Mjera kuta

Capan, Antonija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Capan

MJERA KUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc Zvonko Iljazović

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavamo kut i mjeru kuta koji su važni geometrijski pojmovi. Iako su intuitivno jasni, njihove precizne definicije nisu sasvim jednostavne.

Na početku rada precizno definiramo pojmove binarne relacije, relacije parcijalnog uređaja te totalnog ili linearnog uređaja. Koristeći Aksiome incidencije definiramo ravninu i vrste ravnina koje koristimo u radu (P. P^+ - ravnina, metrička ravnina). Koristeći Aksiome incidencije, Paschov aksiom i Aksiome potpunosti dajemo širi kontekst aksiomatske izgradnje planimetrije. Definiramo pojam izometrije te osne simetrije, rotacije i centralne simetrije kako bismo stvorili podlogu za definiranje neorjentiranih kutova kod kojih posebno ističemo nul - kut i ispruženi kut.

Definiramo pojmove okomica, polovišta i osnovne odnose među kongruentnim i komplementarnim polupravcima koji određuju kutove.

Posebnu važnost dajemo uspoređivanju kutova za što su nam važni pojmovi supremuma i infimuma. U radu detaljno objašnjavamo na koji način zbrajamo kutove te koja svojstva vrijede pri zbrajanju. Važnost pridajemo asocijativnosti, monotonosti i strogoj monotonosti kod zbrajanja kutova.

Na kraju rada definiramo pojam mjere kuta te se upoznajemo s njenim osnovnim svojstvima i zakonitostima.

Poglavlje 1

Ravnina

1.1 Ravnina

Propozicija 1.1.1. *Neka je S neprazan skup. Svaki podskup od* $S \times S$ *nazivamo binarna relacija na S. Ako je* φ *binarna relacija na S te* $x, y \in S$, *onda* $(x, y) \in \varphi$ *označavamo sa* $x\varphi y$.

Relacija φ *je refleksivna ako za sve* $x \in S$ *vrijedi* $x\varphi x$*; relacija* φ *je simetrična ako za sve* $x, y \in S$ $x\varphi y$ *povlači* $y\varphi x$*; relacija* φ *je tranzitivna ako za sve* $x, y, z \in S$, $(x\varphi y)\&(y\varphi z)$ *povlači* $x\varphi z$*. Relacija* φ *je antisimetrična ako za sve* $x, y \in S$, $(x\varphi y)\&(y\varphi x)$ *povlači* $x = y$.

φ *je relacija ekvivalencije ako je istodobno refleksivna, simetrična i tranzitivna. Ako je* φ *refleksivna, antisimetrična i tranzitivna sa skupu S, onda kažemo da je* φ ***relacija parcijalnog uređaja*** *na skupu S (ili parcijalni uređaj).*

Propozicija 1.1.2. *Ako je* φ *parcijalni uređaj na skupu S takav da za sve* $x, y \in S$ *vrijedi* $x\varphi y$ *ili* $y\varphi x$*, onda kažemo da je* φ *totalni ili linearni uređaj na S (ili naprosto uređaj na S).*

Teorem 1.1.3 (Aksiomi incidencije)**.** *Neka je M skup te neka je* $\mathcal{P}$ *familija podskupova od M takva da vrijede sljedeće svojstva:*

I1. Za sve $A, B \in M$, $A \neq B$ *postoji jedinstveni* $p \in \mathcal{P}$ *takav da je* $A, B \in p$.

I2. Za svaki $p \in \mathcal{P}$ *postoje* $A, B, C \in p$ *takve da je* $A \neq B \neq C \neq A$.

I3. Postoje tri međusobno različita elementa od M koji ne pripadaju istom elementu od $\mathcal{P}$.

Nadalje, neka je $\rho : \mathcal{P} \to \bigcup 2^{p \times p}$ *takva da je* $\rho(p)$ *linearni uređaj na p za svaki* $p \in \mathcal{P}$*. Tada za uređenu trojku* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *kažemo da je* ***ravnina***.

Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina. Tada elemente od* M *nazivamo* ***točke****, a elemente od* $\mathcal{P}$ ***pravci****.*

Nadalje, ako su $A, B \in M, A \neq B$ *onda sa* AB *označavamo jedinstveni pravac kojem pripadaju obje točke. Neka je* $p \in \mathcal{P}$ *i* $A \in M$ *te neka je* $A \in p$*. Tada kažemo da pravac* p *prolazi točkom* A*, a točka* A *leži na pravcu* p*.*

Za točke $A, B, C \in M$ *kažemo da su kolinearne ako postoji pravac na kojem one leže. Za točke* $A, B, C \in M$ *kažemo da su nekolinearne ako nisu kolinearne.*

Definicija 1.1.4. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina. Neka su* $A, B, T \in M$*. Kažemo da* T *leži između* A *i* B *u* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ako postoji* $p \in \mathcal{P}$ *tako da je* $A, B, T \in p$ *te vrijedi da je*

$$A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B \text{ ili } B \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p A.$$

Propozicija 1.1.5. *Ako je* T *između* A *i* A*, onda je* $T = A$*.*

Dokaz. Ako je T između A i A, postoji $p \in P$ tako da $A, T \in p$ te rijedi

$$A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p A$$

iz čega slijedi $A = T$. □

Propozicija 1.1.6. *Neka su* $A, B \in M$*, te neka je* $p \in P$ *tako da* $A, B \in p$*. Pretpostavimo da je* $A \preccurlyeq_p B$*. Tada, ako je* T *između* A *i* B*, onda je* $T \in p$ *i* $A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B$*.*

Dokaz. Imamo 2 slučaja:

1. slučaj $A = B$

   T se nalazi između A i B odnosno T je između A i A pa prema Propoziciji 1.1.5 $A = A$. Slijedi $T \in p$ i $A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B$.

2. slučaj $A \neq B$

   T se nalazi između A i B pa postoji $q \in P$ tako da je $A, B, T \in q$ i

   $$A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B$$

   ili

   $$B \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p A.$$

   Ali, $A, B \in q$ te $A, B \in p$ pa je $q = p$ što znači da je $T \in p$.

   Kad bi vrijedilo $B \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p A$ u kombinaciji s $A \preccurlyeq_p B$ dobili bismo kontradikciju.

   Stoga, $A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B$.

□

Definicija 1.1.7. *Neka su $A, B \in M$. Tada skup svih točaka $T \in M$ koje su između točaka A i B označavamo sa $\overline{AB}$ i nazivamo* ***segment****.*

Definicija 1.1.8. *Neka je $K \subseteq M$. Kažemo da je K* ***konveksan skup*** *ako za sve $A, B \in K$ vrijedi da je $\overline{AB} \subseteq K$.*

Uočimo da je svaki pravac konveksan skup.

Propozicija 1.1.9. *Svaki segment je konveksan skup.*

Dokaz. Neka su $A, B \in M$. Želimo dokazati da je $\overline{AB}$ konveksan skup. Neka su $C, D \in \overline{AB}$. Neka je p pravac tako da je $A, B \in p$. Tada je sigurno $A \preccurlyeq_p B$ ili $B \preccurlyeq_p A$ (jer je $\preccurlyeq_p$ linearni uređaj).

1. slučaj: $A \preccurlyeq_p B$
   Iz $C \in \overline{AB}$ slijedi $A \preccurlyeq_p C \preccurlyeq_p B$. Isto tako imamo $A \preccurlyeq_p D \preccurlyeq_p B$. Posebno imamo $C, D \in p$ pa je $C \preccurlyeq_p D$ ili $D \preccurlyeq_p C$.

   I. $C \preccurlyeq_p D$ Tada vrijedi: $A \preccurlyeq_p C \preccurlyeq_p D \preccurlyeq_p B$ pa je $\overline{CD} \in \overline{AB}$.

   II. $D \preccurlyeq_p C$ Dobivamo analogni zaključak kao i u 1.1.

2. slučaj: $B \preccurlyeq_p A$
   Analogno dobivamo $\overline{CD} \in \overline{AB}$.

Dakle, $\overline{AB}$ je konveksan skup. □

Definicija 1.1.10. *Neka je $O \in p$. Tada za skupove $\{T \in p \mid O \preccurlyeq_p T\}$ i $\{T \in p \mid T \preccurlyeq_p O\}$ kažemo da su* ***polupravci*** *s vrhom O.*

Propozicija 1.1.11. *Svaki polupravac je konveksan skup.*

Dokaz. Neka je a polupravac. Tada postoji pravac p i točka $O \in p$ tako da je $a = \{T \in p \mid T \preccurlyeq_p O\}$ ili $a = \{T \in p \mid O \preccurlyeq_p T\}$.
Promotrimo slučaj kada je $a = \{T \in p \mid T \preccurlyeq_p O\}$.

Neka su $A, B \in a$. Želimo pokazati $\overline{AB} \subseteq a$. Imamo $A \preccurlyeq_p O$ i $B \preccurlyeq_p O$. Gledamo $A \preccurlyeq_p B$.
Tada imamo $A \preccurlyeq_p B \preccurlyeq_p O$ pa je $\overline{AB} \subseteq a$. Isto dobivamo u slučaju $B \preccurlyeq_p A$.
Zaključujemo da je a konveksan skup.

Isti zaključak dobivamo i u slučaju $a = \{T \in p \mid O \preccurlyeq_p T\}$. □

1.2 P -ravnina

Definicija 1.2.1. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina. Za* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *kažemo da je* ***P-ravnina*** *ako vrijedi tzv. Paschov aksiom.*

Aksiom 1.2.2 (Paschov aksiom)**.** *Ako su* $A, B \in M$ *te ako je p pravac koji siječe* $\overline{AB}$ *(tj.* $p \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ *) onda p siječe* $\overline{AC}$ *ili p siječe* $\overline{BC}$*.*

Lema 1.2.3. *Neka su A, B, C tri točke koje leže na istom pravcu. Tada je jedna od tih triju točaka između druge dvije točke.*

Dokaz. Neka je p pravac koji sadrži točke A, B, C.

1. slučaj $A \preccurlyeq_p B$

   I. podslučaj $C \preccurlyeq_p A$
   Tada imamo $C \preccurlyeq_p A \preccurlyeq_p B$ pa je A između C i B.

   II. podslučaj $A \preccurlyeq_p C$
   Ako je $C \preccurlyeq_p B$, onda je C između A i B, a ako je $B \preccurlyeq_p C$, onda je B između A i C.

2. slučaj: $B \preccurlyeq_p A$ Dobivamo analogno kao u 1. slučaju.

□

Lema 1.2.4. *Neka su* $A, B \in M$ *te neka je* $P \in \overline{AB}, P \neq B$*. Tada* $B \notin \overline{AP}$*.*

Dokaz. Neka je p pravac koji sadrži točke A i B.

1. slučaj $A \preccurlyeq_p B$
   Tada je $A \preccurlyeq_p P \preccurlyeq_p B$.
   Pretpostavimo $B \in \overline{AP}$. Tada je $A \preccurlyeq_p B \preccurlyeq_p P$ pa slijedi (zbog antisimetričnosti relacije $\preccurlyeq_p$) $B = P$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, $B \notin \overline{AP}$.

2. slučaj: $B \preccurlyeq_p A$
   Analogno dobivamo $B \notin \overline{AP}$ kao i u 1. slučaju.

□

Lema 1.2.5. *Neka su A, B, C nekolinearne točke. Neka je* $p \in \overline{AB}, P \neq B$*. Tada je* $BC \cap \overline{AP} = \emptyset$*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, postoji $Q \in \overline{AP} \cap BC$. Prema Lemi 1.2.4 imamo $B \notin \overline{AP}$. Iz toga slijedi $B \neq Q$.

Imamo $Q, B \in AB$, $Q, B \in BC$. Zaključujemo $AB = BC$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su A, B, C nekolinearne točke.

Dakle, $BC \cap \overline{AP} = \emptyset$. □

Propozicija 1.2.6. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P-ravnina. Neka su $A, B, C \in M$ te neka je p pravac koji ne prolazi niti jednom od ove tri točke. Tada p ne može siječi sva 3 segmenta $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Promotrimo prvo slučaj kada točke A, B, C leže na istom pravcu. Označimo ga sa q. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je

$$A \preccurlyeq_p B \preccurlyeq_p C$$

(prema Lemi 1.2.3). Znamo da P siječe $\overline{AB}$ u nekoj točki, označimo je sa P.

Tada je $A \preccurlyeq_p P \preccurlyeq_p B$. Nadalje, p siječe segment $\overline{BC}$ i neka je Q neka točka iz njihovog presjeka. Tada

$$B \preccurlyeq_p Q \preccurlyeq_p C.$$

Tvrdimo: $P \neq Q$.

U suprotnom, ako je $P = Q$, iz $P \preccurlyeq_p B$ i $B \preccurlyeq_p Q$ slijedi $B = P = Q$ (zbog antisimetričnosti) što povlači da pravac p prolazi točkom B a to je nemoguće po pretpostavci.

Prema tome, $P \neq Q$.

Sada $P, Q \in p$ i $P, Q \in q$ povlači $p = q$ što je nemoguće jer p ne prolazi niti jednom od točaka A, B, C. Iz svega uaključujemo da točke A, B, C ne leže na istom pravcu.

Neka je $A_1 \in p \cap \overline{BC}, B_1 \in p \cap \overline{AC}, C_1 \in p \cap \overline{AB}$. Neka točke A_1, B_1 i C_1 leže na istom pravcu p. Prema Lemi 1.2.3 možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $A_1 \in \overline{B_1C_1}$. Uočimo $A_1 \in BC$ što znači da je $BC \cap \overline{B_1C_1} \neq \emptyset$.

Prema Paschovom teoremu (primijenjenom na točke A_1, B_1, C_1 i pravac BC) imamo da je $BC \cap \overline{AB_1} \neq \emptyset$ ili $BC \cap \overline{AC_1} \neq \emptyset$. Oba slučaja su nemoguća prema Lemi 1.2.5. □

1.3 P^+ - ravnina

Definicija 1.3.1. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P-ravnina. Za $(M, \mathcal{P}, \rho)$ kažemo da je P^+-**ravnina** ako vrijedi sljedeće:*

za svaki $q \in \mathcal{P}$ i sve $O, A \in q$, $O \neq A$ postoji $B \in q$ tako da je $B \neq O$ i $O \in \overline{AB}$.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P^+-ravnina. Neka je p pravac te neka je $\mathcal{R}$ binarna relacija na $M \setminus p$ definirana sa $A\mathcal{R}B \Rightarrow \overline{AB} \cap p = \emptyset$.*
*Tada je $\mathcal{R}$ **relacija ekvivalencije** na $M \setminus p$ i ona rastavlja $M \setminus p$ na točno 2 klase ekvivalencije. Svaku od tih klasa nazivamo **poluravnina** (određena sa p).*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\mathcal{R}$ su očite.
Neka su $A, B, C \in M\backslash p$ tako da je $A\mathcal{R}B$ i $B\mathcal{R}C$. Treba dokazati: $A\mathcal{R}C$.

Pretpostavimo suprotno. Tada $\overline{AC} \cap p \neq \emptyset$. Iz Paschovog aksioma slijedi da p siječe $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$ što je u kontradikciji sa $A\mathcal{R}B$ i $B\mathcal{R}C$.

Dokažimo sada da $\mathcal{R}$ rastavlja $M\backslash p$ na 2 klase ekvivalencije. Odaberemo točku $O \in p$. Nadalje odabremo točku $A \in M\backslash p$. Neka je q pravac koji sadrži točke O i A. Budući da je ($M, \mathcal{P}, \rho$) P^+-ravnina, postoji $B \in q, B \neq O$ tako da je $O \in \overline{AB}$. Uočimo da $B \notin p$ (u suprotnom bi p i q bili različiti pravci koji bi sadržavali točke O i B), dakle $B \in M\backslash p$, a očito $\overline{AB} \cap p = \emptyset$ (jer sadrži O). Prema tome $A\not\mathcal{R}B$. Stoga je $[A] \neq [B]$. Znači, imamo barem 2 klase ekvivalencije.

Neka je $C \in M\backslash p$. Tvrdimo da je $A\mathcal{R}C$ ili $B\mathcal{R}C$. Pretpostavimo suprotno.
Tada je $A\not\mathcal{R}C$ i $B\not\mathcal{R}C$ pa $\overline{AC} \cap p \neq \emptyset$ i $\overline{BC} \cap p \neq \emptyset$. Naravno, imamo $\overline{AB} \cap p = \emptyset$. Sve zajedno je u kontradikciji s Propozicijom 1.2.6. Dakle, $A\mathcal{R}C$ ili $B\mathcal{R}C$ pa je $[A] = [C]$ ili $[B] = [C]$. Ovime smo pokazali da $\mathcal{R}$ rastavlja $M\backslash p$ na točno 2 klase.

□

1.4 Metrička ravnina

Definicija 1.4.1. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *P-ravnina, te neka je* $d : M \times M \to \mathcal{R}$ *funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

III1 $d(A, B) \geqslant 0$ *, za sve* $A, B \in M$,
$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$*, za sve* $A, B \in M$.

III2 $d(A, B) = d(B, A)$*, za sve* $A, B \in M$.

III3 nejednakost trokuta
$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$*, za sve* $A, B \in M$,
$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Leftrightarrow C \in \overline{AB}$.

III4 Ako je r polupravac s vrhom O, te ako je $x \in \mathbb{R}, x > 0$*, onda postoji* $T \in r$ *takva da je* $d(O, T) = x$.

Tada za uređenu četvorku $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *kažemo da je* ***metrička ravnina****.*

Ako je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina te* $A, B \in M$ *onda za broj* $d(A, B)$ *kažemo da je udaljenost točaka A i B u toj ravnini.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina, neka je r polupravac s vrhom O te neka je x pozitivan realan broj. Tada postoji jedinstvena točka* $T \in r$ *takva da je*

$$d(O, T) = x.$$

Dokaz. Prema Definiciji 1.4.1 $III4$ takva točka T postoji. Dokažimo sada da je takva točka jedinstvena.
Pretpostavimo da su $T_1, T_2 \in r$ takvi da je $d(O,T_1) = x$ i $d(O,T_2) = x$.
Budući da je r polupravac s vrhom O postoji pravac p tako da je $r = \{T \in p | O \leq_p T\}$ ili $r = \{T \in p | T \leq_p O\}$.

1. slučaj $r = \{T \in p \mid O \leq_p P\}$.
   Tada je $O \leq_p T_1$ i $O \leq_p T_2$.
   a) $T_1 \leq_p T_2$
      Dakle, $O \leq_p T_1 \leq_p T_2$. Slijedi $T_1 \in \overline{OT_2}$.
      Po Definiciji 1.4.1 $III3$ imamo: $d(O,T_2) = d(O,T_1) + d(T_1,T_2)$, dakle $x = x + d(T_1, T2)$. Stoga je $d(T_1,T_2) = 0$ pa po Definiciji 1.4.1 $III1$ je $T_1 = T_2$.
   b) $T_2 \leq_p T_1$
      Analogno dobivamo $T_1 = T_2$.
2. slučaj $r = \{T \in p | T \leq_p O\}$.
   Analogno dobivamo $T_1 = T_2$.

□

Propozicija 1.4.3. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina. Tada je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P^+-ravnina.*

Dokaz. Jasno je da je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P-ravnina.
Neka je q pravac, te neka su $O, A \in q$. Dokažimo da postoji $B \in q, B \neq 0$ tako da je $O \in \overline{AB}$.

1. slučaj $O \leq_q A$
   Neka je $r = \{T \in q | T \leq_q O\}$. Tada je r polupravac s vrhom O pa za $1 \in \mathbb{R}$ postoji $B \in r$ tako da je $d(O,B) = 1$. Iz ovoga slijedi da je $O \neq B$. Nadalje, $B \leq_q O$. Dakle, $B \leq_q O \leq_q A$ pa je $O \in \overline{AB}$.
1. slučaj $A \leq_q O$
   Analogno dobivamo točku B s traženim svojstvom.

Zaključak: $(M, \mathcal{P}, \rho)$ je P^+-ravnina □

Propozicija 1.4.4. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, te neka su $A, B \in M, A \neq B$. Tada postoji jedinstvena točka* C *tako da je $C \in \overline{AB}$ i $d(A,C) = d(B,C)$. Točka* C *leži između* A *i* B *i za nju kažemo da je* ***polovište dužine*** $\overline{AB}$.

Dokaz. Označimo $p = AB$.

1. slučaj $A \leq_p B$
   Neka je $r = \{T \in p | A \leq_p T\}$. Tada je r polupravac s vrhom A. Neka je $x = \frac{d(A,B)}{2}$.
   Tada je $x > 0$ pa postoji $C \in r$ tako da je $d(A, C) = x$.
   Jasno $A \leq pC$. Tvrdimo da je $C \leq pB$.
   Pretpostavimo suprotno. Tada imamo $B \leq pC$, pa je $B \in \overline{AC}$. Stoga je $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ iz čega slijedi $d(A, B) \leq d(A, C)$ tj. $2x \leq x$ što je nemoguće.
   Dakle, $C \leq_p B$ pa je $C \in \overline{AB}$.
   Stoga je $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Iz toga slijedi $2x = x + d(C, B)$ tj. $d(C, B) = x$.
   Dakle, $d(A, C) = d(C, B)$.

2. slučaj $B \leq_p A$
   Analogno dobivamo da postoji $C \in p$ takav da $d(A, C) = d(C, B)$.

Pretpostavimo sada da su $C, D \in p$ točke takve da je $d(A, D) = d(B, D)$ i $d(A, C) = d(B, C)$. Dokažimo da je $C = D$.
Pretpostavimo da je $A \in \overline{CB}$. Iz toga slijedi $d(C, B) = d(C, A) + d(A, B)$. Stoga je $d(A, B) = 0$ odnosno $A = B$ što je kontradikcija.
Analogno dobivamo da $B \in \overline{AC}$ vodi na kontradikciju. Po Lemi 1.2.3 zaključujemo $C \in \overline{AB}$. Stoga je $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) = 2 \cdot d(A, C)$ pa je $d(A, C) = \frac{d(A,B)}{2}$.
Isto tako dobivamo $D \in \overline{AB}$ i $d(A, D) = \frac{d(A,B)}{2}$.
Neka je r polupravac s vrhom A takav da je $B \in r$. Tada je $\overline{AB} \subseteq r$ pa slijedi $C, D \in r$.
Sada iz $d(A, C) = d(A, D)$ po Propoziciji 1.4.2 slijedi $C = D$. □

Ako je $A = B$ onda za točku A kažemo da je polovište dužine $\overline{AA}$.

Poglavlje 2

Izometrije

2.1 Izometrija

Definicija 2.1.1. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina. Za funkciju $f : M \to M$ kažemo da je **izometrija** te ravnine ako za sve $A, B \in M$ vrijedi*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Uočimo da ako je f izometrija ravnine $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ onda je f injekcija. Naime, ako su $A, B \in M$ točke takve da je $A \neq B$, onda je $d(A, B) > 0$ pa je $d(f(A), f(B)) > 0$ iz čega slijedi $f(A) \neq f(B)$.

Propozicija 2.1.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina.*

1. *Neka su f i g izometrije ove ravnine. Tada je i $g \circ f$ izometrija.*

2. *Neka je f izometrija, te neka su $A, B, C \in M$ točke takve da je C između A i B. Tada je f(C) između f(A) i f(B).*

Dokaz.

1. Neka su $A, B \in M$. Tada je $d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = d(g(f(A)), g(f(B))) = d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. Dakle $g \circ f$ je izometrija.

2. Imamo $C \in \overline{AB}$ pa je $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Stoga je $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C)) + d(f(C), f(B))$ iz čega slijedi $f(C) \in \overline{f(A)f(B)}$.

