Riemannov teorem

Marić, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Marić

RIEMANNOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji i djevojci na potpori

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Uvod u kompleksnu analizu **3**
1.1 Kompleksne funkcije 3
1.2 Osnovna svojstva analitičkih funkcija 6

2 Riemannov teorem **9**
2.1 Elementarne domene 9
2.2 Riemannov teorem o preslikavanju 13

Bibliografija **23**

Uvod

Kompleksna analiza je nastavak na realnu analizu. U ovom radu obradit ćemo slabiju verziju teorema Riemmanove funkcije koji tvrdi da svaka elementarna domena, koja nije $\mathbb{C}$, odgovara ekvivalentnom jediničnom krugu. Mi u ovom radu ćemo definirati pojam konformnog preslikavanja između dvaju otvorenih skupova podskupova od $\mathbb{C}$.

U prvom dijelu rada napravili smo uvod u kompleksnu analizu, počevši od definicije kompleksnog broja, te svih osnovnih pojmova i operacija koja su vezana uz kompleksni broj. Također, u prvom dijelu definirali smo pojam kompleksne funkcije kompleksne varijable, te svojstva te funkcije.

U nastavku prvog dijela definirali smo pojam analitičke funkcije, te smo definirali njena osnovna svojstva. U tom dijelu također smo iskazali par značajnih rezultata za kompleksnu analizu koja ćemo naknadno koristiti u dokazu našeg teorema. Od značajnih teorema koje smo iskazali valja spomenuti Cauchy - Riemannov teorem koji uspostavlja vezu između kompleksnih i realnih funkcija. Također smo iskazali Teorem o implicitnoj funkciji pomoću kojeg smo pokazali da preslikavanje je konformno ako su ispunjeni uvjeti da je φ bijektivno i analitčko preslikavanje.

U drugom dijelu rada definirali smo pojam domene. Tu smo iskazali osnovni teorem integralnog računa koji uspostavlja usku vezu između primitivne funkcije i integrala funkcije realne varijable. U tom drugom dijelu, zapravo područje našega interesa su elementarne domene (Za domenu D sadržanu u $\mathbb{C}$ kažemo da je elementarna domena ako svaka analitička funkcija definirana na D ima primitivnu funkciju na D.). U ovom dijelu rada, također smo iskazali nekoliko vrlo važnih teorema, kao što je Cauchyjeva integralna formula, Otvoreni funkcijski teorem, te Riemannov teorem o zamjeni varijabli i s time smo napravili dobru pripremu za dokazivanje našeg teorema.

U zadnjem dijelu rada smo iskazali, te dokazali Riemannov teorem o preslikavanju. Koncepciju dokaza proveli smo u sedam koraka. U prvom glavnom dijelu pokazujemo da možemo preslikati danu elementarnu domenu $D \neq \mathbb{C}$ konformno na elemetarnu domenu $D* \subset E$ koja sadrži 0. U drugom glavnom dijelu dokaza, smatramo da je M skup svih injektivnih analitičkih funkcija φ preslikavanja $D*$ u E, s fiksiranom 0. Ako postoji preslikavanje $\varphi \in M$ sa maksimalnim $|\psi'(0)|$, tada se može pokazati da je φ surjektivna, tj.

konformna kao preslikavanje $D* \to E$. Konačno, u trećem dijelu dokaza, riješavamo ovaj problem ekstrema.

Na kraju ovog uvodnog dijela iskazat ćemo Riemannov teorem o preslikavanju.

Teorem 0.0.1. *(Riemannov teorem o preslikavanju) Bilo koja elementarna domena $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, je konformno ekvivalentna jediničnom krugu E.*

Poglavlje 1

Uvod u kompleksnu analizu

1.1 Kompleksne funkcije

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Svaki kompleksan broj možemo zapisati u obliku

$$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

gdje je i imaginarna jedinica, $i^2 = -1$. Imamo x = realni dio od $z = Re(z)$ i y = imaginarni dio od $z = Im(z)$. Polje komplesnih brojeva $\mathbb{C}$ definirano je kao skup $R^2 = R$ x R svih uređenih parova realnih brojeva sa zbrajanjem

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \tag{1.2}$$

i množenjem

$$(x, y) * (x', y') = (xx - yy', xy' + x'y). \tag{1.3}$$

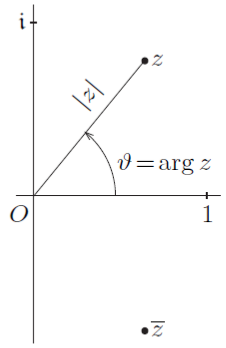
Mi ćemo identificirati $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ na uobičajeni način

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \tag{1.4}$$

identificiramo s točkom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definicija skupa $\mathbb{C}$ kao skupa $\mathbb{C}$ svih uređenih parova realnih brojeva omogućuje nam geometrijsko poimanje kompleksnih brojeva i podskupova od $\mathbb{C}$. Kompleksan broj z predstavljen je točkom (x, y) Gaussove ravnine čije su pravokutne koordinate x i y. Udaljenost točke $z \in \mathbb{C}$ od ishodišta 0 označava se sa $|z|$ i zove apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja z definiranog s

$$|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \tag{1.5}$$



Slika 1.1: Modul kompleksnog broja

a ako je $z \neq 0$ onda definiramo i argument kompleksnog broja kao realan broj arg $z \in (-\pi, \pi]$ kao kut pozitivnog dijela osi x do zrake iz ishodišta koja prolazi kroz z s time da uzmamo negativnu vrijednost ako je z ispod osi x, tj. $Im(z) < 0$.
Udaljenost točaka z_1,$z_2 \in \mathbb{C}$ dana je s

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}. \tag{1.6}$$

Otvoreni krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}. \tag{1.7}$$

Dakle, radi se o skupu svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Definicija 1.1.1. *Skup $S \subset \mathbb{C}$ je ograničen, ako je on sadržan u nekom krugu, tj. ako postoje $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(z_0, r)$.*

Nasuprot tome, zatvoren krug s centrom u $z_0 \in C$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}. \tag{1.8}$$

U kompleksnoj analizi najvažniji skupovi u $\mathbb{C}$ su otvoreni skupovi koje definiramo na slijedeći način. Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je skup koji je ili prazan ili za svaku točku $z_0 \in \Omega$

postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r)$ sadržan u Ω. Zatvoren skup je komplement otvorenog skupa u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.2. *Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je okolina točke z_0 ako postoji $r > 0$ takvo da je $K(z_0, r) \subseteq S$.*

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen. Zatvoren krug primjer je kompaktnog skupa.

