Dinamika i mjere entropije srčanog ritma

Krajačić, Maria

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:385733

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Maria Krajačić

DINAMIKA I MJERE ENTROPIJE SRČANOG RITMA

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Maria Krajačić

Diplomski rad

Dinamika i mjere entropije srčanog ritma

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2018.

Zahvaljujem se mentoru, izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na svekolikoj pomoći, konzultacijama i beskrajnom strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada. Također mu se zahvaljujem na velikoj profesionalnoj podršci, te ohrabrenju i prilici za pisanje mog prvog znanstvenog rada.
Veliko hvala i Planinki Pećini, dipl. ing., na svom pruženom znanju i motivaciji.
Zahvaljujem se i doc. dr. sc. Maji Planinić na konstruktivnim savjetima pri izradi metodičkog dijela rada.
Posebnu zahvalnost iskazujem cijeloj svojoj obitelji koja me podržavala tijekom sveukupnog školovanja. Hvala na beskrajnom razumijevanju i neumornom strpljenju.

Sažetak

Električni signali proizvedeni u ljudskom organizmu (EKG, EEG, CTG) danas su dio standardne medicinske dijagnostike. No, fizikalni potpis uzroka tih signala ima veći doseg od onog koji se koristi trenutno u standardnoj dijagnostici. Ideja ovog rada je istražiti potencijal varijabli izvedenih iz analize vremenskih serija navedenih fizioloških signala. U radu koristimo analizu fluktuacija kojima je uklonjen trend za određivanje dugodosežnosti korelacija u pojedinom signalu i višeskalnu entropiju uzorka pomoću koje se dobiva informacija o kompleksnosti vremenskih serija. Analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend koja pokazuje da kod ispitanika sa zdravim srcem postoje dugodosežne korelacije, a kod ispitanika s kongestivnim zatajenjem srca pokazuje da postoji fenomen prijelaza koji indicira različito ponašanje na malim i velikim skalama. Dodatno je pokazana primjena metode na određivanje uspješnosti terapije. Račun višeskalne entropije uzorka pokazuje da imamo veće vrijednosti te mjere za dinamiku zdravog srca, odnosno da je kompleksnost takvih vremenskih serija veća od kompleksnosti onih koje odgovaraju određenim patološkim stanjima. Osim toga, u analizi dinamike zdravog srca pokazano je da iznos entropije uzorka ovisi o duljini vremenske serije-kraće vremenske serije daju veću vrijednost entropije, a manja vrijednost entropije odgovara većim serijama. Analiza podataka koji odgovaraju asimptomatskoj ventrikularnoj aritmiji i kongestivnom zatajenju srca pokazala je da su pripadne vremenske serije manje kompleksne, a određeni lijekovi koji se koriste za liječenje aritmije smanjuju kompleksnost vremenskih serija.

Ključne riječi: EKG, analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend, entropija, višeskalna entropija uzorka

Heart rate dynamics and entropy measures

Abstract

Electrical signals produced in the human body (ECG, EEG, CTG) are now part of standard medical diagnostics. However, the signature, of the dynamics that can be derived from physics, in these signals has a greater capacity than the one currently used in standard diagnostics. The idea of this thesis is to explore the potential of variables derived from the analysis of a time series of said physiological signals. This paper uses a detrended fluctuation analysis that eliminates the trend for determining correlations in each signal and multipath entropy of the cause by which information on the complexity of time series is obtained. Analyzing the fluctuations shows that long-range correlations exist in heart rate of a healthy people. In congestive heart failure, we see a crossover phenomenon that indicates different dynamics for small and large scales. In addition, a fluctuation analysis is applied to therapy evaluation. Multiscale sample entropy method shows that we have greater entropy values of this measure for the healthy heart's dynamic. The complexity of these signals is greater than the complexity of those corresponding to certain pathological conditions. In addition, in the analysis of heart rate dynamics, it is shown that the value of sample entropy depends on the length of the time series - for shorter time series we have bigger entropy value, and for longer time series value decreases. Data analysis that corresponds to asymptomatic ventricular arrhythmia and congestive heart failure has shown that the associated time series are less complex and certain drugs used to treat arrhythmia reduce the complexity of time series.

Keywords: ECG, detrended fluctuation analysis, entropy, multiscale sample entropy

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Anatomija, fiziologija i patologija srca **2**
2.1 Osnove anatomije i fiziologije srca 2
2.2 Snimanje srčanog ritma i interpretacija EKG zapisa 4

3 Analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend **9**
3.1 Fenomen prijelaza 15

4 Entropija kao mjera kompleksnosti **22**
4.1 Višeskalna entropija 27
4.2 Primjena na dinamiku srčanog ritma 28

5 Metodički dio **33**
5.1 Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike 33
5.2 Nastavna priprema: Entropija 35

6 Zaključak **43**

Dodaci **44**

A Implementacija DFA metode **44**

1 Uvod

Normalna aktivnost srca obično se opisuje kao pravilni sinusni ritam, no realni signali sadrže kompleksne fluktuacije koje su rezultat unutarnje dinamike sustava, ali i vanjskih čimbenika. Varijabilnosti koje se javljaju u fiziološkim signalima, pa između ostalog i u vremenskim serijama koje predstavljaju srčani ritam, mogu se analizirati pojedinim metodama statističke fizike. Takve analize mogu otkriti brojna intrinsična korelacijska svojstva sustava, ali i dati informacije o eventualnim patološkim stanjima, što ima značajan potencijal za uvođenje novih metoda u medicinsku dijagnostiku. Upravo iz tog razloga, ovakve analize su danas područje od velikog interesa.

U ovom radu vremenske serije srčanog ritma analizirali smo pomoću dvije metode. Prva je analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend, koja daje uvid u korelacijsku strukturu. Kao što je ranije spomenuto, svaki signal sastoji se od fluktuacija koje su rezultat unutarnje dinamike samog sustava, ali i fluktuacija koje dolaze od vanjskih podražaja. U slučaju kada fluktuacije dobivene nekoreliranim podražajima iz okoliša možemo razdvojiti od unutarnjih fluktuacija dinamičkog sustava, pokazuje se da te dvije skupine fluktuacija imaju različita korelacijska svojstva. Fluktuacije koje proizlaze iz dinamike samog sustava mogu imati dugodosežne korelacije, a nestacionarne fluktuacije povezane su s vanjskim podražajima, te taj dio signala nazivamo trend. Obzirom da su vremenske serije koje analiziramo nestacionarne, potrebno je koristiti one metode na koje vanjski šum neće imati utjecaja. Analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend metoda izbjegava utjecaj vanjskih dugodosežnih korelacije koje su posljedica nestacionarnosti, zbog čega je pogodna za analizu vremenskih serija srčanog ritma i detekciju istog oblika korelacija koje su posljedica unutarnje dinamike.

Drugi set metoda koje koristimo daje informaciju o kompleksnosti pojedinih vremenskih serija koristeći tzv. mjere kompleksnosti, aproksimativnu entropiju i entropiju uzorka. Entropija uzorka posebno je pogodna za kraće vremenske serije. Biološki sustavi imaju prostornu i vremensku komponentu, zbog čega postoji kompleksnost na više skala i potrebno je izabrati metodu koja može kvantificirati informacije višeskalne fiziološke dinamike. Osim procjene kompleksnosti, metoda entropije uzorka može detektirati patološku dinamiku, a pri tom najmanje ovisi o duljini vremenske serije koju analiziramo.

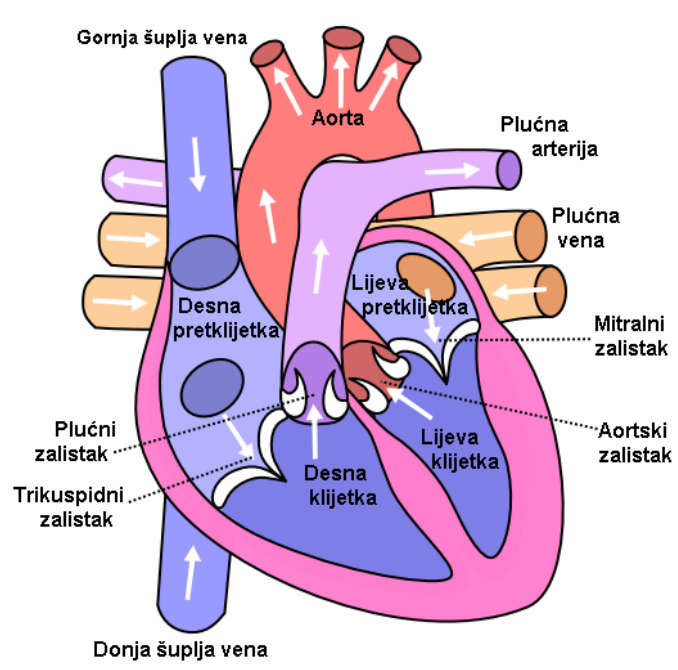
U drugom poglavlju dan je osnovni pregled anatomije, fiziologije i patologije srca te snimanja EKG signala. U trećem poglavlju opisana je analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend. Četvrto poglavlje daje pregled analize podataka pomoću entropije uzorka i višeskalne entropije uzorka, a u petom poglavlju kratko opisujemo kako u srednjoj školi učenike možemo uvesti u kompleksnu temu entropije.

2 Anatomija, fiziologija i patologija srca

Kako smo naveli u uvodu, u ovom radu bavit ćemo se srcem. Patološka stanja srca jedan su od vodećih uzroka smrtnosti. Povezano s tim od izuzetne je važnosti imati što bolje tehnike kojima ćemo dijagnosticirati specifična patološka stanja.
Na početku poglavlja dane su osnove anatomije i fiziologije srca i objašnjen je princip rada srca. U drugom dijelu opisan je postupak snimanja aktivnosti srca, te način interpretacije dobivenog zapisa. Na kraju poglavlja prikazani su primjeri određenih patoloških stanja, koja su povezana s poremećajima u stvaranju električnih impulsa u srcu.

2.1 Osnove anatomije i fiziologije srca

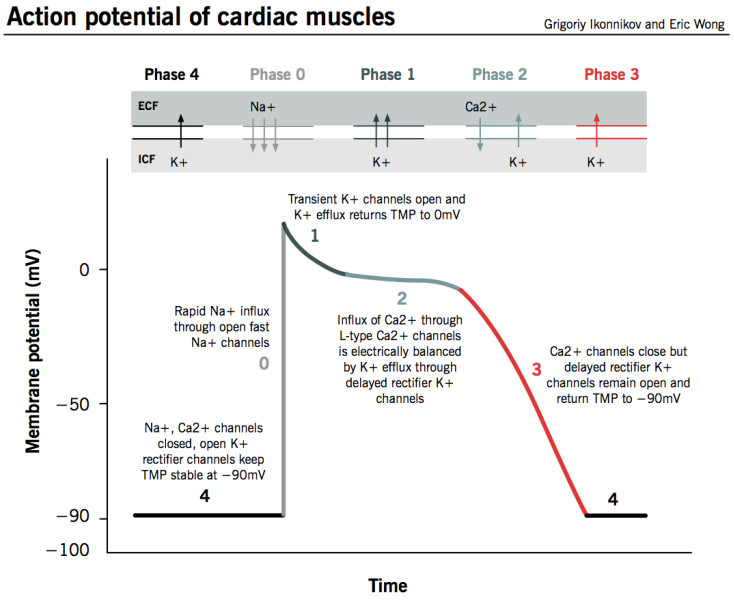
Srce je mišićni organ smješten u prsnom košu između dva plućna krila i prednje strane kralježnice, a čine ga dvije pretklijetke (atrij) i dvije klijetke (ventrikul). Venska krv koja dolazi u srce ima manjak kisika i kao takva ulazi u desnu pretklijetku, a zatim u desnu klijetku koja konačno krv pumpa u pluća. U plućima se venska krv obogaćuje kisikom, a koncentracija ugljikovog dioksida pada. Krv obogaćena kisikom preko plućne vene ulazi u lijevu pretklijetku, te zatim u lijevu klijetku koja kroz aortu pumpa krv u ostatak tijela, slika 2.1. Četiri spomenute komore (lijeva i desna pret-



Slika 2.1: Presjek građe srca

klijetka, te lijeva i desna klijetka) odvojene su zaliscima koji se otvaraju i zatvaraju ovisno o promjenama tlaka unutar komora koje povezuju. Određena vrijednost tlaka u desnom atriju otvara zaliske između desnog atrija i desnog ventrikula i propušta

krv u desni ventrikul, nakon čega se zalisci zatvaraju. Desni ventrikul zatim kroz zaliske pumpa krv u plućnu arteriju, odnosno u pluća. Obzirom da se zalisci zatvaraju nakon propuštanja krvi, nije moguć reverzibilni tok, stoga je na taj način osiguran protok krvi prema naprijed. Isti princip vrijedi i za lijevu stranu srca-kritična vrijednost tlaka u lijevom atriju otvara zaliske između lijevog atrija i lijevog ventrikula i krv dolazi u lijevi ventrikul, koji se zatim kontrahira. Ta kontrakcija izbacuje krv kroz zaliske u aortu, nakon čega se ona prenosi u ostatak tijela.
Da bi spomenuti tok krvi bio moguć, potreban je stimulans u obliku električnog impulsa koji će potaknuti rad srca kao pumpe. Kako se generirani impuls transmitira kroz srce, stanice srca prolaze kroz procese depolarizacije i repolarizacije. Stanična membrana odvaja dva područja različitih koncentracija iona natrija i kalija, tako da je unutar stanice višak negativnog naboja, što zovemo potencijal mirovanja. Stanica polarizirana na ovaj način je u stanju mirovanja, jer ne postoji nikakva električna aktivnost. Nakon stimulacije ioni prelaze staničnu membranu i dolazi do depolarizacije stanice, a navedena promjena predstavlja nultu fazu akcijskog potencijala, slika 2.2. Depolarizacija je posljedica ulaska natrijevih i kalijevih kationa u stanicu. Potpuno



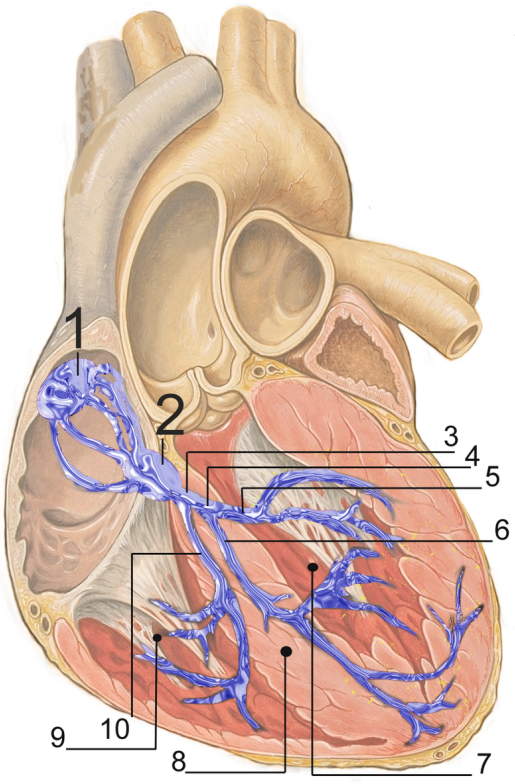
Slika 2.2: Krivulja akcijskog potencijala pokazuje promjenu potencijala u stanici miokarda tijekom depolarizacije i repolarizacije

depolarizirana stanica se zatim procesom repolarizacije u 4 faze vraća u stanje mirovanja, odnosno ponovo postaje polarizirana. Prva faza je faza rane repolarizacije tijekom koje nije moguć ulazak natrijevih kationa u stanicu, jer je pripadni kanal zatvoren. Zatim slijedi plato faza, odnosno faza polagane repolarizacije. Kalcijevi kationi i dalje ulaze u stanicu, a kalijevi izlaze iz nje. Rapidna repolarizacija predstavlja treću fazu u kojoj je kanal kalcijevih kationa zatvoren, a kalijevi kationi naglo izlaze iz stanice. Osim toga, natrij-kalij pumpa omogućuje aktivni transport, što znači da obnavlja kalij unutar stanice, te natrij izvan nje. Konačno, 4 faza je faza mirovanja