□

Lema 2.1.3. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, $p \in \mathcal{P}$ pravac, $A \in p$ te $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Tada postoje točno dvije točke $T_1, T_2 \in p$ tako da je*

$$d(T_1, A) = x = d(T_2, A).$$

Dokaz. Neka je $r_1 = \{T \in p | T \preceq_p A\}$ te $r_2 = \{T \in p | A \preceq_p T\}$. Znamo da tada postoje točke $T_1 \in r_1$ i $T_2 \in r_2$ tako da je $d(T_1, A) = x = d(T_2, A)$. Uočimo da je $T_1 \neq A, T_2 \neq A$ pa, budući da je $r_1 \cap r_2 = \{A\}$, imamo $T_1 \neq T_2$.
Pretpostavimo da je $T \in p$ točka takva da je $d(T, A) = x$. Tada je $T \in r_1$ ili $T \in r_2$. Ako je $T \in r_1$ onda iz Propozicije 1.4.2 slijedi $T = T_1$, a ako je $T \in r_2$ onda iz iste propozicije slijedi $T = T_2$. □

Teorem 2.1.4. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, te neka je p pravac u toj ravnini. Neka je $f : M \to M$ izometrija ove ravnine. Tada je f(p) pravac.*

Dokaz. Odaberimo $A, B \in p$ tako da je $A \neq B$. Tada je $f(A) \neq f(B)$.
Neka je $q = f(A)f(B)$. Tvrdimo da je $f(p) = q$.
Dokažimo prvo da je $f(p) \subseteq q$.
Neka je $T \in p$ proizvoljna točka. Imamo 3 slučaja:

1. slučaj: $T \in \overline{AB}$ (T između A i B)
   Iz Propozicije 2.1.2 slijedi da je onda $f(T) \in \overline{f(A)f(B)}$ iz čega slijedi $f(T) \in q$ (jer su $f(A), f(B) \in q$).
2. slučaj: $B \in \overline{AT}$ (B između A i T)
   Iz Propozicije 2.1.2 slijedi da je onda $f(B) \in \overline{f(A)f(T)}$ što povlači da točke *f(A)*, *f(B)* i *f(T)* leže na istom pravcu. Budući da je q jedini pravac koji sadrži točke *f(A)* i *f(B)* imamo $f(T) \in q$.
3. slučaj: $A \in \overline{BT}$ (A između B i T)
   Tada je $f(A) = \overline{f(B)f(T)}$ iz čega slijedi $f(T) \in q$.

U svakom slučaju $f(T) \in q$. Zaključujemo $f(p) \subseteq q$.
Dokažimo sada da je $q \subseteq f(p)$.

Neka je $V \in q$. Ako je $V = f(A)$ onda je jasno da je $V \in f(p)$. Pretpostavimo da $V \neq f(A)$. Neka je $x = d(f(A), V)$. Tada je $x > 0$, pa prema Lemi 2.1.3 postoje točke

$$T_1, T_2 \in p, T_1 \neq T_2$$

takve da je

$$d(T_1, A) = x = d(T_2, A).$$

Tada je $f(T_1) \neq f(T_2)$ i $d(f(T_1), f(A)) = x = d(f(T_2), f(A))$. Nadalje, znamo $f(T_1), f(T_2) \in q$. Iz Leme 2.1.3 sada slijedi $V = f(T_1)$ ili $V = f(T_2)$. Dakle, $V \in f(p)$.

Zaključak: $q \subseteq f(p)$. Prema tome $f(p) = q$. Dakle, *f(p)* je pravac. □

Korolar 2.1.5. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina, neka su* $A, B, C \in M$ *tri nekolinearne točke te neka je* $f : M \to M$ *izometrija. Tada su* $f(A), f(B), f(C)$ *nekolinearne točke.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $f(C) \in f(A)f(B)$. Iz Teorema 2.1.4 slijedi da je $f(A)f(B) = f(AB)$. Stoga je $f(C) \in f(AB)$.

To znači da je $f(C) = f(T)$ gdje je $T \in AB$. Budući da je f injekcija imamo $C = T$ pa je $C \in AB$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su A, B, C nekolinearne točke. □

Propozicija 2.1.6. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina, te neka su* $P, Q, R \in M$ *točke takve da je* $Q \in \overline{PR}$ *i* $R \in \overline{PQ}$. *Tada je* $Q = R$.

Dokaz. Neka je p pravac koji sadrži točke P i R.

1. slučaj $P \leq_p R$
   Stoga je $P \leq_p Q \leq_p R$, a $P \leq_p Q$ povlači $P \leq_p R \leq_p Q$. Zbog antisimetričnosti relacije $\leq_p$ imamo $Q = R$.

2. slučaj $R \leq_p P$
   Tada dobivamo $R \leq_p Q \leq_p P$ i $Q \leq_p R \leq_p P$. Stoga je $Q = R$.

□

Lema 2.1.7. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina, neka je p pravac te* $O \in p$. *Neka su* $A, B \in p \setminus \{O\}$. *Tada se točke A i B nalaze na istom polupravcu od p određenim s vrhom O ako i samo ako* $O \notin \overline{AB}$.

Dokaz. Pretpostavimo da se A i B nalaze u istom polupravcu određenim p s vrhom O. Tada je $A \leq_p O$ i $B \leq_p O$ ili $O \leq_p A$ i $O \leq_p B$.

1. slučaj $A \leq_p O$ i $B \leq_p O$
   Ako je $A \leq_p B$, onda je $B \in \overline{OA}$ pa bi $O \in \overline{AB}$, prema Lemi 2.1.6, povlačilo $O = B$ što je nemoguće. Dakle $O \notin \overline{AB}$. Ako je $B \leq_p A$ analogno dobivamo $O \notin \overline{AB}$.

2. slučaj $O \leq_p A$ i $O \leq_p B$
   Analogno dobivamo $O \notin \overline{AB}$.

Pretpostavimo sada $O \notin \overline{AB}$. Dokažimo da se A i B nalaze u istom polupravcu od p određenim s O.

Pretpostavimo suprotno: A i B se nalaze na različitim polupravcima od p određenim s O, što povlači da je $A \leq_p O \leq_p B$, ili $B \leq_p O \leq_p A$. U oba slučaja $O \in \overline{AB}$ što je nemoguće. □

Propozicija 2.1.8. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina, te* $f : M \to M$ *izometrija.*

a) Neka su $A, B \in M$. *Tada je* $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$.

b) Neka je r polupravac s vrhom O. Tada je f(r) polupravac s vrhom f(O).

c) Neka je K poluravnina određena pravcem p. Tada je skup f(K) sadržan u poluravnini određenoj sa f(p).

Dokaz. a) tvrdnja:

Ako je $A = B$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo $A \neq B$.
Iz Propozicije 2.1.2 odmah dobivamo da je $f(\overline{AB}) \subseteq \overline{f(A)f(B)}$.
Neka je $V \in \overline{f(A)f(B)}$. Tada je $V \in \overline{f(A)f(B)}$. No, $f(A)f(B) = f(AB)$ (po Teoremu 2.1.4, dakle $V \in f(AB)$. Stoga postoji $T \in AB$ tako da je $f(T) = V$.
Imamo 3 slučaja:

1. slučaj: $T \in \overline{AB}$, tada je $V \in f(\overline{AB})$.
2. slučaj: $B \in \overline{AT}$, tada je $f(B) \in \overline{f(A)f(T)}$. Dakle, $V \in f(\overline{f(A)f(B)})$ i $f(B) \in \overline{f(A)V}$. Iz Leme 2.1.6 slijedi $V = f(B)$. Dakle, $V \in f(\overline{AB})$.
3. slučaj: $A \in \overline{BT}$, tada je $f(A) \in \overline{f(B)f(T)}$ što zajedno sa $V \in \overline{f(A)f(B)}$ povlači $V = f(A)$ tj. $V \in f(\overline{AB})$.

U svakom slučaju smo dobili $V \in f(\overline{AB})$ pa zaključujemo da je $\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(\overline{AB})$.
Dakle, $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$

b) tvrdnja:

Neka je p pravac takav da je $O \in p$ te takav da je $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$ ili $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$. Neka je $A \in r$, $A \neq O$. Neka je $q = f(p)$. Neka je s onaj polupravac od q određen s $f(O)$ koji sadrži točku $f(A)$. Tvrdimo da je $f(r) = s$.

Neka je $T \in r$. Tada je $T \in p$ pa je $f(T) \in q$. Ako je $T = O$, onda je $f(T) \in s$.

Pretpostavimo $T \neq O$. Prema Lemi 2.1.7 $O \notin \overline{AT}$, ali iz toga slijedi $f(O) \notin f(\overline{AT})$ jer je f injekcija. Dakle, $f(O) \notin \overline{f(A)f(T)}$. Imamo $f(O), f(A), f(T) \in q$ a $f(O) \neq f(A)$ i $f(O) \neq f(T)$, te $f(O) \in \overline{f(A)f(T)}$ pa prema Lemi 2.1.7 da *f(A)* i *f(T)* pripadaju istom polupravcu određenom s *f(O)*. Budući da je $f(A) \in s$ imamo i da je $f(T) \in s$ pa zaključujemo $f(r) \subseteq s$.

Neka je sada $V \in s$. Tada je $V \in q$ pa postoji $T \in p$ takav da je $f(T) = V$. Dokažimo da je $T \in r$.

Pretpostavimo da $T \notin r$. Tada T i A ne leže na istom polupravcu od p određenim s O, pa iz Leme 2.1.7 slijedi da je $O \in \overline{AT}$. Ovo povlači $f(O) \in f(\overline{AT})$ tj. $f(O) \in \overline{f(A)f(T)}$ pa iz Leme 2.1.7 slijedi da *f(A)* i *f(T)* ne leže na istom polupravcu od q određenim s *f(O)*, što je nemoguće jer $f(A), f(T) \in s$. Ova pretpostavka je bila kriva, dakle $T \in r$, pa je $f(T) \in f(r)$ tj. $V \in f(r)$. Dakle, $s \subseteq f(r)$ pa zaključujemo $f(r) = s$.

c) tvrdnja:
Odaberemo $A \in K$. Tada $A \in p$, pa $f(A) \notin f(p)$ (injekcija). Neka je L poluravnina određena s *f(p)* takva da je $f(A) \in L$. Tvrdimo da $f(K) \subseteq L$. Neka je $T \in K$. Tada je $\overline{AT} \cap p = \emptyset$ pa je, budući da je *f* injekcija, $f(\overline{AT}) \cap f(p) = \emptyset$, tj. $\overline{f(A)f(T)} \cap f(p) = \emptyset$. Stoga je $f(T) \in L$, pa možemo zaključiti $f(K) \subseteq L$.

□

Općenito, ako je S skup i $f : S \to S$ funkcija, onda za $x \in S$ kažemo da je **fiksna točka funkcije** *f* ako je $f(x) = x$.

Napomena 2.1.9. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ ravnina te neka su $A, B \in M, A \neq B$. Tada postoji jedinstveni polupravac s vrhom A koji sadrži točku B.*

Propozicija 2.1.10. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, neka je $f : M \to M$ izometrija te ravnine te neka su $A, B \in M, A \neq B$ fiksne točke od f. Tada je svaka točka pravca AB fiksna točka od f.*

Dokaz. Neka je $T \in AB$. Dokažimo da je T fiskna točka od *f*. Imamo 3 slučaja:

1. slučaj: $T \in \overline{AB}$
   Neka je r polupravac s vrhom A takav da je $B \in r$. Tada je $T \in r$ (jer je $\overline{AB} \subseteq r$). Iz prethodne propzicije slijedi da je *f(r)* polupravac s vrhom *f(A)*.

   Uočimo, $f(B) \in f(r)$, no $f(A) = A, f(B) = B$. Dakle, *f(r)* je polupravac s vrhom A i $B \in r$. Znamo da je polupravac s tim svojstvom jedinstven. Prema tome, $f(r) = r$. Iz $f(T) \in f(r)$ slijedi $f(T) \in r$.

   Imamo: $d(A, T) = d(f(A), f(T)) = d(A, f(T))$. Dakle, $d(A, T) = d(A, f(T))$. Ako je $d(A, T) = 0$ onda je $T = A = f(T)$. Inače, $d(A, T) > 0$ pa iz Propozicije 1.4.2 slijedi $T = f(T)$.

   Dakle, T je fiksna točka od *f*.

2. slučaj: $B \in \overline{AT}$
   Neka je r polupravac s vrhom A takav da je $T \in r$. Slijedi: $B \in r$.

   Kao i u prethodnom slučaju, zaključujemo da je $f(r) = r$. Stoga imamo $T, f(T) \in r$ i te dvije točke su jednako udaljene od A. Iz Propozicije 1.4.2 slijedi $T = f(T)$ tj. T je fiksna točka od *f*.

3. slučaj: $A \in \overline{BT}$
   Analogno kao u 2. slučaju dobivamo da je T fisna točka od *f*.

□

Lema 2.1.11. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina. Neka su* $A, B \in M$ *te neka je C polovište dužine* $\overline{AB}$. *Neka je* $f : M \to M$ *izometrija. Tada je f(C) polovište dužine* $\overline{f(A)f(B)}$.

Dokaz. Ako je $A = B$, onda je $C = A$ pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo $A \neq B$. Tada je $C \in AB$ i $d(A, C) = d(C, B)$. Iz toga slijedi: $f(C) \in f(AB)$, tj. $f(C) \in f(A)f(B)$ i $d(f(A), f(C)) = d(f(C), f(B))$.

Ovo upravo znači da je *f(C)* polovište dužine $\overline{f(A)f(B)}$ □

Propozicija 2.1.12. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina, neka je* $f : M \to M$ *izometrija te neka su* $A, B \in M$ *točke takve da je* $f(A) = B$ *i* $f(B) = A$. *Tada je polovište dužine* $\overline{AB}$ *fiksna točka od f.*

Dokaz. Neka je C polovište dužine $\overline{AB}$. Prema prethodnoj lemi *f(C)* je polovište dužine $\overline{f(A)f(B)}$, tj. dužine $\overline{BA}$. Dakle, C i *f(C)* su polovšta dužine $\overline{BA}$.

Iz ovoga slijedi $C = f(C)$ tj. C je fiksna točka od *f*. □

Propozicija 2.1.13. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina, neka je* $f : M \to M$ *izometrija te neka su* $A, B, C \in M$ *tri nekolinearne točke koje su ujedno fiksne točke od f. Tada je f* ***identiteta*** *na skupu M (tj.* $f(T) = T$ *za svaki* $T \in M$*).*

Dokaz. Po Propoziciji 2.1.10 sve točke pravaca AB, BC i CA su fiksne točke of *f*. Neka je $T \in M$ točka koja ne leži ni na jednom od ovih pravaca.

Odaberemo neku točku $P \in \overline{BC}$ tako da je $P \neq B$ i $P \neq C$ (možemo uzeti da je P polovište $\overline{BC}$). Očito $P \neq T$. Pravac TP siječe dužinu $\overline{BC}$ pa iz Paschovog aksioma slijedi da TP siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{AB}$.

Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $TP \cap \overline{AC} \neq \emptyset$. Neka je $Q \in TP \cap \overline{AC}$. Pretpostavimo $Q = P$. To povlači $P \in TP \cap AC$, no $BC \cap AC = \{C\}$ pa prema tome $P = C$ što je nemoguće jer je $P \neq C$.

Dakle, $Q \neq P$, pa iz $Q \in TP$ slijedi $T \in PQ$. Budući da je $P \in BC$ i $Q \in AC$, točke P i Q su fiksne za *f*, pa je stoga i svaka točka pravca PQ fiksna za *f* po Propoziciji 2.1.10. Dakle, T je fiksna točka za *f*. □

2.2 Osna simetrija

Definicija 2.2.1. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina te neka je p pravac u toj ravnini. Neka je* $f : M \to M$ *izometrija. Za f kažemo da je* ***osna simetrija*** *s obzirom na pravac p ako je f različita od identitete na M te ako je svaka točka pravca p fiksna za f.*

Apsolutna ravnina

Definicija 2.2.2. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *metrička ravnina. Za* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *kažemo da je apsolutna ravnina ako vrijedi sljedeće:*

IV 1 Za svaki pravac $p \in \mathcal{P}$ *postoji jedinstvena osna simetrija s obzirom na pravac p. Tu osnu simetriju označavamo s* s_p.

IV 2 Ako je $O \in M$ *te ako su* r_1 *i* r_2 *polupravci s vrhom O, onda postoji bar jedan pravac p takav da je* $s_p(r_1) = r_2$.

Propozicija 2.2.3. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka su p i p' pravci takvi da je* $s_p = s_{p'}$. *Tada je*

$$p = p'.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $p \neq p'$. Neka su $A, B \in p, A \neq B$. Neka je $C \in p'$ tako da $C \notin p$.

Tada su A, B i C nekolinearne točke. Točke A i B su fiksne za s_p. Točka C je fiksna za $s_{p'}$, no $s_p = s_{p'}$ pa slijedi C fiksna za s_p.

Dakle, A, B, C su fiksne točke izometrije s_p. Po Propoziciji 2.1.13 imamo da je s_p identiteta na M. To je nemoguće jer je s_p osna simetrija s obzirom na pravac p koja je po definiciji različita od identitete.

Zaključujemo $p = p'$. □

Definicija 2.2.4. *Neka je S skup te* $f : S \to S$ *funkcija. Za f kažemo da je* ***involucija*** *ako je*

$$f \circ f = id_S.$$

Pri tome sa id_S *označavamo identitetu na skupu S.*

Napomena 2.2.5. *Neka su S i T skupovi te neka je* $f : S \to T$ *i* $g : S \to S$ *funkcije takve da je*

$$g \circ f = id_S \text{ i } f \circ g = id_T.$$

Tada je f bijekcija i $f^{-1} = g$.

Naime, ako su $x, y \in S$ *takvi da je* $f(x) = f(y)$*, onda je* $g(f(x)) = g((f(y))$*. No, za svaki* $z \in S$ *vrijedi*

$$g(f(z)) = (g \circ f)(z) = id_S(z) = z.$$

Prema tome $x = y$*. Dakle, f je injekcija.*

Neka je $y \in T$*. Imamo*

$$f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_T(y) = y.$$

Neka je $x = g(y)$. *Dakle,* $x \in S$ *i* $f(x) = y$. *Zaključak, f je surjekcija.*

Neka je $y \in T$. *Znamo da je*

$$f^{-1}(y) = x$$

gdje je x jedinstveni element iz S tako da je $f(x) = y$. *No,* $f(g(y)) = y$. *Dakle,* $g(y) = x$, *tj.* $g(y) = f^{-1}(y)$.

Dakle,

$$g(y) = f^{-1}(y)$$

za svaki $y \in T$ *pa zaključujemo da je* $f^{-1} = g$.

Napomena 2.2.6. *Neka je* $f : S \to T$ *involucija. Tada je f bijekcija i* $f^{-1} = f$. *Naime, imamo* $f \circ f = id_S$, *pa po prethodnoj napomeni slijedi tvrdnja.*

Propozicija 2.2.7. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka je* $p \in \mathcal{P}$ *pravac. Tada je* s_p *involucija. Nadalje,* s_p *nema drugih fiksnih točaka osim onih na pravcu p.*

Dokaz. Želimo dokazati da je s_p involucija, tj. da vrijedi $s_p \circ s_p = id_M$.

Neka je $f = s_p \circ s_p$. Tada je f izometrija kao kompozicija izometrija. Nadalje, za svaki $T \in p$ vrijedi $f(T) = (s_p \circ s_p)(T) = s_p(s_p(T)) = s_p(T) = T$. Dakle, svaka točka pravca p je fiksna točka za f.

Pretpostavimo da je $f \neq id_M$. Tada je f osna simetrija s obzirom na pravac p. Slijedi $f = s_p$, tj.

$$s_p \circ s_p = s_p.$$

Odaberemo točke $A, B \in p, A \neq B$ te $C \in M, C \notin p$. Iz Korolara 2.1 slijedi da su $s_p(A), s_p(B), s_p(C)$ nekolinearne. Imamo

$$s_p(s_p(C)) = (s_p \circ s_p)(C) = s_p(C).$$

Iz toga slijedi $s_p(C)$ je fiksna točka za s_p.

Dakle, $A, B, s_p(C)$ su nekolinearne fiksne točke za s_p. Iz Propozicije 2.1.13 slijedi $s_p = id_M$. To je nemoguće jer je s_p osna sminetrija. Stoga $f = id_M$, tj. $s_p \circ s_p = id_M$.

Dakle, s_p je involucija. Također, zaključujemo s_p nema drugih fiksnih točaka osim onih na pravcu p. □

Uočimo da iz prethodne Propozicije 2.2.7 slijedi da je u apsolutnoj ravnini $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ za svaki pravac p funkcija s_p bijekcija i $s_p^{-1} = s_p$.

Propozicija 2.2.8. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka je* $p \in \mathcal{P}$ *pravac. Neka su K i L poluravnine određene s p. Tada je* $s_p(K) = L$ *i* $s_p(L) = K$.

Dokaz. Prema Propoziciji 2.1.8 s_p je sadržano u poluravnini određenoj sa s_p. No, $s_p(p) = p$. Stoga je $s_p(K) \subseteq K$ ili $s_p(K) \subseteq L$.
Pretpostavimo $s_p(K) \subseteq K$. Odaberimo točku $T \in K$. Tada je $s_p(T) \in K$. Jasno da je $s_p(s_p(T)) = T$. Iz Propozicije 2.1.12 slijedi da je polovište dužine $\overline{Ts_p(T)}$ fiksna točka od s_p. Označimo to polovište sa P. Dakle, imamo $P \in \overline{Ts_p(T)}$ pa je $P \in K$ (jer je K konveksan skup). S druge strane, budući da je P fiksna točka od s_p iz Propozicije 2.2.7 slijedi $P \in p$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $K \cap p = \emptyset$.
Zaključujemo: $s_p(K) \subseteq L$. Ovime smo pokazali da se jedna poluravnina određena pravcem p preslikava u drugu pri s_p. Stoga je $s_p(L) \subseteq K$.
Neka je $T \in L$. Neka je $T' = s_p(T)$. Tada je $T' \in K$. Imamo $s_p(T') = T$, dakle $T \in s_p(K)$. Prema tome, $L \subseteq s_p(K)$ pa zaključujemo da je $s_p(K) = L$. Analogno dobivamo $s_p(L) = K$. □

Propozicija 2.2.9. *Neka je r polupravac s vrhom O, te ujedno polupravac s vrhom O'. Tada je* $O = O'$.

Dokaz. Budući da je r polupravac s vrhom O, postoji pravac p takav da je $O \in p$ te takav da je $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$ ili $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$.

Nadalje, budući da je r polupravac s vrhom O' postoji pravac q takav da je

$$r = \{T \in q \mid T \leq_q O'\} \text{ ili } r = \{T \in q \mid O' \leq_q T\}.$$

Pretpostavimo $O \neq O'$. Tada iz $O, O' \in r$ slijedi $O, O' \in p$ i $O, O' \in q$, pa zaključujemo $p = q$.

Pretpostavimo $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$. Iz $O' \in r$ slijedi $O' \leq_p O$. Budući da je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P^+-ravnina postoji točka $A \in p$ tako da je $A \neq O'$ i $O' \neq \overline{AO}$.

Iz Leme 2.1.7 slijedi da se točke A i O ne nalaze na istom polupravcu od p određenim s O'. No, r je polupravac od p određen s O' i $O \in r$. Stoga $A \notin r$. Budući da je

$$r = \{T \in p \mid T \leq_p O\},$$

vrijedi $O \leq_p A$. Sada $O' \in \overline{AO}$ povlači $O \leq_p O' \leq_p A$. Iz $O \leq_p O'$ slijedi $O = O'$ što je kontradikcija. Stoga je

$$r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}.$$

No, ovo sada na isti način vodi na kontradikciju.

Zaključujemo: pretpostavka je kriva i vrijedi $O = O'$. □

Teorem 2.2.10. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka su* $A, B \in M, A \neq B$. *Tada postoji jedinstveni pravac p takav da je* $s_p(A) = B$.

Dokaz. Dokaz egzistencije:
Neka je C polovište dužine $\overline{AB}$, te neka je $q = AB$. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $A \preceq_q B$. Iz $C \in \overline{AB}$ slijedi

$$A \preceq_q C \preceq_q B.$$

Neka je

$$r_1 = \{T \in q \mid T \preceq_q C\} \text{ te } r_2 = \{T \in q \mid C \preceq_q T\}.$$

Tada su r_1 i r_2 polupravci s vrhom C te je $A \in r_1$ i $B \in r_2$.

Iz Aksioma 2.2.2 IV 2 slijedi da postoji pravac p takav da je $s_p(r_1) = r_2$. Prema Propoziciji 2.1.8 b) $s_p(r_1)$ je polupravac s vrhom $s_p(C)$.

No, to je ujedno i polupravac s vrhom C. Iz Propozicije 2.2.9 slijedi $s_p(C) = C$. Iz $s_p(r_1) = r_2$ slijedi da je $s_p(A) \in r_2$. Imamo $d(A, C) = d(C, B)$ te nadalje

$$d(A, C) = d(s_p(A), s_p(C)) = d(s_p(A), C).$$

Stoga je $d(C, B) = d(C, s_p(A))$. Dakle, $s_p(A)$ i B su dvije točke na polupravcu r_2 jednako udaljene od C. Iz Propozicije 1.4.2 slijedi $s_p(A) = B$.