Funkciju iz polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ zovemo kompleksna funkcija kompleksne varijable. Domena (područje definicije) i kodomena (područje vrijednosti) takve funkcije su sadržane u polju $\mathbb{C}$. Budući da su podskupovi od $\mathbb{C}$ u stvari podskupovi ravnine $\mathbb{R}^2$, svaka funkcija f iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ može se opisati s dvije realne funkcije dviju realnih varijabli. Formula

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), (x, y) \in S \tag{1.9}$$

pri čemu su $u = Re \circ f$ i $u = Im \circ f$, od velike je važnosti jer ona povezuje kompleksnu funkciju f s dvije realne funkcije u i v.

Definicija 1.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ i $f : S \to \mathbb{C}$. Funkcija f je neprekidna u točki $z_0 \in S$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da*

$$z \in S \ \ i \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \tag{1.10}$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $T \subseteq S$, ako je ona neprekidna u svakoj točki skupa T

Definicija 1.1.4. *Put u $\mathbb{C}$ nazivamo svako neprekidno preslikavanje*

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}, [a, b] \subseteq \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Definicija 1.1.5. *Put je gladak ako su α,β klase C^1 na [a,b]. Tada je α'(t)= α'(t) +iβ'(t). Za put $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ kažemo da je po dijelovima gladak put, ako postoji particija*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \tag{1.12}$$

segmenta [a,b] takva da su restrikcije

$$\alpha_j \overset{def}{=} \alpha|_{[t_{j-1},t_j]}, j = 1, ..., k. \tag{1.13}$$

Sada ćemo definirati i pojam duljine luka glatke krivulje te pojam povezanosti lukom koji će nam biti potreban kod definicije domene u skupu kompleksnih brojeva.

Definicija 1.1.6. *Duljinu luka glatke krivulje α, koja ide sa $[a, b]$ u $\mathbb{C}$, definiramo kao*

$$l(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt. \tag{1.14}$$

Definicija 1.1.7. *Duljina luka po dijelovima glatke krivulje α, koja ide sa $[a, b]]$ u $\mathbb{C}$, definira se kao*

$$l(\alpha) := \sum_{\nu=0}^{n-1} l(\alpha_\nu). \tag{1.15}$$

Definicija 1.1.8. *Za D podskup od $\mathbb{C}$ kažemo da je povezan lukom ako za svake dvije točke z i w iz D postoji po dijelovima glatka krivulja α sa $[a, b]$ u $\mathbb{C}$ koja povezuje z i w, cijela leži u D, te je $\alpha(a) = z$ i $\alpha(b) = w$.*

Uočimo da svaki skup koji je povezan lukom ujedno i povezan pa je svaka lokalno konstantna funkcija na njemu i konstanta.

1.2 Osnovna svojstva analitičkih funkcija

Prvo ćemo izreći definiciju derivabilnosti za funkciju f u točki z_0.

Definicija 1.2.1. *Za funkciju f sa D u $\mathbb{C}$, pri čemu je D sadržan u $\mathbb{C}$, kažemo da je derivabilna u točki z_0 iz D ako u $\mathbb{C}$ postoji*

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1.16}$$

Ukoliko ovaj limes postoji, označavamo ga sa $f'(z_0)$ i zovemo derivacija funkcije f u točki z_0. Za funkciju kažemo da je derivabilna ako je derivabilna u svim točkama svoje domene.

Ako je f diferencijabilna u z_0 ona je i neprekidna u z_0. f se zove diferencijabilna (na Ω) ako je ona diferencijabilna u svakoj točki $z_0 \in \Omega$.

Definicija 1.2.2. *Ako je funkcija f neprekidna na Ω, f se zove analitička funkcija na Ω. U upotrebi su i nazivi: holomorfna funkcija i regularna funkcija.*

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ skup svih holomorfnih funkcija na Ω označavat ćemo $H(\Omega)$. Sada ćemo iskazati jedan važan teorem poznat kao Cauchy - Riemannov teorem

Teorem 1.2.3. ***(Cauchy - Riemannov teorem)*** *Kompleksna funkcija $f = u + iv$ koja ide sa D u $\mathbb{C}$ derivabilna je u točki $z_0 = (x_0, y_0)$ iz D ako i samo ako su funkcije u i v, kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:*

- $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
- $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

Tada vrijedi

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0). \tag{1.17}$$

Definicija 1.2.4. *Neprazan otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se područje, ako za bilo koje dvije točke a i b iz Ω postoji konačno mnogo točaka $a = z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, z_n = b$ takvih da $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, ..., $[z_{n-1}, z_n]$ leže u Ω.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na Ω sa svojstvom da je $f'(z) = 0$ za svako $z \in \Omega$. Tada je f konstanta.*

Teorem 1.2.6. *Neka je D otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i neka je f funkcija sa D u $\mathbb{C}$. Tada je f lokalno konstantna u D ako i samo ako je f derivabilna u svakoj točki iz D i vrijedi da je $f'(z) = 0$, za sve z iz D.*

Sada ćemo definirati teorem o implicitnoj funkciji.

Teorem 1.2.7. ***(Teorem o implicitnoj funkciji)*** *Neka je dana analitička funkcija $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$ otvoren, s kontinuiranom derivacijom.*
Dio 1. *Pretpostavimo da je $a \in D$, imamo $f'(a) \neq 0$. Tada postoji otvoreni skup D_0, $D_0 \subseteq D$, $a \in D_0$, tako da ograničenje $f|_{D_0}$ je injektivno.*
Dio 2. *Pretpostavimo da je f injektivna i $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in D$. Tada prostor $f(D)$ je otvoren. Inverzna funkcija*

$$f^{-1} : f(D) \to \mathbb{C} \tag{1.18}$$

analitička, a njegova derivacija

$$f^{-1}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \tag{1.19}$$

Teorem 1.2.8. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $a \in \Omega$ i da je funkcija f analitička na skupu $\Omega \setminus \{a\}$. Tada je $f \in H(\Omega)$.*

Krivulja u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to \Omega$ pri čemu je $-\infty < a < b < +\infty$. Skup $\alpha^* = \alpha(t); a \leq t \leq b$ zove se trag krivulje α. Krivulja α je zatvorena ako je $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Otvoren skup Ω je povezan ako za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo put) tako da $\alpha(a) = z$ i $\alpha(b) = \omega$. Otvoren skup Ω naziva se područje ako je povezan. Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva unija disjunktnih područja (koje nazivamo komponente povezanosti od Ω).