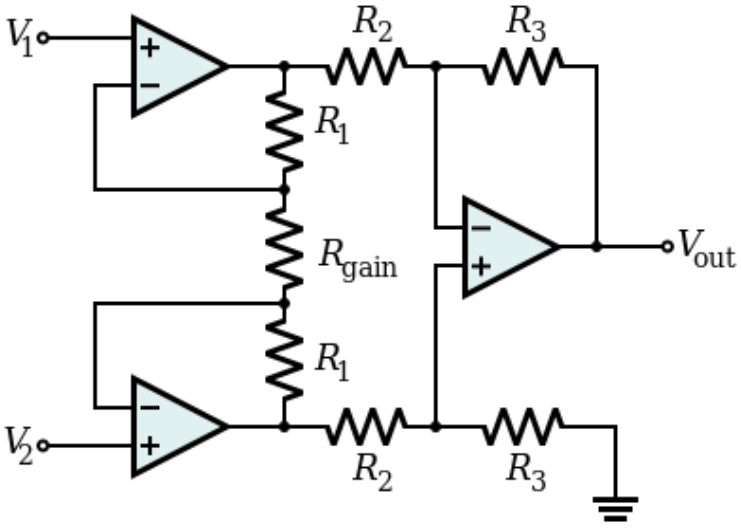
tijekom koje je membrana nepropusna za natrijeve ione, odnosno pripadni kanal je zatvoren, a kalijevi kationi izlaze iz stanice. Stanica u fazi 4 spremna je za ponovnu stimulaciju. U stanju mirovanja, potencijal stanice je oko -90 mV, a ulazak natrijevih i kalijevih kationa u stanicu tijekom faze 0 povećava njezin potencijal do otprilike 50 mV. Nakon depolarizacije i repolarizacije dobiveni električni impuls putuje kroz srce putanjom koju zovemo vodljivi sustav, slika 2.3. Sinus-atrijski čvor (SA čvor), koji je lociran u gornjem desnom kutu desnog atrija, generira 60 do 100 impulsa tijekom jedne minute, te je kao takav glavni prirodni elektrostimulator srca. Generirani impulsi prenose se u lijevi atrij preko Bachmannove grane, a prijenos u desnom atriju omogućuju prednji, srednji i stražnji internodalni trakt. Impulsi zatim dolaze do atrijsko-ventrikularnog čvora (AV čvor), koji je smješten u donjem dijelu desnog atrija. Njegova uloga je odgađanje impulsa koji dolaze do njega. To odgađanje traje 0,04 sekunde, a svrha je spriječiti ventrikul da se prebrzo kontrahira. Tkivo koje okružuje čvor sadrži stanice za električnu stimulaciju koje šalju impulse 40 do 60 puta u minuti. Hisov snop nastavlja brzo širenje impulsa kroz ventrikul, a dijeli se na dvije grane, lijevu i desnu. Desna grana širi se po desnoj strani intraventrikularnog septuma i kroz desni ventrikul, a lijeva po lijevoj strani intraventrikularnog septuma i kroz lijevi ventrikul. Kroz lijevu granu koja vodi do većeg lijevog ventrikula impulsi putuju brže nego kroz desnu granu. Razlika u brzini provođenja impulsa omogućuje simultano kontrahiranje oba ventrikula. Na kraju obje grane nalaze se Purkinjeova vlakna koja omogućuju širenje impulsa u tkivo miokarda, te na taj način pomažu u depolarizaciji i kontrahiranju.

2.2 Snimanje srčanog ritma i interpretacija EKG zapisa

Električna aktivnost srca proizvodi struje koje se kroz okolno tkivo šire prema površini tijela. Elektrode pričvršćene na kožu pacijenta registriraju te male struje, nakon čega im elektrokardiograf daje valnu formu koja predstavlja krug depolarizacije i repolarizacije, te ih prikazuje na EKG monitoru. Spomenute struje rezultat su bioloških potencijala, a obzirom da su oni vrlo mali (reda veličine od nekoliko stotina mikrovolta do 1 milivolt), potrebno je pojačati dobiveni signal. Upravo zato je instrumentacijsko pojačalo glavna komponenta svakog elektrokardiografa. Na slici 2.4 vidimo da se ono sastoji od 3 operacijska pojačala.
Pojačalo na desnoj strani zajedno s otpornicima R_2 i R_3 čini diferencijalno pojačalo. Pojačala s lijeve strane su operacijska pojačala s beskonačnom ulaznom impedancijom. Kada otpornika R_{gain} ne bi bilo, pojačala s lijeve strane bila bi 2 naponska sljedila s naponskim pojačanjem 1. U tom slučaju, pojačanje instrumentacijskog pojačala bilo bi jednako R_3/R_2 i postojala bi velika ulazna impedancija zbog operacijskih pojačala s lijeve strane sklopa. Pojačanje pojačala s lijeve strane možemo povećati stavljanjem otpornika između invertirajućeg ulaza i zemlje za svako pojedino pojačalo, međutim, elegantnije rješenje je staviti jedan otpornik između dva



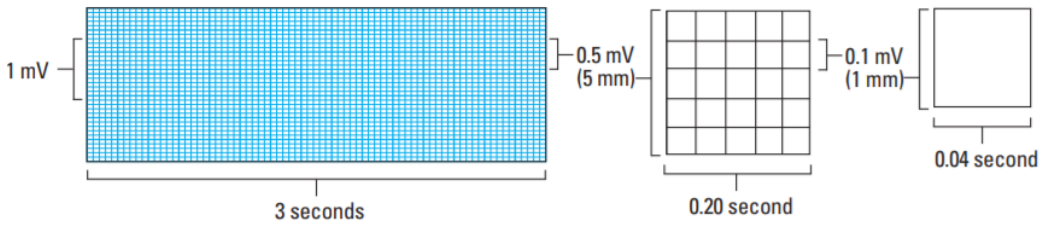
Slika 2.3: Vodljivi sustav koji omogućuje širenje impulsa kroz stanice srca. 1) SA čvor 2) AV čvor 3) - 6) Hisov snop 7) Lijevi ventrikul 8) Intraventrikularni septum 9) Srčane niti 10) Desna grana Hisovog snopa



Slika 2.4: Shematski prikaz instrumentacijskog pojačala koje se koristi u elektrokardiografima

invertirajuća ulaza (R_{gain}). Na taj način pojačanje zajedničkog dijela signala ostaje jednako 1, a pojačanje diferencijalnog dijela signala se poveća, čime smo povećali faktor odbacivanja zajedničkog dijela signala u cijelom sklopu. Upotreba otpornika

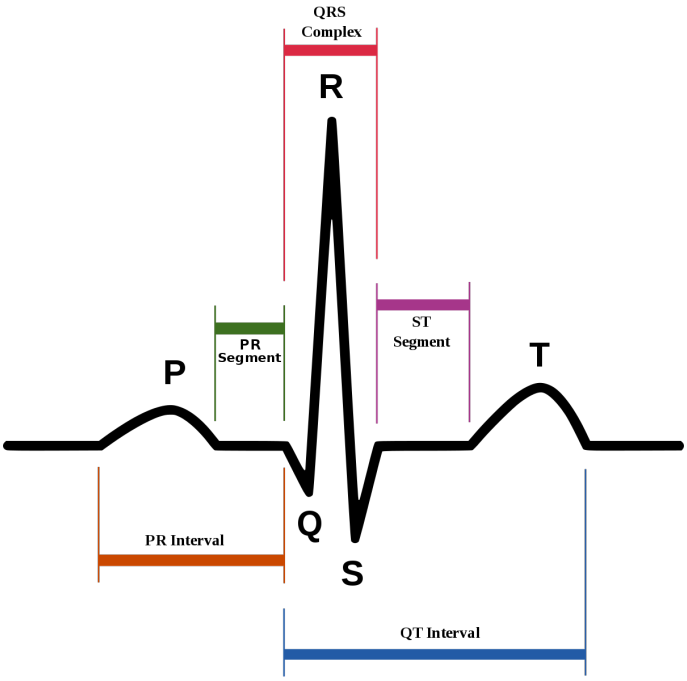
R_{gain} omogućuje jednostavnu promjenu pojačanja sklopa promjenom spomenutog otpornika i ne zahtjeva ugađanje dva različita otpornika, što je definitivno velika prednost ovakve izvedbe sklopa. Dakle, na izlazu operacijskih pojačala s lijeve strane dobijemo blago pojačani diferencijalni dio signala, a zajednički dio nije promjenjen, obzirom da je pojačanje tog dijela jednako 1. Taj signal dolazi na ulaz diferencijalnog pojačala, koje zajednički dio signala odbacuje (naponsko pojačanje je 0), a diferencijalni dio pojačava za faktor R_3/R_2 kojeg daje na izlazu pojačala [1].
Zapis električne aktivnosti u ovisnosti o vremenu prikazuje se na EKG monitoru, a može biti isprintan na papiru. EKG papir sastoji se od horizontalnih i vertikalnih linija koje čine koordinatnu mrežu, slika 2.5. Horizontalna os predstavlja vrijeme, a svaki kvadratić odgovara vremenskom intervalu od 0,04 sekunde. Za procjenu srčanog ritma pacijenta obično se koristi interval od 6 sekundi. Vertikalna os prikazuje amplitudu u milimetrima ili električni napon u milivoltima. Ovisno o veličini koju mjerimo na vertikalnoj osi, jedan kvadratić predstavlja amplitudu od 1 mm ili napon od 0,1 mV. Amplitudu određenog segmenta dobijemo zbrajanjem kvadratića od središnje osi, nakon čega dobiveni broj množimo s vrijednošću jednog kvadratića.



Slika 2.5: Koordinatna mreža EKG papira sastoji se od horizontalnih i vertikalnih osi. Najmanji kvadratić odgovara vremenskom intervalu od 0,04 sekunde i amplitudi od 1 milimetar, odnosno 0,1 milivolt. Veći kvadratić sastoji se od 5 manjih i odgovara vremenskom periodu od 0,2 sekunde i naponu od 0,5 milivolti

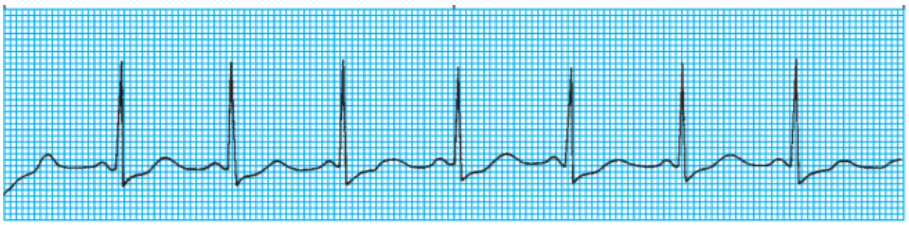
EKG kompleks predstavlja jedan električni događaj koji reprezentira širenje električnog impulsa od atrija do ventrikula. Sastoji se od P-vala, QRS kompleksa i T-vala, kao što prikazuje slika 2.6. P-val je prva komponenta normalnog EKG-a i predstavlja širenje električnog impulsa kroz atrij, odnosno atrijsku depolarizaciju. Depolarizacija ventrikula prikazana je QRS kompleksom, koji nastaje kao posljedica stvaranja impulsa zbog kontrakcije ventrikula, nakon čega krv odlazi u arterije. Zadnja komponenta EKG-a je T-val koji predstavlja repolarizaciju ventrikula. Vrijeme potrebno za jedan krug depolarizacije i repolarizacije prikazano je QT intervalom, a bilo kakve nepravilnosti mogu značiti određene probleme u miokardu.

Kako bismo mogli prepoznati aritmije i ostala patološka stanja, moramo znati kako izgleda normalni sinusni ritam, koji predstavlja standard. Normalni sinusni ritam, slika 2.7, karakterizira pravilni atrijski i ventrikularni ritam, a frekvencija uda-



Slika 2.6: Komponente normalnog EKG vala

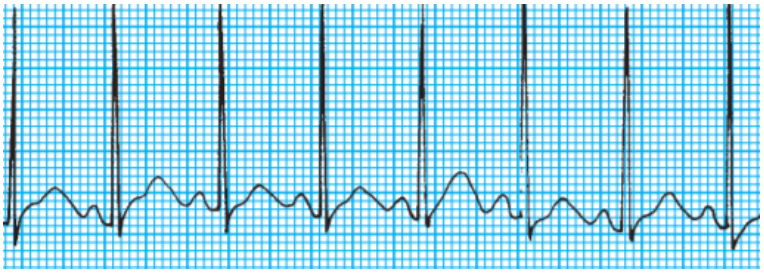
raca je između 60 i 100 udarca u minuti. Svaki QRS kompleks treba biti sličnog oblika i veličine, a prethodi mu P-val. Svi P-valovi također trebaju biti podjednaki. T-val treba biti uspravan i zaobljen, dok je za PR interval poželjno da bude u granicama između 0,12 i 0,2 s, a QT interval između 0,36 i 0,44 sekunde.



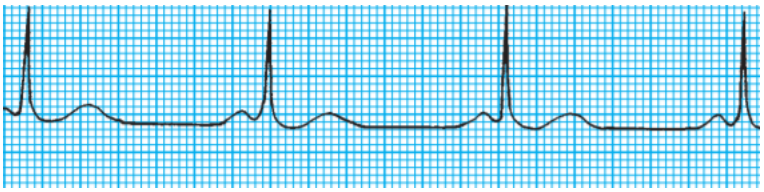
Slika 2.7: Normalni sinusni ritam koji pokazuje uredno provođenje električnih impulsa kroz srce

Obzirom da je srce kompleksan sustav, moguće su određene nepravilnosti srčanog ritma povezane s poremećajima u stvaranju električnih impulsa. Takve nepravilnosti zovemo aritmije, a javljaju se kada stimulacija postane nepravilna ili ako je tempo stimulacije brži, odnosno sporiji od uobičajenog. Spomenuta odstupanja od normalnog sinusnog ritma mogu se vidjeti na snimljenom EKG-u. Na slici 2.8 prikazan je primjer sinusne tahikardije (povećana brzina rada SA čvora), a na slici 2.9 primjer sinusne bradikardije (smanjena brzina rada SA čvora).

Osim toga, aritmije mogu biti uzrokovane i poremećajima u širenju impulsa. Takve nepravilnosti očituju se povećanim PQ intervalom ili proširenim QRS kompleksom.



Slika 2.8: EKG zapis prikazuje sinusnu tahikardiju



Slika 2.9: EKG zapis prikazuje sinusnu bradikardiju

3 Analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend

Razne vremenske serije dobivene snimanjem određenih fizioloških procesa mogu se analizirati metodama statističke fizike. To se prvenstveno odnosi na metode koje proučavaju kritične fenomene u kojima postoje fluktuacije u vremenskim serijama.

Svaki signal sastavljen je od fluktuacija koje su rezultat unutarnje dinamike samog sustava, ali i fluktuacija koje dolaze od vanjskih podražaja. U slučaju kada fluktuacije dobivene nekoreliranim podražajima iz okoliša možemo razdvojiti od unutarnjih fluktuacija dinamičkog sustava, pokazuje se da te dvije skupine fluktuacija imaju različita korelacijska svojstva. Fluktuacije koje proizlaze iz dinamike samog sustava mogu imati dugodosežne korelacije. S druge strane, nestacionarni tipovi fluktuacija povezani su s vanjskim podražajima, te taj dio signala nazivamo trend. Trend u praksi možemo razlikovati od finijih fluktuacija koje mogu otkriti intrinsična korelacijska svojstva dinamike tog sustava [2–6].

Za analizu fizioloških podataka uvedena je analiza modificiranog srednjeg kvadratnog korjena nasumičnog hoda, koju nazivamo analiza fluktuacija kojima je uklonjen trend (eng. detrended fluctuation analysis, dalje u tekstu DFA). Kod te metode vremensku seriju najprije podijelimo u prozore duljine n, a srednji kvadratni korjen (fluktuacijska funkcija) detrendizirane vremenske serije u tim prozorima duljine n daje uvid u fluktuacije sustava.

DFA metoda detektira dugodosežne korelacije koje postoje u naizgled nestacionarnim vremenskim serijama, pritom izbjegavajući lažne dugodosežne korelacije koje su rezultat nestacionarnih fluktuacija dobivenih od vanjskih podražaja. Ova metoda uspješno je primjenjena na detekciju dugodosežnih korelacija u visokoheterogenim DNA nizovima (sekvencama), te na ostale kompleksne fiziološke signale.

Autokorelacija je korelacija signala sa zakašnjelom kopijom istog tog signala i funkcija je vremenskog kašnjenja. Što je vrijeme autokorelacije manje, sustav brže „zaboravlja“ ranije informacije i uvjete, te kažemo da postoji kratkodosežna korelacija. Vrijedi i obratno – veće vrijeme autokorelacije znači da sustav duže pamti prethodne informacije i postoji dugodosežna korelacija. Stacionarne procese koji dolaze od unutarnje dinamike sustava karakterizira divergentno vrijeme autokorelacije. Obzirom da izraz „divergentno“ predstavlja dugo vrijeme autokorelacije, takav sustav ima korelacije na većim vremenskim skalama. U tom slučaju, funkcija autokorelacije, $C(s)$, pri čemu je s vremensko kašnjenje, može biti opisana polinomom. Kada je $C(s)$ opisana eksponencijalnim padom, sustav je koreliran na kratkim vremenskim skalama i informacije koje su prethodile danom trenutku pamti vrlo kratko.