Dokaz jedinstvenosti:
Pretpostavimo sada da su p i p' pravci takvi da je $s_p(A) = B$ i $s_{p'}(A) = B$. Neka je $f = s_p \circ s_{p'}$. Tada je f izometrija te imamo $f(A) = s_p(s_{p'}(A)) = s_p(B) = A$ te $f(B) = s_p(s_{p'}(B)) = s_p(A) = B$. Dakle, A i B su fiksne točke za f. Iz Propozicije 2.1.10 slijedi da je svaka točka pravca $q = AB$ fiksna za f. Stoga je $f = id_M$ ili $f = s_q$.
Pretpostavimo $f = s_q$. Uočimo da je $p \neq q$ ($s_p(A) = B, s_q(A) = A$). Stoga postoji $T \in p$ takav da je $T \notin q$. Neka je K poluravnina određena s q tako da je $T \in K$. Neka je L druga poluravnina određena s q. Uočimo da je $s_p(q)$ pravac koji sadrži točke $s_p(A)$ i $s_p(B)$, tj. točke A i B. Stoga je $s_p(q) = q$.

Iz Propozicije 2.1.8 c) slijedi da je $s_p(K)$ sadržan u poluravnini određenoj sa $s_p(q) = q$. Stoga je

$$s_p(K) \subseteq K \text{ ili } s_p(K) \subseteq L.$$

No, $T \in K$ i $s_p(T) = T$. Dakle, $T \in s_p(K)$, pa je jasno da ne može vrijediti $s_p(K) \subseteq L$.

Stoga je $s_p(K) \subseteq K$. Iz ovoga slijedi $s_p(L) \subseteq L$ (u suprotnom bismo imali $s_p(L) \subseteq K$ pa bi slijedilo $s_p(M) = s_p(K \cup q \cup L) \subseteq s_p(K) \cup s_p(K) \cup s_p(L) \subseteq K \cup q \neq M$ što je nemoguće jer je s_p surjekcija.

Isto tako dobivamo

$$s_{p'}(K) \subseteq K, s_{p'}(L) \subseteq L.$$

Stoga je

$$f(K) = (s_p \circ s_{p'})(K) = s_p(s_p)(K)) \subseteq s_p(K) \subseteq K.$$

S druge strane, $s_q(K) = L$ prema propoziciji 2.2.8. To je kontradikcija.

Dakle, $f \neq s_q$. Prema tome, $f = id_M$. Dakle, $s_p \circ s_{p'} = id_M$. Slijedi

$$s_p \circ (s_p \circ s_{p'}) = s_p \circ id_M$$

pa je $(s_p \circ s_p) \circ s_{p'} = s_p$, tj. $id_M \circ s_{p'} = s_p$.

Dakle, $s_{p'} = s_p$. Iz Propozicije 2.2.3 slijedi $p' = p$. □

Korolar 2.2.11. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je $O \in M$ te neka su r_1, r_2 polupravci s vrhom O. Tada postoji jedinstveni polupravac p takav da je $s_p(r_1) = r_2$.*

Dokaz. Egzistencija takvog pravca slijedi p slijedi iz aksioma 2.2.2 IV2 apsolutne ravnine.

Pretpostavimo da su p i q pravci takvi da je

$$s_p(r_1) = r_2 \text{ i } s_q(r_1) = r_2.$$

Znamo da je r_1 polupravac s vrhom O pa je stoga $s_p(r_1)$ polupravac s vrhom $s_p(O)$.

No, $s_p(r_1) = r_2$ što znači da je $s_p(r_1)$ polupravacs s vrhom O. Iz Propozicije 2.2.9 slijedi da je $s_p(O) = O$.

Iz Propozicije 2.2.7 slijedi $O \in p$. Analogno dobivamo, $O \in q$ (koristeći $s_q(r_1) = r_2$).

Odaberimo točke $A \in r_1$ i $B \in r_2$ takve da je $d(O, A) = 1$ i $d(O, B) = 1$ (takve točke sigurno postoje). Iz $s_p(r_1) = r_2$ slijedi da je $s_p(A) \in r_2$. Imamo

$$d(O, A) = d(s_p(O), s_p(A)) = d(O, s_p(A)).$$

Dakle, $s_p(A)$ i B su točke na polupravcu r_2 takve da je $d(O, s_p(A)) = d(O, B)$. Iz Propozicije 1.4.2 slijedi $s_p(A) = B$. Isto tako dobivamo $s_q(A) = B$.

Ako je $A = B$, onda je $s_p(A) = A$ i $s_q(A) = A$ iz čega slijedi $A \in p$ i $A \in q$. Stoga pravci p i q sadrže 2 različite točke O i A (jer je $d(O, A) = 1$). Stoga je $p = q$.

Ako je $A \neq B$, onda iz Teorema 2.2.10 slijedi $p = q$. □

Pravac p iz prethodnog korolara naziva se simetrala polupravaca r_1 i r_2.

Teorem 2.2.12. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su $A, B \in M, A \neq B$. Neka je q skup svih točaka $T \in M$ tako da je $d(A, T) = d(B, T)$. Tada je q pravac i $s_q(A) = B$.*

Dokaz. Neka je p pravac takav da je $s_p(A) = B$ (znamo da takav pravac postoji prema Teoremu 2.2.10). Dokažimo da je $p = q$. Neka je $T \in p$. Tada je

$$d(A, T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B, T).$$

Dakle, $d(A, T) = d(B, T)$ pa je $T \in q$.

Obratno, neka je $T \in q$. Neka je r_1 polupravac s vrhom T takav da je $A \in r_1$ te neka je r_2 polupravac s vrhom T takav da je $B \in r_2$. Prema Aksiomu 2.2.2 IV2 postoji pravac l takav da je $s_l(r_1) = r_2$. Iz Korolara 2.2.11 slijedi da je $T \in l$. Nadalje, $s_l(r_1) \subseteq r_2$ i

$$d(A, T) = d(s_l(A), s_l(T)) = d(s_l(A), T).$$

No, $d(A, T) = d(B, T)$ (jer je $T \in q$). Stoga su $s_l(A)$ i B točke na polupravcu r_2 jednako udaljene od T.

Slijedi $s_l(A) = B$. Iz Teorema 2.2.10 slijedi $l = p$. Kako je $T \in l$ slijedi $T \in p$. Zaključujemo: $p = q$. □

Definicija 2.2.13. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su p i q pravci u toj ravnini. Kažemo da je pravac q okomit na pravac p (u oznaci $q \perp p$ ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$. Kažemo i da je q okomica na p.*

Propozicija 2.2.14. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su p i q pravci tako da je q okomit na p. Tada je $p \perp q$. Nadalje, pravci p i q se sjeku.*

Dokaz. Neka je $A \in p$ točka takva da je $A \neq q$. Iz $s_q(p) = p$ slijedi $s_q(A) \in p$. Neka je $B = s_q(A)$. Jasno je da je $s_q(B) = A$.

Neka je T polovište dužine $\overline{BA}$. Iz Propozicije 2.1.12 slijedi da je T fiksna točka za s_q. Stoga je $T \in q$.

S druge strane, $T \in \overline{BA} \subseteq p$. Dakle, $T \in p$. Iz toga slijedi $p \cap q \neq \emptyset$.

Dokažimo sada da je $p \perp q$. Jasno, $p \neq q$. Ostaje još dokazati $s_p(q) = q$. Neka je $C \in q$. Budući da je $s_q(A) = B$, s_q je simetrala dužine $\overline{AB}$ pa je $d(A, C) = d(C, B)$. Slijedi:

$$d(s_p(A), s_p(C)) = d(s_p(C), s_p(B)),$$

pa je $d(A, s_p(C)) = d(s_p(C), B)$ (jer je $A, B \in p$). Stoga se $s_p(C)$ nalazi na simetrali dužine $\overline{AB}$ pa je $s_p(C) \in q$. Možemo zaključiti da je $s_p(q) \subseteq q$. Dakle, $s_p(q)$ je pravac sadržan u pravcu q, što povlači $s_p(q) = q$. □

Napomena 2.2.15. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su $A, B \in M, A \neq B$ te neka je p simetrala dužine $\overline{AB}$. Tada je p okomica na pravac AB i p prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$. Naime, $p \neq AB$ (jer $A, B \notin p$) i $s_p(AB) = AB$ (jer $s_p(A), s_p(B) \in AB$).*

Propozicija 2.2.16. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je $p \in \mathcal{P}$ pravac i $A \in M$ točka. Tada postoji jedinstveni pravac q takav da je $A \in q$ i $q \perp p$.*

Dokaz. Uzmimo $A \notin p$. Neka je $B = s_p(A)$. Tada je $A \neq B$. Neka je $q = AB$. Očito je pravac p simetrala dužine $\overline{AB}$ iz čega slijedi $p \perp q$ povlači $q \perp p$. Pretpostavimo da je q' neki pravac takav da je $A \in q'$ i $q' \perp p$. Slijedi da je $p \perp q'$ pa je $s_p(q') = q'$.

Posebno, $s_p(A) \in q$, tj. $B \in q'$. Imamo $A, B \in q'$ pa slijedi $q = q'$. Time je dokazana tvrdnja propozicije u slučaju $A \notin p$.

Pretpostavimo sada $A \in p$. Neka su r_1, r_2 različiti polupravci od p s vrhom A. Neka su $B \in r_1$ i $C \in r_2$ točke takve da je $d(A, B) = 1 = d(A, C)$.

Uočimo da je A polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je q simetrala dužine $\overline{BC}$. Tada je $A \in q$ i $q \perp BC$, tj. $q \perp p$. Pretpostavimo da je q' pravac takav da je $A \in q'$ i $q' \perp p$. Tada je $s_{q'}(p) = p$ pa je $s_{q'}(B) \in p$. Uočimo

$$d(A, B) = d(s_{q'}(A), s_{q'}(B)) = (A, s_{q'}(B)).$$

Imamo 2 slučaja: $s_{q'}(B) \in r_1$ ili $s_{q'}(B) \in r_2$.

U prvom slučaju imamo da su $s_{q'}(B)$ i B 2 točke na polupravcu r_1 jednako udaljene od A. Prema Propoziciji 1.4.2 $s_{q'}(B) = B$, što povlači $B \in q'$. Dakle, $A, B \in q', A, B \in p$ pa slijedi $q' = p$, no to je u kontradikciji s $q' \perp p$. Stoga je $s_{q'}(B) \in r_2$. Sada su $s_{q'}(B)$ i C 2 točke na r_2 jednako udaljene od A, stoga je po Propoziciji 1.4.2 $s_{q'}(B) = C$. Dakle, q' je simetrala dužine $\overline{BC}$ pa slijedi (po Teoremu 2.2.10) da je $q' = q$. □

Osnovni teorem o izometrijama

Teorem 2.2.17 (Osnovni teorem o izometrijama)**.** *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina, te neka je* $f : M \to M$ *izometrija. Tada je f osna simetrija ili kompozicija dvije osne simetrije ili kompozicija tri osne simetrije.*

Dokaz. Ako je $f = id_M$, onda je $f = s_p \circ s_p$ za svaki pravac p.
Pretpostavimo sada da je $f \neq id_M$. Tada postoji $A \in M$ tako da je $f(A) \neq A$. Označimo $A' = f(A)$. Neka je p simetrala dužine $\overline{AA'}$. Neka je $g = s_p \circ f$. Tada je g izometrija i imamo

$$g(A) = s_p(f(A)) = s_p(A') = A,$$

dakle $g(A) = A$.

1. slučaj $g = id_M$
   Tada je $s_p \circ f = id_M$ iz čega slijedi $f = s_p$.

2. slučaj $g \neq id_M$
   Tada postoji $B \in M$ tako da je $g(B) \neq B$. Označimo $B' = g(B)$. Uočimo, $A \neq B$ (jer je $g(A) = A, g(B) \neq B$). Neka je q simetrala dužine $\overline{BB'}$. Neka je $h = s_q \circ g$. Tada je h izometrija i

   $$h(B) = s_q(g(B)) = s_q(B') = B.$$

   Nadalje,

   $$h(A) = s_q(g(A)) = s_q(A).$$

Imamo,

$$d(A, B) = d(g(A), g(B)) = d(A, B').$$

Dakle, $d(A, B) = d(A, B')$ pa je stoga $A \in q$. Slijedi $h(A) = A$.

1. podslučaj $h = id_M$
   Onda je $s_q \circ g = id_M$ pa je $g = s_q$ iz čega slijedi $s_p \circ f = s_q$. Tada je $s_p \circ (s_p \circ f) = s_p \circ s_q$. $f = s_p \circ s_q$.
   Neka je $r = AB$. Točke A i B su fiksne za h pa je svaka točka pravca r fiksna za h (po Propoziciji 2.1.10). Iz ovoga slijedi da je h osna simetrija s obzirom na pravac r. Dakle, $h = s_r$, pa je $s_q \circ g = s_r$ iz čega slijedi $g = s_q \circ s_r$. Iz toga slijedi $s_q \circ s_r = s_p \circ f$ pa je $f = s_p \circ s_q \circ s_r$.

□

Korolar 2.2.18. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, te neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada je f bijekcija.*

Dokaz. Znamo da je svaka osna simetrija bijekcija. Stoga, iz prethodnog teorema slijedi da je f bijekcija ili kompozicija dvije bijekcije ili kompozicija tri bijekcije. U svakom slučaju, f je bijekcija. □

Korolar 2.2.19. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, te neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada je $f^{-1} : M \to M$ izometrija.*

Dokaz. Neka su $C, D \in M$. Budući da je f izometrija vrijedi $d(f^{-1}(C), f^{-1}(D)) = d(f(f^{-1}(C), f(f^{-1}(D)))$. Dakle,

$$d(f^{-1}(C), f^{-1}(D)) = d(C, D).$$

Ovo znači da je f^{-1} izometrija. □

Korolar 2.2.20. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, te neka su $f, g : M \to M$ izometrije koje se podudaraju u 3 nekolinearne točke. Tada je $f = g$.*

Dokaz. Neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke takve da je $f(A) = g(A), f(B) = g(B), f(C) = g(C)$. Znamo da je g bijekcija te da je $g^{-1} : M \to M$ izometrija. Neka je $h = g^{-1} \circ f$. Tada je h izometrija i $h(A) = g^{-1}(f(A)) = g^{-1}(g(A)) = A$ te $h(B) = B$ i $h(C) = C$. Dakle, A, B, C su fiksne točke od h pa iz Propozicije 2.1.13 slijedi da je $h = id_M$. Dakle, $g^{-1} \circ f = id_M$ pa je $f = g$. □

Propozicija 2.2.21. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, te neka su $A, B, A', B' \in M$ točke takve da je $d(A, B) = d(A', B')$. Tada postoji izometrija $f : M \to M$ tako da je $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$. Ako imamo i točke C, C' tako da je $d(A, C) = d(A', C')$ i $d(B, C) = d(B', C')$ onda možemo postići i to da je $f(C) = C'$.*

Dokaz. Neka je $g : M \to M$ izometrija takva da je $g(A) = A'$ (ako je $A = A'$ uzmemo $g = id_M$, a ako je $A \neq A'$ neka je g simetrala dužine $\overline{AA'}$).
Označimo $B'' = g(B)$. Imamo

$$d(A', B') = d(A, B) = d(g(A), g(B)) = d(A', B''),$$

dakle $d(A', B') = d(A', B'')$. Neka je sada $h : M \to M$ izometrija takva da je $h(A') = A'$ i $h(B'') = B'$.

Takva izometrija h sigurno postoji. Naime, ako je $B' = B''$ možemo uzeti $h = id_M$, a ako je $B \neq B''$ možemo uzeti $h = s_p$ gdje je p simetrala dužine $\overline{B'B''}$ pri čemu je u tom slučaju $A' \in p$ (zbog $d(A', B') = d(A', B'')$. Neka je $\psi = h \circ g$. Tada je ψ izometrija i $\psi(A) = A'$ i $\psi(B) = B'$. Neka je $C'' = \psi(C)$. Ako je $C'' = C'$, onda je ψ tražena izometrija.
Pretpostavimo da je $C' \neq C''$. Neka je q simetrala dužine $\overline{C'C''}$. Imamo $d(A', C') = d(A, C) = d(\psi(A), \psi(C)) = d(A', C'')$ iz čega slijedi da je $A' \in q$. Posve analogno dobivamo $B' \in q$.

Promotrimo izometriju $s_q \circ \psi$. Imamo $(s_q \circ \psi)(B) = B'$ i $(s_q \circ \psi)(A) = A'$,

$$(s_q \circ \psi)(C) = s_q(\psi(C)) = s_q(C'') = C'.$$

Zaključujemo: $s_p \circ \psi$ je tražena izometrija. □

2.3 Rotacije

Definicija 2.3.1. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, te neka je $O \in M$. Za izometriju $f : M \to M$ kažemo da je rotacija s centrom O (ili oko O) ako je $f = id_M$ ili je O jedina fiksna točka od f. Uočimo da rotacija nije osna simetrija.*

Teorem 2.3.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina.*

a) *Neka su p i p' dva pravca u toj ravnini te pretpostavimo da je $O \in M$ točka takva da je $p \cap p' = \{O\}$. Neka je $r = s_p \circ s_{p'}$. Tada je r rotacija oko O.*

b) *Neka je r rotacija s centrom O (u ravnini $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$). Neka je p pravac takav da je $O \in p$. Tada postoji pravac p' koji prolazi točkom O tako da je $r = s_{p'} \circ s_p$.*

Dokaz. a) tvrdnja

Očito je r izometrija te je O fiksna točka od r. Pretpostavimo da je $A \in M$ fiksna točka od r. Neka je $B = s_{p'}(A)$. Imamo: $s_p(B) = s_p(s_{p'}(A)) = (s_p \circ s_{p'})(A) = r(A) = A$. Dakle, $s_p(A) = B$.

Pretpostavimo da je $A \neq B$. Imamo, $s_p(A) = B, s_{p'}(A) = B$ pa iz Propozicije 2.2.10 slijedi $p = p'$. To je nemoguće jer je $p \cap p'$ jednočlan skup.

Stoga je $A = B$ pa imamo $s_{p'}(A) = A$ i $s_p(A) = A$. Ovo znači da je A fiksna točka od $s_{p'}$ i s_p pa iz Propozicije 2.2.7 slijedi $A \in p$ i $A \in p'$. Dakle, $A \in p \cap p'$ pa je $A = O$.

Zaključujemo: O je jedina fiksna točka od f. Dakle, f je rotacija oko O.

b) tvrdnja

Ako je $r = id_M$ onda možemo uzeti $p' = p, p'' = p$. Uzmimo da je $r \neq id_M$. Odaberimo točku $A \in p, A \neq O$. Neka je $B = r(A)$. Uočimo da je $A \neq B$ (inače bi A bila fiksna točka od r, no jedina fiksna točka od r je O).

Nadalje, vrijedi
$$d(O, A) = d(r(O), r(A)) = d(O, B).$$

Neka je *p'* simetrala dužine $\overline{AB}$. Tada je $O \in p'$ (prema Teoremu 2.2.12). Neka je $f = s_{p'} \circ r$. Tada je f izometrija i $f \neq id_M$ (ako je $s_{p'} \circ r = id_M$, onda je $r = s_{p'}$, a to je nemoguće). Uočimo da su O i A fiksne točke od f. Stoga je svaka točka pravca OA, tj. pravca p, fiksna za f (Propozicija 2.1.10). Budući da je $f \neq id_M$ imamo $f = s_p$. Dakle, $s_{p'} \circ r = s_p$ pa je $r = s_{p'} \circ s_p$.

□

Korolar 2.3.3. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* $r : M \to M$ *rotacija oko točke O. Tada je* $r^{-1} : M \to M$ *rotacija oko točke O.*

Dokaz. Ako je $r = id_M$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo $r \neq id_M$.

Prema Teoremu 2.3.2 b) postoje pravci p i *p'* koji prolaze točkom O takvi da je $r = s_{p'} \circ s_p$. Uočimo da je $p \neq p'$ (inače bismo imali $r = id_M$). Stoga je $p \cap p' = \{O\}$. Iz Teorema 2.3.2 a) slijedi da je $s_p \circ s_{p'}$ rotacija oko O. Označimo $f = s_p \circ s_{p'}$. Imamo:

$$r \circ f = (s_{p'} \circ s_p) \circ (s_p \circ s_{p'}) = s_{p'} \circ (s_p \circ s_p) \circ s_{p'} = s_{p'} \circ id_M \circ s_{p'} = s_{p'} \circ s_{p'} = id_M.$$

Dakle, $r \circ f = id_M$ i analogno $f \circ r = id_M$. Stoga je $f = r^{-1}$. Dakle, r^{-1} je rotacija oko O. □

Napomena 2.3.4. *Općenito, ako je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina, p i q pravci, onda kao u dokazu Korolara 2.3.3 vidimo da je* $(s_p \circ s_q)^{-1} = s_q \circ s_p$.

Korolar 2.3.5. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina, neka je r rotacija s centrom O, te neka je p pravac koji prolazi točkom O. Tada postoji pravac p' koji prolazi točkom O takav da je* $r = s_p \circ s_{p'}$.

Dokaz. Iz Korolara 2.3.3 slijedi da je r^{-1} rotacija oko O. Sada prema Teoremu 2.3.2 b) postoji pravac p' koji prolazi točkom O takav da je $r^{-1} = s_{p'} \circ s_p$. Koristeći Napomenu 2.3.4 dobivamo: $(r^{-1})^{-1} = (s_{p'} \circ s_p)^{-1} = s_p \circ s_{p'}$. Dakle, $r = s_p \circ s_{p'}$. □

Propozicija 2.3.6. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je $O \in M$, te neka su v i w polupravci s vrhom O. Tada postoji jedinstvena rotacija r oko točke O takva da je $r(v) = w$.*

Dokaz. Neka je p pravac takav da je $v \subseteq p$. Neka je q pravac takav da je $s_q(v) = w$ (Aksiom 2.2.2 IV2). Tada je $s_q(O) = O$ (naime, $s_q(v)$ je polupravac s vrhom $s_q(O)$ pa Propozicija 2.2.9 povlači $O = s_q(O)$). Dakle, O je fiksna točka od s_q pa je $O \in q$.

Neka je $r = s_q \circ s_p$. Budući da je $O \in p$ i $O \in q$, iz Teorema 2.3.2 a) zaključujemo da je r rotacija oko O. Imamo:

$$r(v) = (s_q \circ s_p)(v) = s_q(v) = w.$$

Dakle, $r(v) = w$.

Pretpostavimo sada da je r' rotacija oko O tako da je $r'(v) = w$. Prema Teoremu 2.3.2 b) postoji pravac p' kroz O takav da je $r' = s_{p'} \circ s_p$. Imamo

$$w = r'(v) = (s_{p'} \circ s_p)(v) = s_{p'}(s_p(v)) = s_{p'}(v).$$

Dakle, $s_{p'}(v) = w$. Iz Korolara 2.2.11 slijedi $p' = q$. Stoga je $r' = r$. □

2.4 Centralna simetrija

Definicija 2.4.1. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, te neka je $O \in M$. Definiramo funkciju $s_O : M \to M$ na sljedeći način:*

1. $s_O(O) = O$.
2. *Neka je $T \in M \backslash \{O\}$. Neka je r polupravac od OT s vrhom O takav da $T \notin r$. Definiramo $s_O(T)$ kako točku na r koja je udaljena od O za d(O, T).*

Za funkciju s_O kažemo da je centralna simetrija s centrom O.

Uočimo da za svaku točku $T \in M$ vrijedi da je O polovište dužine $\overline{T s_O(T)}$ i $s_O(T)$ je jedinstvena točka s tim svojstvom.