Teorem 1.2.9. ***(Teorem jedinstvenosti)*** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $f \in H(\Omega)$ i $f \not\equiv 0$. Tada skup svih nultočaka*

$$N(f) = f^{-1}(0) = \{z \in \Omega; f(z) = 0\} \tag{1.20}$$

nema gomilišta u skupu Ω. Dakle, ako su $f, g \in H(\Omega)$ takve da skup $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ ima gomilište u Ω onda je $f \equiv g$.

Kompleksne funkcije integriramo po putevima, odnosno po krivuljama.

Definicija 1.2.10. *Neka je $\alpha = \xi + i\eta : [a, b] \to C$ po dijelovima gladak put $\alpha[a, b] \subseteq \mathbb{C}$ je njegova slika, i neka je $f : \alpha([a, b]) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Integral funkcije f duž puta α definiramo kao kompleksan broj*

$$\int_{\alpha} f dz \overset{def}{=} \int_{a}^{b} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt. \tag{1.21}$$

Nadalje, definiramo duljinu puta α sa

$$l(\alpha) = \int_{a}^{b} |\alpha'(t)|dt. \tag{1.22}$$

Teorem 1.2.11. ***(Cauchyjev teorem za derivaciju)*** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Tada je $\int_{\alpha} f dz = 0$ za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve α u Ω ako i samo ako postoji derivabilna funkcija $F : \Omega \to \mathbb{C}$ za koju je $F' = f$ na Ω.*

Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da ima primitivnu funkciju na Ω, ako postoji funkcija $F : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Funkcija f ima na Ω lokalno primitivnu funkciju ako oko svake točke $z \in \Omega$ postoji okolina na kojoj f ima primitivnu funkciju.

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se Cauchyjevo ako u njemu vrijedi Cauchyjev teorem, odnosno, ako za svaku petlju α u Ω i za svaku $f \in H(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\alpha} f dz = 0. \tag{1.23}$$

Poglavlje 2

Riemannov teorem

2.1 Elementarne domene

Definicija 2.1.1. *Otvoren i neprazan skup D sadržan u $\mathbb{C}$ koji je povezan lukom zvat ćemo domena.*

Napomena 2.1.2. *Priključeni podskupovi od $\mathbb{R}$ dobro je poznato da su točno intervali. Koncept domeni je tako generalizacija pojma otvorenih intervala. Međutim, za domene u $\mathbb{C}$ postoji mnogo bogatiji izbor vrsta.*

Neka

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ } i \text{ } \beta : [b,c] \to \mathbb{C}, a \leq b \leq c, \tag{2.1}$$

budu dvije po dijelovima glatke krivulje koje imaju svojstvo $\alpha(b) = \beta(b)$.
Zatim formula

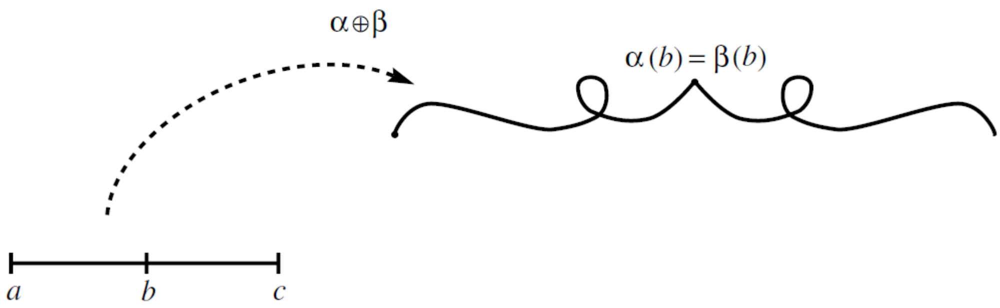
$$\alpha \oplus \beta : [a,c] \to \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

također definira po dijelovima glatku krivulju. Krivulja $\alpha \oplus \beta$ naziva se kompozicija od α i β .

Napomena 2.1.3. *Pretpostavit ćemo, osim ako suprotno izrijekom nije navedeno, da sve su krivulje po dijelovima glatke.*

Teorem 2.1.4. *Neka je D domena u $\mathbb{C}$ i neka je f neprekidna funkcija sa D u $\mathbb{C}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

- *f ima primitivnu funkciju.*



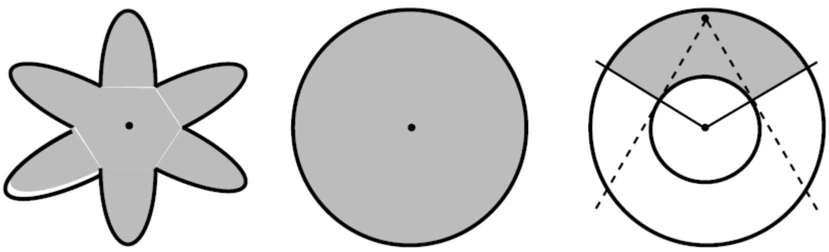
Slika 2.1: Kompozicija od α i β

- *Integral od f po svakoj zatvorenoj krivulji u D iščezava.*
- *Integral od f po bilo kojoj krivulji u D ovisi samo o početnoj i krajnjoj točki te krivulje.*

Osnovni teorem integralnog računa uspostavlja usku vezu između primitivne funkcije i integrala funkcije realne varijable. Ako je funkcija $f\colon < a, b > \to \mathbb{R}$ neprekidna i ako je $F\colon < a, b > \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f, onda je

$$\int_c^d f(s)ds = F(d) - F(c), [c, d] \subseteq < a, b > . \tag{2.3}$$

Iz slijedeće slike imat ćemo primjere tri zvjezdaste domene te ćemo definirati pojam zvjezdaste domene.



