{z + r\,\mathrm{tg}\,\beta}{r(\sec\beta + \mathrm{tg}\,\beta)})^2 = 1,$$

To je jednadžba elipse sa središtem u $(0, -r\tan\beta)$ u tz-ravnini i s poluosima duljine r i $r(\sec\beta + \tan\beta)$. Budući da je projicirana krivulja C_p elipsa, znamo da će razmotana krivulja C_u biti sinusoidna.

Napomena:
Ako glavni cilindar ima kružni profil $m(t) = r - \sqrt{r^2 - t^2}$, kad $r \to \infty$ glavni cilindar postaje ravnina, te tada $r - \sqrt{r^2 - t^2} \to 0$, a (2.12) postaje $q(t) = p(t)\cos\beta m$.

Primjer 2.7.3. *(Nakošeni pogled na geodetsku krivulju)*
Primjer 2.4.3. govori nam da će geodetska krivulja na kružnom cilindru biti kružna spirala koja sa strane izgleda kao sinusoida. Na kružnom cilindru radijusa 1 geodetska krivulja s funkcijom razmotavanja $u(x) = cx$ ima horizontalni profil $p(t) = \arcsin t$, a glavni cilindar ima kružni profil $m(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$. Iz (2.12) slijedi:

$$q(t) = c(\arcsin t)\cos\beta + (1 - \sqrt{1-t^2})\sin\beta$$

Kad je $\tan\beta = c$*, promatramo spiralu uzduž jedne njezine tangente konstantnog nagiba, te ta jednadžba postaje*

$$\frac{1}{\sin\beta}q(t) = \arcsin t + (1 - \sqrt{1-t^2})$$

Pogledajmo sada jednadžbu krivulje

$$q(t) = \arcsin t + (1 - \sqrt{1-t^2})$$

Uvrstimo li da $t = -u$, jednadžba tada izgleda ovako:

$$q(-u) = -\arcsin u + (1 - \sqrt{1-u^2}) = -(\frac{\pi}{2} - \arccos u) + 1 - \sqrt{1-u^2} = (1 - \frac{\pi}{2}) + \arccos u - \sqrt{1-u^2}$$

Na desnoj strani možemo prepoznati jednadžbu cikloide, dobivene jednostavnom transformacijom, zrcaljenjem i translacijom cikloide zadane standardnom jednadžbom

$$q(t) = \arccos t + (1 - \sqrt{1-t^2}) \tag{2.13}$$

Poglavlje 3

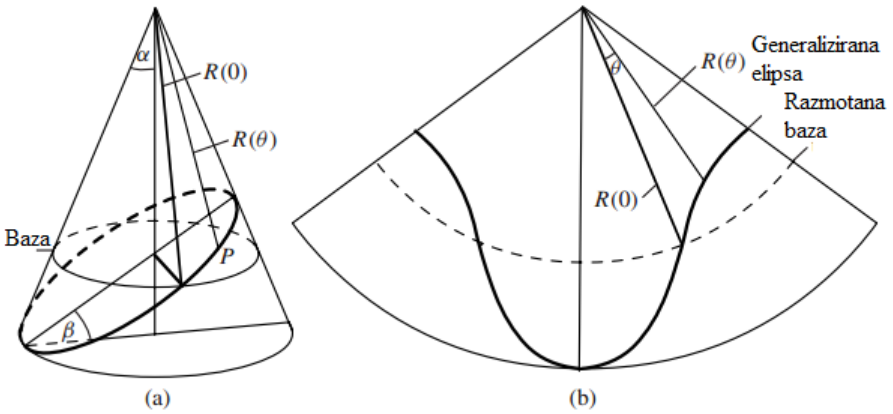
Konusne plohe

U ovom poglavlju bavit ćemo se krivuljama koje nastaju razmatanjem konusne plohe u ravninu. Pitamo se, imamo li zadanu krivulju C na plaštu kružnog konusa, kako izgleda ta krivulja C kad razmotamo plašt tog stošca u ravninu, ili na neki drugi stožac. Kako će ta krivulja izgledati gledana iz različitih smjerova? U ovom radu bavit ćemo se samo uspravnim kružnim stošcima, te ćemo analizirati ne samo konike, već općenitu krivulju na konusnoj plohi. Primjenjivat ćemo tri geometrijske transformacije: projiciranje krivulje na stropnu ravninu (tj. na ravninu okomitu na os tog stošca koja prolazi njegovim vrhom), skaliranje stropne projekcije radijalno od vrha, te komprimiranje polarnog koordinatnog kuta.