Lema 2.4.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, neka je $O \in M$, te neka je r rotacija oko točke O takva da je $r \neq id_M$ i r involucija. Tada je r centralna simetrija s centrom O.*

Dokaz. Neka je $T \in M$. Tada je $r(r(T)) = T$ pa je prema Propoziciji 2.1.12 polovište dužine $\overline{Tr(T)}$ fiksna točka od r. Budući da je r rotacija oko O različita od identitete jedina fiksna točka od r je O. Dakle, O je polovište dužine $\overline{Tr(T)}$. Stoga je $r(T) = s_O(T)$. Zaključujemo: $r = s_O$. Dakle, r je centralna simetrija s centrom O. □

Teorem 2.4.3. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka je $O \in M$. Neka su p i q pravci kroz točku O takvi da je $p \perp q$. Tada je*

$$s_O = s_p \circ s_q.$$

Dokaz. Neka je $A \in q \backslash \{O\}$. Neka je $B = s_p(A)$. Tada je $B \in q$ (jer je $s_p(q) = q$ po definiciji okomitosti). Stoga je

$$(s_q \circ s_p)(A) = s_q(s_p(A)) = s_q(B) = B, (s_p \circ s_q)(A) = s_p(s_p(A)) = s_p(A) = B.$$

Prema Teoremu 2.3.2 a) $s_p \circ s_q$ i $s_q \circ s_p$ su rotacije oko O. Neka su v i w polupravci s vrhom O takvi da je $A \in v$ i $B \in w$. Znamo da je $(s_p \circ s_q)(v)$ polupravac s vrhom O koji sadrži točku B. Stoga je

$$(s_p \circ s_q)(v) = w.$$

Isto tako imamo

$$(s_q \circ s_p(v) = w.$$

Iz Propozicije 2.3.6 slijedi

$$s_q \circ s_p = s_p \circ s_q.$$

Neka je $r = s_p \circ s_q$. Imamo:

$$r \circ r = (s_p \circ s_q) \circ (s_p \circ s_q) = (s_p \circ s_q) \circ (s_q \circ s_p) = s_p \circ (s_q \circ s_q) \circ s_p = id_M.$$

Dakle, r je involutorna rotacija oko O i $r \neq id_M$ (ako je $s_p \circ s_q = id_M$, onda je $s_p = s_q$ i $p = q$ što je nemoguće jer je ($p \perp q$). Iz Leme 2.4.2 slijedi da je r centralna simetrija s centrom O. □

Poglavlje 3

Kutovi

3.1 Neorjentirani kutovi

Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih uređenih parova (r, s) gdje su r i s polupravci u danoj ravnini s istim vrhom. Na skupu $\mathcal{A}$ definiramo relaciju $\sim$ sa $(r, s) \sim (r', s')$ ako postoji izometrija $f : M \to M$ takva da je

$$f(r) = r' \text{ i } f(s) = s'.$$

Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{A}$.

Naime, $\sim$ je očito refleksivna ($(r, s) \sim (r, s)$ jer je id_M izometrija). Nadalje, ako je $(r, s) \sim (r', s')$ onda postoji izometrija $f : M \to M$ takva da je

$$f(r) = r' \text{ i } f(s) = s'.$$

Znamo da je $f^{-1} : M \to M$ izometrija, a vrijedi

$$f^{-1}(r') = f^{-1}(f(r)) = r \text{ i } f^{-1}(s') = f^{-1}(f(s)) = s.$$

Dakle, $(r, s) \sim (r', s')$. Prema tome, $\sim$ je simetrična.

Pretpostavimo da je $(r, s) \sim (r', s')$ i $(r', s') \sim (r'', s'')$. Slijedi da postoje izometrije $f, g : M \to M$ takve da je

$$f(r) = r' \text{ i } f(s) = s',$$

$g(r') = r''$ i $g(s') = s''$. Neka je $h = g \circ f$. Tada je h izometrija i

$$h(r) = (g \circ f)(r) = g(f(r)) = g(r') = r''$$

i analogno $h(s) = s''$. Prema tome, $(r, s) \sim (r'', s'')$. Dakle, $\sim$ je tranzitivna relacija. Ako je $(r, s) \sim (r', s')$, onda za parove (r, s) i (r', s') kažemo da su kongruentni.

Ako su r i s polupravci s istim vrhom, onda klasu ekvivalencije od (r, s) relaciji $\sim$ nazivamo **neorjentirani kut** i označavamo $\angle(r, s)$. Dakle, ako su $(r, s), (r', s') \in \mathcal{A}$, onda je $\angle(r, s) = \angle(r', s')$ ako i samo ako $(r, s) \sim (r', s')$.

Uočimo sljedeće:
Ako su r i s polupravci s istim vrhom, onda je $\angle(r, s) = \angle(s, r)$. Naime, prema Aksiomu 2.2.2 IV2 postoji pravac p takav da je $s_p(r) = s$. Iz ovoga slijedi

$$s_p(s_p(r)) = s_p(s), \text{ tj. } (s_p \circ s_p)(r) = s_p(s)$$

pa je $r = s_p(s)$. Prema tome, *(r, s)* i *(r', s')* su kongruentni pa je

$$\angle(r, s) = \angle(s, r).$$

Definicija 3.1.1. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ *ravnina te neka su v i w polupravci u ovoj ravnini. Za v i w kažemo da su komplementarni polupravci ako postoje pravci pravac p i točka* $O \in p$ *takvi da su v i w različiti polupravci od p s vrhom O.*

Uočimo sljedeće:
Ako je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ metrička ravnina, $O \in M$ te v i v' komplementarni polupravci s vrhom O, onda je $s_O(v) = v'$. Iz ovoga slijedi: Ako je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ apsolutna ravnina te ako su *v, w, v', w'* polupravci s istim vrhom takvi da su v i v' komplementarni, te w i w' komplementarni, onda je $\angle(v, w) = \angle(v', w')$.

Propozicija 3.1.2. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina, te neka je r polupravac. Tada za svaki polupravac v vrijedi da su (r, r) i (v, v) kongruentni. Nadalje, ako su v i w polupravci s istim vrhom te ako su (r, r) i (v, w) kongrentni, onda je v = w.*

Dokaz. Neka su O i O' točke takve da je r polupravac s vrhom O te v polupravac s vrhom O'. Neka je $A \in r$ točka takva da je $d(O, A) = 1$ te neka je $A' \in v$ točka takva da je $d(O', A') = 1$. Prema Propoziciji 2.2.21 postoji izometrija $f : M \to M$ takva da je $f(O) = O$ i $f(A') = A'$. Znamo da je *f(r)* polupravac s vrhom O' te da sadrži točku A'. Stoga je $f(r) = v$.
Pretpostavimo sada da su v i w polupravci s istim vrhom takvi da su *(r, r)* i *(v, w)* kongruentni. Tada postoji izometrija $f(r) = v$ i $f(r) = w$ pa je $v = w$. □

Iz Propozicije 3.1.2 slijedi da u apsolutnoj ravnini $(M, \mathcal{P}, \rho)$ za svaki polupravac r vrijedi $\angle(r, r) = \{(v, v) \mid v \textit{ polupravac}\}$.

Nul-kut

Definicija 3.1.3. *U apsolutnoj ravnini* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *neorjentirani kut* $\angle(r, r)$ *nazivamo* ***nul-kut****, pri čemu je r polupravac. Nul-kut označavamo s 0.*

Propozicija 3.1.4. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka su v i v' komplementarni polupravci. Tada su (v, v') i (w, w') kongruentni kad god su w i w' komplementarni polupravci. Nadalje, ako su w i w' polupravci s istim vrhom takvi da su (v, v') i (w, w') kongruentni, onda su w i w' komplementarni.*

Dokaz. Neka je p pravac te $O \in p$ tako da su v i v' različiti polupravci od p s vrhom O. Neka je $A \in v$ tako da je $d(O, A) = 1$. Neka su w i w' komplementarni polupravci. Tada postoji pravac q i $O' \in q$ tako da su w i w' različiti polupravci od q s vrhom O'.

Neka je $A' \in w$ tako da je $d(O', A') = 1$. Prema Propoziciji 2.2.21 postoji izometrija $f : M \to M$ tako da je $f(O) = O', f(A) = A'$.

Jasno, $O \neq A, O' \neq A'$. Imamo, $p = OA, q = O'A'$. Stoga je $f(p) = q$. Nadalje, *f(v)* je polupravac s vrhom O' koji sadrži A. Stoga je $f(v) = w$.

Štoviše, *f(v')* je polupravac s O' i $f(v) \subseteq q$. Stoga je $f(v') = w$ ili $f(v') = w'$. Pretpostavimo $f(v') = w$.

Imamo

$$q = f(p) = f(v \cup v') = f(v) \cup f(v') = w \cup w = w,$$

dakle $q = w$ što je nemoguće. Prema tome, $f(v') = w'$. Zaključujemo: *(v, v')* i *(w, w')* su kongruentni.

Pretpostavimo sada da su w i w' polupravci s istim vrhom takvi da su *(v, v')* i *(w, w')* kongruentni.

Tada postoji izometrija f takva da je $f(v) = w$ i $f(v') = w'$. Označimo $O' = f(O), q = f(p)$.

Tada je q pravac i $O' \in q$. Iz $f(v) = w$ slijedi da je w polupravac s vrhom O' i $w \subseteq q$, stoga je w polupravac od q s vrhom O'. Isto tako, w' je polupravac od q s vrhom O'. Nadalje, $w \neq w'$ jer je $v \neq v'$ i f injekcija. Dakle, w i w' su komplementarni polupravci. □

Ispruženi kut

Definicija 3.1.5. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka su v i v' komplementarni polupravci. Tada za* $\angle(v, v')$ *kažemo da je* ***ispruženi kut****. Ispruženi kut označavamo s* ω.

Lema 3.1.6. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P^+*-ravnina te neka je p pravac. Neka je* $O \in p$ *te neka su* L_1 *i* L_2 *poluravnine određene pravcem p. Neka je* $A \in L_1$*. Neka je r polupravac s vrhom O takav da je* $A \in r$*. Tada za svaki* $T \in r, T \neq O$ *vrijedi* $T \in L_1$*.*

Dokaz. Uočimo prvo da na polupravcu r nema točke, osim O, koja leži na p. Naime, u suprotnom bi r bio polupravac od p s vrhom O što je nemoguće jer $A \notin p$. Iz ovoga slijedi da je $T \notin p$.

Pretpostavimo da je $T \in L_2$. Tada segment $\overline{AT}$ siječe pravac p, postoji točka $K \in \overline{AT}$ tako da je $K \in p$. Budući da je r konveksan imamo $\overline{AT} \subseteq r$ pa je $K \in r$. No, $K \neq O$ jer $O \notin \overline{AT}$ prema Lemi 2.1.7. Dobili smo još jednu točku na r različitu od O koja pripada pravcu p što je nemoguće.

Dakle, $T \in L_1$. □

Odnosi među kutovima

Propozicija 3.1.7. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka je r polupravac s vrhom O, te neka je p pravac takav da je* $r \subseteq p$. *Neka je K zatvorena poluravnina određena pravcem p. Tada za svaki neorjentirani kut* α *postoji jedinstveni polupravac s vrhom O takav da je* $s \subseteq K$ *i* $\angle(r, s) = \alpha$.

Dokaz. Iz Propozicija 3.1.2 i 3.1.4 slijedi da je tvrdnja istinita ako je $\alpha = 0$ ili $\alpha = \omega$.
Pretpostavimo stoga da je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \omega$.
Jedinstvenost:

Pretpostavimo da su s i s' 2 polupravca s vrhom O' sadržana u K takva da je $\angle(r, s) = \alpha$ i $\angle(r, s') = \alpha$. Iz ovoga slijedi da su (r, s) i (r, s') kongruentni. Stoga postoji izometrija takva da je $f(r) = r$ i $f(s) = s'$. Znamo da je $f(r)$ polupravac s vrhom $f(O)$. Dakle, r je polupravac s vrhom $f(O)$ pa je prema Propoziciji 2.2.9 $f(O) = O'$.
Neka je $A \in r$ takva točka da je $d(O, A) = 1$. Tada je

$$f(A) \in f(r) \text{ i } 1 = d(O, A) = d(f(O), f(A)) = d(O, f(A))$$

Dakle, A i $f(A)$ su točke na r udaljene od O za 1. Stoga je $A = f(A)$. Prema tome, O i A su različite točke pravca p fiksne za f. Iz ovoga slijedi da je svaka točka pravca p fiksna za f. Stoga je $f = id_M$ ili $f = s_p$.

Pretpostavimo da je $f = s_p$. Imamo $s \subseteq K$ pa je $f(s) \subseteq f(K)$, tj. $s' \subseteq f(K)$. Iz Propozicije 2.2.8 znamo da je $f(K)$ poluzatvorena ravnina određena s p različita od K. Stoga je $f(K) \cap K = p$, a budući da je $s' \subseteq f(K) \cap K$ imamo $s' \subseteq p$. Dakle, s' je polupravac s vrhom O sazdržan u p, tj. polupravac od p s vrhom O. Stoga je $s' = r$ ili su r i s' komplementarni.

U prvom slučaju imamo $\angle(r, s') = 0$, u drugom $\angle(r, s') = w$, što je u kontradikciji s činjenicom $\angle(r, s') = \alpha$.

Dakle, $f = id_M$ pa je $s = s'$.

Neka su u i v polupravci s vrhom O' takvi da je $\alpha = \angle(u, v)$. Neka su $A' \in u$ i $A \in r$ točke takve da je $d(O', A') = 1$ i $d(O, A) = 1$. Prema Propoziciji 2.2.21 postoji izometrija

f takva da je $f(O) = O'$ i $f(A) = A'$. Iz toga slijedi $f(u) = r$.
Neka je $s = f(v)$. Ako je $s \subseteq K$, onda smo gotovi.

Pretpostavimo $s \nsubseteq K$. Tada postoji $T \in s$ tako da je $T \notin K$. Neka je L zatvorena poluravnina određena s p različita od K. Tada iz Leme 3.1.6 slijedi $s \subseteq L$. Iz Propozicije 2.2.8 slijedi $s_p(L) = K$, iz čega slijedi $s_p(s) \subseteq K$. Nadalje, očito je $s_p(r) = r$. Prema tome

$$\alpha = \angle(r, s) = \angle(s_p(r), s_p(s)) = \angle(r, s_p(s))$$

. □

Propozicija 3.1.8. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su q i p pravci takvi da je $q \perp p$. Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada je $f(q) \perp f(p)$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.2.14 pravci p i q se sijeku. Neka je O točka iz njihovog presjeka. Neka su $A, B \in p$ točke takve da je $A \neq B, d(O, A) = d(O, B) = 1$.

Budući da je $s_q(p) = p$ te $O \in q$ i $A, B \notin q$, imamo $s_q(A) = B$ (kada bi $s_q(A) = A$ bila bi fiksna točka, tj. $A \in q$ što ne vrijedi). Iz ovoga slijedi da je q simetrala dužine $\overline{AB}$ pa prema Teoremu 2.2.12 slijedi

$$q = \{T \in M \mid d(A, T) = d(B, T)\}.$$

Neka je $T \in q$. Tada je $d(A, T) = d(B, T)$ pa je

$$d(f(A)), f(T)) = d(f(B)), f(T)).$$

Obratno, ako je $C \in M$ točka takva da je $d(f(A), C) = d(f(B), C)$, onda za neku točku $T \in M$ vrijedi $C = f(T)$ (jer je f bijekcija) pa imamo $d(f(A), f(T)) = d(f(B), f(T)))$ što povlači $d(A, T) = d(B, T)$ pa je $T \in q$. Dakle, $C \in f(q)$.

Zaključak: $f(q)$ je skup svih točaka jednako udaljenih od $f(A)$ i $f(B)$. Iz Propozicije 2.2.12 slijedi da je $f(q)$ simetrala $\overline{f(A)f(B)}$. Prema tome, $s_{f(q)}(f(A)) = f(B)$. Očito, $s_{f(q)}(f(O)) = f(O)$.

Imamo,

$$s_{f(q)}(f(p)) = s_{f(q)}(f(O)f(A)) = f(O)f(B) = f(p).$$

Zaključak: $f(q) \perp f(p)$. □

Propozicija 3.1.9. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su u i v polupravci s istim vrhom koji leže na okomitim pravcima. Tada $\angle(u, v) = \angle(u', v')$ kad god su u' i v' polupravci s istim vrhom koji leže na okomitim pravcima.*

Nadalje, ako su u' i v' polupravci s istim vrhom i ako je $\angle(u, v) = \angle(u', v')$ onda u' i v' leže na okomitim pravcima.

Dokaz. Neka je O vrh polupravaca u i v. Neka su p i q pravci takvi da je $u \subseteq p$ i $v \subseteq q$. Neka su u' i v' polupravci s vrhom O' te neka su p' i q' okomiti pravci takvi da je $u' \subseteq p'$ i $v' \subseteq q'$. Iz Leme 3.1.6 slijedi da se v nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj pravcem p. Označimo je s K.

Prema Propoziciji 3.1.7 postoji polupravac s s vrhom O takav da je $s \subseteq K$ te takav da su (u', v') i (u, s) kongruentni. Dakle, postoji izometrija f takva da je $f(u') = u$ i $f(v') = s$. Iz ovoga slijedi da je $f(p') = p$.

Prema Propoziciji 3.1.8 vrijedi $f(q') \perp f(p')$. Dakle, $f(q') \perp p$. Jasno da je $f(O') = O$, stoga je $O \in f(q')$. Dakle, pravac $f(q')$ prolazi točkom O i okomit je na p.

Iz Propozicije 2.2.16 i činjenice da je $q \perp p$ slijedi da je $f(q') = q$. Imamo $v' \subseteq q'$ pa je $f(v') \subseteq f(q')$, tj. $s \subseteq q$.

Dakle, s i v su polupravci od q s vrhom O. Tvrdimo da je $s = v$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $s \neq v$.

Neka su $A \in v$ i $B \in s$ točke takve da je $d(O, A) = 1$ i $d(O, B) = 1$. Jer je $p \neq q$ imamo:

$$A, B \in K, A \notin p, B \notin p.$$

Ovo znači da točke A i B leže u istoj poluravnini određenoj pravcem p pa i $\overline{AB}$ leži u toj poluravnini, pa je stoga $\overline{AB} \perp p = \emptyset$. Uočimo da točke A i B ne leže na istom polupravcu od q s vrhom O. Stoga Lema 2.1.7 povlači da je $O \in \overline{AB}$ što je u kontradikciji s $\overline{AB} \perp p = \emptyset$.

Dakle, $s = v$ pa je prema tome $\angle(u', v') = \angle(u, v)$.

Pretpostavimo sada da su u' i v' polupravci s istim vrhom takvi da je $\angle(u, v) = \angle(u', v')$. Tada postoji izometrija $f : M \to M$ takva da je $f(u) = u'$ i $f(v) = v'$. Iz ovoga slijedi da u' leži na pravcu $f(p)$, a v' na pravcu $f(q)$, pa iz Leme 3.1.8 slijedi da u' i v' leže na okomitim pravcima. □

Definicija 3.1.10. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su u i v polupravci s istim vrhom koji leže na okomitim pravcima. Tada za neorjentirani kut $\angle(u, v)$ kažemo da je* ***pravi kut****.*

3.2 Uspoređivanje kutova

Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Odaberimo pravac p, $O \in p$ te r polupravac od p s vrhom O. Nadalje, neka je K zatvorena poluravnina određena pravcem p.
Za neorjentirani kut α definiramo skup S_α na sljedeći način:

ako je α ispruženi kut stavimo $S_\alpha = K$.

Uzmimo da α nije ispruženi kut.
Iz Propozicije 3.1.7 slijedi da postoji polupravac s s vrhom O takav da je $s \subseteq K$ i $\angle(r, s) = \alpha$. Ako je $r = s$, onda stavimo $S_\alpha = r$.

Pretpostavimo da je $r \neq s$. Tada s ne leži na pravcu p. U suprotnom bismo imali da su r i s komplementarni polupravci pa bi $\angle(r, s)$ bio ispruženi kut (suprotno pretpostavci da α nije ispružen).

Neka je q pravac na kojem leži s. Iz Leme 3.1.6 slijedi da se r nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj s q. Uočimo da je ta zatvorena poluravnina jedinstvena. Naime, kada bi r bio sadržan u obje poluravnine određene s q, onda bi bio sadržan i u njihovom presjeku. Dakle, bio bi sadržan u q što bi povlačilo $p = q$. To je nemoguće je s ne leži na p.

Označimo s L zatvorenu poluravninu od q koja sadrži r. Definiramo $S_\alpha = K \cap L$. Za S_α kažemo da je **zatvoreni kutni isječak** pridružen kutu α i određen s r i K.

Neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorjentiranih kutova. Na skupu $\mathcal{K}$ definiramo relaciju $\leq$ tako da za $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ stavimo $\alpha \leq \beta$ ako je $S_\alpha \subseteq S_\beta$.
Pokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru pravaca p, polupravca r, točke O i zatvorene poluravnine K.

Pretpostavimo da je p' pravac, $O' \in p'$, r' polupravac od p' s vrhom O' te K' zatvorena poluravnina određena s p'. Neka je $f : M \to M$ izometrija takva da je $f(r) = r'$ i $f(K) = K'$. Takva izometrija postoji jer možemo uzeti izometriju f takvu da je $f(r) = r'$ (takva postoji prema Propoziciji 2.2.21) i tada je $f(p) = p'$ pa je $f(K)$ zatvorena poluravnina određena s p'. Ako je to baš K', onda smo gotovi. Inače, komponiramo f sa $s_{p'}$ i dobivamo traženu izometriju (po Propoziciji 2.2.8).

Neka je $\alpha \in \mathcal{K}$. Označimo sa S'_α zatvoreni kutni isječak pridružen kutu α određen s r' i K'. Tvrdimo da je $f(S_\alpha) = S'_\alpha$.

Ako je α ispruženi kut, onda je $S_\alpha = K, S'_\alpha = K'$ pa je tvrdnja jasna.

Pretpostavimo da je α različit od ispruženog kuta. Neka je s polupravac s vrhom O sadržan u K takav da je $\angle(r, s) = \alpha$ te neka je S' polupravac s vrhom O' sadržan u K' takav da je $\angle(r', s') = \alpha$. Ako je $r = s$, onda po Propoziciji 3.1.2 slijedi $r' = s'$ pa imamo $S_\alpha = r$, a $S'_\alpha = r'$. Očito je tada $f(S_\alpha) = S'_\alpha$).

Pretpostavimo $r \neq s$. Imamo

$$\alpha = \angle(r, s) = \angle(f(r), f(s)) = \angle(r', f(s)),$$

a $f(s) \subseteq f(K) = K'$ i $f(s)$ je polupravac s vrhom O'. Iz Propozicije 3.1.7 slijedi da je $s' = f(s)$.

Neka je q pravac na kojem leži s, te q' pravac na kojem leži s'. Tada je $f(q) = q'$. Neka je L zatvorena poluravnina određena s q takva da je $r \subseteq L$. Neka je L' zatvorena poluravnina određena s q' takva da je $r' \subseteq L'$. Tada je $f(L)$ zatvorena poluravnina odeđena s q' i sadrži r' iz čega slijedi da je $f(L) = L'$. Imamo

$$f(S_\alpha) = f(K \cap L) = f(K) \cap f(L) = K' \cap L' = S'_\alpha.$$

Dakle, $f(S_\alpha) = S'_\alpha$.

Dokažimo sada da je definicija relacije $\leq$ na skupu $\mathcal{K}$ s obzirom na r i K ista kao s obzirom na r' i K'. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$. Tada je $\alpha \leq \beta$ s obzirom na r i K ako i samo ako je $S_\alpha \subseteq S_\beta$, što vrijedi ako i samo je $f(S_\alpha) \subseteq f(S_\beta)$ ako i samo je $S'_\alpha \subseteq S'_\beta$ ako i samo ako $\alpha \leq \beta$ s obzirom na r' i K'.

Uočimo sljedeće: ako je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, onda za svaki neorjentirani kut α vrijedi $0 \leq \alpha \leq \omega$ pri čemu je 0 **nul kut**.