Slika 2.2: Tri zvjezdaste domene

Definicija 2.1.5. *Za otvoren skup D sadržan u $\mathbb{C}$ kažemo da je zvjezdasta domena ukoliko ima svojstvo da postoji točka z_* iz D takva da je za svaku točku z iz D pravac koji povezuje z_* i z sadržan u D. Odnosno, skup*

$$\{z_* + t(z - z_*) \ : \ t \in [0, 1]\} \tag{2.4}$$

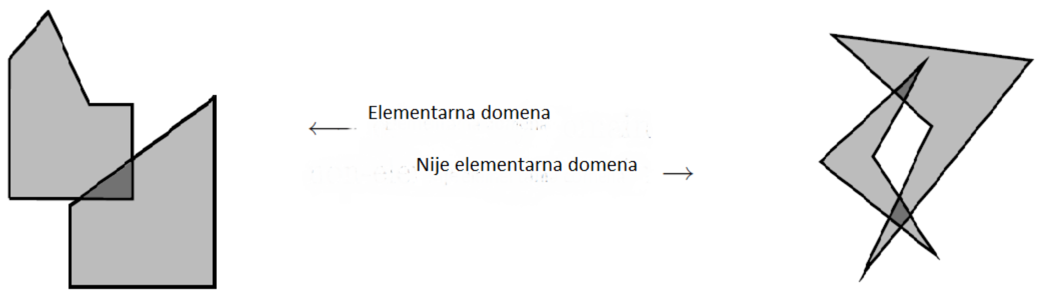
je sadržan u D. Točka z_* nije jednoznačno određena i zovemo je centar.

Budući da svake dvije točke zvjezdastog skupa možemo povezati kroz centar, onda je on povezan lukom, pa je time i domena.

Sada ćemo definirati pojam elementarne domene.

Definicija 2.1.6. *Za domenu D sadržanu u $\mathbb{C}$ kažemo da je elementarna domena ako svaka analitička funkcija definirana na D ima primitivnu funkciju na D.*

Evo na slici možemo vidjeti primjer elementarne domene i domene koja nije elementarna.



Slika 2.3: Primjer elementarne domene i domene koja nije elementarna

Teorem 2.1.7. *Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na elementarnoj domeni, neka f' je također analitička, i $f(z) \notin 0$ za sve $z \in D$. Tada postoji analitička funkcija $h : D \to \mathbb{C}$ s svojstvom*

$$f(z) = exp(h(z)). \tag{2.5}$$

Tada se h zove analitička grana logaritma f.

Korolar 2.1.8. *Pod pretpostavkama prethodnog teorema, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji analitička funkcija $H : D \to \mathbb{C}$ takva da $H'' = f$.*

Sada ćemo iskazati teorem Cauchyjeve integralne formule.

Teorem 2.1.9. *Neka je f sa D u $\mathbb{C}$ analitička funkcija, pri čemu je D otvoren skup u $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da je zatvorena kugla $\overline{K(z_0, r)}$ oko z_0 radijusa r sadržana u D. Tada je funkcija f derivabilna i svaka njena sljedeća derivacija je analitička funkcija. Za n iz $\mathbb{N}_0$ i za svaki z takav da je $|z - z_0| < r$ vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \tag{2.6}$$

pri čemu je

$$\alpha(t) = z_0 + re^{it}, \ 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{2.7}$$

Teorem 2.1.10. ***(Liouvilleov teorem)*** *Svaka omeđena cijela funkcija je konstanta. Ekvivalentno: Nekonstantna cijela funkcija ne može biti ograničena.*

Teorem 2.1.11. ***(Otvoreni funkcijski teorem)*** *Ako je f nekonstantna analitička funkcija na domeni $D \subset \mathbb{C}$, tada njegova slika $f(D)$ je otvorena i jednostavno povezana, tj također domena.*

Lema 2.1.12. ***(Schwarzova lema)*** *Neka je $E := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ jedinični krug. Neka je $f : E \to \mathbb{C}$ analitička funkcija s $|f(z)| \leq 1$ za sve $z \in \mathbb{E}$, i sa nulom kao fiksnom točkom, $f(0) = 0$. Tada za sve $z \in \mathbb{E}$ vrijedi*

$$|f(z)| \leq |z| \ i \ |f'(0)| \leq 1. \tag{2.8}$$

Osim toga, ako postoji točka $a \in \mathbb{E}$, $a \neq 0$, takva da je $|f(a)| = |a|$, ili $|f'(0)| = 1$, tada za odgovarajući $\vartheta \in \mathbb{R}$, $f(z) = ze^{i\vartheta}$ za sve $z \in \mathbb{E}$, odnosno f okoline oko nule.

Propozicija 2.1.13. *Neka je $a \in E$ fiksna točka. Tada je preslikavanje $\varphi : E \to E$,*

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{az{-}1} \tag{2.9}$$

je bijektivno preslikvanje jediničnog kruga u sebe koja zadovoljava

- $\varphi_a(a) = 0$,
- $\varphi_a(0) = a$
- $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$

Pogotovo, φ_a je u oba smjera je analitička.

Sada ćemo definirati pojam singulariteta, kakav je to izolirani singularitet te dati definiciju uklonjivog izoliranog singulariteta.

Definicija 2.1.14. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup, a* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *funkcija. Kažemo da je točka* $z_0 \in Int\Omega = \Omega \setminus \partial\Omega$ *singularitet funkcije* f*, ili da funkcija* f *ima u točki* z_0 *singularitet, ako u točki* z_0 *funkcija* f *nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.*

Definicija 2.1.15. *Za singularitet* z_0 *kažemo da je izoliran singularitet funkcije* f*, ako je* f *holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu* $K^*(z_0, r)$ *oko točke* z_0*.*

Postoje tri vrste singulariteta: Uklonjivi, polovi i bitni singulariteti.