Osim toga, kao što je spomenuto ranije u tekstu, svaki proces nekog sustava je pod utjecajem vanjskih čimbenika. Ti čimbenici su nestacionarni i mogu utjecati na duljinu korelacije, obično u smjeru njenog smanjivanja.

Postoji jasna veza između funkcije fluktuacije i korelacijske strukture. Signali koji imaju kratkodosežne korelacije pokazuju jasan fenomen prijelaza. Taj prijelaz

dijeli funkciju fluktuacije na dva dijela koji imaju različite eksponente skaliranja α, odnosno različite nagibe u log-log grafu. Samo u slučaju kada je duljina prozora n veća od skale na kojoj se postoji fenomen prijelaza, možemo vidjeti dobro skalirajuće ponašanje za kratkodosežne korelacije. Drugim riječima, vremenska serija koju promatramo mora biti dovoljno duga.

Funkcija autokorelacije (eng. autocorrelation function, dalje u tekstu ACF) za stacionarni proces drugog reda, x_t dana je s

$$C(s) = \frac{\langle (x_t - \mu)(x_{t+s} - \mu) \rangle}{\langle (x_t - \mu)^2 \rangle} \tag{3.1}$$

gdje je srednja vrijednost $\langle x_t \rangle = \mu$ za svaki t.

Razlika između procesa koji imaju dugo i kratko pamćenje definirana je sumom funkcije autokorelacije po svim pomacima u vremenu s $\sum_{s=0}^{\infty} C(s)$. Ako navedena suma konvergira, sustav pokazuje kratkodosežne korelacije, što znači da prilično brzo „zaboravlja“ početne uvjete, odnosno ono što se dogodilo prije određenog trenutka. Asimptotsko ponašanje koje u tom slučaju pokazuje funkcija autokorelacije opisujemo eksponencijalnim padom

$$C(s) \sim e^{-s/s_c} \tag{3.2}$$

gdje je s_c karakteristično vrijeme korelacije dano s $s_c = \int_0^{\infty} C(s) ds$.

Suprotno tome, kada suma $\sum_{s=0}^{\infty} C(s)$ divergira, sustav jako sporo „zaboravlja“ vrijednosti u prethodnim trenucima. Obzirom da postoji divergencija, ne možemo govoriti o karakterističnom vremenu kao kod kratkodosežnih korelacija. Sada funkciju autokorelacije opisujemo polinomom

$$C(s) \sim s^{-\gamma}. \tag{3.3}$$

Parametar γ je parametar koleracije i poprima vrijednosti između 0 i 1.

Određene metode procjene funkcije autokorelacije primjenjive su samo pod pretpostavkom stacionarnosti. Međutim, prirodne vremenske serije (koje nisu iz laboratorijskih uvjeta) su nestacionarne. Upravo iz tog razloga u analizi takvih vremenskih serija moramo koristiti metode koje su primjenjive u takvim uvjetima. Da bi procjena ACF za danu seriju bila dobra, fluktuacije samog sustava moramo kvalitetno moći razdvojiti od fluktuacija koje su rezultat vanjskog utjecaja. Upravo zato je za takvu procjenu povoljna DFA metoda, jer je primjenjiva na podatke za koje ne znamo kakav je trend, odnosno ne znamo kakav je šum koji dolazi od vanjskih podražaja.

Ako želimo vremensku seriju x_t, gdje je $t = 1, 2, ...N$ analizirati DFA metodom moramo vremenski niz transformirati u niz y_t

$$y_t = \sum_{k=1}^{t} (x_k - \overline{x}), \tag{3.4}$$

gdje je $\overline{x}$ srednja vrijednost $\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$, a y_t odgovara nasumičnom hodu s povećanjima iznosa $x_k - \overline{x}$. Vremensku os podijelimo u segmente duljine n. Za svaki

segment ν, gdje je $\nu = 1, 2, ...K$ računamo $y_t - p_t$, pri čemu je $t = (\nu - 1)n + 1, (\nu - 1)n + 2, ...\nu n$. p_t je polinom reda q i računamo ga metodom najmanjih kvadrata za točke (t, y_t) u ν-tom segmentu. Za DFA metodu koja koristi uklanjanje trenda polinomom reda q kažemo da je DFA reda q, odnosno DFA-q. Srednja vrijednost varijance $y_t - p_t$ po svim segmentima je kvadrat funkcije fluktuacije:

$$F^2(n) = \frac{1}{K} \sum_{\nu=1}^{K} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=(\nu-1)n+1}^{\nu n} (y_t - p_t)^2 \right). \tag{3.5}$$

Ovaj postupak ponovimo za sve duljine prozora n, $n = 2, 3, ...N/4$ kako bi dobili ovisnost F o duljini prozora n, $F(n)$. Širinu prozora n računamo kao $n = 2q + 2$. Za dovoljno veliki n, funkcija fluktuacije ima oblik $F(n) \sim n^{\alpha}$. Ovakvo ponašanje direktno je povezano sa strukturom korelacije. Za $\alpha = 0,5$ proces je koreliran na kraćim skalama, dok za vrijednosti α između 0,5 i 1, postoje dugodosežne korelacije i $\alpha = 1 - \gamma/2$, pri čemu parametar korelacije γ može poprimati vrijednosti između 0 i 1.

Bijeli šum je naziv za signal kod kojeg su uzorci serijski nekorelirane slučajne varijable s nultom srednjom vrijednošću i konačnom varijancijom. Za ovaj tip podataka pripadni eksponent skaliranja α iznosi $\alpha = 0,5$. Ponekad su moguće korelacije na kraćim skalama, pa α može blago odstupati od spomenute vrijednosti, međutim, za veći broj podataka, α će iznositi 0,5. Vrijednost α za koju vrijedi $0,5 < \alpha \leq 1$ indicira dugodosežne korelacije za koje vrijedi da postoji veća vjerojatnost da će nakon dužeg vremenskog intervala slijediti još jedan duži vremenski interval i obrnuto. S druge strane, ako α poprima vrijednosti između 0 i 0,5, postoji drugi tip korelacije i to takav da će se duži i kraći vremenski intervali naizmjence izmjenjivati. U posebnom slučaju kada α poprima vrijednost 1, signal odgovara $1/f$ šumu, a kada je $\alpha \geq 1$, korelacija postoji, međutim postoje i određena odstupanja. U posebnom slučaju kada je vrijednost $\alpha = 1,5$ imamo tzv. Brownov šum (Brown noise), koji dobijemo integracijom bijelog šuma.

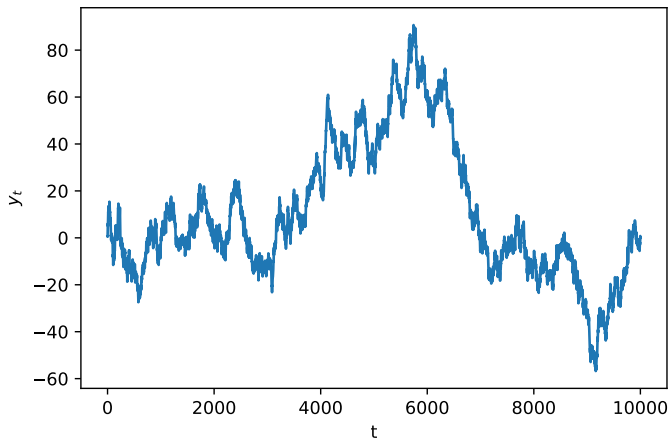
Eksponent skaliranja α govori nam, s druge strane, o „hrapavosti“ vremenske serije i to tako da veći α odgovara glađoj seriji, a manja vrijednost opisuje više hrapavi signal. Sada $1/f$ signal možemo opisati kao kompromis između u potpunosti nepredvidivog bijelog šuma i glatkog Brownovog šuma.

Kada ovisnost F o n prikažemo u log-log grafu, dobivamo linearnu ovisnost koja indicira prisutnost skaliranja. To znači da fluktuacije karakterizira eksponent skaliranja α koji predstavlja nagib pravca u $\log(F(n)) - \log(n)$ grafu. U ovom radu algoritam DFA metode implementirat ćemo u python programskom jeziku (danas standardni izbor u obradi podataka [7]).

```
def dfa(tmp,box,nfit=1):
    xtmp=np.arange(1,box+1);
    chisq=0.0
```

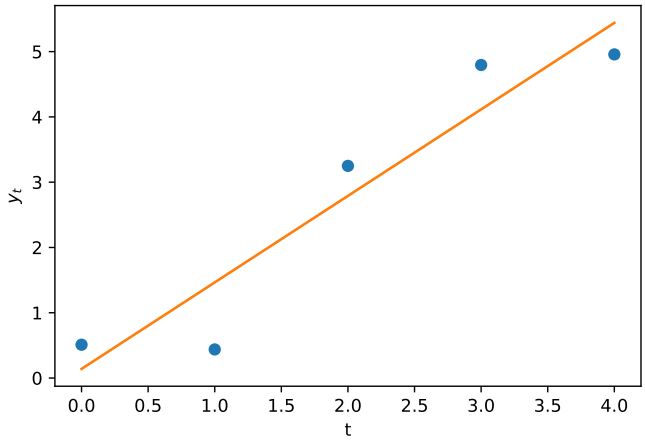
```
    for i in range(len(tmp)-box+1):
        temp=0.0
        ytmp=tmp[i:i+box]
        pc=np.polyfit(xtmp,ytmp,nfit)
        temp = sum((ytmp-np.polyval(pc,xtmp))**2)
        chisq += temp
    return chisq/((len(tmp)-box+1)*box)
```

Promorimo kod implementacije kroz jednadžbu (3.5). Krenimo od neke proizvoljne vremenske serije. Prvi primjer koji ćemo promatrati je vremenski niz sastavljen od nasumičnih vrijednosti iz standardne normalne distribucije. Dobivene varijable kumulativno sumiramo (jednadžba 3.4). Rezultat je prikazan na slici 3.1. Sada odaberemo

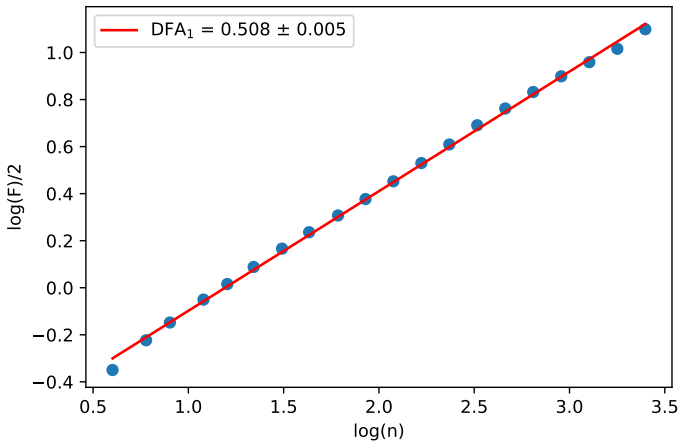


Slika 3.1: Vremenski niz kumulativno sumiranih vrijednosti, y_t, dobivenih prema jednadžbi 3.4 iz vremenskog niza, x_t, 10 000 slučajnih varijabli iz standardne normalne distribucije

veličinu prozora za koju ćemo računati kvadrat funkcije fluktuacije, jednadžba 3.5. Za primjer računa podsume u jednadžbi 3.5 možemo uzeti prozor od prvih 5 točaka niza y_t. Trend za određeni prozor dobivamo tako da kroz odabrane točke provučemo pravac dobiven metodom najmanjih kvadrata (DFA-1), kao što prikazuje slika 3.2. Kada nađemo trend za dani prozor i zbrojimo kvadrate reziduala, pomičemo prozor za jednu vremensku točku na novu poziciju i ponovo na isti način računamo trend. Postupak ponavljamo dok ne dođemo do kraja vremenske serije, a to nam u jednadžbi 3.5 pokazuje prva suma, $\sum_{\nu=1}^{K}$. Na ovaj način usrednjili smo podatke po svim prozorima. Ovu proceduru ponavljamo za sve širine prozora, pri čemu je najveća širina prozora odgovara 1/4 duljine vremenske serije koju analiziramo. Rezultat DFA metode za odabranu širinu prozora prikazan je u log-log grafu na slici 3.3. Nagib dobivenog pravca je $\alpha = 0,508 \pm 0,005$, što je u skladu s teorijskom vrijednošću, $\alpha = 0,5$.



Slika 3.2: Prozor od prvih 5 točaka niza y_t i pravac dobiven metodom najmanjih kvadrata koji u navedenom segmentu predstavlja trend



Slika 3.3: Grafički prikaz ovisnosti funkcije fluktuacije o širini prozora $F(n) - n$ u log-log grafu za vremensku seriju slučajnih brojeva iz standardne normalne distribucije

Obzirom da sustavi koje promatramo mogu biti vrlo kompleksni, uvijek je dobro za testiranje koristiti više procesa koji generiraju vremenske serije, kako bi se provjerila ispravnost dobivenih rezultata. U tu svrhu možemo koristiti ARFIMA proces (eng. fractionally autoregressive integrated moving-average process), pomoću kojeg možemo modelirati procese s dugodosežnim autokorelacijama u stohastičkim varijablama. Vremensku seriju x_t možemo izračunati pomoću

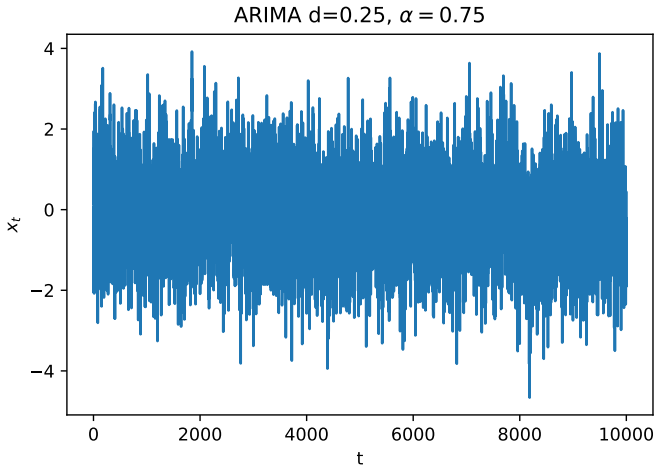
$$x_t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(d) x_{t-n} + \epsilon_t, \tag{3.6}$$

pri čemu vrijedi da parametar skaliranja d poprima vrijednosti između -0,5 i 0,5. ϵ_t predstavlja nezavisno i jednoliko raspodjeljene slučajne varijable. Vrijedi da je srednja vrijednost $\langle \epsilon_t \rangle = 0$ i varijanca $\langle \epsilon_t^2 \rangle = 1$. Težinski faktor $a_n(d)$ definiran je na

sljedeći način:

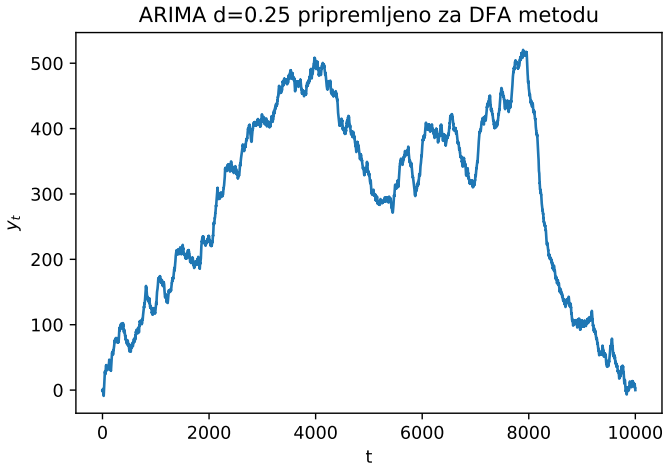
$$a_n(d) = \frac{d\Gamma(n-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(n+1)}, \tag{3.7}$$

gdje Γ označava gama funkciju, a n je vremenska skala. Funkciju autokorelacije za vremensku seriju x_t označavamo s $A(n)$, te vrijedi da je $A(n) \equiv A(x_t, x_{t-n})$. Vremenska serija x_t postaje nasumična za $d = 0$. U sljedećem primjeru uz pomoć ARFIMA procesa generirat ćemo vremensku seriju i provjeriti ispravnost našeg prethodnog rezultata. Vrijednost parametra skaliranja je $d = 0,25$. Bitno je napomenuti da su nagib α i parametar skaliranja d povezani izrazom $\alpha = 0,5 + d$. Zbog ograničenja računalne preciznosti, u stvarnim primjerima nije potrebno raditi beskonačnu sumu, stoga ćemo u našem računu podatke sumirati do $n = 1000$. Na slici 3.4 prikazan je jedan takav niz. Rezultat primjene jednadžbe 3.4 prikazan je na slici 3.5, a rezultat

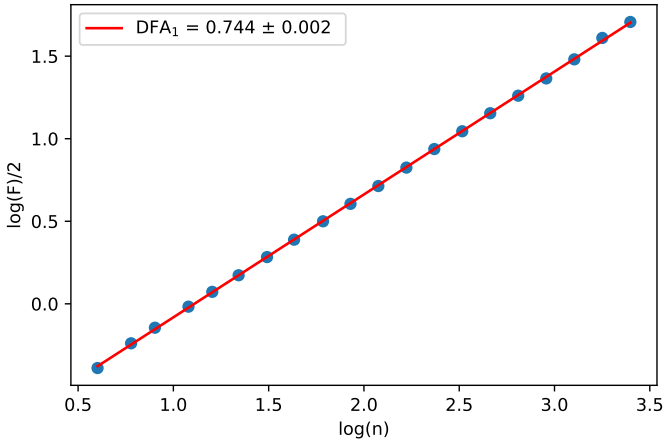


Slika 3.4: Vremenski niz dobiven ARFIMA procesom. Parametar skaliranja je $d = 0,25$

DFA metode na slici 3.6. Vidimo da je vrijednost dobivenog nagiba $\alpha = 0,744 \pm 0,002$, što se dobro slaže s našom ranijom analizom, jer vrijedi da je $\alpha = d + 0,5$. Detaljni pregled implementacije bit će izložen u dodatku A.