Napomena 3.2.1. *Ako je α neorjentirani kut te S_α pripadni kutni isječak s obzirom na neki polupravac r s vrhom O te ako je $A \in S_\alpha, A \neq O$, onda je polupravac s vrhom O koji sadrži A podskup od S_α.*

Lema 3.2.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho)$ P^+-ravnina. Neka je p pravac u toj ravnini, K zatvorena poluravnina određena tim pravcem, $O \in p$ te $T \in K, T \neq O$. Pretpostavimo da je q pravac različit od p koji prolazi točkama O i T. Tada oba polupravca od q s vrhom O ne leže u K.*

Dokaz. Neka su v i w polupravci od q s vrhom O takvi da je $T \in v$. Neka je $C \in w, C \neq O$. Tada točke C i T ne pripadaju istom polupravcu od q s vrhom O pa je $O \in \overline{CT}$. Dakle, $\overline{CT} \perp p \neq \emptyset$, a očito C i T ne leže na p (jer $p \neq q$). Stoga C i T ne leže u istoj poluravnini određenoj s p pa ni u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj s p. Iz ovoga zaključujemo da oba polupravca v i w ne leže u K. □

Teorem 3.2.3. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je p pravac, K zatvorena poluravnina određena s pravcem p, $O \in p$ te r i r' različiti polupravci od p s vrhom O. Neka je s polupravac s vrhom O tako da je $s \subseteq K$ i $s \neq r, s \neq r'$. Neka su A, B i A' točke različite od O te neka je $A \in r, B \in s$ i $A' \in r'$. Tada vrijedi sljedeće:*

a) Za svaki polupravac v s vrhom O takav da je $v \subseteq K$ i $v \notin \{r, s, r'\}$ vrijedi da v siječe samo jednu od dužina $\overline{AB}, \overline{BA'}$. Ako v siječe $\overline{AB}$, onda je $S_{\angle(r,v)} \subseteq S_{\angle(r,s)}$, a ako v siječe $\overline{BA'}$, onda je $S_{\angle(r,s)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$.

b) Neka su u i v polupravci s vrhom O koji sijeku dužinu $\overline{AB}$ u točkama P i Q redom. Tada je $S_{\angle(r,u)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$ ako i samo ako P leži između A i Q.

Dokaz. a) Neka je v polupravac s vrhom O tako da je $v \subseteq K$ te $v \notin \{r, s, r'\}$. Neka je q pravac na koje leži v. Budući da točke A i A' leže na različitim polupravcima od p s vrhom O, vrijedi $O \in \overline{AA'}$. Jasno, $O \in q$.

Iz Paschovog aksioma slijedi da q siječe $\overline{A'B}$ ili $\overline{BA}$. Uočimo da q ne prolazi ni kroz A ni kroz A'. U suprotnom bi vrijedilo $p = q$ što bi značilo da je v polupravac od p s vrhom O, a to je nemoguće zbog $v \neq r$ i $v \neq r'$.

Pretpostavimo da je $B \in q$. Neka je v' polupravac od q s vrhom O, različit od v. Kada bi vrijedilo $B \in v'$, onda bi slijedilo $v' = s$ pa bi Lema 3.2.2 povlačila $v \not\subseteq K$ što je nemoguće. Dakle, $B \notin v'$ pa je $B \in v$ što povlači $v = s$, a to je kontradikcija. Zaključujemo: $B \notin q$.

Dakle, q ne prolazi niti jednom od točaka A, A', B pa Propozicija 1.2.6 povlači da q ne siječe obje dužine $\overline{A'B}$ i $\overline{BA}$. Stoga i v ne siječe obje ove dužine.

Pretpostavimo da q siječe $\overline{A'B}$ u točki P. Neka je v' polupravac od q različit od v. Pretpostavimo da je $P \in v'$. Iz Leme 3.1.6 tada slijedi da je $v' \subseteq K$. Sada Lema 3.2.2 povlaci da v nije podskup od K što je kontradikcija.

Dakle, $P \notin v'$ pa je $P \in v$ pri čemu zaključujemo da v siječe $\overline{A'B}$.

Analogno dobivamo da v siječe $\overline{AB}$ ako q siječe $\overline{AB}$. Dakle, v siječe samo jednu od dužina $\overline{AB}$ i $\overline{A'B}$.

Pretpostavimo da v siječe $\overline{AB}$ u točki C. Uočimo da su $A, B \in S_{\angle(r,s)}$ pa iz konveksnosti skupa $S_{\angle(r,s)}$ slijedi $C \in S_{\angle(r,s)}$. Sada iz Napomene 3.2.1 slijedi $v \subseteq S_{\angle(r,s)}$.

Dokažimo da je $S_{\angle(r,v)} \subseteq S_{\angle(r,s)}$. Neka je $T \in S_{\angle(r,v)}, T \neq O$. Neka je w polupravac s vrhom O tako da je $T \in w$. Tada je $w \subseteq K$ (po Propoziciji 3.1.6) pa prema dokazanom w siječe $\overline{A'B}$ ili $\overline{AB}$.

Pretpostavimo da w siječe $\overline{A'B}$ u točki D. Prema Napomeni 3.2.1 imamo $w \subseteq S_{\angle(r,v)}$. Stoga je $D \in S_{\angle(r,v)}$. Znamo da je $S_{\angle(r,v)} = K \cap L'$ gdje je L' zatvorena poluravnina određena s q takva da je $A \in L'$. Imamo $C \in \overline{AB} \cap q$. Znamo da točke A i B ne leže na q pa slijedi da se A i B ne nalaze u istoj poluravnini određenoj s q. Nadalje, znamo da pravac q ne siječe $\overline{A'B}$ što povlači da se A' i B nalaze u istoj poluravnini određenoj s q. Iz $D \in \overline{A'B}$ slijedi da se D i B nalaze u istoj poluravnini određenoj s q pa zaključujemo da se A i D ne nalaze u istoj poluravnini. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $D \in L'$ (što slijedi iz $D \in S_{\angle(r,v)}$).

Zaključujemo: w ne siječe $\overline{A'B}$ što povlači da siječe $\overline{AB}$. Budući da je $\overline{AB} \subseteq S_{\angle(r,s)}$ iz ovoga zaključujemo (koristeći Napomenu 3.2.1) da je $w \subseteq S_{\angle(r,s)}$. Dakle, $T \in S_{\angle(r,s)}$.

Uočimo da w zapravo siječe $\overline{CA}$. Naime, u suprotnom imamo da w siječe $\overline{AB}$ u točki E takvoj da je $E \in \overline{CB}, E \neq C$. Iz toga slijedi da C nije na $\overline{EB}$ pa $\overline{EB} \cap q = \emptyset$. To znači da su E i B s iste strane od q.

No, $C \in \overline{AB} \cap q$ što znači da su A i B s različitih strana od q. Zaključujemo: A i E su s različitih strana od q što je nemoguće jer je $E \in L'$ ($E \in w \subseteq S_{\angle(r,v)} \subseteq L'$). Dakle,

$$S_{\angle(r,v)} \subseteq S_{\angle(r,s)}.$$

Pretpostavimo da v siječe $\overline{A'B}$ u točki C. Dokažimo da je $S_{\angle(r,s)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$. Neka je $T \in S_{\angle(r,s)}, T \neq O$. Neka je w polupravac s vrhom O koji sadrži točku T. Prema Napomeni 3.2.1 $w \subseteq S_{\angle(r,s)}$. Posebno, $w \subseteq K$. Prema dokazanom w siječe $\overline{A'B}$ ili $\overline{AB}$.

Pretpostavimo da w ne siječe $\overline{AB}$. Tada w siječe $\overline{A'B}$ u točki D pri čemu $D \neq B$. Znamo da je $S_{\angle(r,s)} = K \cap L$ gdje je L poluravnina određena pravcem OB takva da je $A \in L$. Imamo $O \in \overline{AA'} \cap OB$ pa slijedi da se A i A' nalaze u različitim poluravninama određenim s OB. Iz Leme 1.2.5 slijedi $\overline{A'D} \cap OB = \emptyset$ što znači da se A' i D nalaze u istoj poluravnini određenoj s OB. Zaključujemo da se D i A nalaze u različitim poluravninama određenim s OB i to je u kontradikciji s činjenicom $D \in L$ (jer je $D \in w \subseteq S_{\angle(r,s)} \subseteq L$.

Dakle, w siječe $\overline{AB}$.

Neka je $E \in w \perp \overline{AB}$. Neka je L' zatvorena poluravnina određena pravcem q takva da je $A \in L'$. Znamo da je $S_{\angle(r,v)} = K \cap L$. Znamo da q ne siječe $\overline{AB}$ pa ne siječe ni $\overline{AE}$. Iz toga slijedi da se A i E nalaze u istoj poluravnini određenoj s q. Stoga je $E \in L'$. Jasno, $E \in K$ pa je $E \in S_{\angle(r,v)}$. Iz Napomene 3.2.1 slijedi da je $w \subseteq S_{\angle(r,v)}$. Iz $T \in w$ slijedi $T \in S_{\angle(r,v)}$. Zaključujemo:

$$S_{\angle(r,s)} \subseteq S_{\angle(r,v)}.$$

b) Uočimo da smo u dijelu a) dokazali sljedeću stvar: ako je v polupravac s vrhom O koji siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki C, onda svaki polupravac w s vrhom O takav da je $w \subseteq S_{\angle(r,v)}$ siječe $\overline{AC}$.

Pretpostavimo da P leži između A i Q, dakle $P \in \overline{AQ}$. Iz ovoga slijedi $\overline{AP} \subseteq \overline{AQ}$. Dokažimo da je $S_{\angle(r,u)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$. Neka je $T \in S_{\angle(r,u)}, T \neq O$. Neka je w polupravac s vrhom O koji sadrži T. Prema Napomeni 3.2.1 $w \subseteq S_{\angle(r,u)}$. Tada prema gore navedenom vrijedi da w siječe $\overline{AP}$ u točki y. Imamo $y \in \overline{AP}$ pa slijedi $y \in \overline{AQ}$. No, $\overline{AQ} \subseteq S_{\angle(r,v)}$ pa je $y \in S_{\angle(r,v)}$. Uočimo da je w polupravac s vrhom O koji sadrži točku y. Iz Napomene 3.2.1 slijedi da je $w \subseteq S_{\angle(r,v)}$ pa je $T \in S_{\angle(r,v)}$. Ovim smo dokazali da je $S_{\angle(r,u)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $S_{\angle(r,u)} \subseteq S_{\angle(r,v)}$. Dokažimo da P leži između A i Q. Pretpostavimo suprotno, dakle $P \notin \overline{AQ}$. Znamo da je tada $A \in \overline{PQ}$ ili $Q \in \overline{AP}$.

Ako je $A = Q$, onda je $v = r$, tj. $S_{\angle(r,v)} = r$ pa je $S_{\angle(r,v)} \subseteq r$ iz čega slijedi $P \in r$. No, $r \cap AB = \{A\}$, što znači da je $P = A$, a ovo je u kontradikciji s $P \notin \overline{AQ}$. Prema tome, $A \neq Q$.

Nadalje, $P \neq A$ jer $P \notin \overline{AQ}$. Budući da su P i Q elementi od $\overline{AB}$ te točke se nalaze u istom polupravcu s vrhom A pa prema Propoziciji 2.1.7 $A \notin \overline{PQ}$.

Zaključujemo: Q mora biti na $\overline{AP}$. Slijedi da je $\overline{AQ} \subseteq \overline{AP}$. No, $\overline{AQ} \neq \overline{AP}$ jer $P \notin \overline{AQ}$. Stoga postoji $T \in \overline{AP}$ takav da $T \notin \overline{AQ}$.

Neka je w polupravac s vrhom O koji sadrži točku T. Prema Napomeni 3.2.1 $w \subseteq S_{\angle(r,u)}$. Stoga je $w \subseteq S_{\angle(r,v)}$ pa w siječe $\overline{AQ}$ u točkiT'. No, w leži na pravcu koji je različit od AB jer $O \neq AB$ pa w siječe AB u najviše jednoj točki. Tada je $T = T'$ što znači da je $T \notin \overline{AQ}$. To je kontradikcija s odabirom točke T. Zaključujemo $P \in \overline{AQ}$.

□

Propozicija 3.2.4. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Tada je relacija* $\leq$ *na skupu svih neorjentiranih kutova* $\mathcal{K}$ *relacija linearnog uređaja.*

Dokaz. Odaberimo pravac p, točku $O \in p$, polupravac r od p s vrhom O i zatvorenu poluravninu K određenu s p.

1. refleksivnost:
   Za svaki $\alpha \in \mathcal{K}$ vrijedi $\alpha \leq \alpha$ (jer $S_\alpha \subseteq S_{\alpha)}$).

2. antisimeričnost:
   Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ takvi da je $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \alpha$. Tada je $S_\alpha \subseteq S_\beta$. Želimo pokazati da je $\alpha = \beta$.

   Promotrimo prvo slučaj kad je jedan od ova dva kuta jednak ispruženom kutu. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $\alpha = \omega$. Pretpostavimo da je $\beta \neq \omega$.

   Neka je s polupravac s vrhom O sadržan u K takav da je $\beta = \angle(r, s)$. Uočimo da je $r \neq s$. U suprotnom bismo imali $S_\beta = r$, a očito je $S_\alpha = K$ pa imamo kontradikciju sa $S_\beta = S_\alpha$. Dakle, $r \neq s$.

   Neka je r' suprotni polupravac od r. Ako dokažemo da je $s = r'$, onda ćemo imati da je $\angle(r, s)$ ispruženi kut, tj. imati ćemo $\beta = \alpha$.

   Pretpostavimo da je $s \neq r'$. Neka je q pravac na kojem leži s. Prema definiciji $S_\beta = K \cap L$ gdje je L zatvorena poluravnina od q koja sadrži r. Odaberemo $A \in r, A \neq O$. Primijenjujući Lemu 3.2.2 na pravac q, zatvorenu poluravninu L, točke O, A i pravac p koji prolazi točkama O i A, te uzimajući u obzir da je $p \neq q$ (u suprotnom bi s bio polupravac od p s vrhom O što je nemoguće) dobivamo da oba polupravca od p s vrhom O ne leže u L.

   Dakle, r i r' ne leže u L. No, $r \subseteq L$, stoga r' ne leži u L. S druge strane, imamo

   $$K = S_\alpha = S_\beta = K \cap L$$

pa je $K = K \cap L$ iz čega slijedi $K \subseteq L$. Posebno, $r' \subseteq L$. To je kontradikcija pa zaključujemo $s = r'$ pa je $\alpha = \beta$.

Promotrimo sada slučaj kada je jedan od kutova α i β nul kut. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je to α. Neka je s polupravac s vrhom O sadržan u $\mathcal{K}$ takav da je $\beta = \angle(r, s)$.

Iz definicije od S_β je jasno da je $s \subseteq S_\beta$ pa imamo

$$s \subseteq S_\beta = S_\alpha = r.$$

Dakle, $s \subseteq r$ pa, budući da su to polupravci s istim vrhom, slijedi $s = r$.

Zaključujemo $\beta = \alpha$.

Pretpostavimo sada da ni α ni β nisu nul kut ni ispruženi kut. Neka su s i s' polupravci s vrhom O sadržani u K takvi da je $\alpha = \angle(r, s)$ te $\beta = \angle(r, s')$. Želimo dokazati da je $s = s'$.

Pretpostavimo da je $s \neq s'$. Odaberemo točku $A \in r\backslash\{O\}$, $B \in s\backslash\{O\}$ i $A' \in r'\backslash\{O\}$. Iz Teorema 3.2.3 s' siječe dužinu $\overline{AB}$ ili dužinu $\overline{BA'}$.

1. slučaj: s' siječe $\overline{AB}$

   Neka je P točka u kojoj s' siječe $\overline{AB}$. Jasno, $P \in \overline{AB}$. Prema Teoremu 3.2.3 b) i činjenice da je $S_\alpha \subseteq S_\beta$, tj. $S_{\angle(r,s)} \subseteq S_{\angle(r,s')}$ slijedi da točka B leži između A i P.

   Dakle, imamo $P \in \overline{AB}$ i $B \in \overline{AP}$ iz čega slijedi $B = P$ (prema Lemi 2.1.6). Stoga $s = s'$, kontradikcija sa $s \neq s'$.

2. slučaj: s' siječe $\overline{BA'}$

   Neka je D točka u kojoj s' siječe $\overline{BA'}$. Iz Teorema 3.2.3 a) slijedi da s siječe $\overline{A'D}$ ili $\overline{DA}$.

   Pretpostavimo da s siječe $\overline{A'D}$ u točki E. Tada je $E \neq B$. U suprotnom bismo imali $B \in \overline{AD}$ i $D \in \overline{AB}$ pa bi Lema 2.1.6 povlačila $B = D$ što bi značilo $s = s'$, kontradikcija.

   Dakle, $E \neq B$. Stoga s leži na pravcu EB, tj. pravcu $A'B$. To je nemoguće jer $O \notin A'B$. Dakle, s ne siječe $\overline{A'D}$ pa prema tome siječe $\overline{DA}$. Sada analogno kao i u 1. slučaju iz $S_\beta \subseteq S\alpha$ slijedi $s = s'$, kontradikcija.

   Zaključujemo: $s = s'$ pa je $\alpha = \beta$.

Ovime smo pokazali da je relacija $\leq$ antisimetrična.

3. tranzitivnost:

   Neka su $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{K}$ tako da je $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \gamma$. Tada je

   $$S_\alpha \subseteq S_\beta \text{ i } S_\beta \subseteq S_\gamma$$

   pa je $S_\alpha \subseteq S_\gamma$. Stoga je $\alpha \leq \gamma$. Time smo dokazali tranzitivnost.

4. usporedivost:

   Neka su $\alpha,\beta \in \mathcal{K}$. Želimo dokazati da je $\alpha \leq \beta$ ili $\beta \leq \alpha$. Ovo je jasno ako je bar jedan od kutova α i β ispružen ili nul kut ili ako je $\alpha = \beta$.

   Pretpostavimo da α i β nisu ni nul kut ni ispruženi kut te da je $\alpha = \beta$. Neka su s i v polupravci s vrhom O koji leže u $\mathcal{K}$ takvi da je $\alpha = \angle(r,s)$ i $\beta = \angle(r,v)$. Neka je $A \in r\backslash\{O\}, B \in s\backslash\{O\}$ i $A' \in r'\backslash\{O\}$.

   Prema Teoremu 3.2.3 a) v siječe $\overline{AB}$ ili $\overline{BA'}$ i pri tome u prvom slučaju vrijedi

   $$S_{\angle(r,v)} \subseteq S_{\angle(r,s)},$$

   a u drugom slučaju

   $$S_{\angle(r,s)} \subseteq S_{\angle(r,v)}.$$

   Dakle, $S_\beta \subseteq S_\alpha$ ili $S_\alpha \subseteq S_\beta$. Zaključujemo $\beta \leq \alpha$ ili $\alpha \leq \beta$.

   Time smo dokazali da je $\leq$ linearni uređaj na $\mathcal{K}$.

$\square$

Supremum i infimum

Definicija 3.2.5. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ te neka je $r \in \mathbb{R}$. Za r kažemo da je* ***gornja međa*** *skupa S ako je $x \leq r$ za svaki $x \in S$. Za r kažemo da je* ***supremum*** *skupa S ako je r najmanja gornja međa od S, tj. ako vrijedi:*

1) r je gornja međa od S

2) ako je r' bilo koja gornja međa od S, onda je $r \leq r'$.

Uočimo sljedeće: ako skup S ima supremum, onda je on jedinstven, tj. ako su r_1 i r_2 supremumi od S onda je $r_1 = r_2$.

Definicija 3.2.6. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ te $s_0 \in S$. Za s_0 kažemo da je* ***maksimum*** *skupa S ili najveći element skupa S ako je $x \leq s_0$ za svaki $x \in S$.*

Uočimo sljedeće: ako je s_0 maksimum skupa S, onda je s_0 supremum od S.

Primjer 3.2.7. *Broj 1 je supremum skupa* $\langle -\infty, 1\rangle$.
Naime, očito je 1 gornja međa od $\langle -\infty, 1\rangle$. *S druge strane, neka je r bilo koja gornja međa od* $\langle -\infty, 1\rangle$. *Tvrdimo da je* $1 \leq r$.

Pretpostavimo suprotno, $r < 1$. *Tada postoji* $x \in \mathbb{R}$ *tako da je* $r < x < 1$. *Iz ovoga slijedi da je* $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ *pa bi moralo vrijediti* $x \leq r$ *jer je r gornja međa tog skupa. No, to je u kontradikciji s* $r < x$.

Dakle, $1 \leq r$, *tj. 1 je supremum skupa* $\langle -\infty, 1\rangle$.

Definicija 3.2.8. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$. *Za S kažemo da je* ***odozgo omeđen*** *ako postoji barem jedna gornja međa od S.*

Uočimo sljedeće: ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup koji ima supremum (tj. takav skup da psotoji $r \in \mathbb{R}$ tako da je r supremum od S), onda je S odozgo omeđen.

Nadalje, uočimo da je $S \neq \emptyset$ ($\emptyset$ nema supremum jer je svaki realni broj gornja međa od $\emptyset$). Dakle, ako skup ima supremum onda je on neprazan i odozgo omeđen.

Aksiom 3.2.9 (Aksiom potpunosti)**.** *Neka su* S *i* T *neprazni podskupovi od* $\mathbb{R}$ *takvi da je* $x \leq y$ *za svaki* $x \in S, y \in T$. *Tada postoji* $z \in \mathbb{R}$ *tako da je*

$$x \leq z \leq y$$

za svaki $x \in S, y \in T$.

Propozicija 3.2.10. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od* $\mathbb{R}$. *Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Tada je T neprazan skup te vrijedi $x \leq y$ za svaki $x \in S, y \in T$. Prema Aksiomu potpunosti 3.2.9 postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da je

$$x \leq z \leq y$$

za svaki $x \in S, y \in T$. Iz ovoga je jasno da je z supremum skupa S. □

Definicija 3.2.11. *Neka je S podskup od* $\mathbb{R}$ *te neka je* $r \in \mathbb{R}$. *Za r kažemo da je* ***donja međa*** *skupa S ako je* $r \leq x$ *za svaki* $x \in S$. *Za r kažemo da je* ***infimum*** *skupa S ako je r najveća donja međa od S, tj. ako vrijedi:*

1) *r je donja međa od S*

2) *ako je r' bilo koja donja međa od S, onda je* $r' \leq r$.

Uočimo sljedeće: ako skup S ima infimum, onda je on jedinstven.

Definicija 3.2.12. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ te $s_0 \in S$. Za s_0 kažemo da je* ***minimum*** *skupa S ili najmanji element skupa S ako je $s_0 \leq x$ za svaki $x \in S$.*

Uočimo sljedeće: ako je s_0 minimum od S, onda je s_0 infimum od S.

Neka je S podskup od $\mathbb{R}$. Za S kažemo da je odozdo omeđen ako postoji $r \in \mathbb{R}$ tako da je r donja međa od S.

Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ takav da S ima infimum, onda je S neprazan i odozdo omeđen.

Propozicija 3.2.13. *Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima infimum.*

Dokaz. Dokazuje se posve analogno kao propozicija za supremum. □

Definicija 3.2.14. *Neka je X neprazan skup te neka je $\leq$ linearni uređaj na X. Tada za uređeni par (X, $\leq$) kažemo da je* ***uređeni skup****.*

Definicija 3.2.15. *Neka je (X, $\leq$) uređeni skup. Neka je $S \subseteq X$ te $r \in X$. Za r kažemo da je gornja međa skupa S u (X, $\leq$) ako je $x \leq r$ za svaki $x \in S$.*

Za r kažemo da je supremum skupa S u (X, $\leq$) ako je r najmanja gornja međa od S, tj. ako vrijedi:

1) r je gornja međa od S u (X, $\leq$)

2) ako je r' gornja međa od S u (X, $\leq$), onda je $r \leq r'$.

Uočimo da ako supremum skupa postoji, onda je jedinstven.
Supremum skupa S označavamo sa ***sup S****.*

Propozicija 3.2.16. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a supremum od S ako i samo ako je a gornja međa od S te za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ tako da je $a - \epsilon < x$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a supremum od S. Očito je tada a gornja međa od S. Neka je $\epsilon < 0$. Tvrdimo da postoji $x \in S$ tako da je $a - \epsilon < x$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $x \leq a - \epsilon$ za svaki $x \in S$ što znači da je $a - \epsilon$ gornja međa od S, a to je u kontradikciji s činjenicom da je a supremum od S.

Obratno, pretpostavimo da je a gornja međa od S te da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ tako da je $a - \epsilon < x$. Tvrdimo da je a supremum od S. Neka je c gornja međa od S. Pretpostavimo $c < a$. Neka je $\epsilon = a - c$. Tada je $\epsilon > 0$ te je $c = a - \epsilon$.

Prema pretpostavci postoji $x \in S$ tako da je $a - \epsilon < x$. Iz ovoga slijedi $c < x$, no to je nemoguće jer je c gornja međa od S. Stoga je $a \leq c$. Dakle, a je supremum od S. □

Analogno kao u slučaju realnih brojeva definiramo pojam maksimuma skupa S u uređenom skupu (X, $\leq$) te vidimo da maksimum skupa S mora biti supremum od S.

Analogno definiramo pojmove donja međa skupa S, infimum skupa S i minimum skupa S u uređenom skupu (X, $\leq$).