Definicija 2.1.16. *Za izoliran singularitet* z_0 *funkcije* f *kažemo da je uklonjiv, ako u točki* z_0 *možemo funkciju* f *predefinirati ili, ako u* z_0 *nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane holomorfna na nekom (pravom, neprobušenom) krugu* $K(z_0, r)$ *oko točke* z_0*. Drugim riječima, singularitet je uklonjiv, ako ga možemo ukloniti.*

Teorem 2.1.17. ***(Riemannovi teorem o zamjeni)*** *Neka je funkcija* f *holomorfna na probušenom krugu* $K^*(z_0, r)$*. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. z_0 *je uklonjiv singularitet funkcije* f*.*
2. *Postoji limes* $\lim_{z\to z_0} f(z) \in mathbbC$*.*
3. f *je omeđena na nekoj okolini točke* z_0*.*
4. $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$
5. *U Laurentovom razvoju funkcije* f *oko točke* z_0 *nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.*

Teorem 2.1.18. ***(Hurwitzov teorem)*** *Neka je* $f_0, f_1, f_2, ... : D \to \mathbb{C}$ *niz funkcija koji konvergira lokalno uniformno ka (analitičkoj funkciji)* $f : D \to \mathbb{C}$*. Pretpostavimo da svaka funkcija ne poništava na D. Zatim granična funkcija f je ili jednaka nuli, ili nema nulu u D.*

2.2 Riemannov teorem o preslikavanju

Teorem Riemannove funkcije tvrdi da svaka elementarna domena, koja nije $\mathbb{C}$, odgovara ekvivalentnom jediničnom krugu E. Tu je općenitiji oblik teorema Riemannove funkcije, koji se najčešće naziva Uniformizacijski teorem (P. Koebe, H. Poincaré, 1907). Ovaj rezultat potvrđuje slijedeće: Bilo koja jednostavno povezana Riemannova površina odgovara ekvivalentno upravo jednoj od slijedeće tri Riemannove površine:

- Riemannova sfera $\widehat{\mathbb{C}} = P^1(C)$,
- ravnini $\mathbb{C}$
- uređaj kruga E.

Mi ćemo pokazati slabiju verziju ovog teorema, **"Riemannov teorem o preslikavanju"**. Definirat ćemo pojam konformnog preslikavanja između dvaju otvorenih skupova $D, D' \subset \mathbb{C}$.

Definicija 2.2.1. *Preslikavanje $\varphi : D \to D'$ između dvaju otvorenih skupova D, D' u kompleksnoj ravnini zove se konformno, ako i samo ako su slijedeći uvjeti ispunjeni:*

- *φ je bijektivna,*
- *φ je analitička*
- *φ^{-1} je analitička.*

Napomena 2.2.2. *Iz prethodne definicije, treći uvjet slijedi iz prvog i drugog uvjeta.*

Dokaz. Umjesto trećeg uvjeta, možemo zatražiti da derivacija od φ nema nulu. Zanimljivo, ovaj treći uvjet je automatski zadovoljen iz otvorenog funkcijskog teorema 2.1.11 znamo da je $\varphi(D)$ otvoren. Preslikavanje φ^{-1} je stoga kontinuirano. (Inverzna slika otvorenog skupa $U \subset D$ od φ^{-1} je točno njegova slika od φ i time je otvoren.)

Iz teorema o implicitnoj funkciji1.2.7, φ^{-1} je analitička u komplementarnom skupu svih $w = \varphi(z) \in D'$ s $\varphi'(Z) = 0$. Skup tih iznimnih mjesta je slika od φ diskretnog skupa u D, pa stoga diskretna i u D'. Sada tvrdnja slijedi iz Riemannovog teorema o zamjeni 2.1.17. $\square$

Napomena 2.2.3. *Neka $D \subseteq \mathbb{C}$ elementarna domena i $\varphi : D \to D^*$ globalno konformno preslikavanje D na domenu D^*. Pretpostavljamo da je njezina derivacija analitička. Tada D^* je također elementarna domena.*

Dvije domene D i D' zovu se podudarno ekvivalentne, ako i samo ako postoji konformno preslikavanje $\varphi : D \to D'$. Konformna ekvivalencija je zasigurno relacija ekvivalencije na skupu svih domena u $\mathbb{C}$.

Napomena 2.2.4. *Bilo koja domena koja je konfomno ekvivalentna elementarnoj domeni je sama elementarna.*

Napomena 2.2.5. *Dvije elemenatrne domene $\mathbb{C}$ i $E = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ nisu konfomno ekvivalentne.*

Dokaz. Liouville-ov teorem 2.1.10 tvrdi da svaka analitička funkcija $\varphi : \mathbb{C} \to E$ je konstantna, jer je E ograničena. □

Međutim, $\mathbb{C}$ i E su topoloski ekvivalenti (homeomorfni), eksplicitna topološka preslikavanja između njih

- $\mathbb{C} \to E, z \to \frac{z}{1+|z|}$,
- $E \to \mathbb{C}, w \to \frac{w}{1-|w|}$.

Ovaj primjer pokazuje da nužan uvjet topološke ekvivalencije nije dovoljan za konformnu ekvivalenciju. Glavni problem teorije konformnog preslikavanja dano je slijedećim pitanjima:

- Kada dvije domene $D, D' \subset \mathbb{C}$ pripadaju istoj klasi ekvivalencije?
- Koliko različitih preslikavanja ostvaruje konformnu ekvivalenciju za dvije domene u istoj klasi?

Drugo pitanje je ekvivalentno za određivanje skupine konformnih automorfizama (samo preslikavanje) iz fiksne domene D iz danog razreda. To je lako da

$$Aut(D) := \{\phi : D \to D; \phi\ je\, konformna\} \tag{2.10}$$

je grupa s obzirom na kompoziciju preslikavanja.

Zašto je to dovoljno za proučavanje $Aut(D)$? Zbog dva konformna preslikavanja $\varphi, \psi : D \to D'$ preslikavanje $\theta = \psi^{-1}\varphi : D \to D$ se nalazi u $Aut(D)$. Nas prvo pitanje vodi u potrazi za potpuni popis "standardnih domena", kao da je

- bilo koja domena konformno je ekvivalentna standardnoj domeni, i
- bilo koje dvije različite standardne domene nisu konformno ekvivalentne.

Mi ćemo se ograničiti ovdje za elementarne domene. (Opći slučaj je složeniji.) Standardne elementarne domene su kompleksna ravnina i jedinični krug ($\mathbb{C}$ i E).