3.1 Razmatanje krivulje iz uspravnog kružnog stošca

U ovom poglavlju pokazat će se da je stropna projekcija ključna za proučavanje krivulja koje leže na plaštu stošca. Razmatat ćemo razvojne krivulje na stošcu koje nisu nužno konike, nego, primjerice geodetske krivulje i krivulje dobivene presijecanjima s cilindrom. Na slici 3.1.a prikazane su nam dvije poznate krivulje na stošcu. Jedna je kružni presjek koji zovemo bazom i njegova razmotana slika je kružni luk, a druga je elipsa koja se razmota u novi oblik ravninskih krivulja nazvan generaliziranom elipsom, prikazanom na slici 3.1.b.

Umjesto elipse gledamo sad neku općenitu krivulju C na stošcu, te promatramo što se događa kad stožac razmotamo u ravninu. U stropnoj ravnini izvodnica valjka postaje zraka s ishodištem u vrhu stošca. Točka P na krivulji C preslika se prilikom projiciranja u točku u ravnini s polarnim koordinatama $(R(\theta), \theta)$, s ishodištem u vrhu stošca. Pritom je $R(\theta)$ udaljenost točke P od vrha stošca, a θ je polarni kut izražen u radijanima mjeren od odabrane čvrste zrake do one koja prolazi točkom P.



Slika 3.1: Presjek stošca u elipsi na (a) dijelu, te razmotana slika na (b) dijelu.

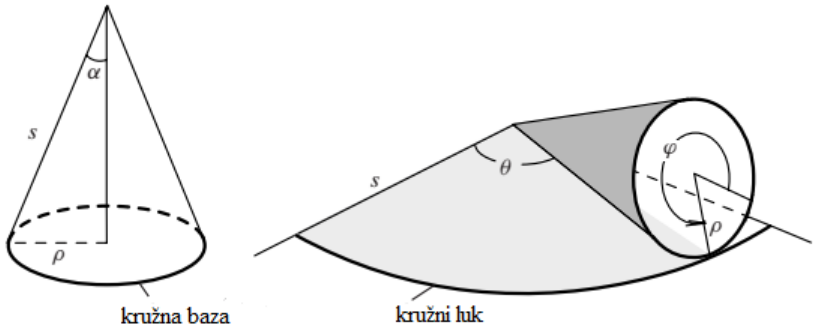
Drukčije rečeno, θ je kut mjeren po površini stošca od fiksirane izvodnice do izvodnice kroz točku P. Na taj način, $(R(\theta), \theta))$ možemo shvaćati kao konusne koordinate na samom konusu.
Funkcija $R(\theta)$ ovisi o C, te možemo općenito formulirati sljedeći

Osnovni problem:
Za zadanu krivulju C na stošcu, izvesti eksplicitnu formulu za $R(\theta)$. Posebno, opisati $R(\theta)$ kad je C konika.
Analiza na konusu razlikuje se od one na cilindru, ali opet ovisi o invarijantnosti duljine kružnog luka, kao što će se i pokazati u sljedećim slučajevima.

3.2 Razmatanje baze i očuvanje duljine kružnog luka

Za bilo koji stožac s kružnom bazom, kao što je prikazano na slici 3.2. a, razmotana slika baze je kružni luk sa središtem u vrhu stošca, te s radijusom jednakim duljini izvodnice s tog stošca. U ovom slučaju osnovni problem se lako riješio zbog toga što je udaljenost $R(\theta)$ točke od vrha konstantna, tj. $R(\theta) = R(0) = s$.

Na slici 3.2. možemo vidjeti i jednostavnu činjenicu koja igra bitnu ulogu u rješavanju osnovnog problema. Neka je ρ radijus baze na slici 3.2. a. Kad se baza odmota za kut od φ radijana, odgovarajući kružni isječak na bazi s duljinom kružnog luka $\rho\varphi$ odmota se u kružni luk radijusa s sa središnjim kutem θ. Budući da je konus razmotljiva ploha,



Slika 3.2: (a) Stožac s izvodnicom duljine s ; (b) razmotana slika plašta.

udaljenosti ostaju očuvane kad se stožac odmota u ravninu, pa zbog toga vrijedi:

$$s\theta = \rho\varphi \tag{3.1}$$

Jednostavno je primijetiti da odnos veličina θ i φ ne ovisi o ρ i s. Na slici 3.2. a, α je polovica kuta uz vrh stošca, a ρ je sa s povezan sljedećom jednadžbom:

$$\rho = s \sin\alpha \tag{3.2}$$

Iz jednadžbi (3.1) i (3.2) dobivamo relaciju neovisnu o ρ i s:

$$\theta = \varphi \sin\alpha \tag{3.3}$$

Ova jednadžba (3.3), uz uvjet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ponavljat će se u analiziranju oblika bilo koje krivulje razmotane sa stošca. Uvedemo li konstantu $k = \frac{1}{\sin\alpha}$ ta jednadžba može se zapisati i kao:

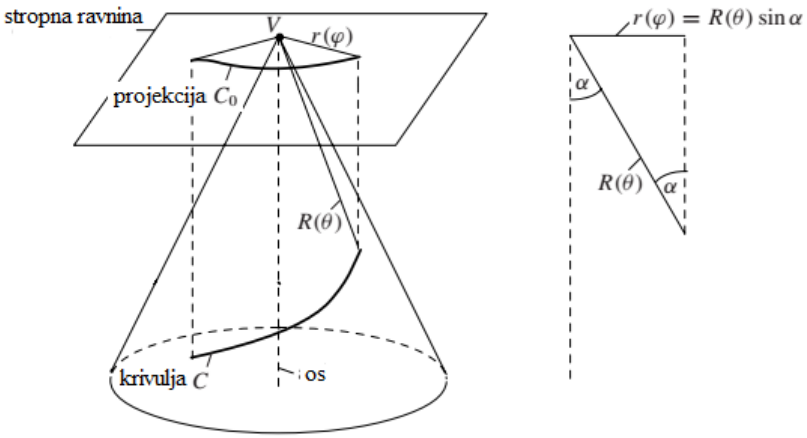
$$\varphi = k\theta \tag{3.4}$$

Dakle, sinus polovice kuta uz vrh stošca određuje odnos između φ i θ.
Kad je stožac prerezan ravninom koja sadrži promjer baze nagnutom za kut β, presjek stošca s ravninom je elipsa, hiperbola ili parabola, ovisno o kutu β. Na slici 3.1. a prikazana je elipsa, koja se razmotala u generaliziranu elipsu. Eksplicitnu formulu za $R(\theta)$ koja ovisi i o kutu β i o kutu uz vrh stošca izvest ćemo u sljedećem odjeljku.

3.3 Reformulirani problem u terminima stropne projekcije

U teoremu 2.3.1. analizirali smo općenitu krivulju na cilindru kojeg projiciramo na ravninu razmotavanja paralelnu s njegovim izvodnicama. Kako bismo analizirali krivulju C koja

leži na stošcu, projicirat ćemo je prema gore, na horizontalnu stropnu ravninu, koja prolazi vrhom stošca i okomita je na os stošca, kao na slici 3.3. a.



Slika 3.3: Krivulja C na stošcu projicira se u krivulju C_0 na stropnoj ravnini s jednadžbom $r = r(\varphi)$.

Krivulja C projicira se u krivulju C_0 na stropnoj ravnini zadanu polarnom jednadžbom $r = r(\varphi)$, gdje je $r(\varphi)$ udaljenost mjerena od vrha V. Stropna projekcija C_0 je profil vertikalnog cilindra koji presijeca taj stožac u krivulji C. Na slici 3.3. vidi se da udaljenosti $R(\theta)$ i $r(\varphi)$ zadovoljavaju jednadžbu $r(\varphi) = R(\theta)\sin\alpha$, pri čemu je α polovica kuta pri vrhu stošca. Ta jednadžba će nam zajedno s jednadžbom (3.4) pokazati da je stropna projekcija ključna u određivanju osnovnih relacija.

Teorem 3.3.1. *Neka je C krivulja na stošcu s kutem pri vrhu stošca veličine 2α. Ako stropna projekcija ima polarnu jednadžbu $r = r(\varphi)$, tada razmotana slika krivulje C ima polarnu jednadžbu*

$$R(\theta) = kr(k\theta) \tag{3.5}$$

gdje je $k = \frac{1}{\sin\alpha}$. Obrnuto, ako je $R(\theta)$ poznat, tada iz jednadžbe (3.5) slijedi da

$$r(\varphi) = \frac{R(\frac{\varphi}{k})}{k} \tag{3.6}$$

Dokaz:
Relacija $r(\varphi) = R(\theta)\sin\alpha$ postaje $r(\varphi) = \frac{R(\theta)}{k}$, koja pomoću (3.3) i (3.4) daje (3.5).

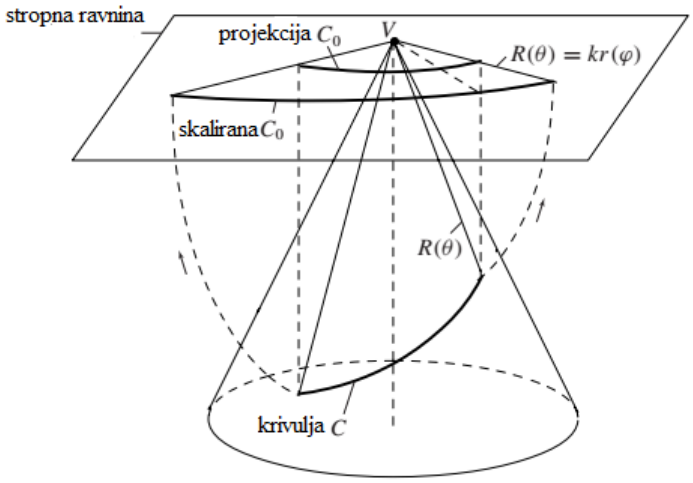
3.4 Stropna projekcija i kišobranska transformacija

Jednadžba (3.5) je konačan rezultat triju transformacija: projiciranja krivulje C u krivulju C_0 što rezultira s $r(\varphi)$, rastezanja svake radijalne udaljenosti $r(\varphi)$ za faktor k, te stezanja polarnog kuta φ za faktor $\frac{1}{k}$. Prve dvije transformacije mogu se kombinirati u jednu transformaciju zadanu formulom:

$$R(\theta) = kr(\varphi) \tag{3.7}$$

koja je skalirana verzija stropne projekcije.

Kako bismo si formulu (3.6) vizualno predočili, pokušajmo stožac zamisliti kao kišobran koji se može otvoriti tako da se potpuno izravna, u stropnoj projekciji rotiranjem svake izvodnice okomito prema gore oko vrha V, kao što je prikazano na slici 3.4. Ova rotacija čuva radijalne udaljenosti od vrha, ali smanjuje kut između izvodnica na stošcu. Dvije izvodnice između kojih je kut θ mjereno po plaštu stošca leže na dvjema ravninama okomitima na os stošca koje međusobno zatvaraju kut φ. Prilikom rotiranja kišobranska tranformacija rasteže kut θ do $\varphi = k\theta$.



Slika 3.4: Kišobranska transformacija pretvara krivulju C sa stošca u skaliranu verziju projekcije C_0.

3.5 Razmatanje konike sa stošca na stožac

Analiza provedena u dokazivanju Teorema 3.3.1. također nam koristi u općenitijem slučaju u kojem se krivulja C_1 na uspravnom kružnom stošcu s kutom pri vrhu stošca veličine $2\alpha_1$

razmota u krivulju C_2 na drugom uspravnom kružnom stošcu koji ima zajednički vrh s prvim stošcem, čiji je kut uz vrh stošca veličine $2\alpha_2$. Kad je kut $2\alpha_2$ pravi kut, taj drugi stožac postaje ravnina razmotavanja. Kad razmotamo jedan stožac na drugi, podrazumijeva se da imamo zajedničku tangentu tih dvaju stožaca, uzduž zajedničke izvodnice. Sljedeći teorem, koji nije teško dokazati, povezuje jednadžbe stropnih projekcija krivulja C_1 i C_2.

Teorem 3.5.1. *Ako stropna projekcija krivulje C_1 ima polarnu jednadžbu $r_1 = r_1(\varphi)$, a krivulja C_2 ima polarnu jednadžbu $r_2 = r_2(\varphi)$, tada vrijedi*

$$r_2(\varphi) = \mu r_1(\mu\varphi), \tag{3.8}$$

gdje je $\mu = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$

Kad je $k_2 = 1$, drugi stožac se podudara sa stropnom ravninom, $\varphi = \theta, r_2 = R, r_1 = r$, a jednadžba (3.8) postaje (3.5). Primijetimo i da u slučaju kad je $\mu < 1$ prvi stožac ima veći kut pri vrhu stošca nego li drugi stožac, ali i obratno, kad je $\mu > 1$ drugi stožac ima veći kut pri vrhu stošca od prvog stošca.