Propozicija 3.2.17. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka su $A, B \in M$ te neka je p pravac koji sadrži točke A i B. Pretpostavimo da je $A \preceq_p B$. Neka su S i T neprazni podskupovi od segmenta $\overline{AB}$ tako da je $P \preceq_p Q$ za sve $P \in S, Q \in T$. Tada postoji $R \in \overline{AB}$ tako da je*

$$P \preceq_p R \preceq_p Q$$

za svaki $P \in S, Q \in T$.

Dokaz. Definiramo $f : \overline{AB} \to [0, d(A, B)]$ sa $f(P) = d(A, B)$. Jasno je da je f dobro definirana ($P \in \overline{AB}$ slijedi $d(A, B) = d(A, P) + d(P, B)$ iz čega slijedi $d(A, P) \leq d(P, B)$).

1) f je injekcija:
   Neka su $P, Q \in \overline{AB}, P \neq Q$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $P \preceq_p Q$. Iz toga slijedi $P \in \overline{AQ}$ što povlači $d(A, P) \leq d(A, Q)$.

   Prepostavimo $d(A, P) = d(A, Q)$. Neka je r polupravac s vrhom A tako da je $B \in r$. Imamo $\overline{AB} \subseteq r$ pa su $P, Q \in r$ i $d(A, P) = d(A, Q)$ iz čega po Propoziciji 1.4.2 slijedi $P = Q$ što je kontradikcija.

   Dakle, $d(A, P) \neq d(A, Q)$, tj. $d(A, P) < d(A, Q)$. Ovime smo ujedno pokazali da $P, Q \in \overline{AB}$ i $P \preceq_p Q$ povlači $f(P) \leq f(Q)$.

2) f je surjekcija:
   Za $x \in [0, d(A, B)]$ postoji $P \in r$ tako da je $d(A, P) = x$. Pretpostavimo da $P \notin \overline{AB}$. Iz toga slijedi $A \in \overline{PB}$ ili $B \in \overline{AP}$.

   No, $A \in \overline{PB}$ ne može vrijediti prema Lemi 2.1.7. Stoga je $B \in \overline{AP}$ pa je $d(A, B) \leq d(A, P)$. Stoga je $d(A, B) = d(A, P)$ (jer je $d(A, P) = x \leq d(A, B)$).

   Prema Propoziciji 1.4.2 $B = P$, što je u kontradikciji s tim da je $P \notin \overline{AB}$.

   Zaključujemo $P \in \overline{AB}$ i $f(P) = x$.

   Pretpostavimo da su $P, Q \in \overline{AB}$ takve da je $f(P) \leq f(Q)$. Tada $P \preceq_p Q$. U suprotnom imamo $Q \prec_p P$ pa je $f(Q) < f(P)$ što je kontradikcija. Dakle, $P \preceq_p Q$, tj. za $P, Q \in \overline{AB}$ vrijedi $P \preceq_p Q$ ako i samo ako $f(P) \leq f(Q)$.

   Neka je $S' = f(S)$ i $T' = f(T)$. Ako su $x \in S'$ i $y \in T'$ onda je $x = f(P), y = f(Q)$ gdje su $P \in S, Q \in T$. Tada je $P \preceq_p Q$ pa je $f(P) \leq f(Q)$, tj. $x \leq y$.

Prema Aksiomu potpunosti 3.2.9 postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da je

$$x \leq z \leq y,$$

za svaki $x \in S', y \in T'$.

Jasno je da su $S', T' \subseteq [0, d(A, B)]$ pa je $z \in [0, d(A, B)]$. Budući da je f surjekcija postoji $R \in \overline{AB}$ tako da je $z = f(R)$. Dakle,

$$f(P) \leq f(R) \leq f(Q)$$

za svaki $P \in S, Q \in T$. Ovo povlači da je

$$P \preceq_p R \preceq_p Q$$

za svaki $P \in S, Q \in T$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Lema 3.2.18. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorjentiranih kutova u $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ te neka je $\leq$ standardni uređaj na $\mathcal{K}$. Neka su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ neprazni podskupovi od $\mathcal{K}$ tako da je $\alpha \leq \beta$ za svaki $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T}$. Tada postoji $\gamma \in \mathcal{K}$ tako da je*

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$

za svaki $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Ako je $\mathcal{T} = \{\omega\}$ tvrdnja je jasna (uzmimo $\gamma = \omega$). Inače postoji $\beta_0 \in \mathcal{T}$ takav da je $\beta_0 \neq \omega$.

Ako je $\beta_0 = 0$, onda je $\mathcal{S} = \{0\}$ pa je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da je $\beta_0 \neq 0$. Neka je $p' \in \mathcal{P}, O \in p'$, r polupravac od p' s vrhom O te K zatvorena poluravnina određena s p'. Znamo da postoji polupravac y_0 s vrhom O takav da je $y_0 \subseteq K$ i $\angle(r, y_0) = \beta_0$. Jasno $y_0 \neq r$ i $y_0 \neq r'$ gdje je r' polupravac od p s vrhom O različit od r.

Odaberimo $A \in r, A' \in r', B \in y_0$ tako da je $A \neq O, A' \neq O, B \neq O$. Neka je

$$\mathcal{K}' = \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \leq \beta_0\}.$$

Za svaki $\alpha \in \mathcal{K}'$ postoji polupravac v_α s vrhom O tako da je $v_\alpha \subseteq K$ i $\angle(r, v_\alpha) = \alpha$. Znamo da tada v_α siječe $\overline{A'B}$ ili $\overline{BA}$ (po Teoremu 3.2.3).

Ako v_α siječe $\overline{A'B}$, onda prema Teoremu 3.2.3 vrijedi

$$\angle(r, y_0) \leq \angle(r, v_\alpha), \text{ tj. } \beta_0 \leq \alpha$$

pa iz $\alpha \leq \beta_0$ slijedi
$$\alpha = \beta_0.$$
Stoga je $y_0 = v_\alpha$ (po Propoziciji 3.1.7). Dakle, v_α siječe $\overline{AB}$ u točki B.

Ako v_α ne siječe $\overline{A'B}$, onda siječe $\overline{AB}$. Dakle, v_α u svakom slučaju siječe $\overline{AB}$. Označimo sa T_α točku u kojoj v_α siječe $\overline{AB}$. Znamo po propoziciji od prije da za $\alpha, \beta \in \mathcal{K}'$ vrijedi $\alpha \leq \beta$ ako i samo ako T_α između A i T_β.

Neka je $p = AB$.

1) slučaj: $A \leq_p B$

Za svaki $\alpha, \beta \in \mathcal{K}'$ tada vrijedi
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow T_\alpha \in \overline{AT_\beta} \Leftrightarrow T_\alpha \leq_p T_\beta \tag{3.1}$$
Neka je
$$S = \{T_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\}, T = \{T_\beta \mid \beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'\}.$$
Tada su S i T neprazni podskupovi od od $\overline{AB}$ i $P \leq_p Q$ za svaki $P \in S, Q \in T$ (naime, ako su $\alpha \in \mathcal{S}$ i $\beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'$, onda je $\alpha \leq \beta$ pa je $T_\alpha \leq_p T_\beta$). Prema Propoziciji 3.2.17 postoji $R \in \overline{AB}$ tako da je
$$P \leq_p R \leq_p Q$$
za svaki $P \in S, Q \in T$. Neka je $\gamma \in \mathcal{K}'$ tako da je $R = T_\gamma$ (Takav γ sigurni postoji. Naime, ako je w polupravac OR, onda je $\angle(r, w) \leq \angle(r, y_0)$ po Propoziciji 3.2.3 pa za $\gamma = \angle(r, w)$ vrijedi $\gamma \leq \beta_0$, tj. $\gamma \in \mathcal{K}'$, a očito je $T_\gamma = R$).

Imamo
$$T_\alpha \leq_p T_\gamma \leq_p T_\beta$$
za svaki $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'$. Prema (3.1) ovo znači da je
$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$
za svaki $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'$.

Vrijedi $\gamma \leq \beta_0$ pa je $\gamma \leq \beta$ za one $\beta \in \mathcal{T}$ tako da je $\beta_0 \leq \beta$.

Dakle, $\gamma \leq \beta$ za svaki $\beta \in \mathcal{T}$, tj.
$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$
za svaki $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T}$.

2) slučaj: $B \preceq_p A$

Za svaki $\beta \in \mathcal{K}'$ tada vrijedi
$$B \preceq_p T_\beta \preceq_p A$$
pa za sve $\alpha, \beta \in \mathcal{K}'$ imamo:
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow T_\alpha \in \overline{AT_\beta} \Leftrightarrow T_\beta \preceq_p T_\alpha.$$
Definiramo skupove S i T kao u 1) slučaju. Tada je $Q \preceq_p P$ za sve $P \in S, Q \in T$. Prema Propoziciji 3.2.17 postoji $R \in \overline{AB}$ tako da je
$$Q \preceq_p R \preceq_p P$$
za sve $P \in S, Q \in T$. Neka je $\gamma \in \mathcal{K}'$ tako da je $R = T_\gamma$. Iz
$$T_\beta \preceq T_\gamma \preceq_p T_\alpha$$
za sve $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'$ slijedi
$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$
za sve $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}'$ pa zaključujemo da je
$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$
za sve $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T}$.

□

Propozicija 3.2.19. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorijentiranih kutova u ovoj ravnini te neka je $\leq$ standardna relacija uspoređivanja kutova na $\mathcal{K}$. Tada svaki podskup od $\mathcal{K}$ ima supremum i infimum u uređenom skupu $(\mathcal{K}, \leq)$.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{S} = \emptyset$ onda je tvrdnja jasna. (Skup svih gornjih međa od $\mathcal{S}$ je u tom slučaju jednak $\mathcal{K}$ pa je 0 najmanja gornja međa, tj. supremum od $\mathcal{S}$. Isto tako, skup svih donjih međa od $\mathcal{S}$ je $\mathcal{K}$ pa je infimum od $\mathcal{S}$ jednak ω.)

Pretpostavimo da je $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{T}$ skup svih gornjih međa od $\mathcal{S}$ u $(K, \leq)$. Tada je $\mathcal{T} \neq \emptyset$ jer je $\omega \in \mathcal{T}$ te za svaki $\alpha \in \mathcal{S}$ i svaki $\beta \in \mathcal{T}$ vrijedi
$$\alpha \leq \beta.$$
Prema Lemi 3.2.18 postoji $\gamma \in \mathcal{K}$ tako da je
$$\alpha \leq \gamma \leq \beta$$
za sve $\alpha \in \mathcal{S}, \beta \in \mathcal{T}$. Iz ovoga slijedi da je γ supremum od $\mathcal{S}$. Analogno dobivamo da $\mathcal{S}$ ima infimum. □

Definicija 3.2.20. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je $O \in M$ te neka su x i y polupravci s vrhom O tako da x i y ne leže na istom pravcu. Neka je p pravac na kojem leži x, a q pravac na kojem leži y. Znamo da se y nalazi u točno jednoj zatvorenoj poluravnini određenoj s p (prema Lemi 3.1.6). Označimo tu zatvorenu poluravninu s K. Nadalje, neka je L zatvorena poluravnina određena s q tako da je $x \subseteq L$.*
Definiramo

$$S(x, y) = K \cap L.$$

Nadalje, ako je x polupravac u $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$, definiramo

$$S(x, x) = x.$$

Definicija 3.2.21. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su x, y, z tri polupravca u ovoj ravnini s istim vrhom. Kažemo da se polupravac z nalazi između x i y ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

1) *x i y leže na istom pravcu i $x \neq y$ (tj. x i y su različiti polupravci istog pravca)*

2) *$x = y = z$*

3) *x i y ne leže na istom pravcu i $z \subseteq S(x, y)$.*

Lema 3.2.22. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je $O \in M$ te neka su x i y polupravci s vrhom O tako da x i y ne leže na istom pravcu.*

1) *Ako je z polupravac koji se nalazi između x i y, onda za sve $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}$ vrijedi da z siječe $\overline{AB}$.*

2) *Ako su $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}$ te z polupravac s vrhom O koji siječe $\overline{AB}$, onda z leži između x i y.*

Dokaz. 1) Neka je z polupravac koji se nalazi između x i y te $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}$. Odaberimo $A' \in x' \backslash \{O\}$. Imamo $z \subseteq S(x, y)$ pa je $z \subseteq K$. Iz Propozicije 3.2.3 1. dio slijedi da z siječe $\overline{AB}$ ili z siječe $\overline{A'B}$.

Pretpostavimo da z ne siječe $\overline{AB}$. Tada z siječe $\overline{A'B}$ u točki T takvoj da je $T \neq B$. Imamo: $T \in \overline{A'B}$ i $T \neq B$ pa B nije element od $\overline{A'B}$ (prema Lemi 1.2.4.

Pretpostavimo da je $\overline{A'T} \cap q \neq \emptyset$. Neka je $T' \in \overline{A'T} \cap q$. Tada su B i T' dvije različite točke koje leže na pravcima q i $A'B$ pa je $A'B = q$. Iz toga slijedi $A' \in q$ što je kontradikcija (u suprotnom $p = q$ što je nemoguće jer x i y ne leže na istom pravcu).

Dakle, $\overline{A'T} \cap q = \emptyset$. Ovo znači da se A' i T nalaze u istoj poluravnini određenoj s q. No, A' i A se nalaze u različitim poluravninama određenim s q jer $\overline{A'A}$ siječe q u točki O. Stoga T i A se nalaze u različitim poluravninama određenim s q. No, $A \in L$ pa je $T \notin L$. Ovo je u kontradikciji s $T \in z$ i $z \subseteq L$ (jer je $z \subseteq S(x, y) = K \cap L$). Dakle, z siječe $\overline{AB}$.

2) Neka su $A \in x\backslash\{O\}, B \in y\backslash\{O\}$ te neka je z polupravac s vrhom O koji siječe $\overline{AB}$. Neka je $T \in z \cap \overline{AB}$. Imamo $T \in \overline{AB}$ pa je $T \in K$ i $T \in L$ (zbog $\overline{AB} \subseteq S(x, y)$).

   Dakle, K je zatvorena poluravnina određena pravcem p, $O \in p$, z polupravac s vrhom O i $T \in z$, gdje je $T \in K$. Iz Leme 3.1.6 zaključujemo da je $z \subseteq K$. Isto tako dobivamo da je $z \subseteq L$ pa je $z \subseteq K \cap L$, tj. $z \subseteq S(x, y)$.

   Dakle, z leži između x i y.

□

3.3 Zbroj kutova

Definicija 3.3.1. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorjentiranih kutova u ovoj ravnini. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$. Kažemo da je γ zbroj kutova α i β ako postoje tri polupravca s istim vrhom x, y i z tako da z leži između x i y te da vrijedi*

$$\alpha = \angle(x, z),\ \beta = \angle(z, y),\ \gamma = \angle(x, y).$$

Uočimo sljedeće: ako je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te α kut u $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$, onda je α zbroj kutova α i 0. Nadalje, ako je β zbroj kutova α i 0, onda je $\alpha = \beta$.

Budući da općenito za dva polupravca v i w s istim vrhom vrijedi $\angle(u, w) = \angle(w, u)$, imamo sljedeći zaključak:

Ako su α i β kutovi takvi da je γ zbroj od α i β, onda je γ zbroj od β i α (komutativnost).

Propozicija 3.3.2. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β, γ kutovi takvi da je γ zbroj od α i β. Neka je p pravac, $O \in p$ te neka su K i L poluravnine određene s p. Neka su $A \in K, B \in L$ te neka je x polupravac OA te y polupravac OB. Neka je z polupravac od p s vrhom O. Pretpostavimo da je $\alpha = \angle(x, z)$, $\beta = \angle(z, y)$. Tada je*

$$\gamma = \angle(x, y).$$

Dokaz. Znamo da postoje polupravci x', y', z' s istim vrhom tako da je z' između x' i y' te $\alpha = \angle(x', z')$, $\beta = \angle(z', y')$, $\gamma = \angle(x', y')$. Neka je O' vrh od x', y', z'. Budući da je $\angle(x', z') = \angle(x, z)$ postoji izometrija $f : M \to M$ tako da je $f(x') = x, f(z') = z$.

Odaberimo $P \in x'\backslash\{O\}, Q \in y'\backslash\{O\}$ tako da je $f(P) = A$. Vrijedi $x' \neq y'$ (u suprotnom je $x' = y' = z'$ jer je z' između x' i y' pa je $\alpha = 0$ no to povlači $x = z$ što je nemoguće jer $A \notin z$ pošto je $A \in K$ pa $A \notin p$).

Neka je p' pravac na kojem leži z'.

1) slučaj: x' i y' leže na istom pravcu

   To ne može biti pravac p' jer bi u suprotnom vrijedilo $x' = z'$ ili $y' = z'$, tj. $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$, no to je nemoguće (da je $\beta \neq 0$ vidimo na isti način na koji smo vidjeli $\alpha \neq 0$).

S obzirom da točke P i Q leže u različitim polupravcima istog pravca s vrhom O', vrijedi $O' \in \overline{PQ}$. S druge strane taj pravac je različit od p' pa vrijedi $P, Q \notin p'$.

Ovo, zajedno sa $\overline{PQ} \cap p' \neq \emptyset$, daje da se P i Q nalaze u različitim poluravninama određenima pravcem p'. Budući da je f izometrija, točke $f(P)$ i $f(Q)$ se nalaze u različitim polupravninama s obzirom na $f(p')$. No, $f(p')$ sadrži polupravac $f(z')$, a $f(z') = z$. Stoga je $f(p') = p$.

Znamo da je $f(P) = A$ te da je $A \in K$. Iz ovoga slijedi da je $f(Q) \in L$. . Znamo da je $f(y')$ polupravac s vrhom $f(O')$ i da sadrži točku $f(Q)$. No, $f(O') = O$ (jer je $f(x) = x$). Iz ovoga zaključujemo da je $f(y') \subseteq L \cup p$ (prema Lemi 3.1.6).

Imamo

$$\beta = \angle(z', y') = \angle(f(z'), f(y')) = \angle(z, f(y')),$$

a s druge strane $\beta = \angle(z, y)$. Iz Propozicije 3.1.7 slijedi $y = f(y')$. Prema tome

$$\gamma = \angle(x', y') = \angle(f(x'), f(x)) = \angle(x, y)$$

i to je trebalo dokazati.

2) slučaj: x' i y' ne leže na istom pravcu

Tada ni točke P, O', Q ne leže na istom pravcu. Iz Leme 3.2.22 slijedi da z' siječe $\overline{PQ}$. Neka je $R \in \overline{PQ} \cap z'$. Jasno $P \neq O'$ (jer $O' \notin \overline{PQ}$). Nadalje, $R \neq Q$ (u suprotnom $y' = z'$ što bi povlačilo $\beta = 0$) te $R \neq P$ (u suprotnom $x' = z'$).

Neka je p' pravac na kojem leži z'. Kada bi jedna od točaka P i Q ležala na p', onda bi obje ležale na p' (zbog $R \in p'$) no to bi značilo da su x' i y' polupravci od p' s vrhom O' pa bi slijedilo $x' = z'$ ili $y' = z'$ što je nemoguće.

Dakle, $P, Q \notin p'$, no $\overline{PQ} \cap p \neq \emptyset$ (jer je $R \in \overline{PQ}$). Stoga se P i Q nalaze u različitim poluravninama određenima s p'. Kao i u 1. slučaju vidimo da se tada $f(P)$ i $f(Q)$ nalaze u različitim poluravninama određenima s p pa zbog $f(P) = A \in K$ slijedi $f(Q) \in L$. Kao u 1. slučaju dobivamo da je $y = f(y')$ te $\gamma = \angle(x, y)$.

□

Korolar 3.3.3. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kutovi takvi da je γ zbroj od α i β te δ zbroj od α i β. Tada je*

$$\gamma = \delta.$$

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$. Pretpostavimo stoga da je $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. Budući da je δ zbroj od α i β, postoje polupravci x, y, z s istim vrhom tako da je z između x i y te

$$\alpha = \angle(x, z),\ \beta = \angle(z, y),\ \gamma = \angle(x, y).$$

Neka je p pravac na kojem leži z. Neka je O vrh polupravaca x, y, z. Odaberimo $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}$.

1) slučaj: x i y leže na istom pravcu

   Zbog $x \neq y$ ($x = y$ povlači $x = y = z$ što je nemoguće zbog $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) imamo da je $O \in \overline{AB}$ (prema Lemi 2.1.7). Iz ovoga slijedi da $A \notin p$ i $B \notin p$ (kada bi jedna od ovih točaka ležala na p, onda bi zbog $O \in p$ obje ležale na p pa bi vrijedilo $x = z$ ili $y = z$).

   Stoga su A i B u različitim poluravninama određenima s p.

2) slučaj: x i y ne leže na istom pravcu

   Iz Leme 3.2.22 slijedi da z siječe $\overline{AB}$. Neka je $T \in \overline{AB} \cap z$. Imamo $T \neq A$ (u suprotnom je $x = z$) te također $T \neq B$ (zbog $y = z$).

   Pretpostavimo $A \in p$. Zbog $T \in p$ i $T \in \overline{AB}$ tada imamo $B \in p$. To znači da x i y leže na p pa je $x = z$ ili $y = z$ što je kontradikcija. Dakle, $A \notin p$. Analogno dobivamo $B \notin p$. Iz $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ slijedi da su A i B u različitim poluravninama određenima s p.

   U oba slučaja smo dobili da su A i B u različitim poluravninama određenim s p. Imamo da je γ zbroj od α i β. Iz Propozicije 3.2.22 tada slijedi da je $\gamma = \angle(x, y)$. No, $\angle(x, y) = \delta$. Dakle, $\gamma = \delta$.

□

Prema prethodnom korolaru zbroj kutova α i β, ako postoji, je jedinstven. Taj zbroj ćemo označavati sa

$$\alpha + \beta.$$

Kada kažemo "kut $\alpha+\beta$ je definiran", to će značiti da postoji kut γ tako da je γ zbroj kutova α i β.

Lema 3.3.4. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka su α, β_1, β_2 kutovi takvi da je*

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2.$$

Tada je

$$\beta_1 = \beta_2.$$

Dokaz. Neka su x, y, z polupravci tako da z leži između x i y te da je

$$\alpha = \angle(x, z),\ \beta_1 = \angle(z, y),\ \alpha + \beta_1 = \angle(x, y).$$

Nadalje, neka su x', y', z' polupravci tako da z' leži između x' i y' te da je

$$\alpha = \angle(x', z'),\ \beta_2 = \angle(z', y'),\ \alpha + \beta_2 = \angle(x', y').$$

Neka je p pravac na kojem leži x i p' pravac na kojem leži x'. Odaberimo zatvorenu poluravninu K određenu pravcem p takvi da su $z, y \subseteq K$. Takva K sigurno postoji.

Naime, ako y leži na p, onda je dovoljno odabrati zatvorenu poluravninu određenu s p koja sadrži z, a takva postoji jer je z polupravac s vrhom O, a $O \in p$.

Ako y ne leži na p, onda $z \subseteq S(x, y)$ pa je $z \subseteq K$ gdje je K zatvorena poluravnina određena s p koja sadrži y. Isto tako postoji zatvorena poluravnina K' određena pravcem p'takva da je $z', y' \subseteq K'$.

Neka je $f : M \to M$ izometrija ravnine takva da je $f(x) = x'$ i $f(K) = K'$ (Sigurno postoji izometrija $f : M \to M$ takva da je $f(x) = x'$ po Propoziciji 2.2.21. Iz toga slijedi $f(p) = p'$ te f preslikava K na zatvorenu poluravninu određenu s p'. Ako je to baš K', onda smo gotovi, a ako nije, onda uzmemo $s_{p'} \circ f$.) Tada je $f(y) \subseteq K$ i $f(z) \subseteq K$. No,

$$\angle(x, y) = \angle(f(x), f(y)) = \angle(x', f(y)).$$

S druge strane

$$\angle(x, y) = \alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = \angle(x', y').$$

Dakle, $\angle(x', f(y')) = \angle(x', y')$ pa je $f(y) = y'$ prema Propoziciji 3.1.7.
Nadalje,

$$\angle(x, z) = \angle(f(x), f(z)) = \angle(x', f(z)),$$

a s druge strane

$$\angle(x, z) = \alpha = \angle(x', z')$$

pa je prema 3.1.7 $f(z) = z'$.