Teorem 2.2.6. ***(Riemannov teorem o preslikavanju)***
Bilo koja elementarna domena $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, je konformno ekvivalentna jediničnom krugu E.

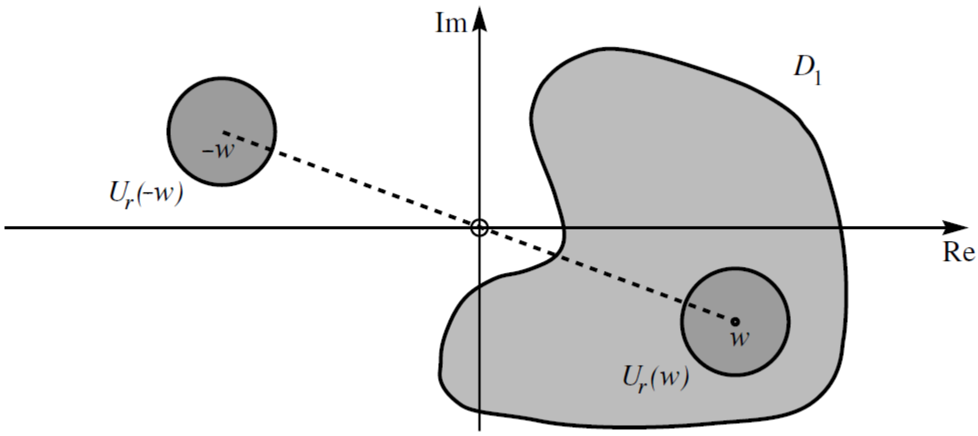
Dokaz će obuhvatiti sedam koraka. Prije nego što počnemo dokaz, evo pregleda glavnih dijelova.

U prvom glavnom dijelu (koraci 1 i 2), možemo preslikati danu elementarnu domenu $D \neq \mathbb{C}$ konformno na elemetarnu domenu $D* \subset E$ koja sadrži 0.

U drugom glavnom dijelu (korak 3), smatramo da je M skup svih injektivnih analitičkih funkcija φ preslikavanja $D*$ u E, s fiksiranom 0. Ako postoji preslikavanje $\varphi \in M$ sa maksimalnim $|\psi'(0)|$, tada se može pokazati da je φ surjektivna, tj. konformna kao preslikavanje $D* \to E$.

Konačno, u trećem dijelu glavnog koraka (4 do 7), riješavamo ovaj problem ekstrema.

Dokaz. **(Dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju)**



Slika 2.4: Prva slika

1. korak Za svaku osnovnu domenu $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$, postoji konformno ekvivalentna domena $D_1 \subset \mathbb{C}$ koji sadrži cijeli krug u svom komplementu $\mathbb{C} \setminus D_1$. Pretpostavljamo postoji točka $b \in \mathbb{C}$, $b \notin D$. Funkcija $f(z) = z - b$ je zatim analitička u domeni D, i nema nulu. Posjeduje time analitički drugi korijen g

$$g : D \to \mathbb{C},\ \ g^2(z) = z - b. \tag{2.11}$$

Očigledno, g je injektivno,

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g^2(z_1) = g^2(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \tag{2.12}$$

stoga definira konformno preslikavanje na domenu $D_1 = g(D)$. Argument za injekciju pokazuje više, odnosno $g(z_1) = -g(z_2)$ i podrazumijeva $z_1 = z_2$. Drugim riječima : Ako ne-nul točka w leži u D_1, tada $-w$ ne leži u D_1.

Budući da je D_1 otvoren i nepraznan, postoji potpuni krug koji se nalazi u D_1 i ne sadrži 0. Zatim krug, koji je dobiven refleksijom na ishodište, je sadržan u komplementu od D_1 kao što je prikazano u Slici 2.4.

Taj prvi korak može se ilustrirati na primjeru razreza ravnine $\mathbb{C}_-$. Biramo $b = 0$, i neka g bude osnovica korijena. Zatim g preslikava konformno $\mathbb{C}_-$ na desnu poluravninu.

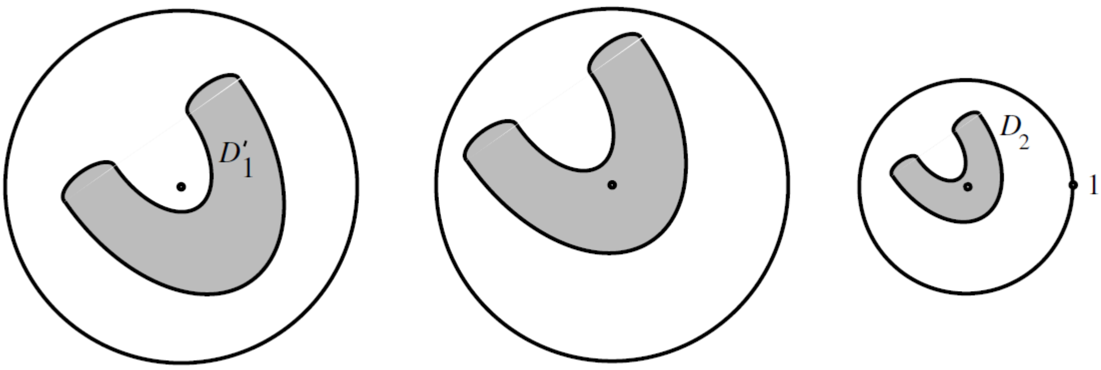
2. korak Za svaku elementarnu domenu $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, postoji konformna ekvivalentna domena D_2 tako da $0 \in D_2 \subset E$. Taj prvi korak možemo pretpostaviti da je puni krug $U_r(a)$ sadržan u komplementu od D. (Možemo zamijeniti D za D_1). Preslikavanje

$$z \to \frac{1}{z-a} \tag{2.13}$$

je funkcija onda D konformno na ograničenu domenu D_1', zbog

$$z \in D \Rightarrow |z-a| > r \Rightarrow \frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{r}. \tag{2.14}$$

Nakon što je prikladna za prevođenje $z \to z + a$ dobivamo odgovarajuću ekvivalentnu domenu koja sadrži 0 , koji nakon odgovarajuće kontrakcije je sadržan u jediničnom krugu E.