3.6 Razmatanje konike sa stošca u ravninu

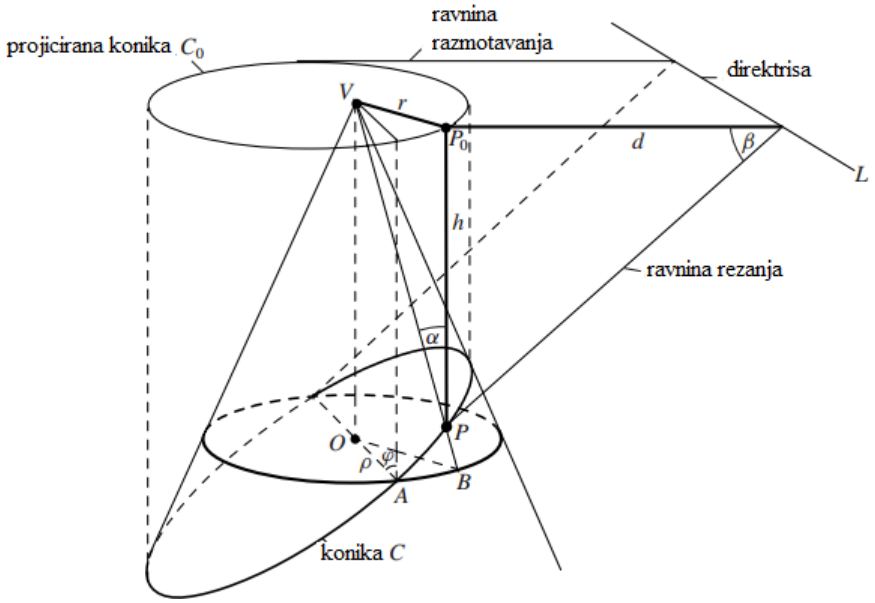
Neka je krivulja C nastala rezanjem stošca ravninom koja s ravninom projiciranja zatvara kut β, pri čemu je $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$. Ravnina rezanja siječe os stošca u točci O koja je ujedno i središte kružne baze radijusa ρ (slika 3.5). Kao što smo i prije označavali, α je kut uz vrh stošca, pri čemu je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Na slici 3.5 konika C je prikazana kao elipsa, no analiza će biti primjenjiva i na hiperbole i parabole. Izvodnica kroz točku B na krivulji C presijeca bazu u točki B čije su polarne koordinate u ravnini baze (ρ, φ). Pritom je φ mjeren od radijusa OA, pri čemu je $A = (\rho, 0)$. Slučaj kad je $\beta = 0$ odgovara razmatanju baze, što je promatrano ranije.
Na slici 3.5. jasno vidimo stropnu projekciju C_0 krivulje C. U idućem teoremu potpuno će se riješiti problem razmatanja konika, s iznenađujućim rezultatom u a) dijelu.

Teorem 3.6.1. *Stropna projekcija konike C je druga konika C_0 koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

a) Fokus krivulje je u vrhu stošca.

b) Direktrisa je presječnica ravnine rezanja i projicirajuće ravnine.

c) Ekscentricitet konike C_0 je $\lambda = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$.



Slika 3.5: Ravnina rezanja presijeca projicirajuću ravninu uzduž direktrise L projicirajuće konike.

d) Polarna jednadžba konike C_0 je

$$r(\varphi) = \frac{r(0)}{1 + \lambda \sin \varphi} \tag{3.9}$$

Primijetimo da ako stavimo $k = \frac{1}{\sin \alpha}$, razmotana krivulja C u ravnini tada ima jednažbu

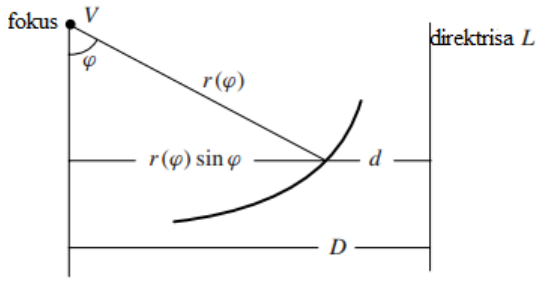
$$R(\theta) = \frac{R(0)}{1 + \lambda \sin (k\theta)}, \tag{3.10}$$

pri čemu je $R(0) = kr(0)$.

Dokaz:
Slovom L označimo pravac presijecanja ravnine rezanja i ravnine projiciranja. Za bilo koju točku P na krivlji C s P_0 označimo njezinu projekciju na C_0. Neka je d udaljenost točke P_0 od pravca L, a r je udaljenost od P_0 do V, kao što je i prikazano na slici 3.5. Pokazat ćemo da je omjer $\frac{r}{d}$ jednak $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. Time će biti dokazane tvrdnje a), b) i c) teorema. Omjer $\frac{r}{d}$ sada ćemo zapisati kao:

$$\frac{r}{d} = \frac{r}{h} \cdot \frac{h}{d},$$

pri čemu je h udaljenost od P do P_0.
Iz slike 3.5 vidi se da je $\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\alpha$, te da je $\frac{h}{d} = \operatorname{tg}\beta$, pa iz toga slijedi da je $\frac{r}{d} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. To nam pokazuje da je C_0 konika s fokusom u točki V i direktrisom L.



Slika 3.6: Dijagram za izvod polarne jednadžbe projicirane konike C_0.

Kako bismo izveli (3.9), iskoristit ćemo fokus V kao ishodište polarnog koordinatnog sustava u projicirajućoj ravnini. Označimo s $r(\varphi)$ udaljenost od V do točke na C_0 s polarnim koordinatama $(r(\varphi), \varphi)$, pri čemu je φ mjeren od pravca kroz V paralelnog s L, kao što je prikazano na slici 3.6. Preostaje nam još pokazati da je C_0 konika s ekscentricitetom λ, stoga nam fokalna definicija konike daje $r(\varphi) = \lambda d$. Budući da je $d = D - r(\varphi)\sin\varphi$, gdje je D udaljenost od fokusa do direktrise, slijedi da je $r(\varphi) = \lambda(D - r(\varphi)\sin\varphi)$, iz čega slijedi da je $r(\varphi) = \frac{\lambda D}{1+\lambda\sin\varphi}$. Kada je $\varphi = 0$, dobivamo da je $\lambda D = r(0)$, što dokazuje jednakosti (3.9) i (3.10) iz teorema.