Dakle, $f(y) = y', f(z) = z'$ pa je $\angle(z, y) = \angle(z', y')$ tj. $\beta_1 = \beta_2$. □

Propozicija 3.3.5. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β kutovi takvi da je $\alpha + \beta$ definiran. Tada je*

$$\alpha \leq \alpha + \beta.$$

Nadalje, $\alpha = \alpha + \beta$ ako i samo ako $\beta = 0$.

Dokaz. Dokažimo da je $\alpha \leq \alpha + \beta$. Tvrdnja je jasna ako je $\alpha + \beta = \omega$ ili ako je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$.

Inače postoje polupravci x, y, z s vrhom O takvi da z leži između x i y te da je

$$\alpha = \angle(x, z), \beta = \angle(z, y), \alpha + \beta = \angle(x, y).$$

Neka je p pravac na kojem leži x te x' polupravac od p s vrhom O različit od x. Neka je K zatvorena poluravnina određena s p takva da je $y \subseteq K$. Odaberimo $A \in x\backslash\{O\}, B \in y\backslash\{O\}$. Budući da z leži između x i y iz Propozicije 3.2.22 slijedi da z siječe $\overline{AB}$. Stoga iz Teorema 3.2.3 a) slijedi

$$S_{\alpha(x,z)} \subseteq S_{\alpha(x,y)},$$

tj. $S_\alpha \subseteq S_{\alpha+\beta}$ pa je po definiciji

$$\alpha \leq \alpha + \beta.$$

Nadalje, ako je $\alpha = \alpha + \beta$, pnda iz Propozicije 3.1.7 slijedi $z = y$ pa je $\beta = 0$. Do istog zaključka dolazimo u slučaju kada je $\alpha + \beta = \omega$. Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 3.3.6. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, γ kutovi takvi da je $\alpha \leq \gamma$. Neka su x i y polupravci takvi da je $\gamma = \angle(x, y)$. Tada postoji polupravac z tako da je z između x i y te da vrijedi $\alpha = \angle(x, z)$.*

Dokaz. Ako je $\gamma = 0$, onda je $\alpha = 0$ pa je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da je $\gamma \neq 0$. Neka je O vrh od x i y. Neka je p pravac na kojem leži x te x' polupravac od p s vrhom O različitim od x. Neka je K zatvorena poluravnina određena s p tako da je $y \subseteq K$.

Odaberimo $A \in x\backslash\{O\}, B \in y\backslash\{O\}$ i $A' \in x'\backslash\{O\}$. Prema Propoziciji 3.1.7 postoji polupravac z s vrhom O takav da je $z \subseteq K$ i $\alpha = \angle(x, z)$. Pretpostavimo da je $\gamma \neq \omega$. Iz Porpozicije 3.2.3 slijedi da z siječe $\overline{A'B}$ ili $\overline{BA}$.

Kada bi z sijekao $\overline{A'B}$, onda bi po istoj propoziciji dobili da je

$$\angle(x, y) \leq \angle(x, z), \text{ tj. } \gamma \leq \alpha$$

pa bi slijedilo $\alpha = \gamma$ pri čemu bismo imali da je $z = y$, a to bi značilo da z siječe $\overline{AB}$ u B.

Zaključak: z u svakom slučaju siječe $\overline{AB}$. Sada iz Prpozicije 3.2.22 2) slijedi da z leži između x i y. Ako je $\gamma = \omega$, onda je $y = x'$ pa je z također između x i y. □

Korolar 3.3.7. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, γ kutovi takvi da je $\alpha \leq \gamma$. Tada postoji kut β tako da je $\gamma = \alpha + \beta$.*

Dokaz. Odaberimo polupravce x i y s istim vrhom O tako da je $\gamma = \angle(x, y)$. Prema prethodnoj propoziciji postoji polupravac z koji leži između x i y tako da je $\alpha = \angle(x, z)$. Definiramo $\beta = \angle(y, z)$. Tada je $\gamma = \alpha + \beta$. □

Korolar 3.3.8. *Neka su α i β kutovi te neka su x i y polupravci s istim vrhom takvi da je $\alpha + \beta = \angle(x, y)$. Tada postoji polupravac z koji leži između x i y takav da je*

$$\alpha = \angle(x, z) \text{ i } \beta = \angle(z, y).$$

Dokaz. Vrijedi $\alpha \leq \alpha + \beta$ pa iz Propozicije 3.3.5 slijedi da postoji polupravac z između x i y takav da je $\angle(x, z) = \alpha$. Označimo $\beta' = \angle(z, y)$. Očito je

$$\alpha + \beta' = \angle(x, y) = \alpha + \beta$$

pa iz Leme 3.3.4 slijedi $\beta' = \beta$, tj. $\beta = \angle(z, y)$. □

Propozicija 3.3.9 (Asocijativnost zbrajanja)**.** *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β, γ kutovi takvi da su kutovi $\alpha + \beta$ i $(\alpha + \beta) + \gamma$ definirani. Tada su definirani i kutovi $\beta + \gamma$ i $\alpha + (\beta + \gamma)$ te je*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Dokaz. Postoje polupravci x, y, z s vrhom O takvi da z leži između x i y te takvi da je $\angle(x, z) = \alpha + \beta$ i $\angle(z, y) = \gamma$ te $\angle(x, y) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Prema Korolaru 3.3.8 postoji z' između x i y tako da je $\alpha = \angle(x, z')$, a $\beta = \angle(z', z)$.

1) Ako je $y = x$, onda je $x = z = y$ pa je $x = z' = z$ i tvrdnja je jasna.

2) Pretpostavimo da x i y ne leže na istom pravcu. Odaberimo $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}$. Budući da z leži između x i y, z siječe $\overline{AB}$ u nekoj točki C (Propozicija 3.2.22). Dakle, $C \in \overline{AB}$ i $C \in z$.

   Sada činjenica da z' leži između x i z povlači da z' siječe $\overline{AC}$ u nekoj točki C'. Dakle, $C' \in \overline{AC}$ pa slijedi da je $C' \in \overline{AB}$ te također $C \in \overline{C'B}$. Ovo znači da z leži između z' i y što povlači da je $\angle(z', y) = \beta + \gamma$. Nadalje, $C' \in \overline{AB}$ što povlači da je z' između x i y. Stoga je $\angle(x, y) = \alpha + \angle(z', y)$. Dakle,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

3) Pretpostavimo sada da x, y leže na istom pravcu ali $x \neq y$. Ako je $z = y$ ili $z = x$, tvrdnja je jasna.

   Pretpostavimo $z \neq y$ i $z \neq x$. Odaberimo $A \in x \backslash \{O\}, B \in y \backslash \{O\}, A' \in y \backslash \{O\}$. Budući da se z' nalazi između x i z, z' siječe $\overline{AB}$ u točki C (prema Propoziciji 3.2.22).

   Iz Propozicije 3.1.7 (za $r = y, s = z, v = z'$) slijedi da je $\angle(y, z) \leq \angle(y, z')$, Iz iste propzicije slijedi da z siječe $\overline{A'C}$ ili $\overline{CA}$. No, ako z siječe $\overline{CA}$, onda je po toj propoziciji

$$\angle(y, z') \leq \angle(y, z)$$

iz čega, zajedno s onim od maloprije, slijedi

$$\angle(y, z') = \angle(y, z)$$

pa je $z' = z$ i z stoga sadrži točku C. U svakom slučaju z siječe $\overline{A'C}$. Sada iz Propozicije 3.2.22 2) slijedi da se z nalazi između z' i y. Iz ovoga zaključujemo da je $\beta + \gamma$ definiran i da je

$$\beta + \gamma = \angle(z', y).$$

No, z' je očito između x i y (jer su oni komplementarni) pa je stoga

$$\angle(x, y) = \alpha + \angle(z', y), \text{ tj. } (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

□

Napomena 3.3.10. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β, γ kutovi takvi da su kutovi $\beta + \gamma$ i $\alpha + (\beta + \gamma)$ definirani. Tada su definirani i kutovi $\alpha + \beta$ i kut $(\alpha + \beta) + \gamma$ te vrijedi*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Ovo zaključujemo iz prethodne propozcije koristeći komutativnost zbrajanja kutova. Naime, imamo da je definirano $\gamma + \beta$ i kut $(\gamma + \beta) + \alpha$ pa je definiran i $\beta + \alpha$ te $\gamma + (\beta + \alpha)$.

Propozicija 3.3.11 (Monotonost zbrajanja)**.** *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β, γ kutovi takvi da je $\alpha \leq \beta$ te da je $\beta + \gamma$ definirano. Tada je definiran i kut $\alpha + \gamma$ te vrijedi*

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

Dokaz. Budući da je $\alpha \leq \beta$ postoji kut δ takav da je $\alpha + \delta = \beta$. Znamo da je $\beta + \gamma$ definirano, dakle definirano je $(\alpha + \delta) + \gamma$. Iz Propozicije 3.3.9 (Asocijativnost zbrajanja) slijedi da je definirano $\delta + \gamma$ te također

$$\alpha + (\delta + \gamma) = (\alpha + \delta) + \gamma.$$

Očito je

$$\alpha + (\delta + \gamma) = \alpha + (\gamma + \delta)$$

pa prema Napomeni 3.3.10 za propoziciju 3.3.9 slijedi da je $\alpha + \gamma$ definirano te

$$(\alpha + \gamma) + \delta = \alpha + (\gamma + \delta).$$

Imamo,

$$(\alpha + \gamma) + \delta = (\alpha + \delta) + \gamma,$$

tj.

$$(\alpha + \gamma) + \delta = \beta + \gamma.$$

No, $\alpha + \gamma \leq (\alpha + \gamma) + \delta$ (iz Propozicije 3.3.5). Dakle,

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

□

Općenito, ako je $(S, \leq)$ uređeni skup, onda za $x, y \in S$ pišemo $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Tada za $x, y, z \in S$ vrijedi da $x < y$ i $y \leq z$ povlači $x < z$.

Naime, vrijedi $x \leq z$ što slijedi iz $x \leq y$ i $y \leq z$. S druge strane, kada bi vrijedilo $z = x$, onda bismo imali $z < y$ i $y \leq z$, tj. $z \leq y$ i $y \leq z$ pa je $y = z$ a to je u kontradikciji s $z < y$.

Dakle, $x \neq z$ pa je $x < z$.
Analogno dobivamo da $x \leq y$ i $y < z$ povlači $x < z$.

Korolar 3.3.12 (Stroga monotonost)**.** *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su α, β, γ kutovi takvi da je $\alpha < \beta$ te da je kut $\beta + \gamma$ definiran. Tada je definiran i kut $\alpha + \gamma$ te vrijedi*

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Dokaz. Iz $\alpha < \beta$ slijedi $\alpha \leq \beta$ pa iz Propozicije 3.3.11 (Monotonost zbrajanja) slijedi da je $\alpha + \gamma$ definiran i $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Pretpostavimo da je $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Iz Leme 3.3.4 slijedi $\alpha = \beta$ što je u kontradikciji s tim da je $\alpha < \beta$ pa zaključujemo da je $\alpha + \gamma \neq \beta + \gamma$. Stoga je

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

□

Lema 3.3.13. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kutovi takvi da je $\alpha < \beta$ i $\gamma \leq \delta$. Pretpostavimo da je $\beta + \delta$ definiran. Tada je definiran i kut $\alpha + \gamma$ i vrijedi*

$$\alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

Dokaz. Iz $\gamma \leq \delta$ slijedi da je $\beta + \gamma$ definirano i $\beta + \gamma \leq \beta + \delta$ (iz Propozicije 3.3.11). Sada iz $\alpha < \beta$ i činjenice da je $\beta + \gamma$ definirano slijedi da je $\alpha + \gamma$ definirano i

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

(Korolar 3.3.12 Stroga monotonost). Iz Napomene 3.3.10 slijedi

$$\alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

□

Analogno dokazujemo sljedeću lemu:

Lema 3.3.14. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kutovi takvi da je $\alpha \leq \beta$ i $\gamma \leq \delta$. Pretpostavimo da je $\beta + \delta$ definiran. Tada je definiran i kut $\alpha + \gamma$ i vrijedi*

$$\alpha + \gamma \leq 6\beta + \delta.$$

Definicija 3.3.15. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je α kut. Definiramo induktivno $n\alpha$ za $n \in \mathbb{N}$ na sljedeći način:*

Neka je $1 \cdot \alpha = \alpha$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da je $n\alpha$ definirano. Ako je definiran zbroj $n\alpha + \alpha$, onda smatramo da je $(n+1)\alpha$ definirano i stavljamo

$$(n+1)\alpha = n\alpha + \alpha.$$

Propozicija 3.3.16. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je α kut te neka su $m, n \in \mathbb{N}$ tako da su $m\alpha$ i $n\alpha$ definirani te da je definiran zbroj $m\alpha + n\alpha$. Tada je definirano i $(m+n)\alpha$ te vrijedi*

$$(m+n)\alpha = m\alpha + n\alpha.$$

Obratno, ako je definirano $(m+n)\alpha$, onda su definirani i $m\alpha$ i $n\alpha$ te $m\alpha + n\alpha$.

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.

1) Za $n = 1$ tvrdnja je očita.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$

3) Neka je $m \in \mathbb{N}$ te pretpostavimo da su definirani $m\alpha, (n+1)\alpha, m\alpha + (n+1)\alpha$. Dakle, definiran je i $m\alpha + (n\alpha + \alpha)$.

   Stoga je definirano i $m\alpha + n\alpha$ i $(m\alpha + n\alpha) + \alpha$, a

   $$(m\alpha + n\alpha) + \alpha = m\alpha + (n\alpha + \alpha).$$

   Iz induktivne pretpostavke slijedi

   $$(m+n)\alpha + \alpha = (m\alpha + n\alpha) + \alpha = m\alpha + (n\alpha + \alpha)$$

   tj.

   $$(m+n+1)\alpha = m\alpha + (n+1)\alpha.$$

Tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je tvrdnja propozicije dokazana.
Zadnja tvrdnja se lako dokazuje indukcijom po n. □

Propozicija 3.3.17. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka je* α *kut te neka su* $m, n \in \mathbb{N}$ *takvi da su* $n\alpha$ *i* $m \cdot (n\alpha)$ *definirani. Tada je definiran i* $(mn)\alpha$ *te vrijedi*

$$(m \cdot n)\alpha = m \cdot (n\alpha).$$

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po m:

1) Za $m = 1$ tvrdnja je očita.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$.

3) Neka je $n \in \mathbb{N}$ te pretpostavimo da su $n\alpha$ i $(m + 1) \cdot (n\alpha)$ definirani. Koristeći induktivnu pretpostavku i prethodnu propoziciji imamo

$$(m + 1) \cdot (n\alpha) = m \cdot (n\alpha) + n\alpha = (mn)\alpha + n\alpha = (mn + n)\alpha = [(m + 1) \cdot n]\alpha.$$

Tvrdnja vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$ pa je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.3.18. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* α *kut. Tada postoji jedinstveni kut* β *takav da je*

$$\beta + \beta = \alpha.$$

Dokaz. 1) Egzistencija

Odaberimo polupravce s istim vrhom O tako da je $\alpha = \angle(x, y)$. Prema Aksiomu 3.2.9 IV2 apsolutne ravnine postoji pravac p tako da je $s_p(x) = y$. Tada je i $s_p(y) = x$ te vrijedi $s_p(O) = O$ iz čega slijedi $O \in p$. Ako je $x = y$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo $x \neq y$. Odaberimo $A \in x \backslash \{O\}$. Neka je $B = s_p(A)$. Tada je $B \in y$ i $B \neq O$. Imamo

$$s_p(A) = B, s_p(B) = A$$

pa iz Propozicije 2.1.12 slijedi da je polovište C dužine $\overline{AB}$ fiksna točka od s_p. To povlači da je $C \in p$.

Ako je $C = O$, onda su točke A, O, B kolinearne pa x, y leže na istom pravcu.

Odaberimo neka je z bilo koji polupravac od p s vrhom O. Tada je z između x i y. Imamo

$$\angle(x, z) = \angle(s_p(x), s_p(z)) = \angle(y, z).$$

Označimo $\beta = \angle(x, z)$. Tada je $\beta = \angle(y, z)$ te očito

$$\beta + \beta = \alpha.$$

Ako je $C \neq O$, onda x i y ne leže na istom pravcu. Neka je z polupravac od p s vrhom O takav da je $C \in z$. Imamo $C \in z \cap \overline{AB}$. Dakle, z siječe $\overline{AB}$ pa iz Propozicije 3.2.22 slijedi da z leži između x i y.

Kao i maloprije imamo $\angle(x, z) = \angle(y, z)$ pa za $\beta = \angle(x, z)$ vrijedi

$$\beta + \beta = \alpha.$$

2) Jedinstvenost:

Pretpostavimo da su β_1 i β_2 kutovi takvi da je $\beta_1 + \beta_1 = \alpha$ i $\beta_2 + \beta_2 = \alpha$ te da je $\beta_1 \neq \beta_2$. Znamo $\beta_1 \leq \beta_2$ ili $\beta_2 \leq \beta_1$. Stoga je $\beta_1 < \beta_2$ ili $\beta_2 < \beta_1$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\beta_1 < \beta_2$. Iz Leme 3.3.13 slijedi

$$\beta_1 + \beta_1 < \beta_2 + \beta_2, \text{ tj. } \alpha < \alpha$$

što je nemoguće. Zaključujemo: postoji jedinstveni kut β tako da je $\beta + \beta = \alpha$.

□

Definicija 3.3.19. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je α kut. Prema Propoziciji 3.3.18 postoji jedinstveni kut β tako da je $\beta + \beta = \alpha$. Kut β označavamo s $\frac{\alpha}{2}$.*

Uočimo, za svaki kut α vrijedi da je $2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ definirano te $2 \cdot (\frac{\alpha}{2}) = \alpha$.

Definicija 3.3.20. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te neka je α kut. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kut $\frac{\alpha}{2^n}$ induktivno na sljedeći način:*

$$\frac{\alpha}{2^1} = \frac{\alpha}{2}, \ \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \frac{(\frac{\alpha}{2^n})}{2}.$$

Propozicija 3.3.21. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je α kut te $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$2^n \cdot \frac{\alpha}{2^n} = \alpha \tag{3.2}$$

Nadalje, za $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2^k \cdot \frac{\omega}{2^{n+k}} = \frac{\omega}{2^n} \tag{3.3}$$

Dokaz. Dokazujemo (3.2) indukcijom po n:

1) Za $n = 1$ imamo $2^1 \cdot \frac{\alpha}{2^1} = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

2) Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da je $2^n \cdot \frac{\alpha}{2^n} = \alpha$.

3) Imamo

$$2^{n+1} \cdot (\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = (2^n \cdot 2) \cdot \frac{(\frac{\alpha}{2^n})}{2} = 2^n \cdot (2 \cdot \frac{(\frac{\alpha}{2^n})}{2}) = 2^n \cdot \frac{\alpha}{2^n} = \alpha$$

prema induktivnoj pretpostavci.

Tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je tvrdnja propozicije dokazana.

Tvrdnju (3.3) dokazujemo analogno indukcijom po k. □

Napomena 3.3.22. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je α kut te $m \in \mathbb{N}$ tako da je $m\alpha$ definirano. Tada je očito definirano i $n\alpha$ za svaki $n \leq m$. Nadalje*

$$n\alpha \leq m\alpha$$

za svaki $n \leq m$.
Naime, ovo je očito istina za $n = m$.
Ako je $n < m$, onda je $m = n + k$ za $k \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$m\alpha = (n + k)\alpha = n\alpha + k\alpha \geq n\alpha.$$

Nadalje, ako je $\alpha \neq 0$ (tj. $\alpha > 0$), onda za $n < m$ vrijedi

$$n\alpha < m\alpha.$$

Naime, iz $n \leq m - 1$ slijedi

$$n\alpha \leq (m - 1)\alpha < (m - 1)\alpha + \alpha = m\alpha.$$

Definicija 3.3.23. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je α kut. Definiciju od $n\alpha, n \in \mathbb{N}$ sad proširujemo i za $n = 0$ tako da stavimo $0 \cdot \alpha = 0$.*
Uočimo da jednakost

$$(n + 1)\alpha = n\alpha + \alpha$$

vrijedi i za $n = 0$.

Propozicija 3.3.24. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, te neka su α i β kutovi takvi da je $\alpha < \beta$. Tada je*

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2}.$$

Dokaz. Prepostavimo suprotno. Tada je po Lemi 3.3.14 $\frac{\beta}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$ pa je

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Dakle, $\beta \leq \alpha$ što je u kontradikciji sa $\alpha < \beta$ pa zaključujemo

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2}.$$

□

Propozicija 3.3.25. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina, neka je α kut tako da je $\alpha > 0$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$\frac{\omega}{2^n} < \alpha.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$\alpha \leq \frac{\omega}{2^n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je

$$\mathcal{S} = \{\frac{\omega}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Po Propoziciji 3.2.19 skup $\mathcal{S}$ ima infimum. Označimo ga s μ.

Budući da je α donja međa od skupa $\mathcal{S}$ vrijedi $\alpha \leq \mu$. Iz ovoga posebno slijedi $0 < \mu$. Imamo,

$$\mu \leq \frac{\omega}{2^n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno,

$$\mu \leq \frac{\omega}{2},$$

pa iz Leme 3.3.14 slijedi da je $\mu + \mu$ definirano.

Iz $0 < \mu$ slijedi $\mu < \mu + \mu$. Iz ovoga slijedi da $\mu + \mu$ nije donja međa od $\mathcal{S}$ (jer je μ najveća donja međa od $\mathcal{S}$). Stoga, postoji neki kut iz $\mathcal{S}$ koji je manji od $\mu + \mu$, tj. $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\frac{\omega}{2^n} \leq \mu + \mu.$$

Iz Propozicije 3.3.24 slijedi

$$\frac{(\frac{\omega}{2^n})}{2} < \frac{\mu + \mu}{2}, \text{ tj. } \frac{\omega}{2^{n+1}} < \mu.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je μ donja međa od $\mathcal{S}$. □

Definicija 3.3.26. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* α *kut. Neka je*

$$E_\alpha = \{q \cdot \frac{\omega}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha\}.$$

Propozicija 3.3.27. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* α *kut. Tada je* α *supremum skupa* E_α.

Dokaz. Očito je α gornja međa skupa E_α. Uzmimo da je β gornja međa od E_α. Želimo dokazati da je $\alpha \leq \beta$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $\beta < \alpha$. Iz Korolara 3.3.7 slijedi da postoji kut γ tako da je $\alpha = \beta + \gamma$.

Očito je $\gamma > 0$. Iz Propozicije 3.3.25 postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{\omega}{2^n} < \gamma$. Neka je q najmanji prirodan broj takav da je

$$\beta < q \cdot \frac{\omega}{2^n}$$

(sigurno postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\beta < k \cdot \frac{\omega}{2^n}$ jer za $k = 2^n$ vrijedi $k \cdot \frac{\omega}{2^n} = \omega$). Tada je

$$(q-1) \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \beta. \tag{3.4}$$

Iz $\frac{\omega}{2^n} < \gamma$ slijedi

$$\beta + \frac{\omega}{2^n} \leq \beta + \gamma.$$

S druge strane, iz (3.4) slijedi

$$(q-1) \cdot \frac{\omega}{2^n} + \frac{\omega}{2^n} \leq \beta + \frac{\omega}{2^n},$$

tj.

$$q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \beta + \frac{\omega}{2^n} \leq \beta + \gamma = \alpha.$$

Zaključujemo:

$$\beta < q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha.$$

Ovo znači da postoji element od E_α koji je veći od β, a to je nemoguće jer je β gornja međa od E_α. Prema tome, $\alpha \leq \beta$ tj. α je supremum skupa E_α. □

Poglavlje 4

Mjera kuta

4.1 Mjera kuta

Definicija 4.1.1. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina. Neka je* $\mathcal{K}$ *skup svih neorjentiranih kutova. Neka je* $\varphi : \mathcal{K} \to [0, +\infty\rangle$ *funkcija takva da vrijedi sljedeće:*

1) $\varphi(\alpha) > 0$*, za svaki* $\alpha \in \mathcal{K}, \alpha > 0$

2) $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ *kad god su* α, β *kutovi takvi da je zbroj* $\alpha + \beta$ *definiran.*

Tada za φ *kažemo da je* ***mjera kuta*** *na* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$*.*

Propozicija 4.1.2. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* φ *mjera kuta na toj ravnini. Tada je* φ *strogo rastuća funkcija, tj. ako su* α *i* β *kutovi takvi da je* $\alpha < \beta$*, onda je*

$$\varphi(\alpha) < \varphi(\beta).$$

Nadalje, $\varphi(0) = 0$*.*

Dokaz. Neka su α, β kutovi takvi da je $\alpha < \beta$. Iz Propozicije 3.3.7 postoji kut γ tako da je $\beta = \alpha + \gamma$. Očito je $\gamma > 0$. Stoga je $\varphi(\gamma) > 0$ te imamo

$$\varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \gamma) = \varphi(\alpha) + \varphi(\gamma) > \varphi(\alpha).$$

Dakle, $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$.
Nadalje, vrijedi

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$$

pa slijedi $\varphi(0) = 0$. □

Lema 4.1.3. *Neka je* $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ *apsolutna ravnina te neka je* φ *mjera kuta na toj ravnini.*

1) Neka je α kut te $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n\alpha$ definirano. Tada je $\varphi(n\alpha) = n \cdot \varphi(\alpha)$.