Slika 2.5: Skica drugog koraka dokaza

Mi smo sada u poziciji da počnemo s glavnim dijelom dokaza. Radi boljeg razumijevanja, umetnuli smo pomoćni rezultat.

3. korak

Lema 2.2.7. *Neka je D ekementarna domena,* $0 \in D \subset E$*. Ako je D strogo sadržana u E, onda postoji injektivna analitička funkcija* $\psi : D \to E$ *sa sljedećim svojstvima:*

- $\psi(0) = 0$, a
- $|\psi'(0)| > 1$.

Odgovarajući tvrdnja je lažna za D = E prema Schwarzovoj lemi 2.1.12.

Dokaz. Neka odaberemo točku $a \in E, a \notin D$. Po propoziciji 2.1.13, preslikavanje

$$\psi(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \tag{2.15}$$

preslikava jedinični krug konformno na sebe. Funkcija h nema nule u elementarnoj domeni D, a time i prema korolaru 2.1.8 postoji analitički korijen

$$H : D \to \mathbb{C} \;\; s \;\; H(z)^2 = h(z). \tag{2.16}$$

Zatim H dalje preslikava D injektivno na podskup jediničnog kruga E. U daljnjoj primjeni propozicije 2.1.13 pokazuje se da i funkciju

$$\psi(z) = \frac{H(z) - H(0)}{\overline{H(0)}H(z) - 1} \tag{2.17}$$

preslikava D injektivno u E. Očito, $\psi(0) = 0$. Moramo izračunati derivaciju. Jednostavan izračun vodi

$$\psi'(0) = \frac{H'(0)}{|H(0)|^2 - 1}. \tag{2.18}$$

Imamo

$$H^2(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \Rightarrow 2H(0) * H'(0) = |a|^2 - 1. \tag{2.19}$$

Nadalje,

$$|H(0)|^2 = |a| \Rightarrow |H(0)| = \sqrt{|a|}. \tag{2.20}$$

Konačno,

$$|\psi'(0)| = \frac{H'(0)}{|H(0)^2 - 1|} = \frac{||a|^2 - 1|}{2\sqrt{|a|}} * \frac{1}{||a| - 1|} = \frac{|a| + 1}{2 * \sqrt{|a|}} = 1 + \frac{(\sqrt{|a|} - 1)^2}{2 * \sqrt{|a|}} > 1. \tag{2.21}$$

□

Direktna posljedica leme je:

Neka je D elementarna domena, $0 \in D \subset E$. Pretpostavljamo da postoji među svim injektivnim, analitičkim preslikavanjima $\varphi : D \to E$ s $\varphi(0) = 0$ jedna s maksimalnom vrijednosti $|\varphi'(0)|$. Takva φ je surjekcija. Pogotovo, D i E su konformno ekvivalenti.

Dokaz. To je zato što za bilo koju ne-surjektivno preslikavanje $\varphi : D \to E$ s $\varphi(0) = 0$, primjenjujući upravo dokazanu lemu na $\varphi(D)$, možemo naći injektivnu, analitičku

$$\psi : \varphi(D) \to E, \psi(0) = 0, \tag{2.22}$$

s $|\psi'(0)| > 1$. Onda $|(\psi \circ \varphi)'(0)| > |\varphi'(0)|$. Stoga maksimalnost podrazumijeva surjektivnost. □

Time smo smanjili Riemannov teorem o preslikavanju na problem vrijednosti ekstrema.

Neka je D omeđena domena, koja sadrži 0. Postoji li među svim injektivnim analitičkim $\varphi : D \to E$, $\varphi(0) = 0$, preslikavanje s maksimalnom vrijednosti $|\varphi'(0)|$? U preostalim koracima ćemo pokazati da odgovor na ovaj problem vrijednosti ekstrema je uvijek pozitivan. Nema potrebe da se pretpostavi da D je elementarna domena.

4. korak Neka je D omeđena domena, $0 \in D$. Označimo sa M ne-prazan skup svih injektivnih analitičkih funkcija $\varphi : D \to E$, $\varphi(0) = 0$, i neka je

$$M := sup\{|\varphi'(0)|; \varphi \in M\}, gdjejeM = \infty \tag{2.23}$$

također dopušteno.

Mi odabiremo niz $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ funkcija iz M, takvo da

$$|\varphi_n'(0)| \to M \; za \; n \to \infty. \tag{2.24}$$

(M može biti ∞. Onda za bilo koje $C > 0$ vrijedi $|\varphi_n'(0)| > C$ za gotovo sve n)

Glavni problem. Mi ćemo pokazati:

- Niz (φ_n) ima lokalno uniformno konvergentan podniz.
- Limes φ ovog podniza također injektivan.
- $\varphi(D) \subset E$.

Tada limes φ je granica injektivne analitičke funkcije s svojstvom $|\varphi'(0)| = M$. Pogotovo, $0 < M < \infty$. U tom trenutku mi ćemo biti gotovi s dokazom.

5. korak Niz (φ_n) posjeduje lokalno uniformno konvergentan podniz. To je posljedica Montelovog teorema, koji će biti iskazan naknadno. Prvo dajemo dva preliminarna rezultata.

Lema 2.2.8. *Neka je fiksni $D \subset \mathbb{C}$ otvoren,$K \subset D$ kompaktan i $\mathbb{C} > 0$. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(D, \mathbb{C}, K) > 0$ sa slijedećim svojstvom:*

Ako $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija, koja je omeđena na D sa $\mathbb{C}$, odnosno $|f(z)| \leq \mathbb{C}$ za sve $z \in D$, tada za sve $a, z \in K$:

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon, \; akoje \, |z - a| < \delta \tag{2.25}$$

Primjedba. U slučaju $K = \{a\}$, lema se može preformulirati u standardnoj terminologiji kao:

Skup F svih analitičkih funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ s $|f(z)| \leq \mathbb{C}$ za sve $z \in D$ je ekvikontinuirana u a.