Slika 3.5: Vremenski niz kumulativno sumiranih vrijednosti, y_t, dobivenih iz vremenskog niza, x_t, generiranog ARFIMA procesom. Parametar skaliranja d iznosi $d = 0,25$

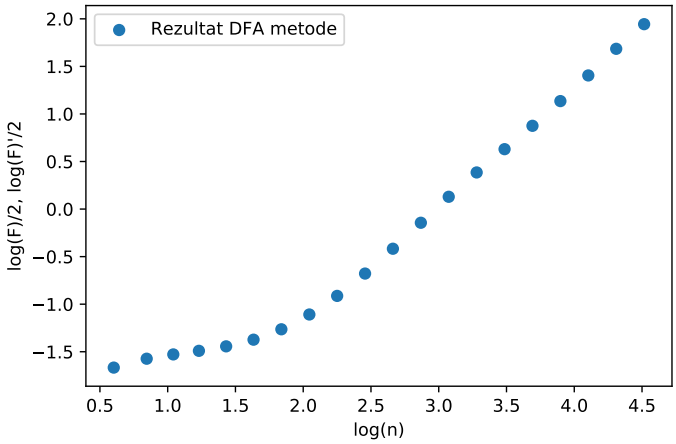


Slika 3.6: Rezultat DFA metode za vremenski niz x_t generiran ARFIMA procesom

3.1 Fenomen prijelaza

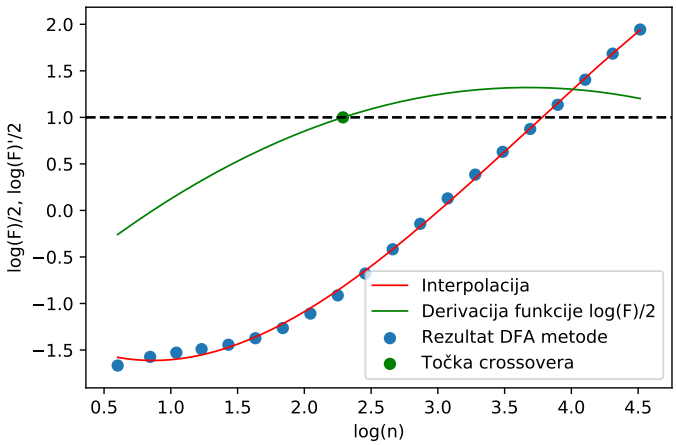
Eksponent skaliranja može nam poslužiti u dijagnostičke svrhe, no problem je što je za takvu analizu potreban velik broj podataka. Obično kada koristimo kraće vremenske serije na njima je vidljiv fenomen prijelaza [8]. Rezultat DFA metode u log-log grafu za jednu vremensku seriju prikazan je na slici 3.7. Jasno se vidi da krivulja mijenja nagib, odnosno, na neki način bismo dobiveni grafički prikaz mogli podijeliti u 2 dijela različitih nagiba koji su međusobno odvojeni područjem prijelaza. Ranije u tekstu spomenuto je da fluktuacije karakterizira eksponent skaliranja α. Dakle, na rezultat DFA metode možemo prilagoditi dva pravca i odrediti njihove nagibe, a ti nagibi su upravo eksponenti skaliranja α_1 i α_2.

Prijelaz iz jednog u drugi režim nalazi se u točki u kojoj je derivacija funkcije po logaritmu širine prozora jednaka 1. Obzirom da analizu radimo s diskretnim poda-



Slika 3.7: Rezultat DFA metode za jedan vremenski niz

cima, koristimo tzv. spline interpolaciju. Kako za obradu podataka koristimo programski jezik python koristit ćemo implementaciju `UnivariateSpline` [9] iz `scipy` paketa. Ovaj paket također može automatski računati derivaciju, što je još jedan razlog odabira istog. Na slici 3.8 prikazana je metoda određivanja točke prijelaza. Točku



Slika 3.8: Rezultat DFA metode i interpolacija. Koordinata točke prijelaza određena je točkom u kojoj derivacija funkcije $\log(F(n))/2$ po logaritmu širine prozora iznosi 1.

prijelaza lako možemo odrediti tražeći rješenje jednadžbe u kojoj derivacija funkcije $\log(F(n))/2$ po logaritmu širine prozora iznosi 1.
Kako bismo točku prijelaza brže i jednostavnije izračunali, napravili smo funkciju koja kao argument uzima redni broj vremenske serije (osobe), a kao rezultat daje koordinatu prijelaza u logaritamskoj skali.

```
def crossover(prsn):
```

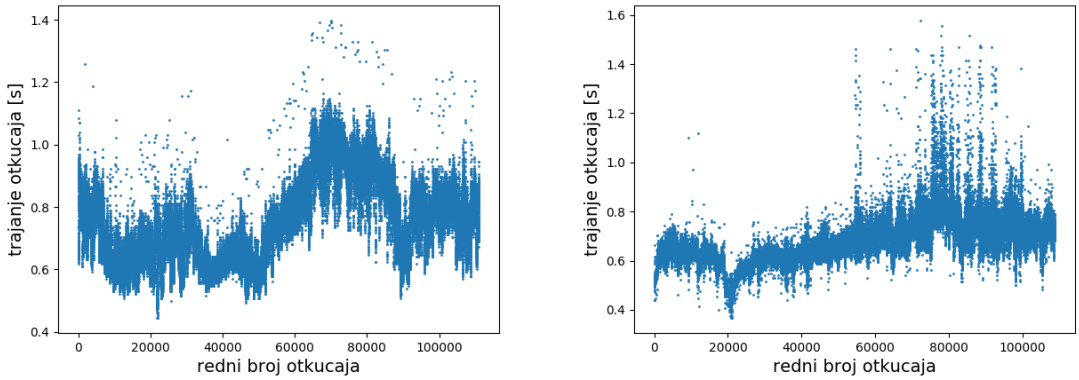
```
    ex=np.log10(dfa[:, 2*prsn])
    ey=np.log10(dfa[:, 2*prsn+1])/2
    spl = UnivariateSpline(ex, ey)
    xs = np.linspace(ex[0], ex[-1], 1000)
    dspl=spl.derivative()
    try:
        t=optimize.brentq(lambda x: dspl(x)-1, np.min(ex),np.max(ex))
    except:
        return 0
    return t
```

Budući da nas zanimaju eksponenti skaliranja, moramo odrediti nagibe za dva različita područja. Metodom najmanjih kvadrata odredit ćemo nagibe pravaca u dva područja odvojena točkom prijelaza. Nagibi su automatski određivani uz pomoć funkcije `slopes`, čiji je algoritam prikazan niže u tekstu.

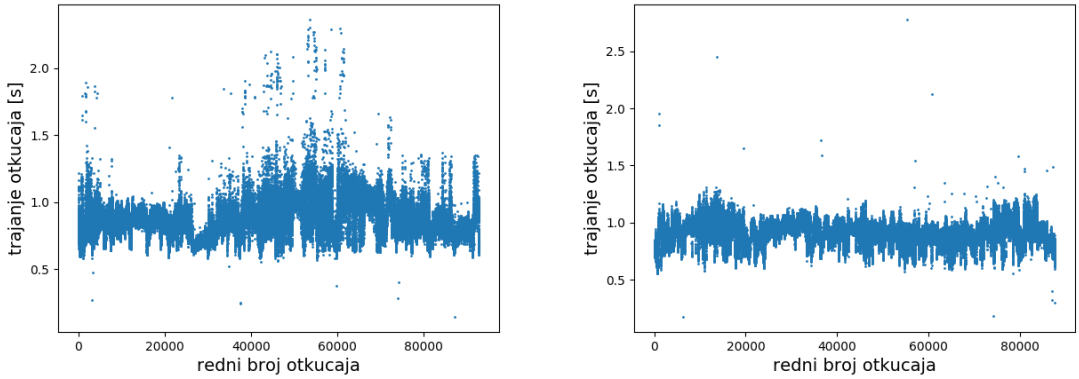
```
def slopes(prsn):
    slope=0
    ex=np.log10(dfa[:, 2*prsn])
    ey=np.log10(dfa[:, 2*prsn+1])/2
    cross=crossover(prsn)
    if (cross!=0):
        ex1=ex[ex[:] < cross]
        cross=len(ex1)
        xs = np.linspace(ex[0], ex[-1], 1000)
        pf=np.polyfit(ex[:cross], ey[:cross], 1)
        pf1=np.polyfit(ex[cross:], ey[cross:], 1)
        slope=pf[0],pf1[0]
    return slope
```

U ovom radu analizirane su vremenske serije zdravih ispitanika, osoba s kongestivnim zatajenjem srca i osoba s asimptomatskom ventrikularnom aritmijom prije i nakon terapije. Za analizu podataka, iz EKG zapisa, odnosno QRS-kompleksa, izvađeni su podaci o trajanju otkucaja. Na slikama 3.9 i 3.10 prikazane su vremenske serije zdravih ispitanika, ispitanika s kongestivnim zatajenjem srca, te ispitanika s asimptomatskom ventrikularnom aritmijom prije i nakon uzimanja lijeka.

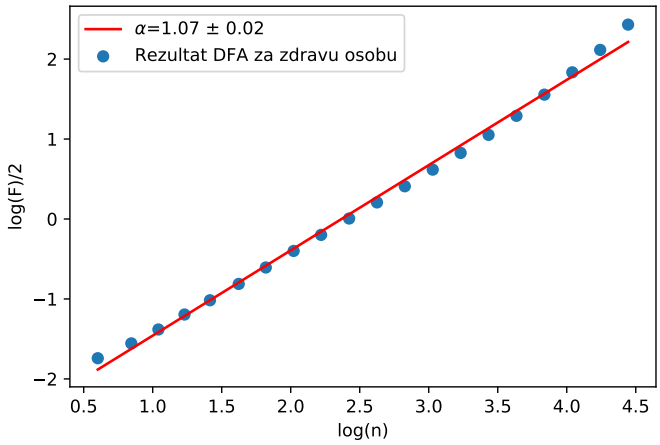
Rezultat DFA metode za zdrave osobe prikazan je na slici 3.11, a za osobe s kongestivnim zatajenjem na slici 3.12. Vidimo da je kod zdravih ispitanika nagib pravca α otprilike 1, što znači da postoje dugodosežne korelacije. U slučaju ispitanika s kongestivnim zatajenjem jasno se vidi fenomen prijelaza koji upućuje na različito ponašanje na kraćim i dužim skalama.



Slika 3.9: Grafički prikaz trajanja otkucaja u ovisnosti o rednom broju otkucaja za zdravog ispitanika (lijevo) i ispitanika s kongestivnim zatajenjem srca (desno).

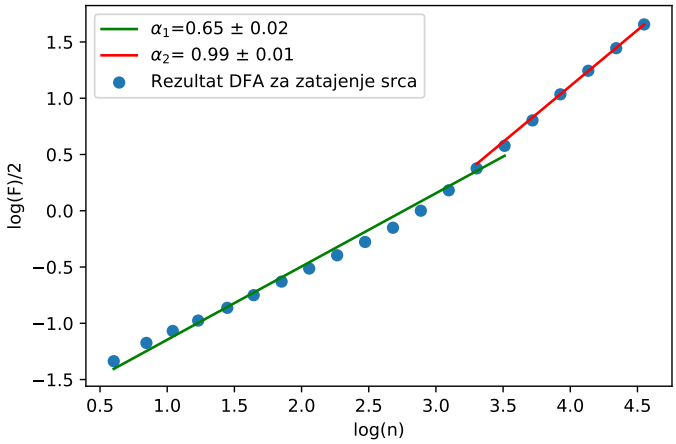


Slika 3.10: Grafički prikaz trajanja otkucaja u ovisnosti o rednom broju otkucaja za ispitanika s aritmijom prije uzimanja lijeka (lijevo) i nakon uzimanja lijeka (desno).



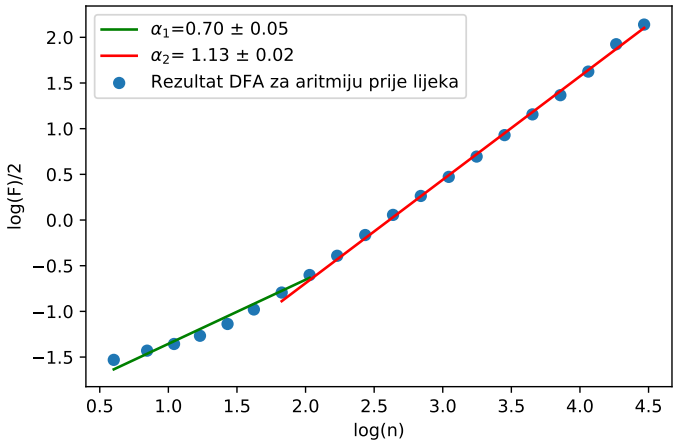
Slika 3.11: Rezultat DFA metode za zdravu osobu.

Na slikama 3.13, 3.14 i 3.15 prikazana su 3 primjera s aritmijom prije uzimanja terapije. U svim primjerima je izražen fenomen prijelaza. Nagibi α_1 i α_2 su također pri-



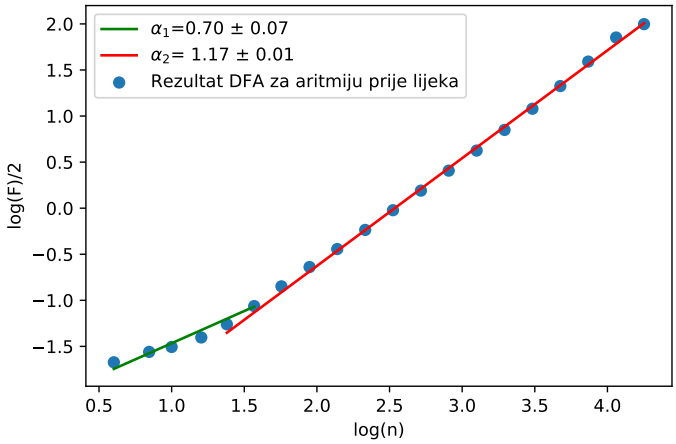
Slika 3.12: Rezultat DFA metode za osobu s kongestivnim zatajenjem srca.

bližno jednaki iz čega vidimo da postoji konzistentnost u potpisu patologije. Također, fenomen prijelaza se u svim primjerima događa približno za istu širinu prozora.

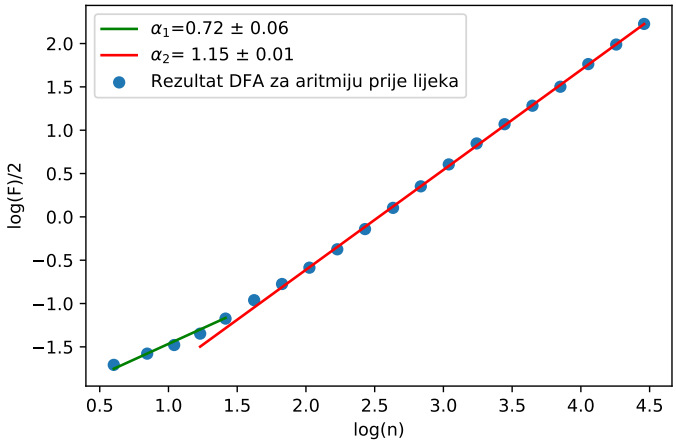


Slika 3.13: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom prije terapije.

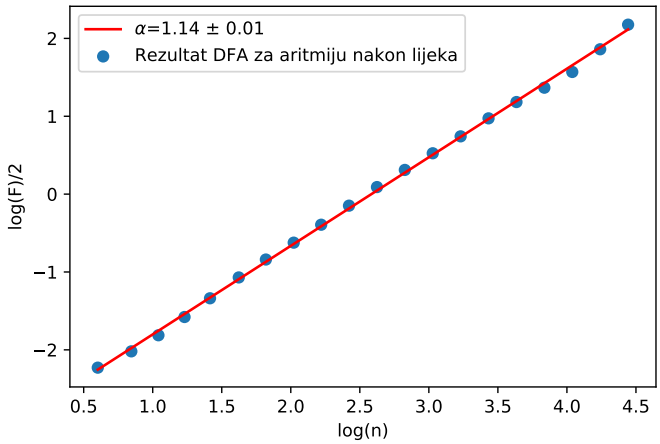
Slike 3.16, 3.17 i 3.18 prikazuju 3 različita slučaja nakon uzimanja terapije. Vidimo da djelovanje lijeka može rezultirati uniformnim ponašanjem na svim skalama (slika 3.16), no moguće je i drugačije ponašanje. Na slici 3.17 vidimo da postoji fenomen prijelaza, no razlika u nagibima, odnosno eksponentima skaliranja je gotovo zanemariva. Na slici 3.18 fenomen prijelaza je jače izražen. Nagib α_1 na kraćim skalama indicira dugodosežne korelacije, a nagib α_2 pokazuje korelacije uz određena odstupanja.



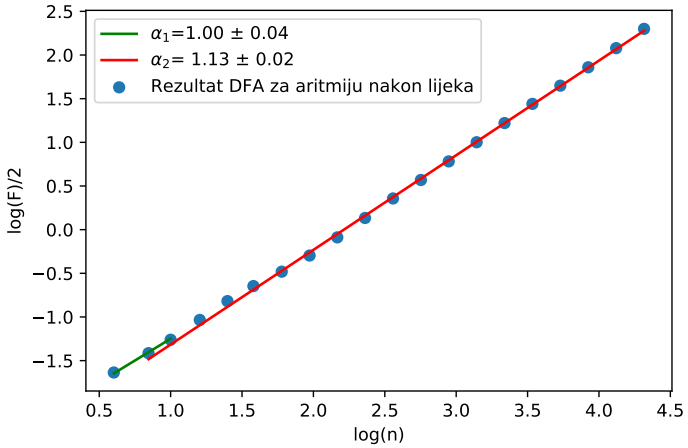
Slika 3.14: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom prije terapije.



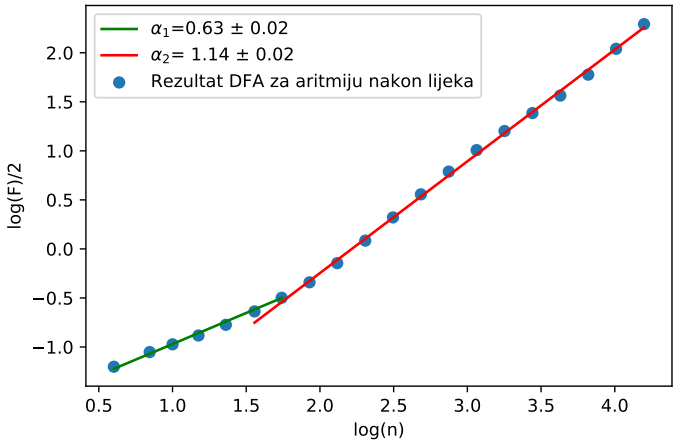
Slika 3.15: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom prije terapije.



Slika 3.16: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom nakon terapije.



Slika 3.17: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom nakon terapije.



Slika 3.18: Rezultat DFA metode za osobu s aritmijom nakon terapije.

4 Entropija kao mjera kompleksnosti

Entropija je ekstenzivno svojstvo termodinamičkog sustava povezano s brojem mikroskopskih konfiguracija koje utječu na makroskopske veličine, te na taj način karakteriziraju sustav na makroskopskoj razini. Makroskopski sustavi imaju velik broj mogućih mikrostanja Ω ($N \approx 6 \cdot 10^{23}, \Omega \approx e^N$) koja možemo razmatrati kao jednako vjerojatna [10]. Pod tom pretpostavkom entropiju S možemo računati kao prirodni logaritam mikrostanja Ω pomnožen s Boltzmannovom konstantom k_B:

$$S = k_B \ln \Omega \tag{4.1}$$

Obzirom da je entropija funkcija stanja, ona ovisi samo o početnom i konačnom stanju sustava.
Drugi zakon termodinamike kaže da se entropija izoliranog sustava ne može smanjiti. To znači da sustav spontano ide u ravnotežno stanje koje odgovara maksimumu entropije. Smanjenje entropije moguće je jedino lokalno, no entropija cijelog sustava se mora povećati. Procesi u kojima se entropija poveća su ireverzibilni, a kod reverzibilnih ona ostaje nepromjenjena i vrijedi $\Delta S = 0$. Obzirom da je određena brojem slučajnih mikrostanja, entropija je povezana s količinom dodatnih informacija koje su potrebne da bismo mogli specificirati određeno fizikalno stanje sustava, te mu dati određene makroskopske specifikacije. Zbog toga kažemo da je entropija mjera nereda u sustavu.

1803. godine Lazare Carnot je objavio da se svaki prirodni proces kreće u smjeru disipacije korisnih oblika energije, a 21 godinu kasnije njegov sin, Sadi Carnot je otkrio da je pomoću toplinskog stroja moguće dobiti rad prijelazom topline s toplijeg na hladnije tijelo. Također, tvrdio je da ne postoji nikakva promjena u radnoj tvari u slučaju kada se radna tvar, npr. para, na kraju ciklusa vrati u početno stanje. 1850-ih i 1860-ih Rudolf Clausius suprotstavlja se ideji S. Carnota i promjeni stanja radne tvari daje matematičku interpretaciju. Ispituje gubitak korisnih oblika energije tijekom obavljanja rada (toplina dobivena trenjem) i kaže da je entropija gubitak te energije u termodinamičkom sustavu ili radnoj tvari tijekom promjene stanja.
U drugoj polovici 19. stoljeća L. Boltzmann, J.W. Gibbs i J.C. Maxwell su entropiji dali statističko značenje. 1870-ih Boltzmann je pokazao da se entropija može razumjeti kroz gibanje molekula koje čine neki fizikalni sustav. U svom radu analizirao je statističko ponašanje mikroskopskih komponenata sustava i pokazao da je statistička definicija entropije ekvivalentna termodinamičkoj. Razlika te dvije definicije bila je u konstanti, koja se od tada naziva Boltzmannova konstanta. Termodinamička definicija odgovara eksperimentalnoj definiciji, dok statistička daje objašnjenje i omogućuje bolje razumjevanje koncepta entropije.
Ako imamo dani set makroskopskih varijabli, entropija je mjera vjerojatnosti da je sustav zauzeo različita mikrostanja. Što je više takvih mogućih stanja, od kojih svako ima određenu vjerojatnost da bude ispunjeno, veća je entropija. Dakle, entropija je

mjera koja nam govori na koliko načina neki sustav može biti organiziran, odnosno logaritamska mjera broja stanja koja mogu biti zauzeta s određenom vjerojatnošću:

$$S = -k_B \sum_i p_i \log\, p_i \tag{4.2}$$

Ovaj izraz možemo zapisati na ekvivalentan način pomoću operatora očekivanja

$$S = -k_B E_i(\log\, p_i), \tag{4.3}$$

pri čemu je E_i očekivana vrijednost logaritma vjerojatnosti da će neko mikroskopsko stanje biti zauzeto, a k_B je Boltzmannova konstanta ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}). Indeks stanja označen je s i, a p_i je vjerojatnost da je sustav zauzeo i-to mikrostanje. Ako je svako stanje jednako vjerojatno i vrijedi da je $p_i = 1/\Omega$, gdje je Ω broj mikrostanja, tada se izraz 4.3 svodi na oblik

$$S = -k_B \log \Omega \tag{4.4}$$

Također, možemo reći da je entropija mjera neodređenosti sustava. Kažemo da je ravnotežno stanje stanje maksimalne entropije, jer smo izgubili sve informacije o početnim uvjetima, osim onih koje nose očuvane varijable. Pogledajmo sada kako entropiju možemo definirati za vremenske serije.

Ako je X set varijabli s vrijednostima Θ, tada za vremensku seriju $\{X_i\} = \{X_1, ..., X_n\}$ s vrijednostima $\Theta_1, ..., \Theta_n$ vrijedi:

$$H_n = H(X_1, X_2, ..., X_n) = -\sum_{X_1 \epsilon \Theta_1} ... \sum_{X_n \epsilon \Theta} p(x_1, ..., x_n) \log\, p(x_1, ...x_n). \tag{4.5}$$

Primjenom lančanog pravila na izraz 4.5, dobivamo.

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, ..., X_1) \tag{4.6}$$

Konačno, promjenu, odnosno porast entropije nekog sustava možemo izračunati pomoću:

$$h = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{n}. \tag{4.7}$$

U slučaju kada imamo D-dimenzionalni dinamički sustav, fazni prostor podijelimo na elemente ϵ^D, a stanje sustava mjerimo u intervalima δ. U tom slučaju će $p(k_1, k_2, ..., k_n)$ biti vjerojatnost da je sustav u stanju k u trenutku $t = \delta$, k_2 u trenutku $t = 2\delta$,..., k_n u trenutku $t = n\delta$.

Kolmogorov-Sinai (KS) entropija definirana je kao

$$H_{KS} = -\lim_{\delta \to 0} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\delta} \sum_{k_1 ... k_n} p(k_1 ... k_n) \log\, p(k_1 ... k_n) \tag{4.8}$$

$$H_{KS} = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\delta} H_n, \tag{4.9}$$

a u slučaju kada imamo stacionarni proces, vrijedi da je

$$H_{KS} = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} (H_{n+1} - H_n). \tag{4.10}$$

Stanje sustava u trenutku t_i djelomično je određeno ranijim trenucima t_1, t_2,..., t_{i-1}, a svako novo stanje nosi dodatne informacije. KS entropija mjeri smanjenje neprecizznosti.
Numerički entropije možemo računati samo za neki konačni n, a ako je n jako velik u odnosu na vremensku seriju, nema smisla računati entropiju, jer $H_n \to 0$.
Donju granicu KS entropije predstavlja Grassberger-Procaccia entropija. Ako je $\{X_i\} = \{x_1, ..., x_i, ...x_N\}$ vremenska serija duljine N, tada postoje vektori duljine m

$$u_m(i) = \{x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+m-1}\}, \tag{4.11}$$

za koje vrijedi $1 \leq i \leq N - m + 1$. Broj vektora $u_m(j)$ u blizini $u_m(i)$ označit ćemo s $n_i^m(r)$. To znači da vrijedi $d[u_m(i), u_m(j)] \leq r$, pri čemu je d Euklidski razmak. Vjerojatnost da je vektor $u_m(j)$ u blizini vektora $u_m(i)$ računamo kao

$$C_i^m(r) = \frac{n_i^m(r)}{N - m + 1}, \tag{4.12}$$

a vjerojatnost da su 2 vektora razmaknuta za udaljenost manju od r pomoću

$$C_m(r) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} C_i^m(r). \tag{4.13}$$

Grassberger-Procaccia entropiju sada možemo izračunati na sljedeći način:

$$K_2 = \lim_{N \to \infty} \lim_{m \to \infty} \lim_{r \to 0} -\ln[C^{m+1}(r) - C^m(r)]. \tag{4.14}$$

Eckmann i Ruelle su razmatrajući udaljenost između 2 vektora kao maksimalnu apsolutnu vrijednost između njihovih komponenti, definirali funkciju

$$\phi^m(r) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln C_i^m(r). \tag{4.15}$$

Vrijedi da je:

$$d[u_m(i), u_m(j)] = \max\{\mid x(i+k) - x(j+k) \mid : 0 \leq k \leq m-1\}. \tag{4.16}$$

Ako su 2 niza blizu jedan drugom u m točaka, onda će oni biti blizu i kada dodamo još 1 točku:

$$\phi^{m+1}(r) - \phi^m(r) \approx \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln \left[\frac{C_i^m(r)}{C_i^{m+1}(r)} \right]. \tag{4.17}$$

Predlažu računanje KS entropije preko:

$$H_{ER} = \lim_{N \to \infty} \lim_{m \to \infty} \lim_{r \to 0} [\phi^m(r) - \phi^{m+1}(r)]. \tag{4.18}$$

Izraz (4.18) služi za klasifikaciju niže dimenzionalnih kaotičnih sustava i ne funkcionira kada postoji šum.
Za analizu kratkih vremenskih serija u kojima je prisutan šum, S. M. Pincus je uveo aproksimativnu entropiju, $A_E(m, r)$:

$$A_E(m, r) = \lim_{N\to\infty} [\Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)], \tag{4.19}$$

a u statistici se njezina vrijednost računa pomoću

$$A_E(m, r, N) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r). \tag{4.20}$$

Aproksimativna entropija (eng. approximate entropy, dalje u tekstu ApEn) je tehnika pomoću koje procjenjujemo regularnost i nepredvidivnost fluktuacija u vremenskim serijama [11]. Ako se određeni obrasci fluktuacija ponavljaju, vremenska serija je pravilnija i vrijednost A_E je niža. Veća vrijednosti A_E upućuje na nepravilnije i manje predvidive vremenske serije. U ovom radu algoritam aproksimativne entropije implementirali smo u python programskom jeziku.

```
def ApEn(U, m, r):

    def _maxdist(x_i, x_j):
        return max([abs(ua - va) for ua, va in zip(x_i, x_j)])

    def _phi(m):
        x = [[U[j] for j in range(i, i + m - 1 + 1)]
            for i in range(N - m + 1)]
        C = [len([1 for x_j in x
            if _maxdist(x_i, x_j) <= r])/(N - m + 1.)
            for x_i in x]
        return (N - m + 1.0)**(-1) * sum(np.log(C))

    N = len(U)

    return abs(_phi(m+1) - _phi(m))
```

Modifikacija aproksimativne entropije je entropija uzorka (eng. sample entropy, dalje u tekstu SampEn), a njezina prednost u odnosu na aproksimativnu entropiju je činjenica da manje ovisi o duljini vremenske serije i konzistentna je na širem rasponu mogućih vrijednosti r, m i N:

$$S_E(m, r) = \lim_{N\to\infty} -\ln \frac{U^{m+1}(r)}{U^m(r)}, \tag{4.21}$$

odnosno

$$S_E(m, r, N) = -\ln \frac{U^{m+1}(r)}{U^m(r)}. \tag{4.22}$$

Kod izračuna aproksimativne entropije "template" vektor uspoređuje se s drugim vektorima, ali i sa samim sobom, što rezultira manjom vrijednošću A_E, zbog čega u interpretaciji signala zaključujemo da je on pravilniji nego što zbilja jest. Kod SampEn nema te komparacije vektora sa samim sobom, pa možemo dobiti bolji uvid u pravilnost signala, [12]. SampEn koristi se za procjenu kompleksnosti vremenskih serija i dijagnostiku patoloških stanja. U ovom radu koristili smo javno dostupan kod napisan u C programskom jeziku [12]. Iako implementacija u Python programskom jeziku nije efikasna zbog dugotrajnog računanja, navodimo ju jer je jednostavna za razumijevanje.

```
def SampEn(U, m, r):

    def _maxdist(x_i, x_j):
        result = max([abs(ua - va) for ua, va in zip(x_i, x_j)])
        return result

    def _phi(m):
        x = [[U[j] for j in range(i, i + m - 1 + 1)]
        for i in range(N - m + 1)]
        C = [len([1 for j in range(len(x)) if i != j
        and _maxdist(x[i], x[j]) <= r]) for i in range(len(x))]
        return sum(C)

    N = len(U)

    return -np.log(_phi(m+1) / _phi(m))
```

Aproksimativnu entropiju možemo računati i pomoću

$$A_E(m, r, N) \approx \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} \ln \frac{n_i^m}{n_i^{m+1}}, \tag{4.23}$$

a entropiju uzorka pomoću

$$S_E(m, r, N) = \ln \frac{\sum_{i=1}^{N-m} n_i'^m}{\sum_{i=1}^{N-m} n_i'^{m+1}} \tag{4.24}$$

ApEn i SampEn mjere stupanj nasumičnosti vremenske serije, međutim, ne postoji direktna veza između pravilnosti i kompleksnosti signala. Povećanje entropije obično je povezano s povećanjem kompleksnosti, no to ne mora uvijek vrijediti – potpuno neuređeni sustavi (kao i savršeno uređeni) smatraju se niskokompleksnima, iako je njihova entropija maksimalna. Mjere entropije imaju najveću vrijednost za slučajne nekorelirane signale (bijeli šum) koji nisu predvidivi, ali ni strukturalno kompleksni.