Poznato je da je omjer $e = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ ekscentricitet konike C sa slike 3.5. Jednostavno je pokazati da je $e = \lambda = 1$ u slučaju kada je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, da je $0 < e < 1$ i $0 < \lambda < 1$ kad je $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, te da je $e > 1$ i $\lambda > 1$ kad je $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. Iz toga slijedi da su konike C i njezina stropna projekcija C_0 obje istog tipa: ili su obje elipse, ili su obje hiperbole, ili su obje parabole. Iako im ekscentricitet nije nužno jednak, oba ekscentriciteta su ili manja od 1, ili veća od 1 ili jednaka 1.

U teoremu, relacija između parametara λ i k, kao i veličine kuteva α i β daju nam da $\lambda \geq 0$ i $k \geq 1$. Uvjet $\lambda \leq 0$ ne treba shvatiti strogo, jer promjena predznaka λ u (3.10) ekvivalentna je zamjeni θ s $-\theta$, što znači da razmatamo u suprotnom smjeru. Restrikcija $k \leq 1$ važna je zbog $k = \frac{1}{\sin\alpha}$. Međutim, (3.10) ima smisla za sve realne vrijednosti λ i k, te zadaje funkciju $R(\theta)$, periodičnu u varijabli θ, s periodom $\frac{2\pi}{k}$, koja predstavlja dobro definiranu krivulju čak i za $k < 1$. Jednadžba (3.10) ima smisla za sve realne k i λ, te nam daje periodičnu funkciju $R(\theta)$ s periodom $\frac{2\pi}{k}$, što predstavlja dobro definiranu krivulju, čak i kad je $k < 1$. Ovo pruža motivaciju za sljedeći pojam generalizirane konike.

Definicija 3.6.2. *Krivulja zadana polarnom jednadžbom*

$$R(\theta) = \frac{R_0}{1 + \lambda \sin(k\theta)}, \tag{3.11}$$

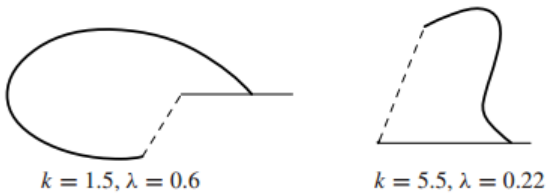
gdje su R_0 i λ nenegativne konstante, a k je realna konstanta naziva se generaliziranom konikom. Krivulja se naziva generaliziranom elipsom, hiperbolom ili parabolom, ovisno o tome je li $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ ili $\lambda > 1$.

U slučaju da je $k = 1$, stožac je stropna ravnina, a jednadžba (3.11) je polarna jednadžba konike u toj ravnini s ekscentricitetom λ i s jednim fokusom u ishodištu. U slučaju da je $k > 1$, teorem nam kaže da je krivulja iz jednadžbe (3.11) nastala razmatanjem konike ekscentriciteta λ iz stošca s vrhom u ishodištu, i kutom pri vrhu stošca veličine 2α, pri čemu je $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Ako je $k > 1$, krivulja iz jednadžbe (3.11) ne može se dobiti razmatanjem konike sa stošca u ravninu, ali može se dobiti kao stropna projekcija krivulje C na stošcu K' s kutom pri vrhu stošca veličine $2\alpha'$. Pritom je $\sin\alpha' = k$, a krivulja C je dobivena namatanjem konike s ekscentricitetom λ s ravnine na K'. U terminima jednadžbi, konika s polarnom jednadžbom (3.9) je razmotana verzija krivulje C na stošcu K' s vrhom u fokusu konike s jednadžbom (3.9) i sa stropnom projekcijom zadanom jednadžbom (3.11).

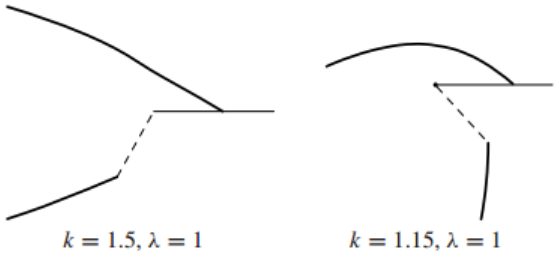
Zanimljivo je napomenuti da ukoliko koniku sa stošca namotamo na drugi stožac, stropna projekcija te konike na drugom stošcu bit će generalizirana konika, kao što se i vidi iz (3.8). Zaključak je da namatanje s jednog stošca na drugi nije ništa općenitije nego li namatanje sa stošca na ravninu, kao i obratno.

3.7 Primjeri generaliziranih konika

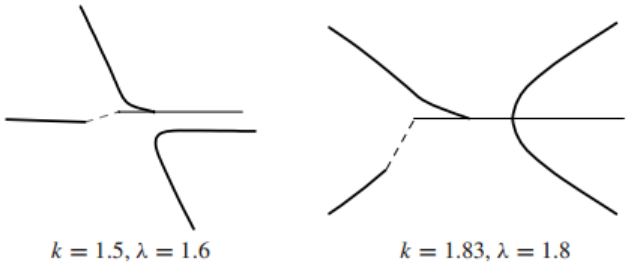
Primjeri su prikazani na slikama od 3.7 do 3.12. Na prve tri slike kut θ je u jednom periodu intervala duljine $\frac{2\pi}{k}$, a na slici 3.10. u više od jednog perioda intervala. Na svakom primjeru u prve 4 slike $k > 1$ i može se dobiti razmatanjem konike sa stošca u ravninu.



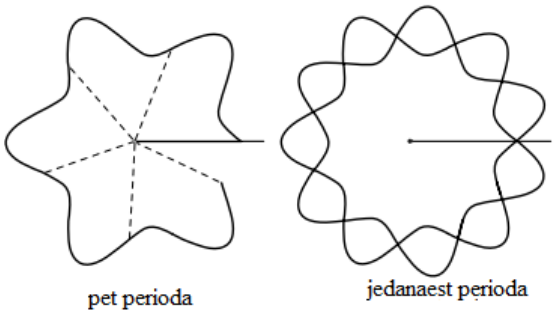
Slika 3.7: Jedan period generalizirane elipse



Slika 3.8: Jedan period generalizirane parabole



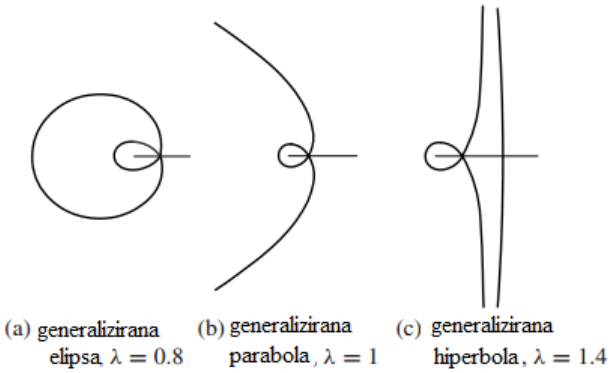
Slika 3.9: Jedan period generalizirane hiperbole. Obje grane su prerezane i razmotane u ravninu.



Slika 3.10: Druge generalizirane elipse sa slike 3.7. ($k = 5.5, \lambda = 0.22$) s više od jednim periodom.

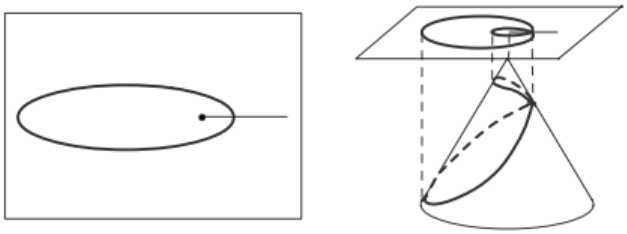
Na slikama 3.11 i 3.12., u svakom primjeru je $k < 1$, naime $k = \frac{1}{2}$, i ne može se dobiti razmatanjem konike sa stošca.

Krivulja s $k > 1$ može se koristiti kao predložak za rezanje i zamatanje komada papira



Slika 3.11: Generalizirane konike s $k = 0.5$, kao na prethodnoj slici. Ne mogu se dobiti razmatanjem konike sa stošca, ali svaka od njih je stropna projekcija konike zamotane s ravnine u stožac.

u stožac s konikom kao presjekom tog stošca i ravnine. Primjerice, zamotamo li predložak napravljen od krivulje na slici 3.10., dobit ćemo uspravni kružni stožac s namotanom krivuljom koja postaje presjek stošca ravninom u elipsi.
Ukoliko je stropna projekcija C_0 krivulje C na stošcu konika, krivulja C ne mora nužno biti konika. Zapravo, ta je krivulja konika ako i samo ako je fokus krivulje C_0 vrh stošca.



Slika 3.12: Generalizirana elipsa na prethodnoj slici kao stropna projekcija krivulje dobivene namatanjem elipse na stožac s kutom pri vrhu stošca veličine $\frac{\pi}{3}$ formira krivulju s dvije petlje koje nisu u istoj ravnini.