2) Za svaki kut α i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\varphi(\frac{\alpha}{2^n}) = \frac{\varphi(\alpha)}{2^n}.$$

Dokaz. 1) Lako dobivamo indukcijom po n.

2) Neka je α kut te $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\varphi(\alpha) = \varphi(2^n \cdot \frac{\alpha}{2^n}) = 2^n \cdot \varphi(\frac{\alpha}{2^n}),$$

dakle

$$\varphi(\alpha) = 2^n \cdot \varphi(\frac{\alpha}{2^n})$$

pa je

$$\varphi(\frac{\alpha}{2^n}) = \frac{\varphi(\alpha)}{2^n}.$$

□

Lema 4.1.4. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te p mjera na toj ravnini. Neka je $\mathcal{K}$ skup svih kutova u toj ravnini. Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup od $\mathcal{K}$ te α supremum od $\mathcal{S}$. Tada je broj $\varphi(\alpha)$ supremum skupa*

$$B = \{\varphi(\beta) \mid \beta \in \mathcal{S}\}.$$

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $\alpha = 0$. Pretpostavimo $\alpha \neq 0$.
Za svaki $\beta \in \mathcal{S}$ vrijedi $\beta \leq \alpha$ pa je

$$\varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha).$$

Dakle, $\varphi(\alpha)$ je gornja međa od B.
Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\frac{\varphi(\omega)}{2^n} < \min\{\epsilon,\ \varphi(\alpha)\}.$$

Tada je

$$\frac{\varphi(\omega)}{2^n} < \varphi(\alpha)$$

iz čega slijedi

$$\frac{\omega}{2^n} < \alpha$$

(u suprotnom $\alpha \leq \frac{\omega}{2^n}$ pa je $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\frac{\omega}{2^n})$, tj. $\varphi(\alpha) \leq \frac{\varphi(\omega)}{2^n}$).

Stoga postoji β tako da je

$$\alpha = \beta + \frac{\omega}{2^n} \tag{4.1}$$

Iz ovoga slijedi da je $\beta < \alpha$. Budući da je α supremum od $\mathcal{S}$ ovo znači da β nije gornja međa od $\mathcal{S}$. Stoga postoji $\gamma \in \mathcal{S}$ tako da je $\beta < \gamma$. Imamo:

$$\beta < \gamma \leq \alpha$$

iz čega slijedi

$$\varphi(\beta) < \varphi(\gamma) \leq \varphi(\alpha)$$

pa je

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\gamma) < \varphi(\alpha) - \varphi(\beta).$$

Iz (4.1) slijedi $\varphi(\alpha) - \varphi(\beta) = \frac{\varphi(\omega)}{2^n}$ što je manje od ϵ pa je

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\gamma) < \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) < \epsilon.$$

Dakle, $\varphi(\alpha) - \varphi(\gamma) < \epsilon$ pa je $\varphi(\alpha) - \epsilon < \varphi(\gamma)$. Jasno, $\varphi(\gamma) \in \beta$. Iz Propozicije 3.2.16 slijedi da je $\varphi(\alpha)$ supremum od B. □

Lema 4.1.5. *Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina te $\alpha > 0$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}_0$ tako da je $n\alpha \leq m\alpha$. Tada je $n \leq m$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $m < n$ pa je prema Napomeni 3.3.22 $m\alpha < n\alpha$ što je u kontradikciji s $n\alpha \leq m\alpha$. Dakle, $n \leq m$. □

4.2 Egzistencija mjere kuta

Teorem 4.2.1. *Egzistencija i jedinstvenost mjere kuta*
Neka je $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ apsolutna ravnina. Neka je $s \in \mathbb{R}, s > 0$. Tada postoji jedinstvena mjera kuta na $(M, \mathcal{P}, \rho, d)$ takva da je $\varphi(\omega) = s$.

Dokaz. 1) Jedinstvenost:

Pretpostavimo da su φ_1 i φ_2 kutne mjere takve da je $\varphi_1(\omega) = s$, $\varphi_2(\omega) = s$. Dokažimo da je $\varphi_1 = \varphi_2$.

Neka je α kut. Tada po Propoziciji 3.3.27 α supremum skupa E_α. Stoga iz Leme 4.1.4 slijedi da je $\varphi_1(\alpha)$ supremum skupa

$$\{\varphi_1(\beta) \mid \beta \in E_\alpha\}$$

te da je $\varphi_2(\alpha)$ supremum skupa

$$\{\varphi_2(\beta) \mid \beta \in E_\alpha\}$$

.

Neka je $\beta \in E_\alpha$. Tada je $\beta = q \cdot \frac{\omega}{2^n}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i $q \in \{0, ..., 2^n\}$. Imamo

$$\varphi_1(\beta) = \varphi_1(q \cdot \frac{\omega}{2^n}) = q \cdot \varphi_1(\frac{\omega}{2^n}) = \frac{q}{2^n} \cdot \varphi_1(\omega) = \frac{q}{2^n} \cdot s$$

te analogno dobivamo

$$\varphi_2(\beta) = \frac{q}{2^n} \cdot s.$$

Stoga je $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$.

Iz ovoga zaključujemo

$$\{\varphi_1(\beta) \mid \beta \in E_\alpha\} = \{\varphi_2(\beta) \mid \beta \in E_\alpha\},$$

pa slijedi $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ (jedinstvenost supremuma). Zaključujemo $\varphi_1 = \varphi_2$.

2) Egzistencija:
Definiramo $\varphi : \mathcal{K} \to [0, +\infty\}$ na sljedeći način:

Neka je $\alpha \in \mathcal{K}$. Stavimo

$$\varphi(\alpha) = \sup \{\frac{q}{2^n} \cdot s \mid n \in \mathbb{N}, q \in \{0, ..., 2^n\}, q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha\}.$$

Očito je $0 \leq \varphi \leq s$, za svaki $\alpha \in \mathcal{K}$, dakle φ je dobro definirana. Nadalje, ako je $\alpha \in \mathcal{K}, \alpha > 0$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{\omega}{2^n} < \alpha$ (po Propoziciji 3.3.25).

Stoga je $\frac{1}{2^n} \leq \varphi(\alpha)$. Prema tome $\varphi(\alpha) > 0$.

Imamo

$$2 \cdot \frac{\omega}{2^1} = \omega \leq \omega$$

pa je

$$\frac{2}{2^1} \cdot s \leq \varphi(\omega), \text{ tj. } s \leq \varphi(\omega)$$

što zajedno s $\varphi(\omega) \leq s$ daje $\varphi(\omega) = s$.

Neka su α i β kutovi takvi da je zbroj $\alpha + \beta$ definiran. Neka je

$$A = \{\frac{q}{2^n} \cdot s \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha\}$$

te

$$B = \{\frac{p}{2^m} \cdot s \mid m \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2^m, p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq \beta\}.$$

Tada je $\varphi(\alpha) = sup\ A$ i $\varphi(\beta) = sup\ B$.

Neka je $x \in A$. Tada je

$$x = \frac{q}{2^n} \cdot s$$

gdje je $n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, q \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha$.

Nadalje, uzmemo $y \in B$. Tada je

$$y = \frac{p}{2^m} \cdot s$$

gdje je $m \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2^m, p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq \beta$

Slijedi

$$q \cdot \frac{\omega}{2^n} + p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq \alpha + \beta.$$

1) slučaj: $m > n$

   Tada je

$$q \cdot \frac{\omega}{2^n} = q \cdot (2^{m-n} \cdot \frac{\omega}{2^{n+(m-n)}}) = (q \cdot 2^{m-n}) \cdot \frac{\omega}{2^m}.$$

   Stoga je

$$(q \cdot 2^{m-n}) \cdot \frac{\omega}{2^m} + p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq \alpha + \beta,$$

   tj.

$$(q \cdot 2^{m-n} + p) \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq \alpha + \beta.$$

   Imamo

$$\frac{q \cdot 2^{m-n} + p}{2^m} \leq \varphi(\alpha + \beta),$$

   tj.

$$\frac{q}{2^n} \cdot s + \frac{p}{2^m} \cdot s \leq \varphi(\alpha + \beta).$$

   Dakle, $x + y \leq \varphi(\alpha + \beta)$.

2) slučaj: $n > m$

   Analogno dobivamo $x + y \leq \varphi(\alpha + \beta)$.

3) slučaj: $n = m$

   Odmah slijedi $x + y \leq \varphi(\alpha + \beta)$.

U svakom slučaju $x + y \leq \varphi(\alpha + \beta)$. Stoga je

$$\gamma \leq \varphi(\alpha + \beta) - x$$

za svaki $y \in B$. To znači da je $\varphi(\alpha + \beta) - x$ gornja međa od B pa slijedi

$$sup\ B \leq \varphi(\alpha + \beta) - x,\ \varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha + \beta) - x.$$

Dakle, $x \leq \varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta)$ za svaki $x \in A$.
Ovo znači da je $\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta)$ gornja međa od A pa vrijedi

$$sup\ A \leq \varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta).$$

Dakle, $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta)$. Stoga je

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha + \beta).$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $q \in \{0, ...2^n\}$. Tvrdimo da je

$$\varphi(q \cdot \frac{\omega}{2^n}) = \frac{q}{2^n} \cdot s \tag{4.2}$$

Neka su $m \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, ...2^m\}$ tako da je

$$p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq q \cdot \frac{\omega}{2^n}.$$

1) $m > n$
Imamo

$$q \cdot \frac{\omega}{2^n} = q \cdot (2^{m-n} \frac{\omega}{2^{n+(m-n)}}) = (q \cdot 2^{m-n}) \cdot \frac{\omega}{2^m}$$

Stoga je

$$p \cdot \frac{\omega}{2^m} \leq (q \cdot 2^{m-n}) \frac{\omega}{2^m}.$$

Uočimo $\frac{\omega}{2^m} > 0$ (naime $2^m \frac{\omega}{2^m} = \omega$ pa ja jasno $\frac{\omega}{2^m} \neq 0$).
Iz Leme 4.1.5 slijedi $p \leq q \cdot 2^{m-n}$. Stoga je

$$\frac{p}{2^m} \leq \frac{q}{2^n}$$

$$\frac{p}{2^m} \cdot s \leq \frac{q}{2^n} \cdot s \tag{4.3}$$

2) slučaj $m \leq n$
Dolazimo do istog zaključka:

$$\frac{p}{2^m} \cdot s \leq \frac{q}{2^n} \cdot s.$$

Znamo da je $\varphi(q \cdot \frac{\omega}{2^n}$ supremum skupa A koji se sastoji od svih takvih brojeva $\frac{p}{2^m} \cdot s$. Iz (4.3) slijedi da je $\frac{q}{2^n} \cdot s$ gornja međa od A. Stoga je

$$sup\, A \leq \frac{q}{2^n} \cdot s,$$

tj.

$$\varphi(q \cdot \frac{\omega}{2^n}) \leq \frac{q}{2^n} \cdot s.$$

S druge strane, očito je $\frac{q}{2^n} \cdot s \in A$ pa je

$$\frac{q}{2^n} \cdot s \leq \varphi(q \cdot \frac{\omega}{2^n}).$$

Time je jednakost (4.2) dokazana.

Neka je

$$D = \{q \cdot \frac{\omega}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, q \in \{0, ..., 2^n\}\}.$$

Neka su $x, y \in D$. Tvrdimo da je $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ako je zbroj $x + y$ definiran. Imamo

$$x = q \cdot \frac{\omega}{2^n},\ y = p \cdot \frac{\omega}{2^m},$$

$n, m \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, 0 \leq p \leq 2^m$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $n \leq m$.

Imamo

$$x+y = q\cdot\frac{\omega}{2^n}+p\cdot\frac{\omega}{2^m} = q\cdot(2^{m-n}\cdot\frac{\omega}{2^{m+(m-n)}})+p\cdot\frac{\omega}{2^m} = (q\cdot 2^{m-n})\cdot\frac{\omega}{2^m}+p\cdot\frac{\omega}{2^m} = (q\cdot 2^{m-n}+p)\frac{\omega}{2^m}.$$

Stoga je prema (4.2)

$$\varphi(x + y) = \frac{q \cdot 2^{m-n} + p}{2^m} \cdot s = \frac{q}{2^n} \cdot s + \frac{p}{2^m} \cdot s = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1) tvrdnja:
Ako je α kut te $x \in D$ takav da je $x \leq \alpha$, onda je
$$\varphi(x) \leq \varphi(\alpha).$$
Naime, imamo $x = q \cdot \frac{\omega}{2^n}, n \in \mathbb{N}, q \in \{0, ..., 2^n\}$ pa je iz definicije od $\varphi(\alpha)$ jasno da je
$$\frac{q}{2^n} \cdot s \leq \varphi(\alpha).$$
No, $\varphi(x) = \frac{q}{2^n} \cdot s$.

2) tvrdnja:
Neka je α kut. Tada je
$$\varphi(\alpha) = sup\ \{\varphi(x) \mid x \in D, x \leq \alpha\}.$$
Ovo slijedi iz (4.2) i definicije od $\varphi(\alpha)$.

3) tvrdnja:
Funkcija φ je strogo rastuća na D, tj. ako su $x, y \in D$ tako da je $x < y$, onda je $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Ako su $x, y \in D$, onda je
$$x = q \cdot \frac{\omega}{2^n},\ y = p \cdot \frac{\omega}{2^n},$$
gdje su $n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, 0 \leq p \leq 2^n$. Iz $x < y$ slijedi $p < q$. Stoga je
$$\frac{p}{2^n} \cdot s < \frac{q}{2^n} \cdot s$$
tj. $\varphi(x) < \varphi(y)$.

4) tvrdnja:
Ako je α kut i $y \in D$ tako da je $\alpha \leq y$, onda je $\varphi(\alpha) \leq \varphi(y)$.

Neka je $n \in D$ tako da je $x \leq \alpha$. Tada je $x \leq y$ pa je prema 3) tvrdnji $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Stoga je $\varphi(y)$ gornja međa skupa $\{\varphi(x) \mid x \in D, x \leq \alpha\}$, pa je supremum tog skupa manji ili jednak $\varphi(y)$. Iz 2) tvrdnje slijedi $\varphi(\alpha) \leq \varphi(y)$.

5) tvrdnja:
Neka su α i β kutovi takvi da je $\alpha < \beta$. Tada postoji $x \in D$ tako da je $\alpha < x < \beta$.

Dokažimo ovo: Iz $\alpha < \beta$ slijedi da je postoji kut γ tako da je $\beta = \alpha + \gamma$. Očito je $\gamma > 0$.
Iz Propozicije 3.3.25 slijedi da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{\omega}{2^n} < \gamma$. Neka je

$$k = max\{i \in \{0, ..., 2^n\} \mid i \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha\}.$$

Tada je $k \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha$. Uočimo, $k < 2^n$. U suprotnom $k = 2^n$ pa je $\omega \leq \alpha$ što povlači $\alpha = \omega$, a to je nemoguće jer je $\alpha < \beta$.
Stoga je $k + 1 \in \{0, ..., 2^n\}$ pa zaključujemo da ne vrijedi $(k + 1) \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha$. Stoga je $\alpha < (k + 1) \cdot \frac{\omega}{2^n}$.
Imamo

$$(k + 1) \cdot \frac{\omega}{2^n} = k \cdot \frac{\omega}{2^n} + \frac{\omega}{2^n} < \alpha + \gamma = \beta.$$

Dakle,

$$(k + 1) \cdot \frac{\omega}{2^n} < \beta.$$

Prema tome, za $x = (k + 1)\frac{\omega}{2^n}$ vrijedi $x \in D$ i $\alpha < x < \beta$.

6) tvrdnja: Neka su α i β kutovi tako da je $\alpha < \beta$. Tada je $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$.

Naime, prema prethodnoj tvrdni postoji $x \in D$ tako da je $\alpha < x < \beta$ te opet primjernom iste tvrdnje dobivamo da postoji $y \in D$ tako da je $\alpha < x < y < \beta$. Iz 4), 3) i 1) tvrdnje sada slijedi

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(x) < \varphi(y) \leq \varphi(\beta)$$

pa zaključujemo $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$.

Uočimo da iz 6) tvrdnje slijedi ovaj zaključak: Ako su α i β kutovi tako da je $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$, onda je $\alpha \leq \beta$. Naime, u suprotnom bismo imali $\beta < \alpha$ pa bi 6) tvrdnja povlačila $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$ što je nemoguće.

7) tvrdnja: Neka je α kut tako da je $\alpha < \omega$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje $x, x' \in D$ tako da je

$$x \leq \alpha < x + x' \text{ i } \varphi(x') < \epsilon,$$

i pri tome je $x' \leq \frac{\omega}{2}$.

Dokažimo to: Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{s}{2^n} < \epsilon$. Neka je

$$k = max\{i \in \{0, ..., 2^n\} \mid i \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha\}.$$

Tada je

$$k \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha$$

iz čega slijedi $k < 2^n$ (ako je $k = 2^n$ onda $\omega \leq \alpha$ što je nemoguće jer je $\alpha < \omega$). Slijedi $k + 1 \in \{0, ..., 2^n\}$ te $\alpha < (k + 1)\frac{\omega}{2^n}$. Dakle,

$$k \cdot \frac{\omega}{2^n} \leq \alpha < k \cdot \frac{\omega}{2^n} + \frac{\omega}{2^n}.$$

Neka je

$$x = k \cdot \frac{\omega}{2^n},\ x' = \frac{\omega}{2^n}.$$

Očito su $x, x' \in D$ i

$$x \leq \alpha < x + x'.$$

Imamo

$$\varphi(x') = \frac{1}{2^n} \cdot s = \frac{s}{2^n}$$

pa je $\varphi(x') < \epsilon$.

8) tvrdnja: Neka su α i γ kutovi takvi da je $\alpha = x + \gamma$ gdje je $x \in D$. Nadalje, neka je $x' \in E$ tako da je $\gamma \leq x'$. Tada je

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(x) + \varphi(x').$$

Pretpostavimo suprotno. Tada je $\varphi(x) + \varphi(x') < \varphi(\alpha)$. Imamo

$$x = q \cdot \frac{\omega}{2^n},\ x' = p \cdot \frac{\omega}{2^n},$$

za neke $n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \leq 2^n, 0 \leq p \leq 2^n$.
Imamo

$$\varphi(x) + \varphi(x') = \frac{q}{2^n} \cdot s + \frac{p}{2^n} \cdot s = \frac{(p + q)}{2^n} \cdot s.$$

No,

$$\varphi(x) + \varphi(x') < \varphi(\alpha) \leq s$$

pa je

$$p + q \leq 2^n.$$

Iz toga slijedi da je $(p+q)\cdot\frac{\omega}{2^n}$ definirano pa je i zbroj $p\cdot\frac{\omega}{2^n}+q\cdot\frac{\omega}{2^n}$ definiran (po Propoziciji 3.3.16).

Dakle, $x+x'$ je definirano, te imamo $\varphi(x+x')=\varphi(x)+\varphi(x')<\varphi(\alpha)$. Iz ovoga slijedi $x+x'<\alpha$.

Imamo,

$$\alpha = x+\gamma \leq x+x' < \alpha,$$

što je kontradikcija. Time je 8) tvrdnja dokazana.

Dokažimo sada da je $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ za sve kutove α i β za koje je zbroj $\alpha+\beta$ definiran.

Tvrdnja je jasno ako je $\alpha=\omega$ ili $\beta=\omega$. Pretpostavimo sada je su α i β kutovi takvi da je $\alpha+\beta$ definiran te da je $\alpha<\omega$ i $\beta<\omega$.

Neka je $\epsilon>0$. Prema 7) tvrdnji slijedi da postoje $x, x'\in D$ tako da je

$$x\leq\alpha<x+x'$$

pri čemu je

$$\varphi(x')<\frac{\epsilon}{2} \text{ i } x'\leq\frac{\omega}{2}$$

Isto tako, postoje $y, y'\in D$ tako da je

$$y\leq\beta<y+y'$$

pri čemu je

$$\varphi(y')<\frac{\epsilon}{2} \text{ i } y'\leq\frac{\omega}{2}$$

.

Uočimo da iz $x'\leq\frac{\omega}{2}iy'\leq\frac{\omega}{2}$ slijedi da je zbroj $x'+y'$ definiran.

Neka je γ kut tako da je $\alpha=x+\gamma$. Iz ovoga slijedi $\gamma\leq x'$ (u suprotnom imamo $x'<\gamma$ pa je

$$\alpha<x+x'<x+\gamma=\alpha,$$

što je nemoguće.)

Nadalje, neka je δ kut takav da je $\beta=y+\delta$ pa kao i maloprije dobivamo $\delta\leq y'$.

Iz $\alpha=x+\gamma$ i $\beta=y+\delta$ slijedi

$$\alpha+\beta=(x+\gamma)+(y+\delta)=(x+y)+(\gamma+\delta).$$

Nadalje, $\gamma+\delta\leq x'+y'$.

Sada iz $\alpha + \beta = (x + y) + (\gamma + \delta)$ i 8) tvrdnje slijedi

$$\varphi(\alpha + \beta) \leq \varphi(x + y) + \varphi(x' + y')$$

stoga je

$$\varphi(\alpha + \beta) \leq \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x') + \varphi(y') < \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \epsilon.$$

Dakle, $\varphi(\alpha + \beta) < \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \epsilon$ za svaki $\epsilon > 0$, tj.

$$\varphi(\alpha + \beta) - (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)) < \epsilon$$

za svaki $\epsilon > 0$.
Stoga je

$$\varphi(\alpha + \beta) - (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)) \leq 0$$

pa je

$$\varphi(\alpha + \beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

Već smo dokazali $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha + \beta)$ pa zaključujemo

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

Prema tome, φ je mjera kuta.

$\square$

Bibliografija

1. B. Pavkovic, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
2. H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley, New York, 1969.

Sažetak

Rad smo podijelili na 4 cjeline u kojima razrađujemo potrebne pojmove za izgradnju mjere kuta.

U prvom poglavlju izgrađujemo pojmove ravnine koju kasnije gledamo kao okolinu za proučavanje kutova. Pritom koristimo Aksiome incidencije te relaciju linearnog uređaja sa različitim svojstvima za izgradnju pojedine vrste ravnine.

U drugom poglavlju definiramo pojmove izometrije i osne simetrije i uvodimo pojam apsolutne ravnine kao osnove za daljni rad. Koristimo Osnovni teorem o izometrijama te definiramo rotacije i centralnu simetriju.

U trećem poglavlju definiramo pojam neorjentiranog kuta pri čemu nam nul - kut i ispruženi kut čine osnovu za uspoređivanje. Gledamo odnose među kutovima i uvodimo relaciju $\leq$ kao sredstvo uspoređivanja. Osim toga, definiramo supremum i infimum te zbroj kutova te na kraju precizno definiramo pojam mjere kuta čije postojanje dokazujemo teoremom.

Summary

We divided this thesis into 4 major parts.

In first chapter we are developing terms of different types of planes as a base for our study of measure of an angle. We are using Axiom of incidence and equivalence relation with different characteristic.

In second chapter we define notions as isometry and reflection across a line. Also, we define the notion of an absolute plane. We use Fundamental theorem about isometry and define rotation and central symmetry.

In third chapter we construct angle and we use 0 angle and straight angle as a base for comparison. To compare two angles we use relation $\leq$. Also, in this thesis we define supremum and infimum and sum of angles. In the end there is notion of measure of an angle and theorem that proves existence of that measure.

Životopis

Ime mi je Antonija Capan i rođena sam 20.01.1989. u Karlovcu. Osnovnu školu završila sam u Dugoj Resi nakon čega upisujem Prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Gimnaziji Karlovac. Istu završavam 2007. godine kada upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu. Konačno, 2014. završavam Diplomski Sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički.