Integracija na kompaktnim Riemannovim plohama

Bošnjak, Barbara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Bošnjak

INTEGRACIJA NA KOMPAKTNIM RIEMANNOVIM PLOHAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Goran Muić

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Diplomski rad posvećujem članovima moje obitelji kao zahvalu što su mi bili neizmjerna podrška tijekom studiranja

Sadržaj

Uvod

Bernhard Riemann bio je njemački matematičar koji je djelovao sredinom 19. stoljeća. Smatra ga se jednim od najvećih matematičara svijeta i čovjekom s dubinskim uvidom u esencijalnu ujedinjenost matematike. Zadužio je brojna područja matematike, od kojih najznačajnije analizu, teoriju brojeva i diferencijalnu geometriju.

16. prosinca 1851. godine obranio je doktorski rad "Temelji generalne teorije funkcija kompleksne varijable" pod mentorstvom velikog Johanna Carla Friedricha Gaussa. Riemannova doktorska disertacija sastoji se od tri dijela. U prvom dijelu je geometrijski proučavao svojstvo holomorfnosti funkcije. Preciznije, pokazao je da je uvjet holomorfnosti funkcije ekvivalentan uvjetu konformalnosti do na točke domene u kojima je derivacija funkcije jednaka nuli. U ostatku rada, ideja vodilja mu je bila promotriti analitičke funkcije, ne na ravnini, nego (kako je sam Riemann rekao) "...na plohi proširenoj po ravnini." U generalnom istraživanju tog pitanja, Riemann se okrenio topologiji. Utvrdio je da se ponašanje analitičke funkcije na nekoj plohi može reducirati na proučavanje funkcija na jednostavno povezanim domenama i na određivanje skokova funkcije na rezovima grananja, to jest krivuljama u kompleksnoj ravnini na kojima analitičke funkcije koje poprimaju više vrijednosti u točki imaju prekid. Da bi to dokazao, proveo je temeljito istraživanje koje je vodilo do prvih rezultata o Riemannovim plohama. [8]

Nakon njihovog začetka, Riemannove plohe su našle primjenu u mnogim područjima matematike. Njihovo mjesto u Langlandsovom programu odgovara Riemannovoj ideologiji o ujedinjenosti matematike.

U korijenima Langlandsovog programa su teške slutnje iz teorije brojeva za koje je matematičar Robert Langlands 1967. godine naslutio da se mogu riješiti metodama harmonijske analize - preciznije, proučavanjem automorfnih funkcija. Prirodno se postavlja pitanje kako pristupiti rješavanju tih slutnji. Jedna mogućnost je nastaviti marljivo raditi u području, dok se kao druga mogućnost, zbog već uočenih veza teorije brojeva i harmonijske analize, nameće potraga za sličnim strukturama i vezama u drugim područjima matematike. Pokazalo se da se koncepti u teoriji brojeva mogu povezati s geometrijom. U tome je ključnu ulogu imao André Weil uočivši da su most između teorije brojeva i Riemannovih ploha u geometriji krivulje nad konačnim poljima. Veza krivulja nad konačnim poljima i Riemannovih ploha sastoji se u tome da rješenja algebarske jednadžbe možemo potražiti u prirodnim brojevima modulo neki prost broj ili u kompleksnim brojevima. Kako ćemo vidjeti u radu, rješenja jednadžbe $y^2 + y = x^3 - x^2$ nad kompleksnim brojevima odgovaraju torusu, koji je jedan od osnovnih primjera Riemannovih ploha. [3]

Teorija Riemannovih ploha koju izlažemo u radu sastoji se od uvođenja pojma Riemannovih ploha i osnovnih primjera istih. Zatim se proučavaju preslikavanja među Riemannovim plohama i prenose se teoremi kompleksne analize nad $\mathbb{C}$ na funkcije definirane na Riemannovim plohama. U drugom poglavlju rada govorimo o integraciji na Riemannovim plohama. Da bismo mogli integrirati, moramo definirati diferencijalne forme. Konstrukcija se provodi na sličan način kao u $\mathbb{R}^2$, do na činjenicu da Riemannova ploha samo lokalno izgleda kao podskup od $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ pa moramo uskladiti definiciju ovisno o svakoj karti sa Riemannove plohe u $\mathbb{C}$. [7] i [2] su glavna literatura po kojoj je rad pisan. U svakom poglavlju su riješeni dodatni zadaci iz istih knjiga za temeljitije razumijevanje obrađene teorije.

Poglavlje 1

Riemannove plohe

1.1 Definicija Riemannovih ploha i osnovni primjeri

Neka je X topološki prostor. Kao što smo spomenuli u uvodu, na X želimo definirati kompleksne funkcije. To nam sugerira da bi lokalno X trebao biti koordinatiziran.

Definicija 1.1.1. *Kompleksna karta na X je homeomorfizam $\phi : U \to V$, gdje je $U \subset X$ otvoren skup u X, a $V \subset \mathbb{C}$ otvoren skup u kompleksnoj ravnini. Za kartu ϕ kažemo da je centrirana u $p \in X$ ako je $\phi(p) = 0$.*

Pogledajmo jedan jednostavan primjer karte na $X = \mathbb{R}^2$.

Primjer 1.1.2. *Za proizvoljni otvoreni skup $U \subset \mathbb{R}^2$ definirajmo $\phi_U(x, y) = x + iy$. Jasno je da se radi o homeomorfizmu uz inverz $\phi_U^{-1}(x + iy) = (x, y)$.*

Napomena 1.1.3. *i) Uočimo da je restrikcija karte također karta. Preciznije, za U_1 otvoren podskup od U i kartu $\phi : U \to V$ na X, $\phi|_{U_1} : U_1 \to \phi(U_1)$ je kompleksna karta na X.*
ii) Kartu $\phi : U \to V$ zovemo lokalna koordinata točke $x \in U$ zbog čega često koristimo slovo z umjesto ϕ.

Primjer 1.1.4. *Neka je $\phi : U \to V$ kompleksna karta na X i $\psi : V \to W$ holomorfna bijekcija dva otvorena skupa u kompleksnoj ravnini. Tada je $\psi \circ \phi : U \to W$ također karta na X. Neprekidnost inverza slijedi po teoremu kompleksne analize o holomorfnosti inverza bijektivne holomorfne funkcije. Na ovu operaciju možemo gledati kao zamjenu koordinata na X.*

Htjeli bismo da kompleksne funkcije definirane na X budu analogoni holomorfnih i, općenitije, meromorfnih funkcija na $\mathbb{C}$. No, $x \in X$ se može naći u domeni mnogih karata na X. Da bismo mogli dobro definirati holomorfnost funkcije na X i prenijeti teoreme kompleksne analize u teoriju Riemannovih ploha, o čemu će biti riječi u sljedećim potpoglavljima, uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.1.5. *Neka su $\phi_1 : U_1 \to V_1$ i $\phi_2 : U_2 \to V_2$ dvije kompleksne karte na X. Kažemo da su ϕ_1 i ϕ_2 kompatibilne ako je $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ili je $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ holomorfna. Funkciju $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ zovemo funkcija prijelaza između dvije karte.*

Primjer 1.1.6. *Uz oznake iz primjera 1.1.4. karte ϕ i $\psi \circ \phi$ su kompatibilne.*

Sada smo u mogućnosti definirati *kompleksnu strukturu* na X kojom osiguravamo da na okolini svake točke $x \in X$ postoji karta kojom definiramo koordinate.

Definicija 1.1.7. *Kompleksni atlas $\mathcal{A}$ na X je familija $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ međusobno kompatibilnih karata tako da vrijedi $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Dva kompleksna atlasa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su u relaciji ako je svaka karta iz jednog kompatibilna sa svakom kartom iz drugog. Lako se provjeri da se radi o relaciji ekvivalencije.*
Kompleksna struktura na X je klasa ekvivalencije kompleksnih atlasa na X.

Napomena 1.1.8. *Treba primijetiti da je kompleksna struktura jedinstveno određena kompleksnim atlasom na X zbog čega se obično tako i zadaje.*

Konačno, definirajmo Riemannovu plohu:

Definicija 1.1.9. *Riemannova ploha je povezan Hausdorffov topološki prostor X koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti te je na njemu zadana kompleksna struktura. Ako je X i kompaktan, govorimo o kompaktnoj Riemannovoj plohi.*

Napomena 1.1.10. *Zahtjev da X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti je prirodan na način da sve Riemannove plohe koje možemo pronaći na primjer u $\mathbb{C}^n$ imaju prebrojivu bazu. Također, ako kompleksna struktura na X može biti definirana prebrojivim atlasom, onda X mora zadovoljavati drugi aksiom prebrojivosti. To slijedi iz činjenice da $\mathbb{C}$ ima prebrojivu bazu $\mathfrak{B}$, $\phi_n : U_n \to V_n$ iz prebrojivog atlasa su homeomorfizmi pa po definiciji imaju neprekidne inverze i $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Tada familija $\{\phi_n^{-1}(B) : n \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{B}\}$ je prebrojiva i čini prebrojivu bazu za X.*

Napomena 1.1.11. *Ako je X Riemannova ploha, onda pod "karta na X" ćemo smatrati kompleksna karta koja pripada nekom atlasu iz kompleksne strukture na X.*

Primjer 1.1.12. *$X = \mathbb{R}^2$ te neka je kompleksna struktura $\mathcal{S}$ zadana atlasom koji smo spomenuli u primjeru 1.1.2., $\{\phi_U(x, y) = x + iy : U \subset \mathbb{R}^2 otvoren\}$. Tada je X sa $\mathcal{S}$ Riemannova ploha. Nazivamo ju kompleksna ravnina.*

Prvi način definiranja Riemannovih ploha koji sugerira definicija bi bio da na zadanom topološkom prostoru X definiramo kompleksnu strukturu. Međutim, pri konstrukciji konkretnih primjera jednostavnije je familiju bijekcija zadati na skupu X pa preko funkcija u familiji inducirati topologiju na tom skupu i zatim provjeriti ostala svojstva koja topološki prostor mora zadovoljavati da bi bio Riemannova ploha. Slijedi opis kako precizno to napraviti:

Lema 1.1.13. *i) Neka je X topološki prostor i $\{U_\alpha\}$ otvoreni pokrivač od X. Tada vrijedi: $U \subset X$ je otvoren u X $\Leftrightarrow$ skupovi $U_\alpha \cap U$ su otvoreni u U_α za svaki α iz indeksnog skupa pokrivača.*
ii) Neka je X skup i $\{U_\alpha\}$ familija podskupova od X takva da su dane topologije za svaki U_α. Tada je skup $\mathcal{T} = \{U \subset X : U_\alpha \cap U$ otvoren u $U_\alpha\}$ topologija na X.

Dokaz. *i)* Ako je U otvoren u X, onda je jasno svaki $U_\alpha \cap U$ otvoren u X kao presjek dva otvorena skupa u X. Za dokaz drugog smjera primijetimo: $U = U \cap X = \bigcup_\alpha U_\alpha \cap U$. Svaki $U_\alpha \cap U$ je otvoren u U_α pa je jednak presjeku U_α i nekog otvorenog skupa u X. Kako su oba otvorena, radi se o otvorenom skupu. I njihova unija je otvorena pa imamo da je U otvoren.

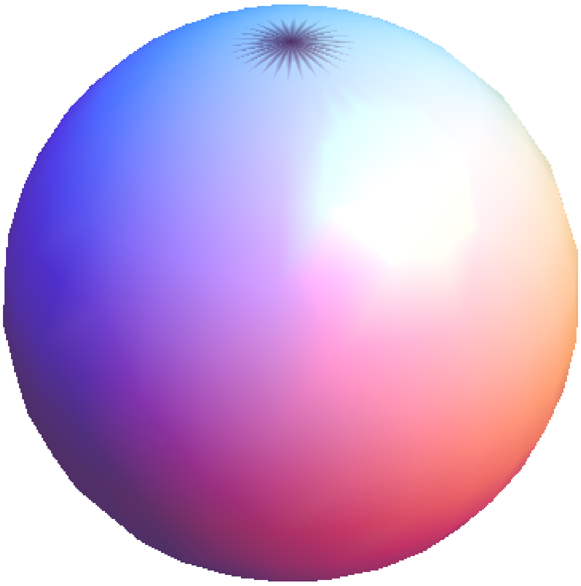
ii) Tvrdnju treba provjeriti po definiciji topologije:
1) $X, \emptyset$ su u $\mathcal{T}$ jer su $U_\alpha, \emptyset$ iz topologije na U_α za svaki α.
2) $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}$ za proizvoljnu familiju $\{V_i\} \subset \mathcal{T}$ jer $(\bigcup_{i\in I} V_i) \cap U_\alpha = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap U_\alpha)$ je iz topologije na U_α za svaki α.
3) $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$ jer $(\bigcap_{i=1}^n V_i) \cap U_\alpha = \bigcap_{i=1}^n (V_i \cap U_\alpha)$ je iz topologije na U_α za svaki α. □

Pretpostavimo da nam je dana familija bijekcija $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, gdje su U_α podskupovi od X, a V_α otvoreni poskupovi od $\mathbb{C}$. Na V_α imamo topologiju naslijeđenu od $\mathbb{C}$. Skup U u U_α definiramo otvorenim ako i samo ako je $\phi_\alpha(U)$ otvoren u V_α. Sada možemo primijeniti drugu tvrdnju gornje leme i zaključiti da je familija $\mathcal{T} = \{U \subset X : U_\alpha \cap U$ otvoren u $U_\alpha\}$ topologija na X. Sumirajmo način zadavanja Riemannove plohe:

- ⋆ Zadamo skup X.
- ⋆ Pronađemo prebrojivu familiju podskupova od X $\{U_\alpha\}$ koji pokrivaju X.
- ⋆ Za svaki α pronađemo bijekciju $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ za V_α otvoren podskup od $\mathbb{C}$.
- ⋆ Provjerimo da je za svaki α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ otvoren u V_α. Time smo definirali topologiju na X prema gornjim primjedbama te da je U_α otvoren za svaki α i da su ϕ_α po definiciji karte.
- ⋆ Provjerimo da su karte međusobno kompatibilne i da je X povezan i Hausdorffov topološki prostor.

Nakon što znamo što su Riemannove plohe i kako se mogu konstruirati, pogledajmo osnovne primjere istih.

Riemannova sfera



Slika 1.1: S^2 [6]

U ranijem tekstu smo za primjer Riemannove plohe spomenuli kompleksnu ravninu:

$$(\mathbb{R}^2, \{\phi_U(x,y) = x + iy : U \subset \mathbb{R}^2 \text{ otvoren}\}).$$

Riemannova sfera je kompaktifikacija kompleksne ravnine. To možemo shvatiti intuitivno, ali i doslovno, koristeći topološki pojam kompaktifikacije topološkog prostora. Dakle, na $X = \mathbb{C} \cup \infty$, $\infty \notin \mathbb{C}$, definiramo topologiju $\mathcal{T} \cup \{\mathbb{C} \backslash K \cup \{\infty\}\}$, gdje je $\mathcal{T}$ euklidska topologija na $\mathbb{C}$. S ovom topologijom X je kompaktan Hausdorffov topološki prostor i homeomorfan je sa sferom S^2 u $\mathbb{R}^3$. Ove činjenice su dio elementarne topologije i njihovi dokazi se mogu pronaći u [9]. Riemannovu sferu ćemo definirati na još dva načina, a zatim ćemo pokazati da su sva tri uvedena topološka prostora homeomorfna.

Neka je S^2 jedinična sfera u $\mathbb{R}^3$, $S^2 = \{(x,y,w) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + w^2 = 1\}$, prikazana na slici 1.1. Definiramo kartu $\phi_1 : S^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ projekcijom točaka sa sfere iz točke $(0,0,1)$ na xy-ravninu pri čemu poistovjećujemo $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$: $\phi_1(x,y,w) = \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w}$. Lako se provjeri da je ϕ_1^{-1} dan formulom: $\phi_1^{-1}(z) = (\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$. Na sličan način definiramo kartu ϕ_2 formulom: $\phi_2(x,y,w) = \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1+w}$, gdje smo kompleksni broj dobiven projekcijom iz $(0,0,-1)$ na xy-ravninu konjugirali da bi funkcija prijelaza među kartama bila holomorfna. ϕ_2^{-1} je dan formulom: $\phi_2^{-1}(z) = (\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{-2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1})$. Lako se provjeri da je $T : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Na ovaj način smo definirali koordinatu za svaku točku na S^2 i osigurali da na preklapanju domena karata imamo holomorfnu funkciju za zamjenu koordinata. S^2 s relativnom topologijom na $\mathbb{R}^3$ i sa kompleksnom strukturom induciranom atlasom $\{\phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w}, \phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1+w}\}$ je kompaktna Riemannova ploha koju označavamo $\mathbb{C}_\infty$. Jer je $\mathbb{R}^3$ Hausdorffov topološki prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, isto vrijedi i za S^2. Također, S^2 je povezan i kompaktan.

Prisjetimo se, projektivni pravac, $\mathbb{CP}^1$ je skup jednodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{C}^2$. Za skup $\{(\lambda z, \lambda w) : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$, gdje su z i w fiksni kompleksni brojevi, ne oba 0, koristimo pokratu $[z : w]$. Slijedeći gornje upute, definiramo Riemannovu plohu:
$U_0 = \{[z : w] : z \neq 0\}$, $U_1 = \{[z : w] : w \neq 0\}$
$\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$, $\phi_0([z : w]) = \frac{w}{z}$ i $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$, $\phi_1([z : w]) = \frac{z}{w}$
Dobra definiranost preslikavanja je jasna. Lako vidimo da su ϕ_0 i ϕ_1 bijekcije. Pogledajmo na primjer za ϕ_0:

⋆ surjekcija je jer za predstavnike elemenata od U_0 možemo uzeti $[1 : w]$ pa $\phi_0([1 : w]) = w, \forall w \in \mathbb{C}$.

⋆ injekcija je jer ako $\frac{w_1}{z_1} = \frac{w_2}{z_2}$, onda $[z_1 : w_1] = [z_1 : \frac{z_1 w_2}{z_2}] = [z_2 : w_2]$
Također, $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$ što je otvoren podskup od $\mathbb{C}$.
$\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}(s) = 1/s$ je holomorfno preslikavanje pa su karte kompatibilne.

$\mathbb{CP}^1$ je povezan jer je unija skupova U_0 i U_1 koji su povezani i imaju neprazan presjek. Povezanost svakog od tih skupova slijedi iz povezanosti od $\mathbb{C}$ jer je ϕ_0 homeomorfizam. Kada bi postojala separacija (V_0, V_1) skupa $\mathbb{CP}^1$, onda jer su U_0 i U_1 povezani i imaju neprazan presjek moraju biti oba sadržani u točnom jednom V_i, $i = 0, 1$ što je kontradikcija s definicijom separacije (oba su neprazni skupovi).

$\mathbb{CP}^1$ je Hausdorffov jer ako su $p, q \in U_0$ ili $p, q \in U_1$ onda postoje disjunktni otvoreni skupovi kojima ih možemo razdvojiti jer su U_i, $i = 0, 1$ Hausdorffovi. To opet slijedi jer je $\mathbb{C}$ Hausdorffov i ϕ_i, $i = 0, 1$ homeomorfizmi. Za slučaj kada je $p \in U_0\backslash U_1$ i $q \in U_1\backslash U_0$, vidimo da $p = [1 : 0]$ i $q = [0 : 1]$. Tada su $\phi_0^{-1}(K(0, 1))$ i $\phi_1^{-1}(K(0, 1))$, $K(0, 1) \subset \mathbb{C}$ otvorena jedinična kugla, otvoreni i disjunktni u $\mathbb{CP}^1$ jer $\phi_0^{-1}(K(0, 1)) = \{[1 : w] : |w| \in [0, 1)\}$, a $\phi_1^{-1}(K(0, 1)) = \{[z : 1] : |z| \in [0, 1)\}$ te $\phi_0^{-1}(K(0, 1))$ sadrži p, a $\phi_1^{-1}(K(0, 1))$ sadrži q.

$\mathbb{CP}^1$ je kompaktan jer je $\mathbb{CP}^1 = \phi_0^{-1}(\bar{K}(0, 1)) \cup \phi_1^{-1}(\bar{K}(0, 1))$. Praslika kompaktnog skupa po homeomorfizmu je kompaktan skup i unija dva kompaktna skupa je kompaktan skup. Još preostaje provjeriti da vrijedi skupovna jednakost. Skup na desnoj strani jednakosti je jasno podskup skupa na lijevoj strani, a obratna inkluzija slijedi iz:

⋆ ako je $z = 0$ ili $w = 0$, onda su predstavnici redom $[0 : 1]$, $[1 : 0]$

⋆ ako je $z \neq 0$ i $w \neq 0$, i neka je na primjer $|z| \leqslant |w|$, onda je $[z : w] = [\frac{z}{w} : 1] \in$

$\phi_1^{-1}(\bar{K}(0,1))$. U daljnjem tekstu ćemo kompleksni projektivni pravac kratko označavati $\mathbb{P}^1$.

Ako pokažemo da su $\mathbb{C}_\infty$ i $\mathbb{P}^1$ homeomorfni, onda uz gornju napomenu da je S^2 homeomorfna s $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dobivamo homeomorfnost sva tri topološka prostora.

Propozicija 1.1.14. *Preslikavanje* $f : [z : w] \mapsto (\frac{2Re(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{2Im(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{|w|^2-|z|^2}{|w|^2+|z|^2})$ *projektivnog pravca* $\mathbb{P}^1$ *na Riemannovu sferu* $\mathbb{C}_\infty$ *je homeomorfizam. Njegov inverz dan je formulom*

$$g : (x,y,u) \mapsto \begin{cases} [1 : \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}], & \textit{ako } (x,y,u) \neq (0,0,1) \\ [0 : 1], & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Pokažimo da su preslikavanja f i g međusobno inverzna:

$f \circ g = id$:

$\star\ (x,y,u) \neq (0,0,1)$

$(x,y,u) \mapsto [1 : \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}] \mapsto (\frac{2Re(\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u})}{1+|\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u}|^2}, \frac{2Im(\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u})}{1+|\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u}|^2}, \frac{-1+|\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u}|^2}{1+|\frac{x}{1-u}+i\frac{y}{1-u}|^2}) =$

$= (\frac{2\frac{x}{1-u}}{1+(\frac{x}{1-u})^2+(\frac{y}{1-u})^2}, \frac{2\frac{y}{1-u}}{1+(\frac{x}{1-u})^2+(\frac{y}{1-u})^2}, 1 - \frac{2}{1+(\frac{x}{1-u})^2+(\frac{y}{1-u})^2}) =$

$= (\frac{2x(1-u)}{(1-u)^2+x^2+y^2}, \frac{2y(1-u)}{(1-u)^2+x^2+y^2}, 1 - \frac{2(1-u)^2}{(1-u)^2+x^2+y^2}) = \{x^2+y^2+u^2 = 1\} = (x,y,u)$

$\star\ (x,y,u) = (0,0,1)$

$(0,0,1) \mapsto [0 : 1] \mapsto (0,0,1)$

$g \circ f = id$:

$\star\ z \neq 0$

$[z : w] \mapsto (\frac{2Re(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{2Im(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{|w|^2-|z|^2}{|w|^2+|z|^2}) \mapsto [1 : \frac{Re(w\bar{z})}{|z|^2} + i\frac{Im(w\bar{z})}{|z|^2}] = [1 : \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}}] = [z : w]$, gdje smo koristili $(\frac{2Re(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{2Im(w\bar{z})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{|w|^2-|z|^2}{|w|^2+|z|^2}) = (0,0,1) \Leftrightarrow z = 0$

$\star\ z = 0$

$[0 : 1] \mapsto (0,0,1) \mapsto [0 : 1]$

Time smo provjerili da su preslikavanja međusobni inverzi. Još preostaje vidjeti da je svako od njih otvoreno preslikavanje.

Neka je U otvoren skup u $\mathbb{P}^1$. Po definiciji, to znači da su za preslikavanja $\psi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$, $\psi_0([z : w]) = \frac{w}{z}$ i $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$, $\psi_1([z : w]) = \frac{z}{w}$ iz definicije projektivnog pravca $\psi_0(U \cap U_0)$ i $\psi_1(U \cap U_1)$ otvoreni skupovi u $\mathbb{C}$. Trebamo vidjeti da je $f(U)$ otvoren u $\mathbb{C}_\infty$. Opet po definiciji, treba provjeriti da su skupovi $\phi_1(f(U)\backslash\{(0,0,1)\})$ i $\phi_2(f(U)\backslash\{(0,0,-1)\})$ otvoreni u $\mathbb{C}$, gdje su ϕ_1 i ϕ_2 karte na Riemannovoj sferi: $\phi_1(x,y,w) = \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w}$, $\phi_2(x,y,w) = \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1+w}$. Primijetimo da vrijedi $f(U) = f((U \cap U_0) \cup (U \cap U_1)) = f(U \cap U_0) \cup f(U \cap U_1)$ pa je dovoljno provjeriti da su $f(U \cap U_0)$ i $f(U \cap U_1)$ otvoreni u $\mathbb{C}_\infty$. Pogledajmo za $f(U \cap U_0)$, dokaz za drugi skup ide analogno.

$\phi_1(f(U \cap U_0)) = \phi_1(\{\phi_1^{-1}(w) : [1 : w] \in U \cap U_0\}) = \psi_0(U \cap U_0)$, što je otvoren skup po pretpostavci.

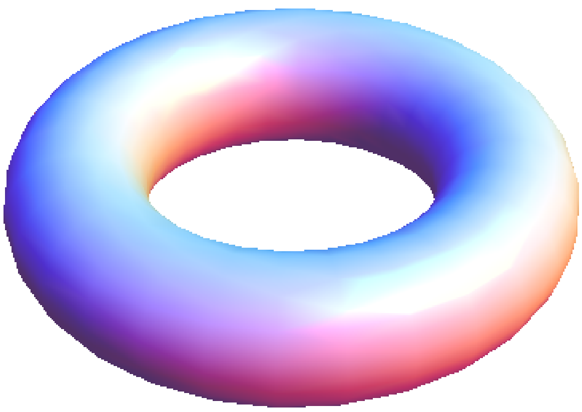
$\phi_2(f(U \cap U_0)\backslash\{(0,0,-1)\}) = \phi_2(\{\phi_1^{-1}(w) : [1 : w] \in U \cap U_0\}\backslash\{(0,0,-1)\}) = \frac{1}{\psi_0(U \cap U_0)\backslash\{0\}}$, što je otvoren skup jer je funkcija $z \to \frac{1}{z}$ homeomorfizam i po pretpostavci je $\psi_0(U \cap U_0)$

otvoren. U oba argumenta smo koristili da je preslikavanje f na točkama iz U_0 upravo ϕ_1^{-1}, a također vrijedi da je f na točkama iz U_1 jednako ϕ_2^{-1}.
Neka je $U \subset \mathbb{C}_\infty$ otvoren. Po definiciji to znači da su $\phi_1(U\backslash\{(0,0,1)\})$ i $\phi_2(U\backslash\{(0,0,-1)\})$ otvoreni. Pokažimo da su skupovi $\psi_0(g(U) \cap U_0)$ i $\psi_1(g(U) \cap U_1)$ otvoreni.
$\psi_0(g(U) \cap U_0) = \psi_0(\{[1 : \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}] : (x,y,u) \in U\backslash\{(0,0,1)\}\}) =$
$= \psi_0(\{[1 : \phi_1(x,y,u)] : (x,y,u) \in U\backslash\{(0,0,1)\}\}) = \phi_1(U\backslash\{(0,0,1)\})$, što je otvoren skup po pretpostavci.
Za $x \neq 0$ ili $y \neq 0$ vrijedi $[1 : \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}] = [\frac{x}{1+u} - i\frac{y}{1+u} : 1]$ jer zbog $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ vrijedi $(\frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}) \cdot (\frac{x}{1+u} - i\frac{y}{1+u}) = 1$. Tada za preslikavanje g vrijedi i formula:

$$g : (x,y,u) \mapsto \begin{cases} [\frac{x}{1+u} - i\frac{y}{1+u} : 1], & \text{ako } x \neq 0 \text{ ili } y \neq 0 \\ [0 : 1], & (x,y,u) = (0,0,1) \\ [1 : 0], & (x,y,u) = (0,0,-1). \end{cases}$$

$\psi_1(g(U) \cap U_1) = \psi_1(\{[\frac{x}{1+u} - i\frac{y}{1+u} : 1] : (x,y,u) \in U\backslash\{(0,0,-1)\}\}) =$
$= \psi_1(\{[\phi_2(x,y,u) : 1] : (x,y,u) \in U\backslash\{(0,0,-1)\}\}) = \phi_2(U\backslash\{(0,0,-1)\})$, što je otvoren skup po pretpostavci. □

Kompleksni torus



Slika 1.2: $\mathbb{C}/L$ [6]

Fiksirajmo dva kompleksna broja ω_1 i ω_2 koji su linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$. Definiramo aditivnu podgrupu od $\mathbb{C}$: $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Na skupu $X = \mathbb{C}/L$ definiramo topologiju preko kanonskog preslikavanja $\pi : \mathbb{C} \to X$ tako da je $U \subset X$ otvoren ako i samo ako je $\pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbb{C}$. Iz definicije dobivamo da je π neprekidno preslikavanje.

Iz povezanosti od $\mathbb{C}$ preko neprekidnog preslikavanja π dobivamo da je X povezan. $\mathbb{C}$ je povezan putevima i π je surjekcija pa je put između $p, q \in X$, $p = z_1 + L, q = z_2 + L$

jednak $\pi \circ f : [0, 1] \to X$, gdje je $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ put u $\mathbb{C}$ od z_1 do z_2. Poznata je činjenica da povezanost putevima povlači povezanost topološkog prostora.

Skup $P = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}$ nazivamo fundamentalni paralelogram. Primijetimo da je $\pi(P) = X$. To vrijedi jer za svaki $z + L$, $z \in \mathbb{C}$ postoji $w \in P$ tako da je $z + L = w + L$. Kako su ω_1 i ω_2 linearno nezavisni nad R, a dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ je 2, skup $\{\omega_1, \omega_2\}$ mu je baza. Tada postoje jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $z = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Uz notaciju: $\lfloor x \rfloor$ = najveći cijeli broj manji od x i $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ vidimo da imamo: $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + L = \{\alpha_1\}\omega_1 + \{\alpha_2\}\omega_2 + L$, gdje je $\{\alpha_1\}\omega_1 + \{\alpha_2\}\omega_2 \in P$. Time dobivamo da je $\pi|_P : P \to X$ surjekcija pa jer je P kompaktan u $\mathbb{C}$ i π neprekidna funkcija, $\pi(P) = X$ je kompaktan topološki prostor.

Također lako vidimo da je X Hausdorffov. Neka su $p, q \in X$, $p = z_1 + L, q = z_2 + L$, $z_1, z_2 \in \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1)\} = P'$. P' je Hausdorffov jer ima relativnu topologiju obzirom na $\mathbb{C}$. Ako su $U, V \subset P'$ otvoreni disjunktni skupovi koji separiraju z_1 i z_2, onda $\pi(U)$ i $\pi(V)$ separiraju p i q jer je π na P' bijekcija.

Primijetimo da je π otvoreno preslikavanje. Za $U \subset \mathbb{C}$ otvoren, zanima nas je li $\pi(U)$ otvoren u X. Dakle, treba vidjeti da je $\pi^{-1}(\pi(U))$ otvoren u $\mathbb{C}$. No, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in L}(U + \omega)$, što je otvoren skup jer je translat otvorenog skupa u $\mathbb{C}$ otvoren skup.

Konačno, definirajmo karte na X. Kako je L diskretan skup u $\mathbb{C}$, postoji $\epsilon > 0$ tako da je $|\omega| > 2\epsilon, \forall \omega \in L$. Oko svakog $z_0 \in \mathbb{C}$ pogledajmo otvorenu kuglu $K(z_0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$. Tada je $\pi|_{K(z_0,\epsilon)} : K(z_0, \epsilon) \to \pi(K(z_0, \epsilon))$ homeomorfizam. Injekcija je zbog svojstva da element iz L ima normu $> 2\epsilon$, surjekcija po definiciji, a gore smo vidjeli da je π neprekidno i otvoreno preslikavanje. Atlasom $\{\pi|^{-1}_{K(z_0,\epsilon)} : \pi(K(z_0, \epsilon)) \to K(z_0, \epsilon) : z_0 \in \mathbb{C}\}$ zadajemo kompleksnu strukturu na X. Jer je X kompaktan, možemo ga reducirati na konačni atlas pa vidimo da X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Još preostaje provjeriti da su karte kompatibilne.
$\phi_1 := \pi|^{-1}_{K(z_1,\epsilon)} : \pi(K(z_1, \epsilon)) \to K(z_1, \epsilon)$, $\phi_2 := \pi|^{-1}_{K(z_2,\epsilon)} : \pi(K(z_2, \epsilon)) \to K(z_2, \epsilon)$,
$U := \pi(K(z_1, \epsilon)) \cap \pi(K(z_2, \epsilon))$.
$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U) \to \phi_1(U)$, $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(z) = \phi_1(\pi(z)) \in \{z + \omega : \omega \in L\}$.
$T := \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$, $T(z) - z$ je neprekidna funkcija koja prema gornjoj jednakosti vrijednosti poprima u L. Kako je L diskretan, $T(z) - z$ mora biti konstantna na komponentama povezanosti od $\phi_2(U)$. Time dobivamo holomorfnost od T.

Zaključujemo, $\mathbb{C}/L$ s opisanom kompleksnom strukturom je Riemannova ploha koju zovemo kompleksni torus.

Na slici 1.2 je prikazan torus. Iz definicije torusa kao kvocijentne grupe $\mathbb{C}/L$ je jasno da u fundamentalnom paralelogramu poistovjećujemo paralelne stranice. Tada, uz malo imaginacije, vidimo da spajanjem jednog para paralelnih stranica dobivamo valjak, a zatim spajanjem drugog para upravo objekt prikazan na slici. Sa slike također možemo primijetiti da je svaka točka na torusu jedinstveno određena s dvije kružnice - intuitivno ih nazovimo horizontalna i vertikalna kružnica. Ovo opažanje možemo i formalizirati, što je sadržaj sljedeće propozicije.

Propozicija 1.1.15. *Kompleksni torus $\mathbb{C}/L$ je homeomorfan sa $S^1 \times S^1$.*

Dokaz. Primijetimo da svaki element iz $\mathbb{C}/L$ možemo na jedinstveni način zapisati kao $w + L$, gdje je $w \in \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1)\}$. Argument postojanja tog zapisa isti je kao gore, a jedinstvenost slijedi iz $(t_1 - t_1')\omega_1 + (t_2 - t_2')\omega_2 \in L \Leftrightarrow t_1 - t_1' \in \mathbb{Z}$ i $t_2 - t_2' \in \mathbb{Z}$ no $|t_i - t_i'| < 1, i = 1, 2$.

Konstruirat ćemo homeomorfizam između $\mathbb{C}/L$ i $S^1 \times S^1$, gdje je $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tvrdimo da je $\Phi : \mathbb{C}/L \to S^1 \times S^1$, $\Phi(t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + L) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$ traženi homeomorfizam. Φ je surjekcija jer je $t \mapsto e^{2\pi i t}$ za $t \in [0, 1)$ parametrizacija za S^1. Φ je injekcija jer $e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_1'} \Leftrightarrow cos(2\pi t_1) = cos(2\pi t_1')$ i $sin(2\pi t_1) = sin(2\pi t_1') \Leftrightarrow t_1 - t_1' \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow t_1 = t_1'$. Još treba vidjeti da je Φ neprekidno i otvoreno preslikavanje.

Na S^1 imamo relativnu topologiju određenu topologijom na $\mathbb{C}$, a na $S^1 \times S^1$ produktnu topologiju kojoj je baza $\{U_1 \times U_2 : U_1, U_2$ otvoreni u $S^1\}$.
Neka je $V = U_1 \times U_2$ bazni element topologije na $S^1 \times S^1$. Trebamo provjeriti da je $\Phi^{-1}(U_1 \times U_2)$ otvoren u $\mathbb{C}/L \Leftrightarrow \pi^{-1}(\Phi^{-1}(U_1 \times U_2))$ otvoren u $\mathbb{C}$. Primijetimo da je $\Phi^{-1}(U_1 \times U_2) = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + L : t_1 \in (e^{2\pi i t})^{-1}(U_1), t_2 \in (e^{2\pi i t})^{-1}(U_2)\}$, gdje su skupovi $V_1 = (e^{2\pi i t})^{-1}(U_1), V_2 = (e^{2\pi i t})^{-1}(U_2)$ otvoreni u $[0, 1)$ jer je $t \mapsto e^{2\pi i t}$ homeomorfizam.

$S := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1 \in V_1, t_2 \in V_2\}$, $\pi^{-1}(\Phi^{-1}(U_1 \times U_2)) = \bigcup_{\omega \in L}(\omega + S)$ pa je dovoljno pokazati da je S otvoren u $\mathbb{C}$. No S je slika restikcije preslikavanja $(t_1, t_2) \mapsto t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ koje je linearno pa je homeomorfizam. Time smo pokazali da je Φ neprekidno preslikavanje. Pokažimo da je otvoreno.

Neka je $U \subset \mathbb{C}/L$ otvoren $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbb{C} \Leftrightarrow S := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + L \in U\}$ otvoren u $\mathbb{C}$ jer skupovi u uniji $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\omega \in L}(\omega + S)$ su disjunktni. Tada je skup $S' := \{(t_1, t_2) : t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \in S\}$ također otvoren jer je $t \mapsto t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ homeomorfizam. $\Phi(U) = \{(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) : (t_1, t_2) \in S'\}$. Za fiksnu točku $(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) \in \Phi(U)$ jer je S' otvoren u $\mathbb{C}$ možemo uzeti otvorenu kuglu oko (t_1, t_2) u S'. Tada postoje otvoreni intervali I_1 i I_2 u $\mathbb{R}$ oko t_1, t_2 redom tako da $I_1 \times I_2 \subset$ te kugle. Tada je $(e^{2\pi i t})(I_1) \times (e^{2\pi i t})(I_2)$ otvorena okolina točke $(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$ u $\Phi(U)$. Time je dokaz završen. □

Glatke afine i projektivne ravninske krivulje

Glavni predmet proučavanja u algebarskoj geometriji su nultočke skupa polinoma u afinom ili projektivnom prostoru. Sada ćemo pokazati da se tim skupovima može pridružiti kompleksna struktura kojom afine i projektivne ravninske krivulje postaju Riemannove plohe.

Kao pomoćnu tvrdnju, pokažimo da su grafovi holomorfnih funkcija Riemannove plohe. Neka je $V \subset \mathbb{C}$ povezan, otvoren skup i $g_1, g_2, \ldots, g_n$ holomorfne funkcije na V.

$$X := \{(z, g_1(z), \ldots, g_n(z)) : z \in V\}$$

je graf funkcije $(g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^{n+1}$. Na X gledajmo relativnu topologiju određenu topologijom na $\mathbb{C}^{n+1}$.
$\pi : X \to V, \pi(z, g_1(z), \ldots, g_n(z)) = z$ projekcija na prvu koordinatu. $\pi^{-1}(z) = (z, g_1(z), \ldots, g_n(z))$ je inverzna funkcija od π. Da je π otvoreno preslikavanje, dovoljno je provjeriti na bazi topologije. $\pi((U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n) \cap X) = (U_0 \cap V) \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap g_n^{-1}(U_n)$, gdje su $U_i, i = 0, \ldots, n$ otvoreni skupovi u $\mathbb{C}$. Holomorfne funkcije su posebno i neprekidne pa imamo da je $\pi((U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n) \cap X)$ otvoren skup. Neka je $U \subset V$ otvoren skup.
$\pi^{-1}(U) = (U \times g_1(U) \times \cdots \times g_n(U)) \cap X$ je otvoren skup u X jer su holomorfne funkcije otvorena preslikavanja. Zaključujemo da je π karta na X koja ujedno određuje kompleksnu strukturu. Dakle, X je Riemannova ploha.

Neka je $f \in \mathbb{C}[z, w]$ kompleksni polinom u dvije varijable. Neka je

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$$

skup svih nultočaka polinoma f. Na X definiramo relativnu topologiju određenu topologijom na $\mathbb{C}^2$. Da bismo na X dobili kompleksnu strukturu, koristit ćemo Teorem o implicitnoj funkciji preko kojeg zaključujemo da X lokalno izgleda kao graf neke holomorfne funkcije pa možemo primijeniti gornju konstrukciju.

Teorem o implicitnoj funkciji
Neka je $f \in \mathbb{C}[z, w]$ polinom i neka je $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$.
Neka je $p = (z_0, w_0) \in X$. Pretpostavimo da je $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Tada postoji holomorfna funkcija g definirana na okolini od z_0 tako da je X na nekoj okolini od $p = (z_0, w_0)$ jednaka grafu $w = g(z)$. Štoviše, $g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$ blizu z_0.

Definicija 1.1.16. *Afina ravninska krivulja je skup nultočaka u $\mathbb{C}^2$ kompleksnog polinoma. Polinom je nesingularan u točki $p = (z_0, w_0)$ ako je $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ ili $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Afina ravninska krivulja je nesingularna u p ako je polinom f kojim je definirana nesingularan u p. Krivulja X je glatka ako je nesingularna u svakoj svojoj točki.*

Neka je X glatka afina ravninska krivulja definirana polinomom $f(z, w)$. Pretpostavimo da u točki $p \in X$ je $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Tada X na nekoj otvorenoj okolini točke p je graf holomorfne funkcije g koja postoji po Teoremu o implicitnoj funkciji. Kartu na toj okolini definiramo kako je ranije opisano. Konstrukcija je analogna ako vrijedi $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Tada X lokalno oko p izgleda kao $(h(w), w)$ za neku holomorfnu funkciju h pa za kartu koristimo projekciju na drugu koordinatu.

Provjerimo da su karte kompatibilne. Ako su obje karte projekcija na istu koordinatu, na primjer prvu, $\pi_z^{(1)} : U_1 \to V_1$, $\pi_z^{(2)} : U_2 \to V_2$, tada je $\pi_z^{(2)} \circ \pi_z^{(1)-1} : \pi_z^{(1)}(U_1 \cap U_2) \to \pi_z^{(2)}(U_1 \cap U_2)$,
$\pi_z^{(2)} \circ \pi_z^{(1)-1}(z) = \pi_z^{(2)}((z, g(z))) = z$ identiteta pa je jasno holomorfna.
Ako su projekcije na različite koordinate, imamo: $\pi_z^{(1)} : U_1 \to V_1$, $\pi_w^{(2)} : U_2 \to V_2$, tada je $\pi_w^{(2)} \circ \pi_z^{(1)-1} : \pi_z^{(1)}(U_1 \cap U_2) \to \pi_z^{(2)}(U_1 \cap U_2)$,
$\pi_w^{(2)} \circ \pi_z^{(1)-1}(z) = \pi_w^{(2)}((z, g(z))) = g(z)$ što je holomorfna funkcija po Teoremu o implicitnoj funkciji.

X je Hausdorffov i zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti jer ima relativnu topologiju obzirom na topologiju na $\mathbb{C}$.

Da bi bio Riemannova ploha, još trebamo provjeriti da je povezan topološki prostor. Međutim, to nije uvijek slučaj. Na primjer, za $f(z, w) = (z + w)(z + w - 1)$, X je unija dva pravca koja su disjunktna i time očito X nije povezan. Pozvat ćemo se na teorem koji daje dovoljan uvjet za povezanost od X, a može se pronaći u [10]:

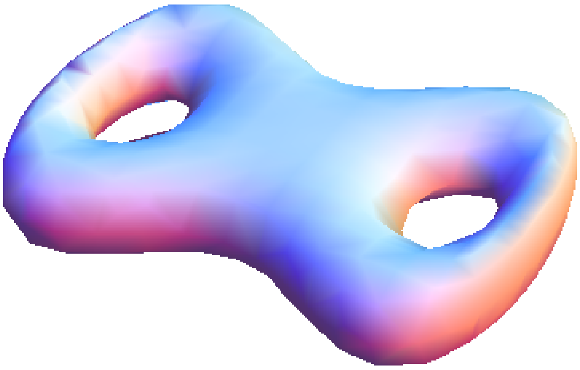
Teorem
Ako je f(z,w) ireducibilan, tada je X povezan.

Zaključujemo, za f ireducibilan i nesingularan, X sa opisanom kompleksnom strukturom je Riemannova ploha.

Pogledajmo sada uz koje uvjete na polinom $f(z, w) = w^2 - h(z)$ glatka ravninska krivulja je Riemannova ploha. Koristeći taj polinom definira se kompaktna ploha zvana hipereliptička Riemannova ploha koja se može vizualizirati. Radi se objektu koji ima izgleda kao više "spojenih" torusa. Točnije, ako je stupanj polinoma $h(z)$ jednak $2g + 1$, $g \geqslant 1$, onda je ploha "spoj" g torusa.

Propozicija 1.1.17. *i) $f(z, w) = w^2 - h(z)$ je ireducibilan polinom ako i samo ako $h(z)$ nije kvadrat nekog polinoma.*
ii) $f(z, w)$ je nesingularan polinom ako i samo ako $h(z)$ ima različite korijene.
Dakle, Riemannovu plohu X zadanu sa f možemo dobiti ako i samo ako $h(z)$ nije kvadrat nekog polinoma i ima različite korijene.

Dokaz. *i)* $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je f ireducibilan polinom i pretpostavimo suprotno tvrdnji, da je $h(z)$ kvadrat nekog polinoma $h(z) = k^2(z)$. Tada $f(z, w) = w^2 - h(z) = w^2 - k^2(z) = (w - k(z))(w + k(z))$ pa dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je f ireducibilan polinom.



Slika 1.3: deg $h = 5$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da $h(z)$ nije kvadrat nekog polinoma. Kada bi $f(z,w)$ bio reducibilan, nekonstantni polinom koji ga dijeli mora biti oblika $P(z)w + Q(z)$, za $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $P \neq 0$. Ne može biti stupnja većeg od 2 u varijabli w jer je $f(z,w)$ stupnja 2 u varijabli w. Ako je stupnja jednakog 2, onda $f(z,w) = (A(z)w^2 + B(z)w + C(z))D(z)$ pa polinom $D(z)$ mora biti nul-polinom jer $f(z,w)$ nema monom oblika $p(z)w$.
$f(z,w) = w^2 - h(z) = (P_1(z)w + Q_1(z))(P_2(z)w + Q_2(z)) =$
$= P_1(z)P_2(z)w^2 + (P_1(z)Q_2(z) + P_2(z)Q_1(z))w + Q_1(z)Q_2(z) \Leftrightarrow$
$P_1(z)P_2(z) = 1, P_1(z)Q_2(z) + P_2(z)Q_1(z) = 0, Q_1(z)Q_2(z) = -h(z)$
$P_1(z)Q_2(z) + P_2(z)Q_1(z) = 0 \,/\cdot P_1(z)$
$P_1^2(z)Q_2(z) + Q_1(z) = 0 \,/\cdot Q_2(z)$
$P_1^2(z)Q_2^2(z) = h(z)$, što je suprotno pretpostavci. Zaključujemo, $f(z,w)$ je ireducibilan.
ii) Primijetimo da je u točkama sa w koordinatom $\neq 0$ polinom nesinularan jer je $\frac{\partial f}{\partial w} = 2w$. Dakle, tražimo uvjet kada je $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$ u točkama oblika $(z_0, 0)$. Iz definicije polinoma f vidimo da je z_0 nultočka od h pa dobivamo ekvivalenciju: $\frac{\partial h}{\partial z}(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow h$ ima različite nultočke. $\square$

U projektivnom prostoru, ravninske krivulje dobivaju dodatno svojstvo - kompaktnost. Uvođenje kompleksne strukture na projektivne ravninske krivulje uvelike je zasnovano na opisanom pridruživanju u afinom slučaju.

Prisjetimo se definicije projektivne ravnine:

$$\mathbb{P}^2 = \text{skup jednodimenzionalnih podskupova od } \mathbb{C}^3$$

Za elemente od $\mathbb{P}^2$ koristimo oznaku $[x : y : z]$, gdje su $x, y, z \in \mathbb{R}$ ne svi 0. Dakle, vrijedi $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
$U_0 = \{[x : y : z] : x \neq 0\}$, $U_1 = \{[x : y : z] : y \neq 0\}$, $U_2 = \{[x : y : z] : z \neq 0\}$ u uniji daju $\mathbb{P}^2$. Svaki od njih je homeomorfan s afinom ravninom $\mathbb{C}^2$. Na primjer, za U_0 homeomorfizam je dan formulom: $[x : y : z] \mapsto (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. Inverz šalje $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ u $[1 : a : b]$. Topologiju

na $\mathbb{P}^2$ definiramo kao kvocijentnu topologiju dobivenu preslikavanjem $\pi : \mathbb{C}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^2$, $\pi((x,y,z)) = [x : y : z]$. Još primijetimo da je $\mathbb{P}^2$ kompaktan. Svaki element iz $\mathbb{P}^2$ se može zapisati kao neki od $[1 : t : s], [t : 1 : s], [t : s : 1]$, $|t| \leqslant 1$, $|s| \leqslant 1$ pa skupovi oblika na primjer $\pi(\{(1,y,z) : |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\})$ pokrivaju $\mathbb{P}^2$ i kompaktni su jer su $\{(1,y,z) : |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$ kompaktni u $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$.

Polinom je homogen ako ima isti stupanj svakog monoma i stupanj polinoma se definira kao stupanj nekog njegovog monoma. Neka je $F(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ homogen polinom stupnja d. Iako nema smisla evaluirati F na točkama iz $\mathbb{P}^2$, zbog $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x,y,z)$ ima smisla gledati skup $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x,y,z) = 0\}$. X zovemo projektivna ravninska krivulja definirana sa F.

Definicija 1.1.18. *Homogeni polinom $F(x,y,z)$ je nesingularan ako ne postoji rješenje sustava*

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

u $\mathbb{P}^2$ (ili ekvivalentno u $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$).

Cilj nam je pokazati da je za nesingularan homogen polinom F X Riemannova ploha. Definirajmo $X_i = X \cap U_i$. Za na primjer $i = 0$, vidimo da vrijedi:
$X_0 \cong \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : F(1,a,b) = 0\}$, što je afina ravninska krivulja.

Lema 1.1.19. *Neka je $F(x,y,z)$ homogeni polinom stupnja d. F je nesingularan ako i samo ako je X_i glatka afina krivulja u $\mathbb{C}^2$ za svaki $i = 0, 1, 2$.*

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju obratom po kontrapoziciji.
Pretpostavimo da postoji X_i koji ima singularnu točku. Zbog simetrije možemo uzeti $i = 0$. Neka se radi o točki $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Tada vrijedi $F(1,a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,a,b) = \frac{\partial F}{\partial z}(1,a,b) = 0$. Jedino treba vidjeti da vrijedi i $\frac{\partial F}{\partial x}(1,a,b) = 0$. To slijedi iz Eulerove formule, koja glasi: $d \cdot F = \sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Dokaz Eulerove formule slijedi dokazom za slučaj kada je F monom jer su obje strane jednakosti aditivne.
$d \cdot F = d \cdot x_0^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{d-\alpha_1-\alpha_2} = (\alpha_0 + \alpha_1 + d - \alpha_0 - \alpha_1) \cdot x_0^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{d-\alpha_1-\alpha_2} = \sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$.
Pretpostavimo sada da je F singularan u točki $[x : y : z]$ i bez smanjenja općenitosti uzmimo $x \neq 0$. Tada je $(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ singularna točka na X_0. □

Neka je sada F nesingularan homogen polinom stupnja d. Na sljedeći način možemo vidjeti da je nesingularan homogen polinom ireducibilan. Pretpostavimo da vrijedi:

$$F(x,y,z) = G(x,y,z) \cdot H(x,y,z)$$

Tada G, H moraju biti također homogeni. U suprotnom, rastavom svakog od G, H na komponentne homogenosti i množenjem dobivamo da F ima više od jedne komponente homogenosti, što je kontradikcija. Sada po Bezoutovom teoremu u projektivnoj ravnini vrijedi da postoji točka $p \in \mathbb{P}^2$ takva da $G(p) = H(p) = 0$. Derivirajući $F = G \cdot H$ po svakoj varijabli dobivamo da je u p vrijednost derivacije jednaka 0 pa je F singularan u p, što je kontradikcija. Zbog toga su polinomi koji definiraju X_0, X_1, X_2 također ireducibilni, a prema gornjoj lemi smo vidjeli da su i nesingularni. Slijedi da su X_0, X_1, X_2 Riemannove plohe. Kako je $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, kompleksnu strukturu na X definiramo preko karata na X_i. Vidjeli smo prije da su to projekcije na koordinate, za na primjer X_0 su $[x : y : z] \mapsto \frac{y}{x}$ ili $[x : y : z] \mapsto \frac{z}{x}$.
Pokažimo na jednom primjeru da su karte kompatibilne. Neka je točka $p = [x_0 : y_0 : z_0]$ iz $X_0 \cap X_1$ i $U \subset X_0$, $U' \subset X_1$ otvorene okoline oko p na kojima gledamo karte $\alpha : U \to V$, $\beta : U' \to V'$. Pretpostavimo da vrijedi $\frac{\partial F(1, \frac{y_0}{x_0}, \frac{z_0}{x_0})}{\partial z} \neq 0$ i $\frac{\partial F(\frac{x_0}{y_0}, 1, \frac{z_0}{y_0})}{\partial x} \neq 0$. Tada je $\alpha([x : y : z]) = \frac{y}{x}$ i $\beta([x : y : z]) = \frac{z}{y}$. $\beta \circ \alpha^{-1}(w) = \beta([1 : w : g(w)]) = \frac{g(w)}{w}$, što je holomorfna funkcija jer je g holomorfna i $w \neq 0$ na $U \cap U'$.

Primijetimo da je X kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog topološkog prostora $\mathbb{P}^2$. Zaključujemo, za nesingularan homogen polinom F glatka projektivna krivulja je kompaktna Riemannova ploha.

1.2 Funkcije na Riemannovim plohama

Prisjetimo se definicije holomorfne funkcije:

Definicija 1.2.1. *Neka je $U \subset \mathbb{C}$ otvoren, $z_0 \in U$. Funkcija $g : U \to \mathbb{C}$ je holomorfna u $z_0 \in U$ ako postoji kompleksan broj $g'(z_0)$ tako da vrijedi*

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Ako je g holomorfna u svakoj točki od U, onda kažemo da je g holomorfna na U.

Neka je X Riemannova ploha, $p \in X$ te $W \subset X$ okolina od p. Neka je $f : W \to \mathbb{C}$ funkcija.

Definicija 1.2.2. *Funkcija $f : W \to \mathbb{C}$ je holomorfna u točki $p \in X$ ako postoji karta $\phi : U \to V$, $p \in U$ tako da je $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ holomorfna u $\phi(p)$. Funkcija f je holomorfna na W ako je holomorfna u svakoj točki od W.*

Zapravo, definicija holomorfne funkcije ne ovisi o izboru karte. Neka je $\psi : U' \to V'$ neka druga karta na okolini točke p iz kompleksne strukture na X. Po definiciji, karte ϕ i ψ

su kompatibilne. Vrijedi:

$$f \circ \phi^{-1} \text{ je holomorfna na okolini od } \phi(p) \Leftrightarrow f \circ \psi^{-1} \text{ je holomorfna na okolini od } \psi(p)$$

jer $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$, a obje funkcije komponirane na desnoj strani su holomorfne. Analogno se pokaže i obrat tvrdnje.

Napomena 1.2.3. *Odmah možemo primijetiti da su karte na X holomorfne funkcije jer $\phi \circ \phi^{-1} = id$ jest holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Također, definicija holomorfne funkcije na kompleksnoj ravnini koju smo preko karata $(x, y) \mapsto x + iy$ definirali kao Riemannovu plohu se podudara sa standardnom definicijom holomorfne kompleksne funkcije.*
Za f, g holomorfne funkcije na X vrijedi da su funkcije $f \pm g$ i fg holomorfne. Ako je $p \in X$ takva da je $g(p) \neq 0$, onda je $\frac{f}{g}$ holomorfna oko p. To slijedi iz činjenice da ista svojstva vrijede za holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$.

Definicija 1.2.4. *Ako je $W \subset X$ otvoren podskup Riemannove plohe X, skup svih holomorfnih funkcija na W označavamo:*

$$\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ holomorfna}\}$$

U istom duhu ćemo definirati funkcije na X koje imaju singularitete.

Definicija 1.2.5. *Neka je $U \subset \mathbb{C}$ otvoren, $z_0 \in U$. $U^* := U \backslash \{z_0\}$ zovemo punktirana okolina od z_0.*
Funkcija $g : U^* \to \mathbb{C}$ holomorfna na svojoj domeni u točki z_0 ima:
i) uklonjivi singularitet ako postoji holomorfna funkcija $h : U \to \mathbb{C}$ tako da $g = h$ na U^*,
ii) pol reda m ako postoji holomorfna funkcija $h : U \to \mathbb{C}$ takva da $h(z_0) \neq 0$ i prirodan broj m tako da vrijedi $g(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$,
iii) esencijalni singularitet ako z_0 nije niti uklonjivi singularitet niti pol od g.

Neka je X Riemannova sfera, $W \subset X$ otvorena okolina od p te funkcija $f : W \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Definicija 1.2.6. *i) f ima uklonjivi singularitet u $p \in X$ ako i samo ako postoji karta $\phi : U \to V$, $p \in U$, tako da funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ ima uklonjivi singularitet u $\phi(p)$.*
ii) f ima pol reda m u $p \in X$ ako i samo ako postoji karta $\phi : U \to V$, $p \in U$, tako da funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ ima pol reda m u $\phi(p)$.
iii) f ima esencijalni singularitet u $p \in X$ ako i samo ako postoji karta $\phi : U \to V$, $p \in U$, tako da funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ ima esencijalni singularitet u $\phi(p)$.