Bibliografija

[1] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian. *Unwrapping Curves from Cylinders and Cones*. *Amer. Math. Monthly*, 114(2):388–416, 2007.

[2] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian. *New Horizons in Geometry*. The Mathematical Association of America, 2012.

[3] M. Bombardelli and Ž. Milin-Šipuš. *Analitička geometrija: Predavanja i zadaci za vježbu*. 2016. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf.

[4] Ž. Milin-Šipuš and S. Vidak. *Uvod u diferencijalnu geometriju, verzija 2.3*. 2016. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/skripta-2016.pdf.

Sažetak

Cilindrične i konusne plohe primjeri su razvojnih pravčastih ploha. Razmotavanjem takvih ploha u ravninu, od krivulja koje leže na tim plohama dobivaju se ravninske krivulje koje su zanimljive ne samo geometrijski, nego i u praktičnim primjenama. U ovom radu izložene su neke metode opisivanja i brojni primjeri krivulja dobivenih razmotavanjem plašteva valjaka i stožaca.

Krivulja na valjku može nastati presijecanjem ravninom ili drugim valjkom, odnosno bušenjem cilindričnom bušilicom, pri čemu se varira promjer bušilice i njezina udaljenost od osi valjka. Tipična krivulja dobivena razmatanjem presječne krivulje dvaju cilindara ima oblik $u(x, z) = p(r \sin \frac{x}{r}, z)$ pri čemu je $p(t, z) = 0$ jednadžba profilne krivulje presijecajućeg cilindra. Promatra se i inverzni problem, kakva se krivulja dobiva namatanjem na valjak neke ravninske krivulje, primjerice kružnice, ovisno o radijusu presjeka kružnog valjka. Ovakvi primjeri često se pojavljuju u primjenama u graditeljstvu i strojarstvu.

Kod proučavanja krivulja nastalih razmatanjem konusnih ploha prikladno je primijeniti polarni koordinatni sustav te tzv. stropnu projekciju i kišobransku transformaciju. Osim općenitih krivulja na stošcu, posebno su razmotrene krivulje dobivene tako da se konika s jednog stošca namota na drugi stošac ili razmota u ravninu. Razmotavanjem u ravninu nastaju krivulje koje nazivamo generaliziranim konikama, budući da im je polarna jednadžba oblika $R(\theta) = \frac{R_0}{1+\lambda \sin(k\theta)}$. Na kraju su prikazani neki od najzanimljivijih primjera generaliziranih konika.

Summary

Cylindrical and conical surfaces are examples of developable ruled surfaces. By unwrapping such surfaces onto a plane, planar curves are obtained from curves lying on these surfaces which are interesting not only geometrically, but also in practical applications. This paper presents some methods of description and numerous examples of curves obtained by unwrapping lateral surfaces of cones and cylinders.

A curve on the cylinder can be formed by cutting by a plane or another cylinder, i.e. drilling with a cylindrical drill, where drill diameter and its distance from the axis of the cylinder are varying. The typical curve obtained by unwrapping the intersection curve of the two cylinders is given by the equation of the form $u(x, z) = p(r \sin \frac{x}{r}, z)$ where $p(t, z) = 0$ is the equation of the profile curve of two intersecting cylinder. An inverse problem is also observed, namely, what kind of curve is obtained by wrapping onto a cylinder, such as a circle, on a cylinder curve, depending on the radius of the circular cylinder intersection. Such examples often appear in applications in construction and mechanical engineering.

When studying curves formed by unwrapping of conical surfaces, it is appropriate to apply a polar coordinate system and so-called ceiling projection and umbrella transformation. In addition to general curves on the cone, curves obtained so that a conic from one cone is wrapped onto another cone or unwrapped onto a plane have also been taken into consideration. Curves obtained by unwrapping onto a plane are shown to have polar equation of the form $R(\theta) = \frac{R_0}{1+\lambda \sin(k\theta)}$ and therefore are called generalized conics. At the end, some of the most interesting examples of generalized conics are shown.

Životopis

Rođena sam 10. rujna 1991. u Čakovcu. Cijeli život, osim godina provedenih na studiju živim u Podturnu, gdje sam i pohađala istoimenu osnovnu školu u razdoblju od 1998. do 2006. godine. Nakon završene osnovne škole upisala sam prirodoslovno-matematički smjer gimnazije u Čakovcu.Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja često sam sudjelovala na natjecanjima iz matematike, te postizala visoke rezultate na županijskim natjecanjima. Preddiplomski sveučilišni studij edukacije matematike upisala sam 2011. godine, a završila 2014. godine. Te godine sam upisala diplomski sveučilišni studij edukacije matematike.