4.1 Višeskalna entropija

Obzirom da biološki sustavi imaju prostornu i vremensku komponentu, kompleksnost takvih signala proteže se na više skala, pa za analizu koristimo višeskalnu entropiju (eng. multiscale entropy, dalje u tekstu MSE).
Pretpostavimo da imamo 1-dimenzionalnu diskretnu vremensku seriju $\{x_1, ...x_i, ...x_N\}$, koju podijelimo u prozore duljine τ. Kada usrednjimo podatke u svakom prozoru, dobijemo vremensku seriju $\{y^{(\tau)}\}$, čija je duljina jednaka duljini originalne vremenske serije podijeljena s τ (u slučaju kada je $\tau = 1$, dobivena vremenska serija je jednaka originalnoj). Elemente vremenske serije $\{y^{(\tau)}\}$ računamo na sljedeći način:

$$y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x_i, 1 \leq j \leq \frac{N}{\tau} \tag{4.25}$$

Za svaku dobivenu vremensku seriju (svaka vrijednost τ daje specifičnu vremensku seriju) sada računamo S_E i rezultate prikažemo grafički u $S_E - \tau$ grafu. Dobivene MSE krivulje koristimo za usporedbu relativne kompleksnosti normalizirane vremenske serije koje se temelje na sljedećim smjernicama:

a) ako su za većinu skale vrijednosti entropije za početnu vremensku seriju veće nego za dobivenu, onda je početna vremenska serija kompleksnija od dobivene vremenske serije

b) monotoni pad vrijednosti entropije indicira da originalni signal sadrži informacije samo na najmanjoj skali.

Kako bismo testirali implementaciju koda, MSE analizu primijenili smo na vremensku seriju (N=20 000) slučajnih varijabli iz normalne raspodjele (bijeli šum), slika 4.1. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i pripadne pogreške, no pogreške su vrlo male, pa se ne vide na grafičkom prikazu. Za navedeni slučaj rezultate možemo provjeriti pomoću analitičkog izraza

$$S_E^{\text{WN}}(\tau) = -\ln \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{8\pi}} \left[\text{erf}\left(\frac{x+r}{\sqrt{2/\tau}} \right) - \text{erf}\left(\frac{x-r}{\sqrt{2/\tau}} \right) \right] e^{-\tau x^2/2} dx \tag{4.26}$$

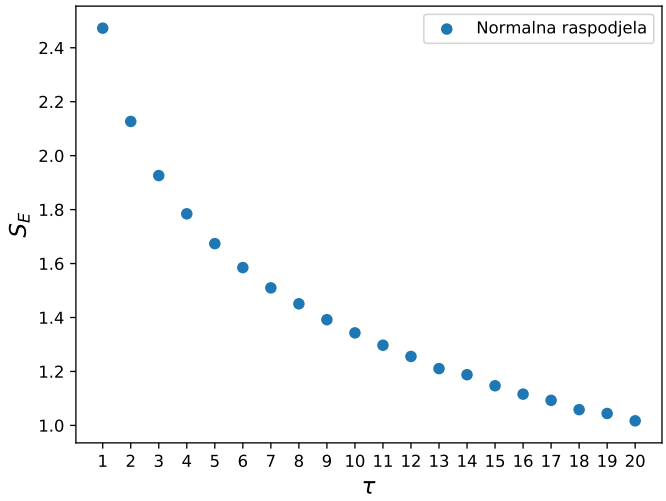
Vidimo da se vrijednosti monotono smanjuju od $S_E^{\text{WN}}(1) = 2,466$ do $S_E^{\text{WN}}(20) = 1,06$. Vrijednosti dobivene iz analitičke formule za istu vrijednost $m = 2$ i $r = 0.15$, kao i u ostatku rada, iznose $S_E^{\text{WN}}(1) = 2,471$ i $S_E^{\text{WN}}(20) = 1,01$.

Zhang je definirao kompleksnost kao integral svih entropija koje imaju ovisnost o τ:

$$K = \int_1^N d\tau H(\tau). \tag{4.27}$$

Za diskretni signal vrijedi:

$$K = \sum_{i=1}^{N} H(i), \tag{4.28}$$



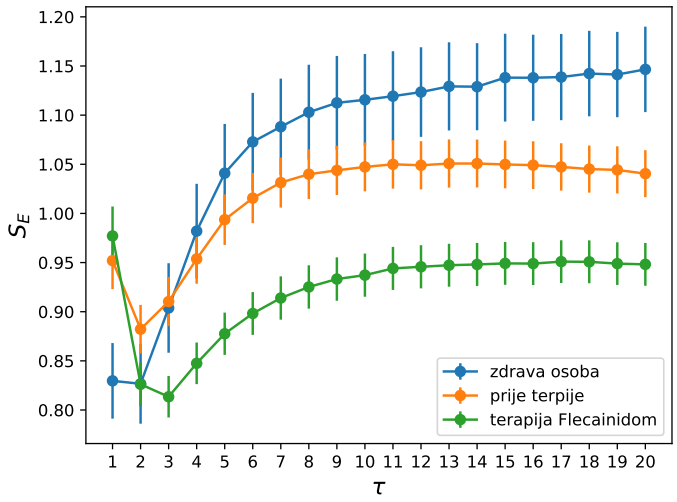
Slika 4.1: MSE analiza za vremensku seriju duljine N=20 000 slučajnih brojeva iz normalne distribucije. Parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.

pri čemu $N \to \infty$, no realne vremenske serije su konačne, pa u računu ne radimo sumaciju do $N = \infty$. Obzirom da je za različite entropije moguće dobiti istu vrijednosti K, ne računamo kompleksnost za svaku pojedinu vremensku seriju, već se fokusiramo na analizu MSE krivulja. Osim toga, MSE krivulje mogu dati informacije o kontrolnim mehanizmima koji karakteriziraju određenu fiziološku dinamiku [13]. Mjere entropije daju nam informaciju o varijanci vremenske serije i korelacijskim svojstvima. Vrijedi da veći set nasumičnih varijabli ima veću varijancu i veću vrijednost entropije, ali uglavnom nije moguće razlučiti doprinos od standardne devijacije i doprinos od korelacijskih svojstava. Više nasumični signali i oni s većom varijabilnošću teže većoj entropiji, ali je rezultat uvijek kombinacija ta dva faktora. Bitno je naglasiti da je entropija periodičnog signala uvijek manja od entropije nasumičnog signala, neovisno o varijanci, jer je vjerojatnost da se određeni data point pojavi kod periodičnog signala jednaka 1, iz čega slijedi $\log(1) = 0$, pa je entropija jednaka nuli. Višeskalna entropija koristi srednju vrijednosti fluktuacija kao reprezentativno statističko svojstvo za svaki pojedini prozor i mjeri nepravilnosti u dinamici između 2 susjedna prozora.

4.2 Primjena na dinamiku srčanog ritma

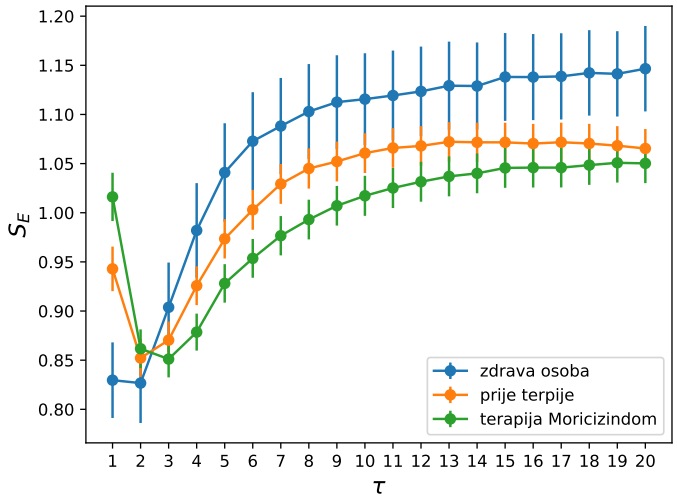
Opisanu metodu primijenili smo na podatke preuzete iz [14]. Analiza uključuje zdrave osobe i osobe koje su imale miokardalni infarkt, te ispituje djelovanje pojedinih antiaritmijskih lijekova na suzbijanje aritmije i smanjenje smrtnosti od iste nakon infarkta. Analizirana je 761 vremenska serija duljine 20 000 podataka, od čega su 272 osobe koristile lijek Encainide, 274 osobe Moricizine i 215 osoba Flecainide. Zdravih ispitanika bilo je 54, što je relativno mali uzorak u odnosu na broj

ispitanika koji su koristili lijekove protiv aritmije, a 29 ispitanika je imalo kongestivno zatajenje srca. Na slici 4.2 prikazana je MSE analiza za zdrave osobe, te osobe koje su koristile lijek Flecainide. Srednja vrijednost entropije uzorka kod normalnog



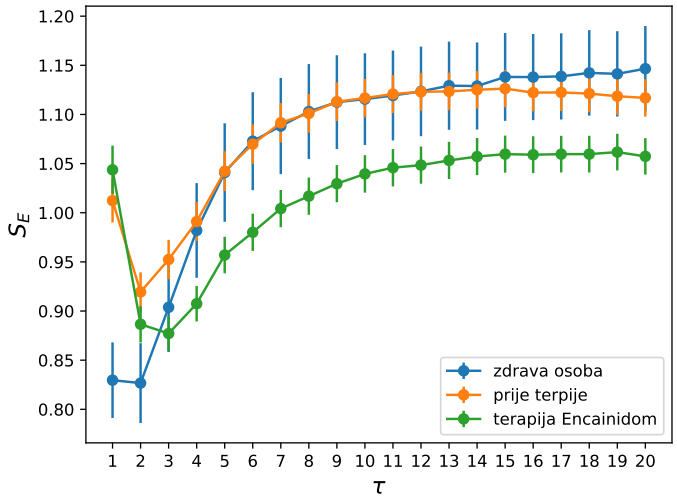
Slika 4.2: MSE analiza za 20 000 točaka vremenske serije zdravih osoba i osoba s aritmijom prije i nakon uzimanja lijeka Flecainide. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i standardna devijacija, a parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.

srčanog ritma je relativno niska na malim skalama, dok na većim dostiže maksimum i poprima približno konstantu vrijednost. Ako pogledamo vrijednosti za $\tau = 1$, vidimo da je vrijednost S_E za zdravu osobu najmanja, a na većim skalama ona ima najveću vrijednost, što nam jasno govori da tradicionalne metode računanja SampEn vrijednosti nisu davale dobre rezultate. Razlika u entropiji na malim skalama posljedica je modulacije srčanog ritma zbog disanja (respiratorna sinusna aritmija), koju MSE metoda na većim skalama filtrira. MSE metoda daje veće vrijednosti S_E za dinamiku zdrave osobe, što se slaže s teorijskom tvrdnjom da su takve vremenske serije kompleksnije od onih koje odgovaraju određenim patološkim stanjima. Iz prikaza S_E prije i nakon korištenja terapije Flecainideom vidimo da kvalitativno oblik MSE krivulje ostaje isti, no već na vrlo malim skalama izraženo je smanjenje vrijednosti entropije, odnosno smanjenje kompleksnosti vremenskih serija. To znači da lijek ima suprotni učinak od onog koji se želio postići terapijom, odnosno, narušava sposobnost srca da radi u režimu normalnog sinusnog ritma.
Na slici 4.3 prikazane su mjere entropije osoba koje su koristile Moricizine u usporedbi sa zdravim osobama. Terapija Moricizineom ima sličan efekt. Na skali $\tau > 2$ vrijednosti entropije nakon uzimanja lijeka padaju ispod vrijednosti entropije prije terapije, što znači da se vremenskoj seriji smanjuje kompleksnost. Efekt je nešto slabiji nego kod terapije Flecainideom, no i u ovom slučaju djelovanje lijeka je suprotno od očekivanog.
Treća skupina ispitanika koristila je terapiju Encainideom, a grafički prikaz $S_E - \tau$ pri-

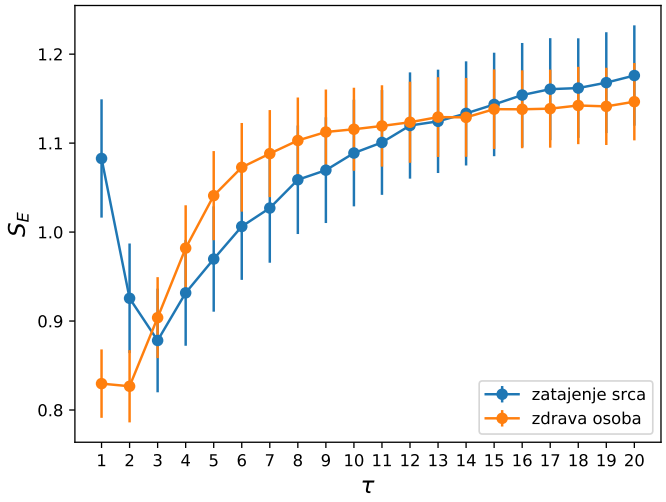


Slika 4.3: MSE analiza za 20 000 točaka vremenske serije zdravih osoba i osoba s aritmijom prije i nakon uzimanja lijeka Moricizine. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i standardna devijacija, a parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.

kazan je na slici 4.4. Vidimo da je vrijednost entropije za osobe s aritmijom na malim skalama veća od vrijednosti entropije za zdrave osobe, no ona vrlo naglo pada. MSE krivulja prije terapije ima minimum za $\tau = 2$, a nakon terapije za $\tau = 3$. Oblik krivulje prije i nakon terapije se ne mijenja, ali na većim skalama jasno vidimo pomak prema nižim vrijednostima entropije, što kao i u ranije navedenim primjerima znači da je lijek smanjio kompleksnost srčanog ritma. Na slici se također vidi da entropija kod zdravih ispitanika dostiže maksimum, nakon čega se stabilizira, dok entropija kod osoba s aritmijom nakon maksimuma počinje blago padati.
Usporedba MSE krivulja zdravih ispitanika i ispitanika s kongestivnim zatajenjem srca (za 20 000 točaka) prikazana je na slici 4.5. Na malim skalama vrijednost S_E je ponovo manja kod normalnog sinusnog ritma, nakon čega vidimo povećanje vrijednosti entropije za zdravo srce. Minimum krivulje događa se za $\tau = 3$, a na većim skalama vrijednost S_E se kreće malo iznad 1,1. Entropija uzorka kod ispitanika s kongestivnim zatajenjem srca ima najmanju vrijednost za $\tau = 2$, nakon čega se povećava. Između $\tau = 2$ i $\tau = 13$ vrijednost S_E za zdravo srce je veća, no nakon $\tau = 13$ vrijednosti S_E su veće kod osoba s kongestivnim zatajenjem srca. Ovakav rezultat posljedica je činjenice da smo analizirali smo dio vremenske serije (20 000 točaka), a ne cijelu.
Ako pogledamo MSE krivulje za cijeli niz, slika 4.6, vidimo da su vrijednosti entropije manje kod zdravih ispitanika, nego kod onih s kongestivnim zatajenjem. Što je vremenski niz koji promatramo veći, vrijednosti S_E se sve više smanjuju, a za dovoljno veliki n teže u 0. Upravo zbog toga vidimo smanjenje maksimalne vrijednosti S_E kod zdravih ispitanika. Zanimljivo je da ovakav trend ne vidimo kod ispitanika s kongestivnim zatajenjem. MSE krivulja za kongestivno zatajenje na malim skalama

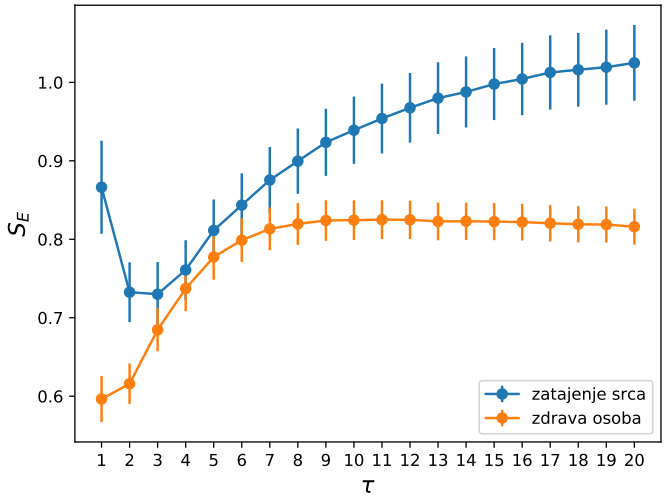


Slika 4.4: MSE analiza za 20 000 točaka vremenske serije zdravih osoba i osoba s aritmijom prije i nakon uzimanja lijeka Encainide. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i standardna devijacija, a parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.



Slika 4.5: MSE analiza za 20 000 točaka vremenske serije zdravih osoba i osoba s kongestivnim zatajenjem srca. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i standardna devijacija, a parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.

ima nagli pad, nakon čega kontinuirano raste. Najveća razlika u vrijednostima entropije ove dvije skupine ispitanika postoji za najveću skalu, $\tau = 20$, a maksimum S_E vrijednosti kod zdravih ispitanika postoji za $\tau \approx 8$ i iznosi $S_E \approx 0.8$.



Slika 4.6: MSE analiza za cijeli vremenski niz zdravih osoba i osoba s kongestivnim zatajenjem srca. Na slici su prikazane srednje vrijednosti i standardna devijacija, a parametri m i r iznose $m = 2$ i $r = 0.15$.

5 Metodički dio

5.1 Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike

Nastava općenito, pa tako i nastava fizike, je zapravo oblik komunikacije, jer nastavnik komunicira nastavne sadržaje s učenicima. Obzirom da fizika kao znanost zahtijeva razumijevanje, te primjenu i povezivanje određenih zakona i koncepata koji su često zahtjevni i apstraktni, potrebno je razvijati znanstveni način razmišljanja i pristup fizikalnim problemima. Istraživanja pokazuju da su matematička i prirodoslovna pismenost u Republici Hrvatskoj statistički značajno ispod OECD prosjeka (eng. Organisation for Economic Cooperation and Development) [15], a rezultati ispita državne mature su također zabrinjavajući. Ovi pokazatelji jasno nam govore da je potrebno povećati učinkovitost nastave fizike u hrvatskim školama. Trenutno u školama prevladava tradicionalni tip nastave u kojem nastavnik objašnjava, piše i govori, a gradivo se pred učenike stavlja u gotovom obliku, prije nego što su se oni sami uopće pitali kako i zašto je nešto tako kako jest. Temeljni problem ovog predavačkog pristupa je činjenica da su učenici pasivni tijekom nastave, te na taj način ne stječu potrebna znanja i vještine. Ovakav tip nastave može biti prihvatljiv za prenošenje informacija, no nikako nije dobar izbor ukoliko želimo razvijati učeničko razmišljanje i potrebne vještine. Kako bismo to mogli, potrebno je postići visok stupanj intelektualnog angažmana učenika, što možemo realizirati interakcijom i istraživačkim, odnosno problemskim pristupom [16]. Interaktivnost podrazumijeva korištenje interaktivnih nastavnih metoda, kao što su razredna rasprava, interaktivno izvođenje pokusa, kooperativno rješavanje zadataka u malim skupinama, konceptualna pitanja s karticama, te računalne interaktivne metode. Korištenjem ovih metoda svaki sat potičemo intelektualni angažman učenika, što rezultira boljim razumijevanjem sadržaja i većom učinkovitosti nastave (istraživanja pokazuju da je učinkovitost interaktivnih nastavnih metoda u razvijanju razumijevanja otprilike dvostruko veća od učinkovitosti predavačke nastave) [17]. S druge strane, istraživački pristup podrazumijeva istraživanje i konstrukciju fizičkih pojava na satima obrade novog gradiva, te problemski pristup primjeni modela na satovima razrade i primjene gradiva. Na taj način razvijamo znanstveno zaključivanje, a učenici se upoznaju s fizikom kao istraživačkom disciplinom i uče kako evaluirati znanstvene rezultate. Osnovna obilježja istraživačkog pristupa su da učenici traže odgovore na znanstvena pitanja, formuliraju i testiraju hipoteze, osmišljavaju i provode pokuse, samostalno zapisuju svoj apredviđanja, opažanja i zaključke, te drugima prezentiraju svoje rezultate i argumentirano ih brane [16].

U istraživački usmjerenoj nastavi sat se sastoji od uvodnog, središnjeg i završnog dijela. U uvodnom dijelu sata uvodnim problemom dajemo motivaciju i orijentaciju. Uvodni problem može biti pitanje ili demonstracijski pokus, nakon čega prikupljamo

učeničke ideje. Na ovaj način povezujemo sadržaje s prijašnjim znanjima učenika, te sa svakodnevnim životom. Istraživanja pokazuju da sadržaji koji su relevantni za učenike potiču maksimalni intelektualni angažman, zbog čega je poželjno sadržaje povezivati s primjerima iz svakodnevnog života. Osim toga, izuzetno je važno upoznati i demonstrirati novu pojavu, pri čemu najprije potičemo učenike da uoče njenu glavnu ideju. U konačnici imenujemo pojavu, te prelazimo na središnji dio u kojem učenike vodimo kroz istraživanje iste. Središnji dio sata započinje istraživačkim pitanjem koje se odnosi na ono što nas zanima o novoj pojavi. U ovom dijelu pomoću niza pitanja učenici istražuju pojavu, te osim gradiva upoznaju i znanstvene procese. Istraživanjem gradimo fizikalni model, nakon čega dajemo matematički opis pojave. Bitno je naglasiti da učenici samostalno trebaju doći do zaključaka, koliko god je to moguće u okvirima realnog nastavnog procesa. U završnom dijelu sata možemo primijeniti i evaluirati konstruirani model. Jednostavniji zadaci, aplikacijski pokusi ili konceptualna pitanja s karticama su samo neki primjeri provjere ili primjene novostečenog znanja. U ovom dijelu učenik dobiva odgovor na pitanje „Čemu služi konstruirani model i koje mu je značenje?“ S druge strane, interakcija nastavnika i učenika u ovom dijelu sata nastavniku daje mogućnost provjere postignutog stupnja razumijevanja. Na taj način nastavnik može procijeniti kvalitetu nastavnog sata, te ga, ukoliko je to potrebno, korigirati kako bi u budućnosti mogao postići još veći stupanj razumijevanja gradiva kod učenika.

5.2 Nastavna priprema: Entropija

Nastavna jedinica „Entropija“ obrađuje se u drugom razredu gimnazije i predviđena je za 2 školska sata. Vrsta nastave je interaktivna istraživački usmjerena nastava, a predviđene nastavne metode su demonstracija pokusa, metoda razgovora-usmjerena rasprava, metoda pisanja/crtanja, konceptualna pitanja s karticama, te učeničko izvođenje pokusa. U nastavi se kombinira frontalni i individualni rad, te rad u parovima. Tijekom sata je potrebno koristiti novčiće, flomastere u boji, čašu s vodom, boju, ploču, računalo i projektor.

Odgojno-obrazovni ishodi predstavljaju očekivana znanja, vještine i kompetencije koje bi učenik trebao usvojiti po završetku određene nastavne cjeline. Na kraju ove nastavne jedinice učenici će moći:

- navesti što je entropija,
- povezati entropiju s tijekom procesa u prirodi i s vjerojatnošću da se sustav nalazi u određenom stanju,
- riješiti jednostavne numeričke zadatke koji uključuju entropiju,
- navesti primjere iz svakodnevnog života u kojima se entropija povećava,
- objasniti kako je moguće da se entropija lokalno smanji
- navesti matematičke izraze za entropiju i objasniti razliku između njih,
- navesti II.zakon termodinamike
- navesti mjernu jedinicu entropije.

Učenici će razvijati:

- logičko razmišljanje i zaključivanje,
- kritičko razmišljanje,
- izražavanje ideja i rezultata,
- usmeno i pismeno izražavanje,
- apstraktno razmišljanje.

Odgojni ishodi odnose se na usvajanje vrijednosti, a tijekom sata učenici će uvažavati tuđe mišljenje, strpljivo čekati svoj red, poštivati razredna pravila, te izražavati i argumentirati vlastito mišljenje.

TIJEK NASTAVNOG SATA

1.) Uvodni dio: otvaranje problema, prikupljanje ideja, upoznavanje pojave

UVODNI PROBLEM:

Što će se dogoditi ako u čašu s vodom kapnem nekoliko kapi boje i zatim je pustim neko vrijeme na miru?

Voda u čaši će se sva obojiti.

Zašto će se to dogoditi?

Molekule vode sudaraju se s molekulama boje i na taj način se ona širi kroz vodu i boji ju. Nastavnik izvodi pokus.

Je li moguće da se nakon nekog vremena sva boja ponovo skupi u jednu kapljicu? Zašto?

Učenici izlažu svoje ideje i razmišljanja, te uočavaju da je tako nešto vrlo nevjerojatno.

Na koje sve načine može pasti novčić kada ga bacim?

Pismo (P) i glava (G).

Koje sve kombinacije možemo dobiti bacanjem 2 novčića?

GG, GP, PG, PP

Novčići su međusobno jednaki. Koje konfiguracije se makroskopski ne razlikuju?

GP i PG

Koje sve kombinacije onda možemo dobiti bacanjem 2 novčića?

(2G, 0P), (1G, 1P), (0G, 2P).

Mikrostanje fizikalnog sustava je detaljno opisano na mikroskopskoj razini i uključuje poznavanje stanja svakog pojedinog elementa sustava. Makrostanje sustava je opisano usrednjenim mikroskopskim veličinama i može se realizirati

kroz puno različitih mikrostanja.

Što bi u prvom primjeru bila mikrostanja, a što makrostanja sustava?

Mikrostanja sustava su GG, GP, PG, PP, a makrostanja su (2G, 0P), (1G, 1P), (0G, 2P).

Na koliko načina možemo ostvariti svako pojedino makrostanje?

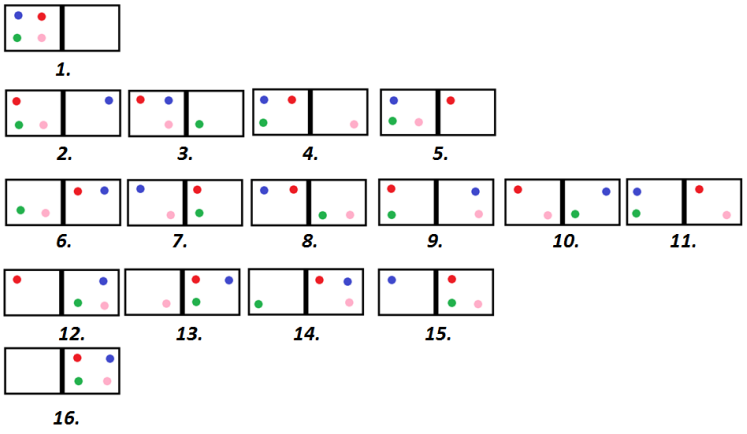
(2G, 0P) – 1 način; (1G, 1P) – 2 načina; (0G, 2P) – 1 način

Veličina koja je povezana s brojem načina na koji se može ostvariti određeno makroskopsko stanje sustava zove se entropija.

2) Središnji dio: konstrukcija modela - fizikalni i matematički opis pojave

ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Kako je entropija povezana s tijekom odvijanja procesa u prirodi?

Zamislimo da gledamo samo 4 molekule plina. Na koliko načina se one mogu rasporediti unutar 2 jednaka dijela posude? Nacrtajte sve moguće konfiguracije u bilježnicu.



Četiri molekule mogu se rasporediti na 16 načina.

Molekule plina međusobno se ne razlikuju. Koja su stanja prema tome makroskopski jednaka?

S2=S3=S4=S5; S6=S7=S8=S9=S10=S11; S12=S13=S14=S15

Na koliko načina možemo ostvariti stanje (3, 1), na koliko stanje (2, 2), a na koliko načina stanje (1, 3)?

(3, 1) – 4 načina; (2, 2) – 6 načina; (1, 3) – 4 načina

Na koliko načina možemo ostvariti stanja (4, 0) i (0, 4)?

Oba stanja možemo ostvariti na samo 1 način.

Koje stanje možemo ostvariti na najviše načina?

Ono u kojem je jednak broj molekula u oba dijela posude, stanje (2, 2).

Stanje u kojem su molekule jednoliko raspoređene zovemo ravnotežno stanje.

Kolika je vjerojatnost da se ostvari pojedino stanje?

Makrostanje	Broj mikrostanja	Vjerojatnost
(4, 0)	1	1/16
(3, 1)	4	4/16
(2, 2)	6	6/16
(1, 3)	4	4/16
(0, 4)	1	1/16

Koje stanje je najvjerojatnije?

Ravnotežno stanje.

Ludwig Boltzmann entropiju je definirao kao $S = k_B \ln \Omega$, pri čemu je Ω broj mogućih mikrostanja kojima se može ostvariti neko makrostanje, a k_B je Boltzmannova konstanta ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}).

U tablicu dodajte još jedan stupac i u njega upišite iznose entropije za svaki pojedini slučaj.

Makrostanje	Broj mikrostanja	Vjerojatnost	Entropija S / J K^{-1}
(4, 0)	1	1/16	0
(3, 1)	4	4/16	$1.91 \cdot 10^{-23}$
(2, 2)	6	6/16	$2.47 \cdot 10^{-23}$
(1, 3)	4	4/16	$1.91 \cdot 10^{-23}$
(0, 4)	1	1/16	0

Koje stanje je stanje najveće entropije?

Najveću entropiju ima ravnotežno stanje, odnosno stanje koje je najvjerojatnije.

Kada bismo imali sustav od n novčića, ukupan broj svih mogućih mikrostanja je 2^n. Kolika je vjerojatnost da u jednom bacanju dobijemo sve glave?

Broj mogućih mikrostanja je 2^n, a sve glave možemo ostvariti na samo 1 način. Vjerojatnost da dobijemo sve glave je $\frac{1}{2^{100}} \rightarrow$ jako mala vjerojatnost.

Kojim veličinama opisujemo stanje termodinamičkog sustava (plina)?

Tlakom, temperaturom i volumenom.

O kojim mikroskopskim veličinama ovise te veličine?

O položajima i brzinama čestica plina.

Što bi od navedenog bila mikro, a što makrostanja u ovom slučaju?

Makrostanje je stanje u kojem sustav ima određeni tlak, temperaturu i volumen, a mikrostanja su sve kombinacije brzina i položaja čestica koje daju to određeno makrostanje sustava.

Koliko molekula ima u jednom molu plina?

$N_A = 6 \cdot 10^{23}$

Procijenite kolika je vjerojatnost da u jednom trenutku brzine svih molekula budu u istom smjeru?

Vjerojatnost je jako mala, približno 0.

Vratimo se na uvodni problem. Zašto se sva voda u čaši oboji ako u nju kapnemo malo boje na jednom mjestu?

Zato što je najveća vjerojatnost da se molekule gibaju nasumično, odnosno u različitim smjerovima. Molekule vode sudaraju se s molekulama boje i na taj način se ona širi kroz vodu i boji ju.

Usporedite entropiju na početku i na kraju tog procesa?

Entropija je na kraju veća.

Može li se dogoditi da se sva boja nakon nekog vremena slučajno sama od sebe skupi u početni položaj (u kapljicu)? Što možete reći o entropiji, može li se ona spontano smanjiti?

Boja se ne može vratiti u početni položaj. To bi značilo da se entropija sustava smanjila, a to nije moguće, jer bi sustav spontano išao u stanje koje je manje vjerojatno. Ovakav proces naziva se **ireverzibilni** proces.

Kako smjer odvijanja procesa u prirodi možete povezati s promjenom entropije sustava?

Sustavi uvijek teže vjerojatnijim stanjima, a vjerojatnija stanja su stanja veće entropije. To znači da sustavi spontano teže stanju veće entropije $\rightarrow$ To nazivamo II. zakonom termodinamike.

Reverzibilni procesi su procesi koji se mogu odvijati u dva smjera. Što se događa s entropijom tijekom reverzibilih procesa?

Entropija u reverzibilnim procesima se ne mijenja.

Što se događa s entropijom u ravnotežnom stanju?

Entropija u ravnotežnom stanju ostaje nepromijenjena.

Makroskopski promjenu entropije definiramo kao $\Delta S = \frac{Q}{T}$***. Kako biste protumačili navedeni izraz?***

Sustavu koji na temperaturi T primi iznos topline Q entropija se promijeni za ΔS.

Primjer: Koliko se promijenila entropija sustava pri miješanju 1kg vode temperature 20 °**C i 1 kg vode temperature** 40 °**C?**

Kolika je temperatura smjese vode koju dobijemo pri miješanju 1 kg vode temperature 20 °***C i 1 kg vode temperature*** 40 °***C.***

Temperatura smjese je $T = \frac{T_1+T_2}{2} = 30$ °C

Za koliko se promijenila temperatura hladne, a za koliko temperatura tople vode?

Promjena temperature vode koja se zagrijala je 10 K, a vode koja se hladila je -10 K.

Kolika je srednja vrijednost temperature vode koja se zagrijavala, a kolika vode koja se hladila?

$T_{sr1} = 25$ °C = 298 K

$T_{sr2} = 35$ °C = 308 K

Izračunajte sada promjenu entropije toplije i hladnije vode.

$\Delta S_1 = \frac{m_1 c \Delta T_1}{T_{sr1}} = 141$ J K^{-1}

$\Delta S_2 = \frac{m_2 c \Delta T_2}{T_{sr2}} = -136$ J K^{-1}

Što se dogodilo s entropijom toplije, a što s entropijom hladnije vode?

Entropija toplije vode se smanjila, a entropija hladnije vode se povećala.

Kolika je ukupna promjena entropije sustava? Kako se promijenila ukupna entropija sustava?

ΔS = 141 J K^{-1} - 136 J K^{-1} = 5 J K^{-1}

Što možete zaključiti o ukupnoj entropiji sustava, a što o lokalnoj promjeni entropije?

Entropija se u određenom dijelu sustava može smanjiti, međutim, porast u drugom dijelu sustava će biti veći od tog smanjenja, tako da će se ukupna entropija povećati.

3) Završni dio: primjena modela - korištenje novostečenog znanja u novim situacijama, provjera ostvarenosti obrazovnih ishoda

1. Koja od navedenih tvrdnji je točna? Objasnite.

a) Najvjerojatnija makrostanja imaju najveću entropiju.

b) Najvjerojatnija makrostanja imaju najmanju entropiju.

c) Entropija ne ovisi o vjerojatnosti stanja.

Točan odgovor: b)

2. Koji od sljedećih procesa nisu mogući u prirodi? Objasnite što se događa s entropijom u svakom navedenom procesu.

a) Širenje mirisa parfema kroz prostoriju

b) Spontani prijelaz topline s tijela niže na tijelo više temperature

c) Adijabatsko širenje plina

d) Spontano skupljanje boje u jednu kapljicu, nakon što se voda obojila

Točan odgovor: b), d)

3. Provjerimo pokusom je li najvjerojatnije stanje zaista (1P, 1G) u slučaju kada imamo 2 novčića.

Učenici u parovima izvode pokus. Svaki učenik baci jedan novčić i zapisuju dobivena stanja (ako oba učenika dobiju pismo ili glavu tada zapisuju PP/GG, a ako jedan dobije pismo, a drugi glavu GP/PG). Zatim na ploču napišemo sve dobivene konfiguracije, nakon čega učenici računaju vjerojatnost za svako pojedino stanje.

6 Zaključak

U ovom radu analizirali smo vremenske serije tri različite skupine ispitanika: zdravi, s kongestivnim zatajenjem srca i s asimptomatskom ventrikularnom aritmijom. Vremenske serije ispitanika s aritmijom analizirane su prije i nakom uzimanja terapije. Primjena DFA metode na serije zdravih ispitanika pokazuje uniformno ponašanje na svim skalama, a kod osoba s kongestivnim zatajenjem srca postoji fenomen prijelaza. Tri različita primjera primjene DFA metode na vremenske serije ispitanika s aritmijom prije terapije pokazuju konzistentnost u ponašanju – postoji fenomen prijelaza koji se događa za približno istu širinu prozora, a eksponenti skaliranja α_1 i α_2 također su gotovo isti. Nakon primjene terapije pokazuje se da je moguće različito ponašanje signala. Određene vremenske serije nakon lijeka pokazuju jednoliko ponašanje na različitim skalama, dok neke pokazuju fenomen prijelaza. One serije koje pokazuju fenomen prijelaza također se mogu razlikovati. Naime, pokazano je da su eksponenti skaliranja u nekim slučajevima prije i nakon fenomena prijelaza vrlo slični, pa je spomenuti prijelaz iz jednog u drugi režim zanemariv, dok je kod drugih on jako izražen i pokazuje različito ponašanje na manjim i većim skalama.

MSE analiza pokazuje da je entropija zdravog srca najveća, što se slaže s tvrdnjom da je u tom slučaju dinamika otkucaja najkompleksnija. Na vrlo malim skalama vrijednosti S_E patoloških stanja su veće nego za zdravo srce, no to je posljedica modulacije srčanog ritma koja nastaje zbog disanja. Analiza vremenskih serija ispitanika s aritmijom prije i nakon uzimanja lijeka pokazuje da odabrana terapija ima suprotni učinak od očekivanog, odnosno smanjuje kompleksnost dinamike srčanog ritma. Razmatranje vrijednosti entropije za dio vremenske serije i za kompletnu seriju pokazuje da S_E ovisi o duljini promatranog niza i to na način da se vrijednosti entropije smanjuju s duljinom vremenske serije.

Dodaci

Dodatak A Implementacija DFA metode

Jedan način modeliranja vremenskih serija s dugodosežnim autokorelacijama je ARFIMA proces. Vremensku seriju x_t možemo izračunati pomoću

$$x_t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(d) x_{t-n} + \epsilon_t. \tag{A.1}$$

Parametar skaliranja d ima vrijednosti između -0.5 i 0.5, a ϵ_t predstavlja nezavisno i jednoliko raspodjeljene slučajne varijable. Srednja vrijednost $\langle \epsilon_t \rangle = 0$ i varijanca $\langle \epsilon_t^2 \rangle = 1$. Težinski faktor $a_n(d)$ definiramo kao:

$$a_n(d) = \frac{d\Gamma(n-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(n+1)}. \tag{A.2}$$

Γ označava gama funkciju, a n je vremenska skala. U python programskom jeziku težinski faktor $a_n(d)$ implementirali smo na sljedeći način:

```
def a_coef(n,d):
    if n<50:
        tmp=(d*special.gamma(n-d))/(special.gamma(1-d)*special.gamma(n+1))
    else:
        tmp=(d/special.gamma(1-d))*np.exp((1+d)+
            (-0.5-n)*np.log(n)+(-0.5-d+n)*np.log((-1-d+n)))
    return tmp
```

Zatim smo pomoću naredbe `np.random.normal` generirali 1000 neovisno i jednoliko distribuiranih varijabli, sa srednjom vrijednošću 0 i varijancom 0.333, te rezultat pohranili u varijablu `s`:

```
s = np.random.normal(0, 0.333, 1000)
```

Sada računamo težinski faktor za svaku varijablu. Vrijednost parametra d je $d = 0.25$:

```
ad=np.flip([a_coef(i,0.25) for i in range(1,1001)],0)
```

Obzirom da ćemo u sljedećem koraku uzeti zadnjih 1000 vrijednosti, moramo okrenuti redoslijed brojeva kako bi se oni ispravno množili. Zatim pomnožimo svaki težinski koeficijent s pripadajućim članom niza, te dodajemo jednu slučajnu varijablu iz niza ϵ_t. Dobivene vrijednosti `xtmp` dodajemo na `s` i sve spremamo u novo polje `s`.

```
for j in range(15000):
    xtmp=np.dot(ad,s[-1000:])+np.random.normal(0,1)
    s=np.append(s,xtmp)
```

Vidjeli smo da numerički ima smisla računati samo prvih nekoliko tisuća težinskih koeficijenata. Iz tog razloga moramo dodati onoliko inicijalnih točaka koliko imamo težinskih koeficijenata. Na taj način izračunali smo više točaka nego što je potrebno za naše računanje i stvorili smo "memoriju", međutim, taj višak u konačnom računu odbacujemo:

```
s = s[6000:]
```

Dobiveni vremenski niz pohranili smo u varijablu `dat1`:

```
dat1=s
```

Zatim smo napravili niz cijelih brojeva od 1 do 10 000, jer je veličina naših podataka 10 000 (dodajemo 1, jer zadnji broj nije obuhvaćen), te nacrtali vremenski niz koji smo dobili ranije objašnjenim procesom ARFIMA (slika A.1).

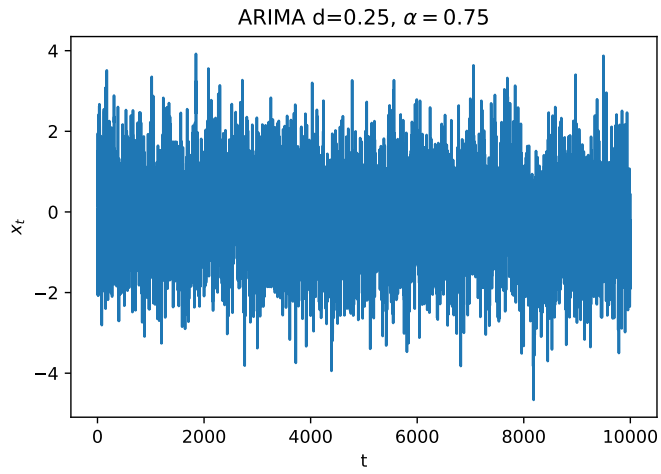
```
x = range(1,size(dat1)+1)
plt.plot(x, dat1)
plt.title('ARIMA d=0.25, $ \\alpha=0.75$')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('$x_t$')
```

Sada od svake pojedine vrijednosti oduzmemo srednju vrijednost i radimo kumulativnu sumu:

```
dat1m=np.cumsum(dat1-mean(dat1)).
```

Grafički prikaz rezultata dan je na slici 3.5 u glavnom dijelu teksta.

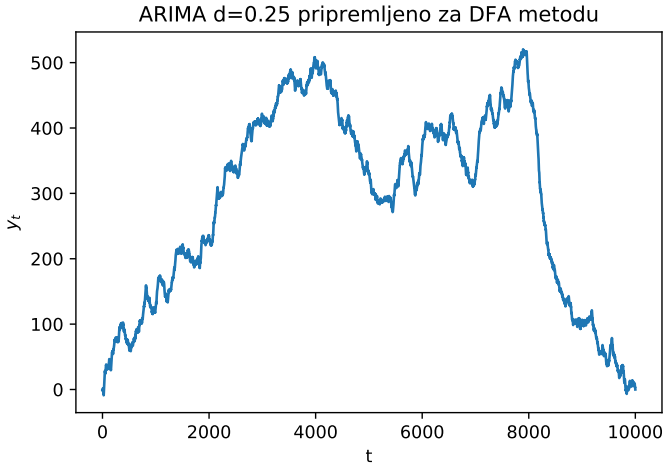
```
x = range(1,size(dat1)+1)
plt.plot(x, dat1m)
```



Slika A.1: Vremenski niz dobiven ARFIMA procesom. Parametar skaliranja je $d = 0.25$

```
plt.title('ARIMA d=0.25 pripremljeno za DFA metodu')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('$y_t$')
```

Kvadrat funkcije fluktuacije za primjer smo računali za veličinu prozora $n = 5$. Trend za određeni prozor dobivamo tako da kroz odabrane točke provučemo pravac dobiven metodom najmanjih kvadrata, slika A.2. No znamo da postupak radimo za sve



Slika A.2: Prozor od prvih 5 točaka niza y_t i pravac dobiven metodom najmanjih kvadrata koji u navedenom segmentu predstavlja trend

širine prozora, pri čemu je najmanja širina prozora dana s $n = 2q + 2$, gdje je q red DFA (DFA-q), a najveća širina prozora odgovara $1/4$ duljine niza. U sljedećem dijelu koda odredili smo širine prozora za koje smo računali kvadrat funkcije fluktuacije, no treba napomenuti da gledamo logaritamsku skalu. Funkcijom `np.logspace` smo u 20 točaka odredili jednako udaljene vrijednosti između početne i konačne točke (širine

prozora). Obzirom da dobivene vrijednosti nisu cijeli brojevi, u sljedećem retku smo vrijednosti zaokružili na najmanji cijeli broj koji je veći od dane vrijednosti (npr. ako dobijemo broj 5.3, zaokružimo ga na 6). Konačno, rezultate pohranimo u `scale` i napravimo polje (`np.array(scale)`).

```
rs=np.logspace(log10(2*1+2),log10(len(dat1)/4),20)
scale=[int(ceil(rs[i])) for i in range(len(rs))]
np.array(scale)
```

Sada DFA funkciju pozivamo na naše podatke za sve širine prozora. Rezultate pohranimo u varijablu `dfao1`.

```
dfao1=[dfa(dat1m,scale[i]) for i in range(len(scale))]
```

Informaciju o korelacijama daje nam eksponent skaliranja α, koji predstavlja nagib pravca u log-log grafu. Prema tome na naše podatke moramo prilagoditi pravac. Funkcija `np.polyfit` daje nam koeficijente polinoma, odnosno nagib a i odsječak na $y-$osi, b, a pomoću funkcije `np.polyval` izračunali smo vrijednosti polinoma u danim točkama.

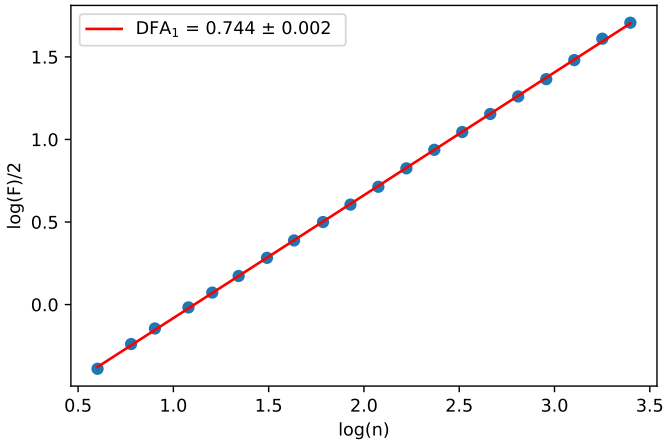
```
pf1=np.polyfit(log10(scale), log10(dfao1)/2.,1)
yp1=np.polyval(pf1,log10(scale))
```

Pogrešku možemo izračunati na sljedeći način:

```
sl1=stats.linregress(log10(scale), log10(dfao1)/2)
```

Konačno, grafički prikažemo naše podatke i pravac prilagodbe. Rezultat je prikazan na slici A.3.

```
plt.plot(log10(scale), log10(dfao1)/2.,marker='o',linestyle='None')
plt.plot(log10(scale), yp1,linestyle='-',color='r',
    label='DFA${}_1$ = %.3f $\pm$ %.3f ' % (pf1[0], sl1[4]))
plt.xlabel('log(n)')
plt.ylabel('log(F)/2')
plt.legend(loc=2)
```



Slika A.3: Rezultat DFA metode za vremenski niz x_t generiran ARFIMA procesom

Literatura

[1] Operational amplifiers http://www.ibiblio.org/kuphaldt/electricCircuits/Semi/SEMI_8.html#xtocid100169, 3.6.2018.

[2] Horvatic, D.; Stanley, H. E.; Podobnik, B.; Detrended Cross-Correlation Analysis for Non-Stationary Time Series with Periodic Trends. // EPL, Vol. 94, (2011), str. 18007.

[3] Podobnik, B.; Horvatic, D.; Lam Ng, A.; Stanley, H. E.; Ivanov, P.Ch. Modeling long-range corss-correlations in two component ARFIMA and FIARCH processes. // Physica A, Vol. 387, (2008), str. 3954.

[4] Kantelhardt, J.W. et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. // Physica A, Vol. 295, (2001), str. 441.

[5] Bryce, R.M.; Sprague, K.B. Revisiting detrended fluctuation analysis. // Sci. Rep. Vol. 2, (2012), str. 315.

[6] Krajačić, M.; Individualna i kolektivna dinamika neurona. // Rad za Rektorovu nagradu u akademskoj godini 2017./2018., 2018.

[7] Nylen, E. L.; Wallisch, P. Neural data science: A Primer with MATLAB and Python. Academic Press, 2017.

[8] Peng, C.-K.; Havlin, S.; Stanley, H. E.; Goldberg, Ary L. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. // Chaos, Vol. 5, (1995) str. 82.

[9] One-dimensional smoothing spline https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.interpolate.UnivariateSpline.html, 1.4.2018.

[10] Entropy https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy, 10.6.2018.

[11] Approximate entropy https://en.wikipedia.org/wiki/Approximate_entropy, 25.6.2018.

[12] Sample entropy https://en.wikipedia.org/wiki/Sample_entropy, 25.6.2018.

[13] Costa, M.; Goldberg, A.L.; Peng, C.-K.; Multiscale entropy analysis of biological signals // Physical review E, Vol. 71, (2005), str. 021906-1.

[14] Physionet https://www.physionet.org/physiobank/database/crisdb/, 25.6.2018.

[15] PISA istraživanje https://bit.ly/2L7eyu7, 1.6.2018.

[16] Planinić, M.; Predavanja iz Metodike nastave fizike 1, Claroline

[17] Hake, R. R.: American Journal of Physics 66, 1998., str. 64 – 74

[18] Paar, V.; Šips, V.: Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije, Školska knjiga, 2007.

[19] Andreis, T.; Plavčić, M.; Simić, N.: Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije, Profil, 2008.

[20] Krsnik, R.: Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije, Školska knjiga, 2005.