Lako se provjeri da definicija vrste singulariteta funkcije na Riemannovoj plohi ne ovisi o izboru karte. Dokaz se temelji na činjenicama da su funkcije prijelaza među kartama holomorfne te funkcija koja je kompozicija funkcija od kojih jedna ima singularitet u točki z_0, a druga je holomorfna u toj točki ima u z_0 singularitet iste vrste kao i prva funkcija.

Nama će najzanimljivije biti meromorfne funkcije:

Definicija 1.2.7. *Funkcija f na X je meromorfna u točki $p \in X$ ako je ili holomorfna ili ima uklonjivi singularitet ili ima pol u p. f je meromorfna na otvorenom skupu ako je meromorfna u svakoj njegovoj točki.*

Napomena 1.2.8. *Definicija meromorfne funkcije na kompleksnoj ravnini koju smo preko karata $(x, y) \mapsto x + iy$ definirali kao Riemannovu plohu se podudara sa standardnom definicijom meromorfne kompleksne funkcije.*
Za f, g meromorfne funkcije na X vrijedi da su funkcije $f \pm g$ i fg meromorfne. Ako g nije identički 0, onda je $\frac{f}{g}$ meromorfna u p. To slijedi iz činjenice da ista svojstva vrijede za meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$.

Definicija 1.2.9. *Ako je $W \subset X$ otvoren podskup Riemannove plohe X, skup svih meromorfnih funkcija na W označavamo:*

$$\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}(W) = \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ meromorfna}\}$$

Neka je X Riemannova ploha, $W \subset X$ otvorena okolina od p te funkcija $f : W\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$ holomorfna. Neka je ϕ karta na X oko p. Tada je funkcija $f \circ \phi^{-1}$ holomorfna na punktiranoj okolini od $\phi(p)$ pa ju možemo razviti u Laurentov red:

$$f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot (z - \phi(p))^n$$

Koeficijenti Laurentovog reda jasno ovise o izabranoj karti, a red možemo korisiti za provjeru vrste singulariteta funkcije u točki.

Neka je f meromorfna funkcija na X u točki p. Tada možemo definirati red funkcije f u točki p preko Laurentovog razvoja funkcije $f \circ \phi^{-1}$ oko $\phi(p)$ za neku kartu ϕ na X: $ord_p(f) = min\{n : c_n \neq 0\}$. Potrebno je provjeriti da definicija ne ovisi o izboru karte. Označimo sa z koordinatu iz $\mathbb{C}$ dobivenu kartom ϕ, a sa w koordinatu za neku drugu kartu ψ. Označimo sa $T(w) = z$ funkciju prijelaza među tim kartama. Imamo $f(w) = f \circ T(w)$. Jer je T holomorfna bijekcija, vrijedi $T^{-1} \circ T = id \;/' \Rightarrow T^{-1'}(T(w)) \circ T'(w) = 1 \Rightarrow T'(\psi(p)) \neq 0 \Leftrightarrow$ za $T(w) = \phi(p) + \sum_{n \geqslant 1} a_n(w - \psi(p))^n$ $a_1 \neq 0$. U razvoju u red funkcije $T(w)$ slobodni član je $\phi(p)$ jer $z = T(w)$ i $T = \phi \circ \psi^{-1}$ pa evaluiramo T u $\psi(p)$. Konačno, imamo u razvoju u red funkcije $f \circ T(w)$ član s najmanjim prirodnim brojem kao indeksom: $c_m \cdot a_1^m(w - \psi(w))^m$, gdje je m red funkcije $f(z)$ u točki $\phi(p)$. Time smo dokazali dobru definiranost.
Direktne posljedice definicije reda funkcije u točki su:

- Ako je $ord_p(f) > 0$, p je nultočka reda $ord_p(f)$ od f. Ako je $ord_p(f) < 0$, p je pol reda $ord_p(f)$ od f. Ako je $ord_p(f) = 0$, p nije ni pol ni nultočka od f.
- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(\frac{f}{g}) = ord_p(f) - ord_p(g)$

1.3 Preslikavanja među Riemannovim plohama

Nakon što smo definirali Riemannove plohe i funkcije na njima, htjeli bismo definirati i preslikavanja među njima. Vidjeli smo pri definiciji funkcija da nam je holomorfnost bitno svojstvo te ga definiramo i za preslikavanja:

Definicija 1.3.1. *Preslikavanje $F : X \to Y$ je holomorfno u $p \in X$ ako i samo ako postoje karte $\phi_1 : U_1 \to V_1$ na X s $p \in U_1$ i $\phi_2 : U_2 \to V_2$ na Y s $F(p) \in U_2$ tako da je $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorfna u $\phi_1(p)$. F je holomorfno preslikavanje ako i samo ako je holomorfno na cijelom X.*

Kao što je bio slučaj i kod definicije funkcije na Riemannovoj plohi, lako možemo vidjeti da definicija holomorfnog preslikavanja u točki p ne ovisi o izboru karata.
Ako je $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorfna funkcija na okolini od $\phi_1(p)$, onda za karte ψ_1, ψ_2 na X, Y redom imamo $\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}(z) = (\psi_2 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \psi_1^{-1})(z)$ što je holomorfna funkcija jer je kompozicija holomorfnih.

Također, sličnim argumentom se pokaže da je kompozicija holomorfnih preslikavanja holomorfno preslikavanje i da je kompozicija holomorfnog preslikavanja s meromorfnom funkcijom meromorfna funkcija.

Možemo se pitati kada Riemannove plohe smatramo istima. Odgovor je standardan:

Definicija 1.3.2. *Izomorfizam među Riemannovim plohama X i Y je holomorfno preslikavanje $F : X \to Y$ koje je bijektivno i čiji je inverz $F^{-1} : Y \to X$ također holomorfan. Izomorfizam sa X u X nazivamo automorfizam. Ako postoji izomorfizam među Riemannovim plohama X i Y, kažemo da su X i Y izomorfne.*

Primjer 1.3.3. *Ranije smo vidjeli da postoji homeomorfizam među $\mathbb{C}_\infty$ i $\mathbb{P}^1$ dan formulom*

$$[z : w] \mapsto (\frac{2Re(w\bar{z})}{|w|^2 + |z|^2}, \frac{2Im(w\bar{z})}{|w|^2 + |z|^2}, \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w|^2 + |z|^2}).$$

Koristeći karte na $\mathbb{C}_\infty$ i $\mathbb{P}^1$ lako se provjeri da se radi o holomorfnom preslikavanju. Preciznije, sve kompleksne funkcije koje dobijemo komponiranjem s kartama su identitete koje su jasno holomorfne.

Sada ćemo uvesti korespodenciju između meromorfnih funkcija na Riemannovim plohama i holomorfnih preslikavanja istih. To će nam omogućiti da preko geometrijskih argmenata (koristeći holomorfna preslikavanja između Riemannovih ploha) dobijemo informaciju o meromorfnim funkcijama na X i obratno.

Propozicija 1.3.4. *Za Riemannovu plohu X, postoji 1-1 korespodencija između skupova*

$$\{\textit{meromorfne funkcije } f \textit{ na } X\}$$
$$i$$
$$\{\textit{holomorfna preslikavanja } F : X \to \mathbb{C}_\infty \textit{ koja nisu identički jednaka } \infty\}.$$

Dokaz. $\mathbb{C}_\infty$ smo skupovno definirali kao jediničnu sferu u $\mathbb{R}^3$ i pridružili joj karte dobivene stereografskom projekcijom iz točaka $(0,0,1)$ i $(0,0,-1)$ kako bismo dobili strukturu Riemannove plohe. U dokazu ove propozicije ćemo pokratiti oznake. Točku $(0,0,1)$ ćemo označavati s ∞, a sve ostale sa $z \in \mathbb{C}$ koje su im pridružene preko projekcije iz $(0,0,1)$. Preciznije, definiramo karte na $\mathbb{C}_\infty$ uz kraću notaciju:
$\phi_1 : (\mathbb{C}_\infty)\backslash\{\infty\} \to \mathbb{C}$,

$$\phi_1(z) = z$$

koja odgovara projekciji iz $(0,0,1)$,
$\phi_2 : (\mathbb{C}_\infty)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$,

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & ,\text{z} \neq \infty \\ 0 & ,\ \text{z} = \infty \end{cases}$$

koja odgovara projekciji iz $(0,0,-1)$. Primijetimo da odgovara funkciji prijelaza između prvotno definiranih karti na $\mathbb{C}_\infty$.
Neka je $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfna funkcija. Definiramo: $F : X \to \mathbb{C}_\infty$,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, ako x koji nije pol od f} \\ \infty & \text{, ako je x pol od f} \end{cases}$$

Treba vidjeti da je F holomorfno preslikavanje.
Ako x nije pol od f, onda za neku kartu ψ na X oko x čija domena ne zahvaća niti jedan pol od f, koja postoji jer su polovi diskretni, imamo $\phi_1 \circ F \circ \psi^{-1} = f \circ \psi^{-1}$ što je holomorfna funkcija.
Ako je x pol od f, onda izaberimo centriranu kartu ψ na X oko x takvu da na domeni f nema nultočaka, koja postoji jer su nultočke diskretne. Tada imamo:

$$G(z) = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0. \end{cases}$$

Da bi to bila holomorfna funkcija, samo treba provjeriti holomorfnost u 0. No, jer f ima pol u x, $\frac{1}{f}$ ima nultočku barem prvog reda. Tada:

$$\lim_{z\to 0}\frac{G(z)-G(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^d\cdot g(z)}{z}=\begin{cases} g(0) & ,d=1\\ 0 & ,d>1\end{cases}$$

za holomorfnu funkciju g.

Obratno, neka je $F: X\to\mathbb{C}_\infty$ holomorfno preslikavanje. Definiramo funkciju $f: X\to\mathbb{C}$,

$$f=\begin{cases}\phi_1\circ F & \text{, na okolini točke koja nije iz } F^{-1}(\infty)\\ \frac{1}{\phi_2\circ F} & \text{, na okolini točke koja je iz } F^{-1}(\infty)\end{cases}$$

Jer je $\phi_1\circ F\circ\psi^{-1}$ holomorfna po definiciji od F, dobivamo da je u točkama $x\notin F^{-1}(\infty)$ funkcija f holomorfna. U točkama $x\in F^{-1}(\infty)$: $f\circ\psi^{-1}(z)=\frac{1}{\phi_2\circ F\circ\psi^{-1}(z)}$ pa dobivamo tvrdnju jer je 1 kroz holomorfna funkcija meromorfna funkcija. □

Sljedećom propozicijom ćemo biti korak do važnog teorema koji govori o zanimljivom svojstvu holomorfnih preslikavanja među kompaktnim Riemannovim plohama.

Propozicija 1.3.5. *(Lokalna normalna forma)*
Neka je $F: X\to Y$ holomorfno preslikavanje definirano u $p\in X$, koje nije konstantno. Tada postoji jedinstveni prirodni broj $m\geqslant 1$ koji zadovoljava: za svaku kartu $\phi_2: U_2\to V_2$ na Y centriranu u $F(p)$ postoji karta $\phi_1: U_1\to V_1$ na X centrirana u p tako da $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z)))=z^m$.

Dokaz. Neka je $\phi_2: U_2\to V_2$ karta na Y, $F(p)\in U_2$ i neka je karta centrirana u $F(p)$. Uzmimo proizvoljnu kartu ψ na X centriranu u p. Tada je 0 nultočka od $T(w)=\phi_2(F(\phi_1^{-1}(w)))$. Taylorov razvoj od T je tada:

$$T(w)=\sum_{i\geqslant m}a_iw^i$$

gdje je m takav da je $a_m\neq 0$. Jasno, $m\geqslant 1$ jer $T(0)=0$. Tada $T(w)=w^mS(w)$, gdje $S(0)\neq 0$. Jer je $S(0)\neq 0$, možemo na okolini od 0 pronaći m-ti korijen slike po S te okoline. Dakle, $\exists R(w)$ holomorfna funkcija tako da $S(w)=R(w)^m$. ($R(w)=e^{\frac{1}{m}log(S(w))}$, kompleksni logaritam je dobro definiran na okolini točke $\neq 0$) Imamo $T(w)=(wR(w))^m$. Jer je $(wR(w))'=R(w)+w\cdot R'(w)$, $\mu(w):=wR(w)$, $\mu'(0)\neq 0$. Po teoremu o implicitnoj funkciji $\mu(w)$ je invertibilna. Tada je $\phi_1=\mu\circ\psi$ isto karta na X centrirana u p. Ako stavimo $z=\mu(w)$, dobivamo:

$$\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z)))=\phi_2(F(\psi^{-1}(\mu^{-1}(z))))=T(\mu^{-1}(z))=T(w)=(\mu(w)^m)=z^m.$$

Jedinstvenost od m dobivamo iz topoloških svojstava preslikavanja F koja su neovisna o izboru koordinata. U gornjem dokazu smo vidjeli da $F(p)$ ima točno m praslika. $z_1^m = z_2^m$ $\Leftrightarrow (\frac{z_1}{z_2})^m = 1$ iz čega zaključujemo da množenjem nekog z, koji je praslika, sa svim $m-$tim korijenima iz jedinice dobivamo sve praslike. □

Tada je smislena sljedeća definicija:

Definicija 1.3.6. *Multiplicitet od F u $p \in X$, kojeg označavamo $mult_p(F)$, je jedinstveni prirodan broj $m \geqslant 1$ takav da postoje lokalne koordinate oko p i $F(p)$ u kojima F ima oblik $z \mapsto z^m$.*

Iz dokaza gornje propozicije vidimo da možemo vrlo lako odrediti multiplicitet preslikavanja u točki. Radi se o najmanjem pozitivnom cijelom broju koji je indeks ne-nul koeficijenta iz razvoja preslikavanja u Taylorov red uz bilo koje dvije karte oko p i $F(p)$.

Definicija 1.3.7. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje. Točka $p \in X$ je točka grananja za F ako je $mult_p(F) \geqslant 2$. Točka $y \in Y$ je ogranak za F ako je slika točke grananja za F.*

Primijetimo da točke grananja čine diskretan skup na X jer su nultočke derivacije holomorfne funkcije. Time odmah i ogranci čine diskretan skup na Y. Lagano je vidjeti čemu je jednak multiplicitet od F u točkama domene kada je F zadan kao pridruženo preslikavanje meromorfnoj funkciji f. Iz dokaza propozicije o korespodeniciji meromofnih funkcija i holomorfnih preslikavanja dobivamo:

Lema 1.3.8. *Neka je f meromorfna funkcija na Riemannovoj plohi X, s pridruženim holomorfnim preslikavanjem $F : X \to \mathbb{C} \cup \infty$.*
a) Ako je $p \in X$ nultočka od f, onda je $mult_p(F) = ord_p(f)$.
b) Ako je p pol od f, onda je $mult_p(F) = -ord_p(f)$.
c) Ako p nije ni nultočka ni pol od f, onda je $mult_p(F) = ord_p(f - f(p))$.

Dokažimo sada najavljeno lijepo svojstvo koje zadovoljavaju holomorfna preslikavanja na kompaktnim Riemannovim plohama:

Teorem 1.3.9. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama. Za svaki $y \in Y$, definiramo $d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F)$. Tada je $d_y(F)$ konstantno, neovisno o y.*

Dokaz. Prvo primijetimo da nam je dovoljno dokazati da je preslikavanje $y \mapsto d_y(F)$ lokalno konstantno, to jest na nekoj otvorenoj okolini od $y_0 \in Y$ vrijedi da je $y \mapsto d_y(F)$ konstantno preslikavanje. To vrijedi jer je Y povezan pa kada bi postojale barem dvije vrijednosti n_1, n_2 iz $\mathbb{Z}$ koje to preslikavanje poprima, onda skupovi $\{y \in Y : d_y(F) = n_1\}$ i $\{y \in Y : d_y(F) \neq n_1\}$ su otvoreni, neprazni i disjunktni, što ne može biti.

Uočimo jedan poseban slučaj kada je lako izračunati multiplicitet preslikavanja u točkama domene. Neka je pripadna holomorfna funkcija dana s: $f : D \to D$, $f(z) = z^m$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Tada je jasno točka 0 multipliciteta m jer je z^m razvoj u Taylorov red oko 0 od f, a svaka druga točka iz D je multipliciteta 1 jer je $f'(z) = m \cdot z^{m-1} = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Točka $z_0 \in D \backslash \{0\}$ ima točno m praslika, koje su $m-$ti korijeni iz z_0. Iz svega navedenog zaključujemo da je d_y na D identički jednako m, dakle, konstantno.
Primijetimo da nam u gornjim argumentima nije bilo nužno da se radi o jediničnom disku, već smo mogli uzeti proizvoljnog polumjera.
Kada bi f bio disjunktna unija gore opisanih preslikavanja, s moguće različitim $m-$ovima, onda i dalje imamo da je d_y konstantno, točnije, identički jednako sumi $m-$ova. Pod f je disjunktna unija preslikavanja mislimo da je domena preslikavanja unija disjunktnih otvorenih skupova koji se svaki preko karte preslikava u disk oko 0 i slika preslikavanja je disk oko 0.
Neka je sada $y \in Y$ fiksan i $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ njegove praslike po F. Po prethodnoj propoziciji za lokalnu koordinatu w centriranu u y postoje koordinate $z_1, ..., z_n$ centrirane redom u $x_1, ..., x_n$ tako da F u tim lokalnim koordinatama ima oblik $z \mapsto z^{m_i}$. Sada nam jedino preostaje dokazati da postoji okolina oko y na kojoj svaka točka ima sve praslike u uniji okolina od $x_1, ..., x_n$, označimo ju sa U. Kada to ne bi bio slučaj, onda postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y koji teži prema y, takav da svaki y_n ima prasliku koja nije sadržana u U. Označimo taj niz praslika sa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Jer je X kompaktan, taj niz ima konvergentan podniz $(z_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}} \to z \in X$. No, F je neprekidno preslikavanje pa vrijedi $F(z) = y$. $X\backslash U$ je zatvoren skup pa $z \notin U$, što je kontradikcija s izborom od U.
Dakle, $d_y(F)$ je lokalno konstantna funkcija, pa po prvoj napomeni u dokazu dobivamo da je i konstantna. □

Time je motivirana definiicija:

Definicija 1.3.10. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama. Stupanj od F, uz oznaku $deg(F)$, je cijeli broj $d_y(F)$, za bilo koji $y \in Y$.*

Korolar 1.3.11. *Holomorfno preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama je izomorfizam ako i samo ako je stupnja 1.*

Dokaz. Ako je izomorfizam, onda mu lokalna normalna forma u svakoj točki kodomene mora biti identiteta jer za veći eksponent m na okolini nule dobivamo da točke imaju m praslika, što ne može biti jer je preslikavanje po pretpostavci injekcija.
Za dokaz obrata, u sljedećem potpoglavlju dokazat ćemo da je svako holomorfno preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama surjekcija. Da se radi o injekciji dobivamo iz toga što je lokalna normalna forma identiteta oko svake točke, dakle injektivna.

Još se moramo pozvati na teorem kompleksne analize koji tvrdi da je inverz holomorfne funkcije holomorfan. □

Javlja se još jedna zanimljiva posljedica teorema o tome kako povezujemo geometriju od X s meromorfnim fuunkcijama na X.

Korolar 1.3.12. *Ako je X kompaktna Riemannova ploha koja ima meromorfnu funkciju f s jednim jednostrukim polom, onda je X izomorfan s $\mathbb{C}_\infty$.*

Dokaz. Kao ranije, funkciji f pridružimo holomorfno preslikavanje $F : X \to \mathbb{C}_\infty$. Jer f ima jedan jednostruki pol, ∞ ima jednu prasliku oko koje je lokalna normalna forma identiteta zbog jednostrukosti pola. Po teoremu znamo da je tada $deg(F) = 1$, a po prethodnom korolaru da je F izomorfizam. □

Za kraj potpoglavlja, dokažimo još jedan lijepi rezultat koji pokazuje kako se topološka kompaktnost Riemannovih ploha prenosi na algebarsku o njihovim svojstvima.

Teorem 1.3.13. *Neka je f nekonstantna meromorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada je*

$$\sum_p ord_p(f) = 0.$$

Dokaz. Neka je $F : X \to \mathbb{C} \cup \infty$ pridruženo holomorfno preslikavanje funkciji f. Neka su $\{x_i\} \subset X$ točke koje se preslikavaju u 0 po F, a $\{y_j\} \subset X$ točke koje se preslikavaju u ∞. U svim ostalim točaka na X je $ord_p(f) = 0$ jer je u njima f holomorfna i ima vrijednost različitu od 0.
Po teoremu o konstantnosti preslikavanja $d_y(F)$ zaključujemo da je

$$\sum_i mult_{x_i}(F) = \sum_j mult_{y_j}(F).$$

Ranije smo komentirali da je $mult_p(F) = ord_p(f)$, ako je p nultočka od f i $mult_p(F) = -ord_p(f)$, ako je p pol od f.
Kombinirajući gornja dva zaključka dobivamo tvrdnju teorema. □

1.4 Klasični teoremi kompleksne analize

U ovom potpoglavlju pokazat ćemo kako se klasični teoremi kompleksne analize prenose u teoriju holomorfnih preslikavanja među Riemannovim plohama. To je svojstvo koje bismo prirodno zahtijevali jer su Riemannove plohe generalizacija kompleksne ravnine kao domene meromorfnih funkcija. Dokazi su direktni iz definicije pa nismo puno propustili pozivajući se ranije na njih. Propozicijom 1.3.4 sve teoreme koje pokažemo za holomorfna preslikavanja prenosimo na meromorfne funkcije na Riemannovim plohama.

Osim što teoreme kompleksne analize prenosimo u teoriju Riemannovih ploha, neke od njih možemo alternativno dokazati iz do sada razvijene teorije Riemannovih ploha.

Također, navest ćemo i teoreme koji nemaju analogone u kompleksnoj ravnini jer će se odnositi na kompaktne Riemannove plohe.

Naslijeđeni teoremi

Teorem 1.4.1. *Neka je $F : X \to Y$ 1-1 holomorfno preslikavanje među Riemannovim plohama. Tada je F izomorfizam između X i $F(X)$.*

Dokaz. Jer je po pretpostavci $F : X \to F(X)$ bijekcija, po definiciji izomorfizma Riemannovih ploha treba provjeriti da je $F^{-1} : F(X) \to X$ holomorfno preslikavanje. Invertiranjem funkcije $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ koja je definirana na okolini neke točke $p \in X$ i holomorfna, dobijemo da je $\phi_1 \circ F^{-1} \circ \phi_2^{-1}$ funkcija na okolini od $F(p)$ koja je holomorfna po teoremu o holomorfnosti inverza holomorfne kompleksne funkcije. □

Za sljedeća dva teorema, dokaz ide sličnim argumentima pa ćemo ih samo iskazati.

Teorem 1.4.2. *Neka su F i G dva holomorfna preslikavanja među Riemannovim plohama X i Y. Ako je $F = G$ na podskupu S od X koji ima gomilište u X, onda je $F = G$.*

Teorem 1.4.3. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje među Riemannovim plohama. Tada za svaki $y \in Y$ praslika $F^{-1}(y)$ je diskretan podskup od X.*

Alternativno dokazani teoremi 1

Teorem 1.4.4. *Neka je $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje među Riemannovim plohama. Tada je F otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Želimo pokazati da je za svaki otvoreni skup $U \subset X$, $F(U)$ otvoren u Y. Dovoljno je za $F(p) \in F(U)$ dokazati da ima otvorenu okolinu u $F(U)$. Za točku $p \in U$ smo vidjeli u propoziciji 1.3.5 da postoje karte ϕ_1 oko p i ϕ_2 oko $F(p)$. tako da vrijedi $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Jer su ϕ_1, ϕ_2 homeomorfizmi, posebno otvorena preslikavanja, dovoljno je pokazati da je $z \mapsto z^k$ otvoreno preslikavanje. Međutim, potenciranje kompleksnog broja prirodnim brojem rezultira zarotiranim vektorom radijusa na $k-$tu potenciju. Jer dilatacijom i rotacijom otvorenog skupa dobivamo otvoreni skup, zaključujemo da je F otvoreno preslikavanje. □

Nakon što smo pokazali teorem o otvorenom preslikavanju, odmah možemo pokazati i princip maksimuma za nekonstantnu holomorfnu funkciju:

Teorem 1.4.5. *Neka je X Riemannova ploha i $f : X \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Tada apsolutna vrijednost od f ne postiže svoj maksimum.*

Dokaz. Pretpostavimo da $|f|$ postiže maksimum u točki $p \in X$.

$$R = |f(p)| = sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Tada je $f(X) \subset IntK(0, R)$ jer je f otvoreno preslikavanje što je kontradikcija jer smo pretpostavili da je $f(p)$ na rubu. □

Teoremi o kompaktnim Riemannovim plohama

Teorem 1.4.6. *Neka su X i Y Riemannove plohe. Neka je X kompaktna i $F : X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje. Tada je Y kompaktan i F je surjektivno.*

Dokaz. Jer je F otvoreno preslikavanje, $F(X)$ je otvoren u Y. Jer je X kompaktan, $F(X)$ je kompaktan. Jer je Y Hausdorffov, $F(X)$ je zatvoren u Y. Jer u definiciji Riemannove plohe zahtijevamo povezan topološki prostor, mora vrijediti $F(X) = Y$. □

Teorem 1.4.7. *Svaka holomorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi je konstantna.*

Dokaz. Kada bi bilo nekonstantno, onda bismo po propoziciji 1.4.6 dobili da je $\mathbb{C}$ kompaktan, što nije. □

Alternativno dokazani teoremi 2

Dokažimo sada Liouvilleov teorem:

Teorem 1.4.8. *Svaka ograničena holomorfna funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je konstantna.*

Dokaz. Ideja dokaza je proširiti f do holomorfne funkcije na $\mathbb{C}_\infty$. Tada po teoremu 1.4.7 dobivamo da je konstantna. Za funkciju $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ je po definicija karata na Riemannovoj sferi ekvivalentno: $g(z)$ je holomorfna u $\infty \Leftrightarrow g(\frac{1}{z})$ holomorfna u 0. Zbog toga proširimo f na $\mathbb{C}_\infty$:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in \mathbb{C} \\ \lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w}) & , z = \infty \end{cases}$$

Funkcija $f(\frac{1}{w})$ može imati najviše pol u 0 jer je f holomorfna, a $\frac{1}{w}$ ima pol u 0. Kada bi funkcija $f(\frac{1}{w})$ imala pol u 0, onda bi $\lim_{w\to 0} |f(\frac{1}{w})| = \infty$ što ne može biti jer je po pretpostavci f ograničena. $\Rightarrow f(\frac{1}{w})$ je holomorfna u 0. Time smo opravdali da je $\lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w})$ konačna vrijednost pa je $\tilde{f}$ dobro definirana. Također smo pokazali da je $\tilde{f}$ holomorfna. Na okolini bilo koje točke iz $\mathbb{C}$ koristimo identitetu za kartu pa je u tim točkama $\tilde{f}$ holomorfna jer je f holomorfna. Na okolini od ∞ koristimo kartu $z \mapsto \frac{1}{z}$ i upravo smo vidjeli da je $f(\frac{1}{z})$ holomorfna u 0 pa time završavamo dokaz. □

Za kraj potpoglavlja, dokažimo fundamentalni teorem algebre:

Teorem 1.4.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + a_1 \cdot z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Tada postoji barem jedna točka $z_0 \in \mathbb{C}$ takva da je $p(z_0) = 0$.*

Dokaz. Polinom p možemo gledati kao meromorfnu funkciju na $\mathbb{C}_\infty$ koja ima pol u ∞. To vidimo preko karte $z \to \frac{1}{z}$. Po propoziciji 1.3.4 znamo da p odgovara holomorfnom preslikavanju $P : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$,

$$P(z) = \begin{cases} p(z) & , z \in \mathbb{C} \\ \infty & , z = \infty. \end{cases}$$

Po teoremu 1.4.6 P je surjektivno preslikavanje pa postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $P(z_0) = 0$. □

1.5 Primjeri funkcija na Riemannovim plohama

Riemannova sfera

Pogledajmo primjer meromorfnih funkcija na Riemannovoj sferi koju ćemo prikazati projektivnim pravcem. Štoviše, moći ćemo u potpunosti opisati kako izgledaju meromorfne funkcije na $\mathbb{P}^1$.

Omjer dva homogena polinoma istog stupnja iz $\mathbb{C}[z, w]$ je meromorfna funkcija na $\mathbb{P}^1$. Tvrdimo da je $f([z : w]) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$ dobro definirana funkcija. To slijedi iz toga što su homogeni polinomi istog stupnja pa je $p(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d p(z, w)$ i $q(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d q(z, w)$. Tada se λ^d krate u razlomku. Inverz karte na $\mathbb{P}^1$ dan s $\phi^{-1}(u) = [1 : u]$ ili $\phi^{-1}(u) = [u : 1]$ pa imamo za $r(z, w) = \frac{p(r,z)}{q(r,z)}$, $r \circ \phi^{-1} = \frac{p(1,z)}{q(1,z)}$, što je očito meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$.

Primijetimo da se $p(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ može rastaviti na linearne faktore jer je homogeni polinom u dvije varijable pa ga dijeljenjem i množenjem s w^{degp} možemo svesti na polinom jedne varijable. Tada za racionalnu funkciju $r(z, w) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$ vrijedi:

$$r(z, w) = \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i},$$

gdje su e_i cijeli brojevi, a linearni faktori su relativno prosti. Ako se prisjetimo da je inverz karte na $\mathbb{P}^1$ dan s $\phi^{-1}(u) = [1 : u]$ ili $\phi^{-1}(u) = [u : 1]$, onda se lako vidi da je $ord_{[a_i:b_i]}(r) = e_i$. Slijedi teorem koji uz gornje primjedbe daje karakterizaciju meromorfnih funkcija na $\mathbb{P}^1$.

Teorem 1.5.1. *Svaka meromorfna funkcija na $\mathbb{P}^1$ je omjer homogenih polinoma u z, w istog stupnja.*

Dokaz. Neka je f meromorfna funkcija na $\mathbb{P}^1$ koja nije identički jednaka 0. Tada jer je $\mathbb{P}^1$ kompaktna Riemannova ploha, po teoremu 2.2.16 dobivamo da ima konačno mnogo nultočaka i polova. Nazovimo ih $\{[a_i : b_i] : i \in I\}$, gdje je I konačan skup indekasa. Označimo sa $n = -\sum_{i\in I} e_i$. Tada je funkcija $R(z, w) = w^n \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i}$ omjer dva homogena polinoma istih stupnjeva. Da bismo utvrdili da su f i R jednake funkcije, do na konstantu, definirajmo funkciju $g(z, w) = \frac{f(z,w)}{R(z,w)}$. Zbog načina definiranja funkcije R, funkcija g u točkama različitim od $[1 : 0]$ nema ni nultočku ni pol. Kada bi u $[1 : 0]$ g imala pol, onda bi $\frac{1}{g}$ imala nultočku u $[1 : 0]$, a $\frac{R}{f}$ je holomorfna funkcija na $\mathbb{P}^1$ pa je zbog kompaktnosti konstantna, to jest jednaka 0, što daje kontradikciju. Slijedi da je g konstantna funkcija. □

Kompleksni torus

Uzmimo $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, za $\tau \in \mathbb{C}$ i $\mathrm{Im}\tau > 0$. Ovime nismo izgubili na općenitosti. Može se pokazati da za svaki torus postoji $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$ tako da je izomorfan s $\mathbb{C}/L$.

Prva ideja kako dobro definirati meromorfnu funkciju na torusu bi mogla biti uzeti omjer dvije holomorfne funkcije na $\mathbb{C}/L$. Međutim, holomorfna funkcija na $\mathbb{C}/L$ zbog kompaktnosti torusa može biti samo konstanta. Drugi pristup, sličan onom koji smo primijenili kod projektivnog pravca, jest definirati funkciju kao omjer dvije holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$ tako da omjer bude $L-$periodična funkcija. To radimo preko *theta-funkcija*. Za fiksirani τ, $\mathrm{Im}\tau > 0$, definiramo:

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau+2nz]}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Lema 1.5.2. *i) Definirajući red od $\Theta(z)$ konvergira apsolutno i uniformno na svakom kompaktu u $\mathbb{C}$.*
ii) $\Theta(z + 1) = \Theta(z)$ i $\Theta(z + \tau) = e^{-\pi i[\tau+2z]}\Theta(z)$, za $\forall z \in \mathbb{C}$.
iii) z_0 je nultočka od $\Theta(z)$ ako i samo ako $z_0 + m + n\tau$ je nultočka od $\Theta(z)$ za svaki $m, n \in \mathbb{Z}$. Štoviše, red nultočke z_0 od $\Theta(z)$ je isti redu nultočke $z_0 + m + n\tau$.
iv) Jedine nultočke od $\Theta(z)$ su u točkama $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + m + n\tau$ i sve su reda 1.

Prije dokaza leme, pretpostavimo da sve njezine tvrdnje vrijede. Definirajmo translate $\Theta^{(x)}(z) = \Theta(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x)$ za $x \in \mathbb{C}$. $\Theta^{(x)}(z)$ ima jednostruke nultočke iz skupa $x + L$. Jasno, vrijedi $\Theta^{(x)}(z + 1) = \Theta^{(x)}(z)$ i $\Theta^{(x)}(z + \tau) = -e^{-2\pi i(z-x)}\Theta^{(x)}(z)$, po drugoj tvrdnji gornje leme. Pogledajmo funkciju:

$$R(z) = \frac{\prod_i \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_j \Theta^{(y_j)}(z)}.$$

Ovo je meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Jedino još trebamo postići da je $L-$periodična. Zbog $\Theta^{(x)}(z+1) = \Theta^{(x)}(z)$ vrijedi $R(z+1) = R(z), \forall z \in \mathbb{C}$.
Svojstvo $\Theta^{(x)}(z+\tau) = -e^{-2\pi i(z-x)}\Theta^{(x)}(z)$ daje

$$R(z+\tau) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \Theta^{(x_i)}(z+\tau)}{\prod_{j=1}^{n} \Theta^{(y_j)}(z+\tau)} = (-1)^{m-n} e^{-2\pi i[(m-n)z+\sum_j y_j - \sum_i x_i]} R(z).$$

Zbog toga nam treba da je $(-1)^{m-n}e^{-2\pi i[(m-n)z+\sum_j y_j-\sum_i x_i]}$ identički jednako 1 za svaki $z \in \mathbb{C}$. To je moguće ako i samo ako $m = n$ i $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$. Time smo dokazali:

Propozicija 1.5.3. *Za fiksni cijeli broj d i dva d-člana skupa kompleksnih brojeva $\{x_i\}$ i $\{y_j\}$ takvih da $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$ omjer translatiranih theta funkcija*

$$R(z) = \frac{\prod_i \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_j \Theta^{(y_j)}(z)}$$

je meromorfna funkcija na $\mathbb{C}/L$.

Dokaz. *i)* $\tau = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, b > 0, z = x + iy$
$|\Theta(z)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i[n^2\tau+2nz]}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n^2 b\pi+2\pi ny)}$
Jer gledamo konvergenciju na kompaktima, $|y|$ možemo ograničiti s nekim $M > 0$. Također, $n^2 b\pi + 2\pi ny > n^2 b\pi - 2\pi nM$ i $n^2 b\pi - 2\pi nM > n^2 b$ nakon nekog n_0 što možemo vidjeti dijeljenjem nejednakosti s n^2 i puštanjem n u ∞. Dakle, ostatak reda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n^2 b\pi+2\pi ny)}$ možemo ograditi odozgo s $2 \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-n^2 b}$ što je manje od ostatka geometrijskog reda koji teži u 0 jer $e^{-b} < 1$. Time dobivamo konačnost od $\Theta(z)$ u svakoj točki iz $\mathbb{C}$. Uniformnu konvergenciju na kompaktu dobivamo iz činjenice da red kojim smo ogradili početni ne ovisi o z.
ii) $\Theta(z+1) = \Theta(z)$ jer sumandi u redu za $\Theta(z+1)$ su $e^{2\pi i} \cdot e^{\pi i[n^2\tau+2nz]}$.
$\Theta(z+\tau) = e^{-\pi i[\tau+2z]}\Theta(z)$ dobijemo nadopunjavanjem na potpuni kvadrat: $n^2\tau+2nz+2n\tau = \tau(n+1)^2 + 2(n+1)z - \tau - 2z$ i činjenicom da sumiramo po $\mathbb{Z}$ pa translacijom n-a za 1 ne promijenimo red.
iii) Prva tvrdnja direktno slijedi iz *ii)* jer $\Theta(z_0+m+n\tau) = e^{-n\pi i(\tau+2z_0)}\Theta(z_0)$, a $e^{-n\pi i(\tau+2z_0)} \neq 0$ za $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Da bismo provjerili drugu tvrdnju, samo treba derivirati po z gornju jednakost: $\Theta'(z+m+n\tau) = -2n\pi i e^{-n\pi i(\tau+2z)}\Theta(z) + e^{-n\pi i(\tau+2z)}\Theta'(z)$. Kako smo vidjeli da je z_0 nultočka ako i samo ako je $z_0 + m + n\tau$ nultočka, onda iz gornje jednakosti isto dobivamo za derivaciju funkcije u nultočki. Za više derivacije bi arguement bio anlaogan.
iv) Pozivajući se na dva teorema kompleksne analize, možemo dokazati tvrdnju. Koristeći rezultat da je lokalno uniformni limes holomorfnih funkcija također holomorfna funkcija, zaključujemo da je $\Theta(z)$ holomorfna. Drugi teorem koji nam treba glasi: ako je γ put u $\mathbb{C}$ na kojem $\Theta(z)$ nema nultočku, onda $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz =$ broj nultočaka od $\Theta(z)$

računajući kratnosti, jer je holomorfna pa nema polova. Fiksirajmo fundamentalni paralelogram $P = \{u \cdot 1 + v \cdot \tau : u, v \in [0, 1]\}$. Uvedimo parametrizacije za rub od P: $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = 1 + \tau t$, $\gamma(t) = \tau + (1 - t)$, $\delta(t) = (1 - t)\tau$, $t \in [0, 1]$. Primijetimo da vrijedi: $\beta(t) = \delta(1 - t) + 1$ i $\gamma(t) = \alpha(1 - t) + \tau$.
Pokazat ćemo $\int_\beta \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz = -\int_\delta \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz$ i $\int_\gamma \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz = 2\pi i - \int_\alpha \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz$ i time dokazati da postoji jedna nultočka reda 1. Da se radi o $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ slijedi iz:
$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau + 2n(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau+n+n\tau]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\pi i} \cdot e^{\pi i[n^2\tau+n\tau]}$ pa jer je $n^2 + n = (-n-1)^2 - n - 1$ i $n, -n-1$ su različite parnosti dobivamo da podniz parcijalnih suma $\sum_{n=-k}^{k-1} e^{n\pi i} \cdot e^{\pi i[n^2\tau+n\tau]}$ je konstantno 0. Jer smo vidjeli da red za $\Theta(z)$ konvergira u svakoj točki, slijedi da je $\Theta(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) = 0$.
Konačno, izračunajmo integrale:

$$\int_\beta \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz = \tau\int_0^1 \frac{\Theta'(\beta(t))}{\Theta(\beta(t))}dt = \tau\int_0^1 \frac{\Theta'(\delta(1-t)+1)}{\Theta(\delta(1-t)+1)}dt = \tau\int_0^1 \frac{\Theta'(\delta(1-t))}{\Theta(\delta(1-t))}dt = -\int_\delta \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz,$$

$$\int_\gamma \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz = -\int_0^1 \frac{\Theta'(\gamma(t))}{\Theta(\gamma(t))}dt = -\int_0^1 \frac{\Theta'(\alpha(1-t)+\tau)}{\Theta(\alpha(1-t)+\tau)}dt =$$

$$= -\int_0^1 \frac{-2\pi i e^{-\pi i[\tau+2\alpha(1-t)]}\Theta(\alpha(1-t)) + e^{-\pi i[\tau+2\alpha(1-t)]}\Theta'(\alpha(1-t))}{e^{-\pi i[\tau+2\alpha(1-t)]}\Theta(\alpha(1-t))}dt =$$

$$= 2\pi i - \int_\alpha \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz.$$

□

Glatke ravninske krivulje

Neka je X glatka afina ravninska krivulja zadana nesingularnim polinomom $f(z, w)$. Tada su projekcije na z i w koordinate holomorfne. To vrijedi jer su karte na X. Posebno dobivamo da je svaki polinom $p(z, w)$ restringiran na X holomorfna funkcija. Meromorfne funkcije dobivamo kao omjer dva polinoma. To slijedi iz analognog svojstva za meromorfne funkcije na kompleksnoj ravnini. Pri tome moramo zahtjevati da polinom u nazivniku nije identički jednak 0 na krivulji. Pogledajmo afini slučaj kada polinom $f(z, w)$ definira krivulju (sjetimo se da je f ireducibilan) i funkcija je dana s $r(z, w) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$:
⋆ ako $f|q$, onda je jasno $q \equiv 0$ na X
⋆ ako q iščezava u svakoj točki u kojoj je $f = 0$, onda $f|q$ po Hilbertovom teoremu o nulama [10]. To vidimo ako za ideal u prstenu polinoma uzmemo $\sigma =< f >$, onda $q \in I(\mathcal{Z}(\sigma)) = Rad(\sigma) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tako da $q^m = f \cdot h$. Jer je prsten polinoma nad poljem faktorijalna domena, slijedi da $f|q$.

Poglavlje 2

Diferencijalne forme i integracija

2.1 Snopovi

U kompleksnoj analizi je česta pojava da funkcije imaju različite domene. Definicijom karata na Riemannovim plohama uviđamo da je to i ovdje slučaj. Stoga se snopovi uvode u teoriju kao formalni alat kojim baratamo u toj situaciji.

Definicija 2.1.1. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{T}$ njegova topologija. Pred-snop vektorskih prostora na X je par $(\mathcal{F}, \rho)$ koji se sastoji od :*

i) familije vektorskih prostora $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$,

ii) familije linearnih operatora $\rho = (\rho_V^U)_{U,V \in \mathcal{T}, V \subset U}$, $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sa sljedećim svojstvima:

$$\rho_U^U = id_{\mathcal{F}(U)}, \forall U \in \mathcal{T} \text{ i } \rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \text{ za } W \subset V \subset U.$$

Definicija 2.1.2. *Pred-snop je snop ako za svaki otvoreni skup $U \subset X$ i svaku familiju otvorenih skupova $U_i \subset U$, $i \in I$, takvu da je $U = \cup_{i \in I} U_i$ vrijede sljedeći uvjeti:*

I) ako su $f, g \in \mathcal{F}(U)$ takvi da $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, $\forall i \in I$, onda $f = g$.

II) ako su elementi $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, takvi da $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, $\forall i, j \in I$, onda postoji funkcija $f \in \mathcal{F}(U)$ takva da $f|_{U_i} = f_i$, $\forall i \in I$.

Napomena 2.1.3. *U definicji 2.1.2 po I) slijedi jedinstvenost funkcije f iz II).*

Analogno smo mogli definirati snopove za Abelove grupe ili prstene. Snopovi značajni za teoriju Riemannovih ploha opisani su u sljedećem primjeru:

Primjer 2.1.4. *Neka je X Riemannova ploha s topologijom $\mathcal{T}$ i $\mathcal{O}(U)$ $\mathbb{C}-$ vektorski prostor holomorfnih funkcija na $U \subset X$ otvoren. Tvrdimo da je par $(\mathcal{O}, \rho)$, $\mathcal{O} := (\mathcal{O}(U))_{U \in \mathcal{T}}$ i $\rho = (\rho_V^U)_{U,V \in \mathcal{T}, V \subset U}$, ρ_V^U restrikcija holomorfne funkcije $f \in \mathcal{O}(U)$, $f|_V$, snop. Da se radi o pred-snopu jasno se vidi iz toga što su restrikcije na fiksni skup linearni operatori,* *restrikcija funkcije na njezinu domenu je opet ista funkcija i za $W \subset V \subset U$ restrikcija funkcije s domenom U na domenu W je ista funkcija koju dobijemo restringirajući prvo na V, a potom na W.*

Pretpostavimo da smo neki otvoreni skup $U \subset X$ zapisali kao u definiciji snopa: $U = \cup_{i \in I} U_i$. Za $f, g \in \mathcal{O}(U)$ takve da su im restrikcije na svaki U_i jednake slijedi $f = g$ jer U_i pokrivaju cijeli U. Također, vrijedi $II)$ jer funkciju f upravo možemo definirati svojstvom $f|_{U_i} = f_i$, $\forall i \in I$ jer na preklapanju domena U_i, funkcije f_i su jednake.

Istu konstrukciju mogli smo provesti za meromorfne ili beskonačno realno diferencijabilne funkcije.

Postoje primjeri pred-snopova koji nisu snopovi, kao što možemo vidjeti u sljedećem primjeru:

Primjer 2.1.5. *Osnovni primjer Riemannove plohe je kompleksna ravnina. Za $U \subset \mathbb{C}$ otvoren definirajmo s $\mathcal{B}(U)$ vektorski prostor omeđenih, holomorfnih funkcija na U. Tada se za $\mathcal{B} = (\mathcal{B}(U))_{U \subset \mathbb{C} \text{ otvoren}}$ i ρ_V^U restrikcija funkcije na V provjeri da je par njih dva pred-snop istim argumentima kao u primjeru 2.1.4. Navedeni pred-snop zadovoljava $I)$ uvjet iz definicije snopa, međutim ne zadovoljava $II)$. Uzmimo $U = K(1,1) \subset \mathbb{C}$, otvorena kugla radijusa 1 oko 1. Neka su $U_n = K(1, 1 - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Jasno, $U = \cup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Funkcija $\frac{1}{z}$ nalazi se u svakom $\mathcal{B}(U_n)$ jer joj je jedini pol u $\mathbb{C}$ u 0 pa je na $\bar{K}(1, 1 - \frac{1}{n})$ holomorfna funkcija na kompaktu, dakle $|\frac{1}{z}|$ poprima maksimum. No, funkcija $\frac{1}{z}$ nije omeđena na $K(1,1)$ jer vrijedi $lim_{z->0} \frac{1}{|z|} = +\infty$.*

Da bismo proučili kako se snop ponaša oko neke točke $p \in X$ definiramo struk:

Definicija 2.1.6. *Na $\cup_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$ definiramo relaciju ekvivalencije:*

$$f \in \mathcal{F}(U), g \in \mathcal{F}(V),\ f \sim g \Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{T}, p \in W \subset U \cap V \text{ tako da } f|_W = g|_W.$$

$\mathcal{F}_p := (\cup_{U \ni p} \mathcal{F}(U)) / \sim$ nazivamo struk snopa $\mathcal{F}$.

Inutitivno, poistovjećivanjem funkcija koje se podudaraju na otvorenom podskupu presjeka njihovih domena dobivamo "funkciju" na proširenoj domeni. Primijetimo da je $\mathcal{F}_p$ također vektorski prostor ako definiramo operacije na klasama ekvivalencije preko operacija na reprezentantima.

Definicija 2.1.7. *Za neku otvorenu okolinu U od $p \in X$ definiramo preslikavanje*

$$\rho_p : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$$

koje funkciji f pridružuje reprezentanta po relaciji $\sim$. Klasu $\rho_p(f)$ nazivamo klica od f u p.

2.2 Diferencijalne forme

Ako želimo integrirati po $n-$dimenzionalnim plohama, $n \geqslant 2$, moramo poopćiti objekt koji integriramo u odnosu na $1-$dimenzionalni slučaj. U tu svrhu uvodimo diferencijalne forme.

Već smo vidjeli da su nam na Riemannovim plohama posebno zanimljive holomorfne i meromorfne funkcije. Iako ćemo definirati i holomorfne i meromorfne diferencijalne forme, centralni pojam bit će nam C^∞ forme, kojim oslabljujemo uvjet holomorfnosti.

Definicija 2.2.1. *U $C^\infty(U)$, U otvoren podskup od $\mathbb{C}$, s koordinatom $z = x+iy$, su funkcije koje imaju derivaciju svakog reda po realnim varijablama x i y.*

Jasno, funkcije iz $C^\infty(U)$ su poopćenje holomorfnih funkcija u smislu da zadržavamo uvjet beskonačne realne diferencijabilnosti, a ispuštamo zahtjev ispunjavanja Cauchy - Riemannovih uvjeta.

Definicija 2.2.2. *Za $f \in C^\infty(U)$ definiramo $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$.*

Napomena 2.2.3. *Primijetimo da je $f \in C^\infty(U)$ holomorfna na U ako i samo ako $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ na U.*

Neka je X Riemannova ploha. Označimo s $\mathcal{E}$ snop opisan u primjeru 2.1.4 za C^∞ funkcije. Neka je $p \in X$. Tada struk $\mathcal{E}_p$ sadrži sve klice diferencijabilnih funkcija u točki p. Označimo s $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{E}_p$ vektorski potprostor funkcija klica koje iščezavaju u p, a sa $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathfrak{m}_p$ potprostor funkcija klica koje u p imaju nultočku barem drugog reda. Definiramo da funkcija klica iščezava u točki p ako isto vrijedi za nekog njezinog reprezentanta, a to je dobro definirano jer su dvije funkcije u relaciji ekvivalencije ako se podudaraju na nekoj otvorenoj okolini od p. Prisjetimo se, funkcija f na X ima u p nultočku reda barem 2 ako $f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$.

Definicija 2.2.4. *Kvocijentni vektorski prostor*

$$T_p^{(1)} := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$$

se zove kotangentni prostor od X u točki p. Ako je U otvorena okolina od p i $f \in \mathcal{E}(U)$, onda definiramo diferencijal od f u p $d_pf \in T_p^{(1)}$,

$$d_pf := (f - f(p)) \bmod \mathfrak{m}_p^2.$$

Teorem 2.2.5. *Neka je X Riemannova ploha, $p \in X$ i (U, z) okolina od p i koordinata u $\mathbb{C}$, $z = x + iy$. Tada su $\{d_px, d_py\}$ i $\{d_pz, d_p\bar{z}\}$ baze za $T_p^{(1)}$. Ako je f funkcija diferencijabilna u p, onda vrijedi*

$$d_pf = \frac{\partial f}{\partial x}(p)d_px + \frac{\partial f}{\partial y}(p)d_py = \frac{\partial f}{\partial z}(p)d_pz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)d_p\bar{z}.$$

Dokaz. Tvrdnje ćemo prvo pokazati za x, y, a zatim ih prenijeti u slučaju $z, \bar{z}$. Tvrdimo da $\{d_p x, d_p y\}$ razapinju $T_p^{(1)}$. Neka je $t \in T_p^{(1)}$, $t = \varphi + \mathfrak{m}_p^2$, φ funkcija klica iz $\mathcal{E}_p$. φ možemo razviti oko p u Taylorov red pa dobivamo:

$$\varphi = c_1(x - x(p)) + c_2(y - y(p)) + \psi,$$

gdje su $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ i $\psi \in \mathfrak{m}_p^2$. Uzimajući ovu jednakost modulo $\mathfrak{m}_p^2$ dobivamo

$$t = c_1 d_p x + c_2 d_p y.$$

Dokažimo da je skup $\{d_p x, d_p y\}$ linearno nezavisan. Ako $\alpha d_p x + \beta d_p y = 0$, onda $\alpha d_p x + \beta d_p y \in \mathfrak{m}_p^2$, to jest $\alpha(x - x(p)) + \beta(y - y(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$. Derivirajući jednakost po x, y dobivamo $\alpha = \beta = 0$.

Ako je f diferencijabilna oko p, onda iz razvoja u Taylorov red argumentima kao u prvo dijelu dokaza zaključujemo

$$f - f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x(p)) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y(p)) + g,$$

gdje g ima nultočku u p reda barem 2.

Dokažimo sada analogne tvrdnje za $z, \bar{z}$. Jer je $z = x + iy$ i $\bar{z} = x - iy$, iz definicije diferencijala funkcije u točki dobivamo $d_p z = d_p x + i d_p y$ i $d_p \bar{z} = d_p x - i d_p y$. Jer je matrica $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ regularna, zaključujemo da je $\{d_p z, d_p \bar{z}\}$ također baza za $T_p^{(1)}$. Tvrdnja $d_p f = \frac{\partial f}{\partial z}(p) d_p z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) d_p \bar{z}$ slijedi iz dokazane $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x}(p) d_p x + \frac{\partial f}{\partial y}(p) d_p y$ uvrštavanjem definicija operatora $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ te zapisa diferencijala $d_p z, d_p \bar{z}$ preko $d_p x, d_p y$.

□

Primijetimo da smo u teoremu 2.2.5 fiksirali otvorenu okolinu od p i koordinatu. U sljedećoj propoziciji ćemo pokazati da jednodimenzionalni potprostori $\mathbb{C} d_p z$ i $\mathbb{C} d_p \bar{z}$ u $T_p^{(1)}$ ne ovise o izboru koordinate oko točke p.

Propozicija 2.2.6. *Potprostori $\mathbb{C} d_p z$ i $\mathbb{C} d_p \bar{z}$ u $T_p^{(1)}$ ne ovise o izboru koordinate i okoline oko točke p.*

Dokaz. Neka su (U, z) i (U', z') dvije okoline i koordinate oko točke $p \in X$. Tada znamo da postoji holomorfna funkcija T takva da je $T(z) = z'$. $\frac{\partial z'}{\partial z}(p) = c \in \mathbb{C}^*$ jer $\frac{\partial T(z)}{\partial z}(p) \neq 0$ jer je T bijekcija pa imamo: $T \circ S = id / \partial_z \Rightarrow T'(S(z)) S'(z) = 1$ pa ne može poprimiti vrijednost 0 u točki p. Imamo $\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(p) = (\overline{\frac{\partial z'}{\partial z}})(p) = \bar{c}$ iz definicije $\partial_{\bar{z}}$. Također vrijedi $\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(p) = 0$ jer je T holomorfna pa zadovoljava Cauchy - Riemannove uvjete. Konjugiranjem zaključimo $\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(p) = 0$. Primijenivši dobiveno na formulu $d_p f = \frac{\partial f}{\partial z}(p) d_p z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) d_p \bar{z}$ iz teorema 2.2.5 za $f = z', \bar{z}'$ dobivamo $d_p z' = c d_p z$ i $d_p \bar{z}' = \bar{c} d_p \bar{z}$ čime smo pokazali tvrdnju. □

Napomena 2.2.7. *Definirajmo* $T_p^{1,0} := \mathbb{C}d_p z$ *i* $T_p^{0,1} := \mathbb{C}d_p\bar{z}$. *U teoremu 2.2.5 smo pokazali da vrijedi* $T_p^{(1)} = T_p^{1,0} \oplus T_p^{0,1}$. *Elemente iz* $T_p^{1,0}$ $(T_p^{0,1})$ *nazivamo kotangentni vektori tipa* $(1,0)$ $((0,1))$.

Konačno možemo dati definiciju diferencijalne forme na Riemannovoj plohi:

Definicija 2.2.8. *Neka je X Riemannova ploha. Diferencijalna forma stupnja 1, kraće 1-forma, na X je preslikavanje*

$$\omega : X \to \bigcup_{p\in X} T_p^{(1)}$$

takvo da je $\omega(p) \in T_p^{(1)}$, *za svaki* $p \in X$. *Ako je* $\omega(p) \in T_p^{1,0}$ $(T_p^{0,1})$, *za svaki* $p \in X$, *onda kažemo da je forma tipa* $(1,0)$ $((0,1))$. *Analogno definiramo 1-formu na proizvoljnom otvorenom podskupu od X.*

Primjer 2.2.9. *i) Neka je* $f \in \mathcal{E}(U)$, $U \subset X$ *otvoren. Preslikavanje* $(df)(p) := d_p f$ *je diferencijalna 1-forma.*

ii) Neka je ω *1-forma na* U *i* $f : U \to \mathbb{C}$ *funkcija. Tada je preslikavanje* $(f\omega)(p) := f(p)\omega(p)$, $\forall p \in U$ *također 1-forma na* U.

Definicija 2.2.10. *Neka je X Riemannova ploha. 1-forma je diferencijabilna ako se s obzirom na svaku kartu* (U,z) ω *može zapisati kao*

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \text{ na } U, \text{ gdje su } f,g \in \mathcal{E}(U).$$

1-forma je holomorfna ako se s obzirom na svaku kartu (U,z) ω *može zapisati kao*

$$\omega = f dz \text{ na } U, \text{ gdje je } f \in \mathcal{O}(U).$$

Napomena 2.2.11. *Za* $U \subset X$ *otvoren, uvedimo notaciju:*

$$\mathcal{E}^{(1)}(U) := \text{vektorski prostor diferencijabilnih 1-formi na } U$$

$$\mathcal{E}^{1,0}(U) := \text{vektorski prostor formi tipa (1,0)}$$

$$\mathcal{E}^{0,1}(U) := \text{vektorski prostor formi tipa (0,1)}$$

$$\Omega(U) := \text{vektorski prostor holomorfnih 1-formi}$$

U primjeru 2.2.9 ii) smo vidjeli da su gore navedeni prostori zatvoreni na množenje kompleksnim brojem $f \equiv c \in \mathbb{C}$. *Ostali aksiomi vektorskog prostora vrijede jer su* $T_p^{(1)}$ *vektorski prostori, za* $\forall p \in U$.

Reziduum

Neka je $p \in Y \subset X$ i ω holomorfna 1-forma na $Y \backslash \{p\}$. Neka je $U \subset Y$ takav da je $p \in U$ i z koordinata na U centrirana u p. Tada je $\omega = f dz$, za holomorfnu funkciju f na $U \backslash \{p\}$. Za meromorfne funkcije na Riemannovoj plohi smo pokazali da red nultočke ili pola ne ovisi o izboru koordinate. To se direktno prenosi na ovako definiranu diferencijalnu formu. Štoviše, vrijedi i da je dobro definiran reziduum diferencijalne forme:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot z^n$$

$$Res_p(\omega) := c_{-1}$$

Teorem 2.2.12. *Definicija od Res_p ne ovisi o izboru koordinate oko točke p.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva koraka.

1. tvrdnja: Ako je φ holomorfna na $V \backslash \{p\}$, onda je reziduum od $d\varphi$ jednak 0 i ne ovisi o izboru koordinate.

Dokaz 1. tvrdnje: Za koordinatu z na nekoj okolini od p imamo: $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Tada je $d\varphi = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1}) dz$ pa je koeficijent uz $\frac{1}{z}$ jednak 0. ✓

2. tvrdnja: Neka je φ holomorfna na V s nultočkom prvog reda u p. Tada je $Res_p(\frac{1}{\varphi} d\varphi) = 1$ i ne ovisi o izboru koordinate.

Dokaz 2. tvrdnje: Za neku koordinatu z centriranu u p imamo da je $\varphi = zh$, za h holomorfnu na V koja nema nultočku u p. Iz definicije od $d\varphi$ po točkama i činjenice da operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ zadovoljavaju Leibnitzovo pravilo djelovanja na umnožak dvije funkcije dobivamo: $d\varphi = zdh + hdz$. Tada je: $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{zdh+hdz}{zh} = \frac{dh}{h} + \frac{dz}{z}$. Jer h nema nultočku u p, $\frac{dh}{h}$ je holomorfna u p pa joj je reziduum jednak 0, za svaki odabir koordinate z. Reziduum 1-forme $\frac{dz}{z}$ u točki p je jasno 1, za svaki odabir koordinate z. ✓

Uz oznake za f kao gore, neka je

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Jer je $\int f - c_{-1} z^{-1} dz = g + C$, $C \in \mathbb{C}$, integriranjem član po član u razvoju u Laurentov red u $\mathbb{C}$ dobivamo da je g holomorfna funkcija na nekoj punktiranoj okolini od p. Tada vrijedi $\omega = dg + c_{-1} z^{-1} dz$. U 1. tvrdnji smo vidjeli da je $Res_p(dg) = 0$, a u drugoj da je $Res_p(c_{-1} z^{-1} dz) = c_{-1}$. Time dovršavamo dokaz. □

Definicija 2.2.13. *Diferencijalna 1-forma ω na X je meromorfna diferencijalna 1-forma na X ako postoji otvoreni skup $A \subset X$ takav da je ω holomorfna na A, $X \backslash A$ je skup izoliranih točaka u X i ω ima pol u svakoj točki iz $X \backslash A$.*

Vektorski prostor meromorfnih 1-formi na X označavamo $\mathcal{M}(X)$.

Vanjski produkt

Započnimo općenitom konstrukcijom vanjskog produkta vektorskog prostora sa samim sobom.

Definicija 2.2.14. *Neka je V vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$.

$$\Lambda^2 V := \text{skup konačnih suma elemenata oblika } v_1 \wedge v_2,\ v_1, v_2 \in V.$$

Preslikavanje $\wedge : V \times V \to \Lambda^2 V$, $\wedge(v_1, v_2) := v_1 \wedge v_2$ *zadovoljava sljedeća svojstva:*
i) $(v_1 +_V v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$,
ii) $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2)$,
iii) $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$, *za sve* $v_1, v_2, v_3 \in V$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Napomena 2.2.15. *Svojstva i) i ii) preslikavanja* $\wedge$ *vrijede i na drugoj koordinati dvostrukom primjenom svojstva iii).*

Teorem 2.2.16. *Neka je V vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$ *s bazom* $\{e_1, ..., e_n\}$. *Tada je* $(\Lambda^2 V, +, \cdot)$ *vektorski prostor.*

Dokaz. Suma dva elementa koji su konačne sume elemenata oblika $v_1 \wedge v_2$ je opet suma konačno mnogo elemenata oblika $v_1 \wedge v_2$. Drugo svojstvo preslikavanja $\wedge$ osigurava zatvorenost na množenje skalarom. Provjerimo da je $(\Lambda^2 V, +)$ Abelova grupa. Asocijativnost i komutativnost zbrajanja su u definiciji $\Lambda^2 V$ kao skupa. Neutral za zbrajanje je $0 \wedge 0$ jer $0 \wedge 0 + v_1 \wedge v_2 = i) = 0 \wedge 0 + 0 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 = i)\ \&\ iii) = 0 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 = (0 + v_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge v_2$. U računu smo koristili $0 \wedge v = 0 \wedge 0$, za $v \in V$, što se lako dobije iz $i)$ i $iii)$. Neutral od $v_1 \wedge v_2$ je jasno $-v_1 \wedge v_2$. Ostala svojstva multiplikativnosti slijede iz analognih za vektorski prostor V i direktne primjene nekih svojstava preslikavanja $\wedge$. □

Napomena 2.2.17. *Može se pokazati da je* $E = \{e_i \wedge e_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ *baza za* $(\Lambda^2 V, +, \cdot)$.

Primijenimo sada gornju konstrukciju na kotangentni prostor $T_p^{(1)}$ na Riemannovoj plohi X u točki p.

Definicija 2.2.18. *Definiramo* $T_p^{(2)} := \Lambda^2 T_p^{(1)}$.

Napomena 2.2.19. *Pokazali smo u teoremu 2.2.5 da je* $\{d_p z, d_p \bar{z}\}$ *baza za* $T_p^{(1)}$. *Napomenom 2.2.17 dobivamo da je* $d_p z \wedge d_p \bar{z}$ *baza za* $T_p^{(2)}$. *Dakle,* $T_p^{(2)}$ *je jednodimenzionalan.*

Definicija 2.2.20. *Neka je X Riemannova ploha. 2- forma na X je preslikavanje*

$$\omega : X \to \bigcup_{p \in X} T_p^{(2)}$$

takvo da je $\omega(p) \in T_p^{(2)}$, *za svaki* $p \in X$.

Primjer 2.2.21. *i)* $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$, $\omega(p) := f(p)d_p z \wedge d_p\bar{z}$ *je 2-forma. Za* $f \in \mathcal{E}(X)$, *za* ω *kažemo da je diferencijabilna 2-forma. Skup takvih formi označavamo* $\mathcal{E}^{(2)}(X)$.

ii) Ako su $\omega_1, \omega_2 \in (E)^{(1)}(X)$, *onda je* $\omega_1 \wedge \omega_2 \in (E)^{(2)}(X)$ *i* $(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$. *To vidimo iz sljedećeg računa:*

$$\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z},\ \omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z},\ f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{E}(X)$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge (f_2 dz + g_2 d\bar{z}) = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge d\bar{z}.$$

iii) Neka je $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ *i* $f \in \mathcal{E}(X)$. *Tada je* $\omega f \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ *ako stavimo* $(\omega f)(p) = \omega(p) f(p)$, *za svaki* $p \in X$.

Vanjska derivacija formi

Definirajmo sada derivaciju $d : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)$. Lokalno se diferencijabilna 1-forma može zapisati kao

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} f_k dg_k,$$

gdje su $f_k, g_k \in \mathcal{E}(X)$. Na primjer, $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$, za $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(X)$.

Definicija 2.2.22. *Operator* $d : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)$ *definiramo s* $d\omega = \sum_{k=1}^{n} df_k \wedge dg_k$.

Propozicija 2.2.23. *Definicija operatora d ne ovisi o izboru funkcija u zapisu forme* $\omega = \sum_{k=1}^{n} f_k dg_k$.

Dokaz. Uzmimo da je (U, z) lokalna koordinata i da je $\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k d\tilde{g}_k$ drugi lokalni prikaz forme ω. Koristit ćemo forme dx, dy jer će se kasnije u dokazu pojaviti potreba za korištenjem Schwartzovog pravila. Sjetimo se da je

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy$$

i analogno za $d\tilde{g}_k$. Kako je $\{d_p x, d_p y\}$ baza za pripadni kotangentni prostor $T_p^{(1)}$ možemo izjednačiti ”koeficijente”:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial x} \text{ i } \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial y}.$$

Derivirajući prvu jednakost po y, a drugu po x, te oduzimanjem, uz primjenu Schwartzovog pravila, dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial y}.$$

No, po primjeru 2.2.21 ii) dobivamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} df_k \wedge g_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f_k}{\partial y}\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{\partial g_k}{\partial y}) dx \wedge dy$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Navedimo sada dva elementarna svojstva vanjske derivacije:

Propozicija 2.2.24. *Neka je X Riemannova ploha, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, $f \in \mathcal{E}(X)$. Tada vrijedi:*
i) $ddf = 0$
ii) $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$

Dokaz. i) $ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0 \wedge df = 0$
ii) $d(f\omega) = d(\sum_{k=1}^{n} f \cdot f_k dg_k) = \sum_{k=1}^{n} d(ff_k) \wedge dg_k = \sum_{k=1}^{n} f_k df \wedge dg_k + fdf_k \wedge dg_k = df \wedge \omega + fd\omega$
□

Uvedimo sada dva bitna pojma:

Definicija 2.2.25. *Diferencijalna 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ je zatvorena ako je $d\omega = 0$, a egzaktna ako postoji $f \in \mathcal{E}(X)$ takva da je $\omega = df$.*

Napomena 2.2.26. *U propoziciji 2.2.24 smo vidjeli da je $ddf = 0$ pa je svaka egzaktna forma zatvorena. Obrat općenito ne vrijedi.*

Teorem 2.2.27. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
i) Svaka holomorfna 1-forma je zatvorena.
ii) Svaka zatvorena 1-forma tipa $(1,0)$ je holomorfna.

Dokaz. Neka je ω diferencijabilna 1-forma tipa $(1,0)$. Tada ju možemo s koordinatom (U,z) zapisati kao $\omega = fdz$.

$$d\omega = df \wedge dz = (\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}) \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}dz \wedge d\bar{z}$$

Iz ekvivalencije $f \in \mathcal{E}(X)$ je holomorfna $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ dobivamo tvrdnju. □

Povlak diferencijalnih formi

Neka je $F : X \to Y$ holomorfno preslikavanje među Riemannovim plohama X i Y. Funkcije i diferencijalne forme na Y induciraju redom funkcije i forme na X sljedećom konstrukcijom:

Definicija 2.2.28. *Neka su $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, $\mu \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$. Definiramo homomorfizme:*

$$F^* : \mathcal{E}(Y) \to \mathcal{E}(F^{-1}(Y)),\ F^*(f) = f \circ F$$

$$F_1^* : \mathcal{E}^{(1)}(Y) \to \mathcal{E}^{(1)}(F^{-1}(Y)),\ F_1^*(\omega) = F_1^*(\sum_{k=1}^{n} f_k dg_k) = \sum_{k=1}^{n}(F^* f_k)d(F^* g_k)$$

$$F_2^* : \mathcal{E}^{(2)}(Y) \to \mathcal{E}^{(2)}(F^{-1}(Y)),\ F_2^*(\mu) = F_2^*(\sum_{k=1}^{n} f_k dg_k \wedge dh_k) = \sum_{k=1}^{n}(F^* f_k)d(F^* g_k) \wedge d(F^* h_k)$$

Opet se postavlja pitanje dobre definiranosti homomorfizama F_1^* i F_2^*. Pokazat ćemo da je F_1^* dobro definiran, a provjera za F_2^* ide analogno.

Propozicija 2.2.29. *Homomorfizam F_1^* je dobro definiran.*

Dokaz. Neka je (U, z) lokalna koordinata, $z = x + iy$, i $\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k d\tilde{g}_k$ drugi lokalni prikaz forme ω. Jer je

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy$$

i $\{d_p x, d_p y\}$ je baza za pripadni kotangentni prostor $T_p^{(1)}$ možemo izjednačiti "koeficijente":

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial x} \text{ i } \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial y}.$$

Komponiranjem sa F dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(f_k \circ F)(\frac{\partial g_k}{\partial x} \circ F) = \sum_{k=1}^{n}(\tilde{f}_k \circ F)(\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial x} \circ F) \text{ i } \sum_{k=1}^{n}(f_k \circ F)(\frac{\partial g_k}{\partial y} \circ F) = \sum_{k=1}^{n}(\tilde{f}_k \circ F)(\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial y} \circ F).$$

S druge strane,

$$F^*(f_k)d(F^*(g_k)) = (f_k \circ F)(\frac{\partial(g_k \circ F)}{\partial x} dx + \frac{\partial(g_k \circ F)}{\partial y} dy) =$$

$$= (f_k \circ F)((\frac{\partial g_k}{\partial x} \circ F)\frac{\partial F}{\partial x} dx + (\frac{\partial g_k}{\partial y} \circ F)\frac{\partial F}{\partial y} dy)$$

iz čega dobivamo tvrdnju. □

Napomena 2.2.30. *Izravno iz definicije može se provjeriti da vrijedi $F^*(df) = d(F^* f)$ i $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.*

Zadatci

Za kraj poglavlja riješimo par zadataka s konkretnim funkcijama i formama u svrhu temeljitijeg razumijevanja teorije.

Zadatak 2.2.31. *Neka je $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $F(z) = e^z$ holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$ te $\omega = \frac{dz}{z}$ holomorfna 1-forma na $\mathbb{C}^*$. Dokažite da je $F^*(\omega) = dz$.*

Dokaz. Po definiciji, $F^*(\omega) = F^*(\frac{dz}{z}) = \frac{1}{F(z)} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} dz = \frac{e^z}{e^z} dz = dz$. □

Zadatak 2.2.32. *Dokažite da se holomorfna 1-forma*

$$\mu = \frac{dz}{1 + z^2}$$

na $\mathbb{C} \backslash \{\pm i\}$ može proširiti do holomorfne 1-forme ω na $\mathbb{P}^1 \backslash \{\pm i\}$. Potom odredite $F^*(\omega)$ za $F : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \backslash \{\pm i\}$, $F(z) = \tan(z)$.

Dokaz. Prisjetimo se, na Riemannovoj sferi $\mathbb{P}^1$ imamo točke koje preko karte poistovjećujemo s točkama iz $\mathbb{C}$ te dodatnu točku u beskonačnosti ∞. Da bismo proširili formu μ na $\mathbb{P}^1 \backslash \{\pm i\}$ potrebno ju je zadati na okolini od ∞ . Kako je funkcija prijelaza među kartama na Riemannovoj sferi jednaka $z = T(w) = \frac{1}{w}$, na okolini od ∞ dobivamo formulu: $\frac{1}{1+(\frac{1}{w})^2} (\frac{1}{w})' dw = -\frac{1}{1+w^2} dw$. Time smo μ proširili do holomorfne funkcije na $\mathbb{P}^1 \backslash \{\pm i\}$. F je holomorfno preslikavanje pridruženo meromorfnoj funkciji zvanoj *kompleksni tangens*. Na okolini točke iz $\mathbb{C}$ dobivamo $F^*(\omega) = \frac{1}{1+(tan(z))^2} \cdot \frac{1}{cos^2(z)} dz = dz$. Na okolini od ∞ dobivamo $F^*(\omega) = -dw$. □

Zadatak 2.2.33. *Neka je $F : Y \to X$ holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha, $a \in X$, $b \in F^{-1}(a)$ i k multiplicitet preslikavanja F u točki b. Ako je ω holomorfna 1-forma na $X \backslash \{a\}$, dokažite da je*

$$Res_b(F^* \omega) = k \cdot Res_a(\omega).$$

Dokaz. Kako je ω holomorfna 1-forma, oko svake točke postoji holomorfna funkcija f tako da vrijedi $\omega = f(z)dz$. Uzmimo da je w koordinata centrirana u a. Po propoziciji 1.3.5 znamo da postoji koordinata z oko točke b tako da F poprima lokalnu normalnu formu $z \to z^k$. Razvijmo f u Laurentov red oko a:

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n w^n$$

Jer je $F^* \omega = f(z^k) \cdot k z^{k-1} dz$ na okolini točke b, slijedi $Res_b(F^* \omega) = k \cdot c_{-1}$. Time je pokazana tvrdnja. □

2.3 Integracija diferencijalnih formi

Diferencijalne forme uvedene su kako bismo mogli generalizirati pojam integracije kada su područja integracije podskupovi Riemannovih ploha. Pokažimo kako provodimo tu konstrukciju.

Diferencijalne 1-forme

Neka je X Riemannova ploha i $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Definicija 2.3.1. *Po dijelovima neprekidno diferencijabilna krivulja c na X je neprekidno preslikavanje $c : [0, 1] \to X$ za koje postoji particija $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ na intervalu $[0, 1]$ i karte (U_k, z_k), $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, ..., n$, takve da vrijedi $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ i $x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$, $y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$ imaju neprekidnu derivaciju prvog reda, za $k = 1, ..., n$.*

Pretpostavimo da je dana po dijelovima neprekidno diferencijabilna krivulja c. Na svakom U_k ω se, po definiciji, može zapisati kao $\omega = f_k(z_k, \bar{z}_k)dz_k + g_k(z_k, \bar{z}_k)d\bar{z}_k$, gdje su f_k, g_k diferencijabilne funkcije. Koristit ćemo pokratu $z_k(t) := z_k \circ c(t)$.

Definicija 2.3.2. *Uz oznake kao gore, definiramo:*

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f_k(z_k(t), \bar{z}_k(t))z_k'(t) + g_k(z_k(t), \bar{z}_k(t))\bar{z}_k'(t))dt$$

Propozicija 2.3.3. *Definicija ne ovisi o izboru karata niti o izboru particije segmenta* $[0, 1]$.

Dokaz. Pokažimo prvo da definicija ne ovisi o izboru karata. Dovoljno je dokazati da su za svaki k odgovarajući integrali jednaki. To ćemo učiniti, a prije toga pojednostavimo oznake tako da ne pišemo k.

Neka su (U, z) i (V, w) dvije koordinate na X takve da je $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U, V$ za neki fiksni k. Tada imamo $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$ na U i $\omega = h(w, \bar{w})dw + k(w, \bar{w})d\bar{w}$ na V. Jer su z i w karte na X, postoji holomorfna funkcija T takva da je $w = T(z)$. Tada dobivamo:

$$f(z, \bar{z}) = h(T(z), \bar{T}(z))T'(z) \text{ i } g(z, \bar{z}) = k(T(z), \bar{T}(z))\bar{T}'(z) \ (\star)$$

isto kao u dokazu propozicije 2.2.6. Jedan integral je

$$\int_a^b (h(w(t), \bar{w}(t))w'(t) + k(w(t), \bar{w}(t))\bar{w}'(t))dt,$$

a drugi nakon uvrštavanja $(\star)$ je

$$\int_a^b (h(T(z(t)), \bar{T}(z(t)))T'(z(t))z'(t) + k(T(z(t)), \bar{T}(z(t)))\bar{T}'(z(t))\bar{z}'(t))dt.$$

Jer je $w = T(z)$ i $w' = (T(z))' = T'(z)z'$ dobivamo da su integrali jednaki.

Pokažimo da definicija ne ovisi o izboru subdivizije segmenta $[0, 1]$. Pretpostavimo da postoje dvije subdivizije od $[0, 1]$. Integral po intervalu u $\mathbb{R}$ je konačno aditivan u domeni integracije pa, ukoliko je moguće, integral po $[t_{k-1}, t_k]$ rastavimo na njih konačno s rubnim točkama druge subdivizije. Moguće je da smo na tim podintervalima izabrali druge karte, međutim po prvom dijelu dokaza integral je invarijantan na odabira karti. □

Pokažimo neka osnovna svojstva integrala diferencijalnih 1-formi:

Lema 2.3.4. *Neka su X i Y Riemannove plohe i $c : [0, 1] \to X$ po dijelovima neprekidno diferencijabilan put u X. Tada vrijedi:*
i) Ako je $f \in \mathcal{E}(X)$, onda je

$$\int_c df = f(c(1)) - f(c(0)),$$

gdje je $c(t) = (z(t), \bar{z}(t))$.
ii) Ako je $F : X \to Y$ holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha i $\omega \in \mathcal{E}(Y)$, onda

$$\int_{F\circ c} \omega = \int_c F^*\omega.$$

Dokaz. i) Raspišimo po definiciji:

$$\int_c df = \int_0^1 (\frac{\partial f}{\partial z}(c(t))z'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c(t))\bar{z}'(t))dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))z'(t) - i\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))z'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\bar{z}'(t) + i\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\bar{z}'(t))dt =$$

$$= (x'(t) = \frac{z'(t) + \bar{z}'(t)}{2}, y'(t) = \frac{z'(t) + \bar{z}'(t)}{2i}) =$$

$$= \int_0^1 (\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(t))y'(t))dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(c(t)))dt =$$

$$= f(c(1)) - f(c(0))$$

ii) Ova tvrdnja također slijedi direktno iz definicija:

$$\int_{F\circ c}\omega = \int_{F\circ c} f dz + g d\bar{z} =$$

$$= \int_0^1 (f(F(c(t)))\frac{\partial F}{\partial z}(c(t))z'(t) + g(F(c(t)))\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(c(t))\bar{z}'(t))dt =$$

$$= \int_c F^*\omega$$

□

Diferencijalne 2-forme

U ovom potpoglavlju pogledajmo kako integrirati diferencijalne 2-forme na Riemannovim plohama.

Definicija 2.3.5. *Neka je $T \subset X$ takav da je $T \subset U$, $\phi : U \to V$ karta na X i T homeomorfan trokutu u $\mathbb{C}$. Nadalje, neka je $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$ i $f \in \mathcal{E}(X)$ takva da je $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$. Definiramo:*

$$\int\int_T \omega := \int\int_{\phi(T)} (f\circ\phi^{-1})(z) dz \wedge d\bar{z},$$

gdje je na desnoj strani definicijske jednakosti uobičajeni plošni integral u $\mathbb{C}$.

Propozicija 2.3.6. *Definicija integracije 2-forme po trokutu ne ovisi o izboru karte koja ga sadrži u domeni.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ neka druga karta takva da je $T \subset \tilde{U}$. Tada je $\omega = g dw \wedge \bar{w}$, za $g \in \mathcal{E}(X)$. Neka je T holomorfna funkcija prijelaza među koordinatama: $w = T(z)$. Tada iz dva zapisa forme ω na presjeku domena dobivamo $(f\circ\phi^{-1})(z) dz \wedge \bar{z} = (g\circ\psi^{-1})(w) dw \wedge d\bar{w} = (g\circ\psi^{-1})(T(z)) d(T(z)) \wedge d(\bar{T}(z)) = (g\circ\phi^{-1})(z)||T'(z)||^2 dz \wedge d\bar{z}$ isto kao u dokazu propozicije 2.2.6. Sada imamo:

$$\int\int_{\psi^{-1}(T)} (g\circ\psi^{-1})(w) dw \wedge d\bar{w} = [w = T(z)] = \int\int_{\phi^{-1}(T)} (g\circ\phi^{-1})(z)||T'(z)||^2 dz \wedge d\bar{z} =$$

$$= \int\int_{\phi(T)} (f\circ\phi^{-1})(z) dz \wedge d\bar{z},$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijabli u plošnom integralu u $\mathbb{C}$. □

Napomena 2.3.7. *Neka je $D \subset X$ skup koji se može triangulirati. Odaberimo tada triangulaciju od D takvu da je svaki trokut sadržan u domeni neke karte na X. Tada integral diferencijalne 2-forme definiramo kao sumu integrala po manjim trokutima. Ovo je dobro definiran integral jer svake dvije triangulacije skupa imaju zajedničko profinjenje. Još preostaje primijetiti da je integral po skupu jednak sumi integrala po dijelovima njegove konačne particije. Detaljniji opis triangulacije skupova čitatelj može potražiti u [5].*

Greenov teorem

Nakon što smo definirali integriranje 1-formi i 2-formi, možemo prenijeti Greenov teorem u teoriju Riemannovih ploha.

Teorem 2.3.8. *Neka je $D \subset X$ triangulabilan skup na Riemannovoj plohi X. Neka je $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Tada vrijedi:*

$$\int_{\partial D} \omega = \int\int_D d\omega.$$

Dokaz. Jer su obje strane jednakosti aditivne obzirom na triangulaciju domene, dovoljno je dokazati tvrdnju kada je D trokut sadržan u domeni neke karte na X. No, po definiciji integrala, tada je to tvrdnja Greenovog teorema u $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. □

Teorem o reziduumima

Sjetimo se da smo definirali pojam reziduuma meromorfne 1-forme u točki. Znamo da u teoriji kompleksne analize postoji teorem o reziduumima pa se postavlja pitanje koji je njegov analogon u teoriji Riemannovih ploha. Prisjetimo se iskaza teorema na podskupu od $\mathbb{C}$:

Neka je $U \subset \mathbb{C}$ otvoren, jednostavno povezan skup koji sadrži konačno točaka $a_1, ..., a_n$. Neka je f funkcija definirana i holomorfna na $U \backslash \{a_1, ..., a_n\}$. Neka je γ zatvorena, po dijelovima glatka krivulja u U koja svaku od točaka $a_1, ..., a_n$ obilazi jedanput i one se ne nalaze na krivulji. Tada vrijedi:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{a_k}(f).$$

Teorem ćemo prenijeti na kompaktne Riemannove plohe te se u tvrdnji teorema može algebarski uočiti posljedica topološke kompaktnosti Riemannove plohe.

Teorem 2.3.9. *Neka je ω meromorfna 1-forma na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada vrijedi:*

$$\sum_{p \in X} Res_p(\omega) = 0.$$

Dokaz. Jer je X kompaktan, polovi forme ω čine diskretan skup u X pa se radi o konačnoj sumi. Neka su $p_1, ..., p_n$ polovi od ω. Za svaki pol p_i odaberimo kružnicu γ_i koja je opisana oko pola i ne sadrži niti jedan drugi pol od ω. Takvu kružnicu je moguće pronaći jer su polovi meromorfnih funkcija izolirani. Neka je f meromorfna funkcija na X takva da je $\omega = f dz$. U teoremu 2.2.12 smo pokazali da vrijednost $Res_p(\omega)$ ne ovisi o izboru funkcije f. Iz razvoja funkcije u Laurentov red znamo da je $Res_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi \circ \gamma_i} (f \circ \phi^{-1})(z) dz$, gdje je ϕ karta na $X : U \to V$ takva da je $\gamma_i \subset U$. To možemo postići smanjivanjem radijusa kružnice γ_i ako je potrebno. No, po definiciji integracije u $\mathbb{C}$ i integracije diferencijalne forme ω dobivamo $Res_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \omega$. Označimo s U_i interior kruga s kružnicom γ_i. Neka je $D := X \setminus \cup_{i=1}^n U_i$. D kao zatvoren potprostor kompaktnog Hausdorffovog topološkog prostora je kompaktan. U knjizi [4] može se pronaći dokaz da je kompaktna Riemannova ploha triangulabilna. Stoga možemo primijeniti Greenov teorem 2.3.8. Ako označimo sa $\sum_{i=1}^n \gamma_i$ domenu integracije po sumandima, onda je $\partial D = -\sum_{i=1}^n \gamma_i$, što označava domenu integacije po invertiranim putevima koji su sumandi. Tada imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} Res_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sum_{i=1}^n \gamma_i} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int \int_D d\omega = 0,$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer je $d\omega = 0$ na D jer je ω na D holomorfna pa se ω može lokalno prikazati kao $\omega = ddg$ za neku holomorfnu funkciju g. Po propoziciji 2.2.24 imamo tvrdnju. □

Teorem o reziduumima je od velike važnosti u teoriji Riemannovih ploha. Može se reći da je u temelju dokaza Riemann-Rochovog teorema koji detaljno opisuje prostor meromorfnih funkcija s određenim polovima na kompaktnoj Riemannovoj plohi. Uz teoriju divizora i ulaganja Riemannovih ploha u projektivne prostore, Riemann-Rochov teorem povezuje Riemannove plohe s algebarskom geometrijom. Primjer poveznice čitatelj može pronaći u [1].

Međutim, ne moramo ići daleko da bismo vidjeli korisnu primjenu teorema o reziduumima. Ponovno ćemo dokazati teorem 1.3.13 koji smo u prvom poglavlju dokazali teorijom holomorfnih preslikavanja među Riemannovim plohama.

Korolar 2.3.10. *Neka je f nekonstantna meromorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada je:*

$$\sum_{p \in X} ord_p(f) = 0.$$

Dokaz. Fiksirajmo točku $p \in X$ i neka je (U, z) koordinata oko p. Označimo $n := ord_p(f)$. Jer je $f = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ...$ holomorfna na punktiranoj okolini od p imamo $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = (n \cdot a_n z^{n-1} + ...)dz$ pa je $\frac{df}{f} = \frac{n \cdot a_n z^{n-1}}{a_n z^n} \cdot \frac{h(z)}{g(z)}$, za holomorfnu funkciju $\frac{h(z)}{g(z)}$ sa slobodnim članom $\neq 0$. Zato je $ord_p(f) = Res_p(\frac{df}{f})$ pa primjenom teorema 2.3.9 dobivamo tvrdnju. □

Uvjerimo se direktnim računom da teorem o reziduumima vrijedi na Riemannovoj sferi.

Primjer 2.3.11. *Na Riemannovoj sferi $\mathbb{C}_\infty$ tvrdnja teorema o reziduumima glasi: za meromorfnu 1-formu ω na $\mathbb{C}_\infty$ vrijedi*

$$\sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} Res_p(\omega) = 0.$$

U teoremu 1.5.1 smo vidjeli da je svaka meromorfna funkcija na $\mathbb{P}^1$ omjer dva homogena polinoma istog stupnja. Na $\mathbb{C}_\infty$ gledajmo skraćenu notaciju karti: z i $\frac{1}{z}$. U terminima tih karti, meromorfnu funkciju na sferi dobivamo dehomogenizacijom racionalne funkcije na $\mathbb{P}^1$. Sada meromorfnu 1-formu ω u karti z možemo zapisati $\omega = r(z)dz$, za racionalnu funkciju $r(z)$. Iz ovog zapisa dobivamo oblik forme u karti $z = T(w) = \frac{1}{w}$: $\omega = r(\frac{1}{w}) \cdot \frac{-1}{w^2} dw$. Iskoristimo rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke pa dobivamo:

$$r(z) = p(z) + \frac{b_1}{z - \beta_1} + ... + \frac{b_n}{z - \beta_n},$$

gdje je $p(z)$ polinom, a $b_i, \beta_i \in \mathbb{C}$. Iz ovog zapisa lako očitamo da je $Res_{\beta_i}(\omega) = b_i$, za $i = 1, ..., n$ i $Res_z(\omega) = 0$, za $z \in \mathbb{C} \backslash \{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Preostaje nam izračunati $Res_\infty(\omega)$. U tu svrhu pogledajmo:

$$r(\frac{1}{w}) \cdot \frac{-1}{w^2} = \frac{-1}{w^2} p(\frac{1}{w}) + \frac{-b_1}{w - \beta_1 w^2} + ... + \frac{-b_n}{w - \beta_n w^2} =$$

$$= \frac{-1}{w^2} p(\frac{1}{w}) + \frac{-b_1}{w} \frac{1}{1 - \beta_1 w} + ... + \frac{-b_n}{w} \frac{1}{1 - \beta_n w}.$$

Jer su u $\frac{-1}{w^2} p(\frac{1}{w})$ sve potencije od w manje ili jednake -2, a funkcije $\frac{1}{1-\beta_i w}$ holomorfne oko 0 te poprimaju vrijednosti 1 u 0, dobivamo da je $Res_\infty(\omega) = -(b_1 + ... + b_n)$, što uz ranije određene reziduume daje tvrdnju teorema o reziduumima.

Za kraj, pokažimo još jednu posljedicu teorema o reziduumima na kompleksnom torusu.

Korolar 2.3.12. *Na kompleksnom torusu $X = \mathbb{C}/L$ ne postoji meromorfna funkcija s jednim polom reda 1.*

Dokaz. Neka je $p_0 \in X$ jedina točka u kojoj f ima pol reda 1. Definirajmo tada meromorfnu 1-formu na X formulom $\omega = f(z)dz$, gdje je z koordinata oko p. Primijetimo da jer je funkcija prijelaza među kartama na torusu jednaka $z = T(w) = w + l$, $l \in L$, i f je $L-$periodična kao funkcija na torusu, forma ω je dobro definirana i jednaka $\omega = f(w)dw$ u svakoj karti na X. No tada je po pretpostavci na funkciju f $Res_{p_0}(\omega) \neq 0$ i $Res_p(\omega) = 0$ za svaku drugu točku $p \in X$ što je u kontradikciji s teoremom o reziduumima. □

Bibliografija

[1] B.Bošnjak, J.Novak, V.Pedić, *Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem* $\mathbb{C}$, pod vodstvom prof. dr. sc. Gorana Muića, dostupno na: `http://rektorat.unizg.hr/rektorova/nagradjeni_radovi_16_17.php`, 2017.

[2] O.Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Springer, 1991.

[3] E.Frenkel, *Love and Math: The Heart of Hidden Reality*, Basic Books, 2013.

[4] J. Jost, *Compact Riemann Surfaces: An Introduction to Contemporary Mathematics*, Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[5] W.S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer, 1980.

[6] Slike izrađene u programu *Wolfram Mathematica 8.0*

[7] R.Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society, 1995.

[8] M.Monastyrsky, *Riemann, Topology, and Physics*, Birkhäuser Basel, 1999.

[9] J.Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[10] I.R.Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer Berlin Heidelberg, 1994.

Sažetak

U ovom radu izlažemo teoriju Riemannovih ploha. U prvom poglavlju uvodimo definiciju Riemannovih ploha i funkcija na njima. Potom dajemo osnovne primjere Riemannovih ploha kao što su Riemannova sfera, kompleksni torus i glatke afine/projektivne ravninske krivulje. Također navodimo primjere meromorfnih funkcija na spomenutim primjerima Riemannovih ploha. Za Riemannovu sferu smo pokazali da je svaka meromorfna funkcija na njoj racionalna funkcija. Na kompleksnom torusu primjer meromorfnih funkcija je omjer translatiranih theta funkcija, dok su na glatkim afinim/projektivnim ravninskim krivuljama primjeri meromorfnih funkcija omjeri polinoma - homogenih istog stupnja u projektivnom slučaju.

Nadalje, proučavamo holomorfna preslikavanja među Riemannovim plohama. Uvodimo pojam stupnja holomorfnog preslikavanja među kompaktnim Riemannovim plohama kojim algebarski argumenti daju uvid o geometrijskim svojstvima ploha. Primjerice, ako je preslikavanje među kompaktnim Riemannovim plohama stupnja 1, onda su one izomorfne.

Kako su Riemannove plohe lokalno izomorfne s otvorenim podskupom od $\mathbb{C}$, prirodno se postavlja pitanje vrijede li klasični teoremi kompleksne analize u teoriji Riemannovih ploha. Odgovor je potvrdan; neke teoreme možemo direktno prenijeti, neki poprimaju jednostavniji oblik, dok postoje i teoremi svojstveni samo Riemannovim plohama koji se odnose na kompaktne Riemannove plohe.

U drugom poglavlju obrađujemo integraciju na Riemannovim plohama. Najvažnija konstrukcija u ovom poglavlju je konstrukcija diferencijalnih formi na Riemannovoj plohi, a provodimo ju kroz teoriju snopova. Nakon toga defniramo integriranje diferencijalnih 1 i 2 formi i lako pokazujemo da je dobro definirano. Glavni teorem ovog poglavlja je teorem o reziduumima koji je od fundamentalne važnosti za teoriju kompaktnih Riemannovih ploha i dokaz njezine poveznice s algebarskom geometrijom.

Summary

In this paper we present theory of Riemann surfaces. In first chapter we introduce definition of Riemann surfaces and functions on them. Then we give basic examples of Riemann surfaces such as Riemann sphere, complex torus and smooth affine/projective plane curves. Also, we determine meromorphic functions on mentioned examples of Riemann surfaces. For Riemann sphere we showed that every meromorphic function on it is rational function. On complex torus example of meromorphic function is ratio of translated theta functions, while on smooth affine/projective plane curves example of meromorphic function is ratio of polynomials - homogeneous of the same degree in projective case.

Furthermore, we study holomorphic maps between Riemann surfaces. We introduce concept of degree of holomorphic map between compact Riemann surfaces which we use to get information about geometry of Riemann surface through algebraic argument. For example, if map is of degree 1, than Riemann surfaces are isomorphic.

Since Riemann surfaces are locally isomorphic with open subsets of $\mathbb{C}$, question whether classical theorems of complex analysis are true in theory of Riemann surfaces comes naturally. The answer is affirmative; some theorems we can be transfered directly, some come in simpler form, while there are theorems inherent only to theory of Riemann surfaces since they are concerning compact Riemann surfaces.

In second chapter we study integration on Riemann surfaces. The most important construction in this chapter is construction of differential forms on Riemann surface which is done by the theory of sheaves. After that, we define integration of differential 1 and 2 forms and we easily show that integration is well defined. The main theorem of this chapter is Residue theorem which is of fundamental importance for theory of compact Riemann surfaces and for the proof of its connection with algebraic geometry.

Životopis

Zovem se Barbara Bošnjak. Rođena sam 16. prosinca 1993. godine u Osijeku. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na matematičkim radionicama i natjecanjima što me oblikovalo i usmjerilo na studij matematike.

Odlučila sam se za studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija stekla sam titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Na istom fakultetu sam upisala diplomski studij Teorijske matematike te očekujem da ću diplomirati u srpnju, 2017. godine.

Tijekom studiranja, aktivno sam sudjelovala u internacionalnim ljetnim školama za studente matematike na kojima sam proširila znanje matematike i upoznala studente iz drugih zemalja i njihova iskustva sa studija. Također sam bila demonstratorica iz velikog broja kolegija na fakultetu.

2014. godine sam nagrađena stipendijom za izvrsnost grada Zagreba, a u travnju 2017. godine mi je dodjeljena pohvalnica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za izuzetan uspjeh na diplomskom studiju. U lipnju 2017. godine dodijeljena mi je Rektorova nagrada Sveučilišta u Zagrebu za rad "Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem $\mathbb{C}$" s koautorima Josipom Novakom i Veronikom Pedić pod vodstvom profesora Gorana Muića.

U budućnosti bih se voljela akademski baviti matematikom na presjeku algebre, teorije brojeva i kompleksne analize te mi je plan upisati doktorski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. U slobodno vrijeme igram odbojku i stolni tenis, sviram gitaru, posjećujem kazališta i šetam prirodom.