Budući da a varira u lemi u kompaktnom skupu, možemo govoriti o lokalnoj uniformnoj ekvikontinuiranosti.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je K kompaktni krug, tj. postoje z_0 i $r > 0$ takvi da je

$$K := \overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\} \subset D. \tag{2.26}$$

Mi osim toga pretpostavljamo da zatvoreni krug dvostrukog radijusa $\overline{U_{2r}}(z_0)$ i dalje se nalazi u D. Cauchyeva integralna formula 2.1.9 daje tada za bilo koji $z, a \in K$:

$$|f(z) - f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi * i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = 2r} (\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \right| = \tag{2.27}$$

$$= \frac{|z - a|}{2\pi} \left| \int\limits_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - a)} d\zeta \right| \leq \frac{|z - a|}{2\pi} * 4\pi r * \frac{C}{r^2} = \frac{2C}{r} |z - a| \tag{2.28}$$

Za dano $\epsilon > 0$ odabiremo $\delta > 0$ s $\delta < min\{r, \frac{r}{2C}\epsilon\}$, tako da imamo $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ za sve $a, z \in K$ s $|z - a| < \delta$.

Neka sada $K \subset D$ proizvoljan kompaktan skup. Tada postoji broj $r > 0$ sa svojstvom: Za bilo koji a u K, zatvoreni krug $U_r(a)$ radijusa r sa središtem u a je potpuno sadržana u D. □

Gore navedeni broj r ponekad se naziva Lebesgue broj za kompaktan skup $K \subset D$. Postojanje tog broja je standardna primjena kod pojma kompaktnosti. Za bilo koji $a \in K$, postoji $r(a) > 0$, takav da krug dvostrukog polumjera $2r(a)$ se nalazi u D. Primjenu kompaktnosti nalazimo u konačno mnogo $a_1, ..., a_n \in K$ s $K \subset U_{r(a_1)}(a_1) \cup \cdots \cup U_{r(a_n)}(a_n)$. Najmanji od brojeva $r_{a_1}, ..., r_{a_n}$ je tada Lebesgue broj.

Od postojanja Lebesgueovog broja lako slijedi da K može biti pokriven s konačno mnogo krugova $U_{r(a)}, a \in K$ s $\overline{U_{2r}(a)} \subset D$. Lema je sada svedena na prethodni poseban slučaj:

Lema 2.2.9. *Neka je*

$$f_1, f_2, f_3, \cdots : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \text{ otvoren}, \tag{2.29}$$

niz analitičkih funkcija koji je omeđen (tj. $|f_n(z)| \leq C$ za sve $z \in D$ i $n \in \mathbb{N}$) . Ako niz (f_n) konvergira po točkama u gust podskup $S \subset D$, onda konvergira lokalno uniformno u D.

Dokaz. Pokazali smo da je (f_n) lokalno uniforman Cauchyev niz, odnosno za svaki kompaktan skup $K \subset D$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n > 0$, tako da je za sve $m, n \neq N$ i svi $z \in K$

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon. \tag{2.30}$$

To je dovoljno da se ograniči na zatvorene krugove K. U ovom slučaju K je zatvaranje njezine unutrašnjosti, a $K \cap S$ je gust u K.

To je jednostavno za prikaz, a dobro je poznato u realnoj analizi, da bilo koji lokalno uniformni Cauchyjev niz je lokalno uniformno konvergentan.

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Mi tada biramo broj δ kao u lemi 2.2.8 Kompaktnost od K podrazumijeva postojanje konačno mnogo točaka $a_1, ..., a_l \in S \cap K$ s

$$K \subset \bigcup_{(j=1)^l} U_\delta(a_j). \tag{2.31}$$

(Za to netko odabere dovoljno mali Lebesgue broj $r > 0$, a pokriva K sa krugovima $U_{r/2}(a), a \in K$. Jasno, K je tada pokriven krugovima $U_{3r/4}(a), a \in S \cap K$.) Sada, neka je z proizvoljna točka u K. Tada postoji točka a_j sa svojstvom $|z - a_j| < \delta$. Nejednakost trokuta daje

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(z) - f_n(a_j)|. \tag{2.32}$$

Prvi i treći uvjeti iz leme 2.2.8 je manji od ϵ, srednji uvjet je također pod kontrolom ϵ za dovoljno velik m, n, točnije za sve $m, n \geq N$ s odgovarajućim N koja radi za sve konačno mnogo točaka a_j. □

Teorem 2.2.10. ***(Montelov teorem)*** *Neka je*

$$f_1, f_2, f_3, \cdots : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \text{ otvoren}, \tag{2.33}$$

omeđen niz analitičkih funkcija, odnosno postoji konstanta $C > 0$ s uvjetom svojstvom $|f_n(z)| \leq \mathbb{C}$ za sve $z \in D$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji podniz $f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, f_{\nu 3}, \ldots$, koji konvergira lokalno uniformno.

6. korak ϕ je injektivna. Podsjetimo kako smo konstruirali φ kao lokalno uniformnu granicu funkcija u familiji M svih injektivnih analitičkih funkcija sa $D \to E$ s 0 kao fiksnom točkom. Ova granica rješava naš problem ekstrema, ako ono također pripada istoj obitelji. Moramo dokazati injekciju od φ . To slijedi iz Hurwitzovog teorema2.1.18:

Neka je $f_1, f_2, f_3, ...$ niz injektivnih analitičkih funkcija na domeni $D \subset \mathbb{C}$, koji konvergira lokalno uniformno . Limes je tada ili konstantna ili injekcija.

Dakle, moramo isključiti slučaj konstantnog limesa. No, za sve funkcije neprazne klase M, derivacija u nuli ne nestane, pa ekstremni uvjeti $\varphi'(0)$ ne nestanu.

7. korak (završni korak) $\varphi(D) \subset E$. Mi samo znamo , u ovom trenutku , da slika od φ sadrži zatvarač od E. Ali princip maksimalnog modula, φ će biti konstantna, ako je točka od ∂E u njegovoj slici, To zaključuje dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju 2.2.6 .

□

Bibliografija

Sažetak

U ovom radu dokazujemo Riemannov teorem koji dokazuje da svaka elementarna domena različita od skupa kompleksnih brojeva je konformno ekvivalenta jediničnom krugu.

Summary

In this thesis, we prove Riemann's theorem proving that each elementary domain is different from the set of complex numbers is conformally equivalent unit disk.

Životopis

Rođen sam 13. prosinca 1986. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnu i srednju školu pohađao sam u Zagrebu, a 2005. godine upisao sam se na Prirodoslovno matematički fakultet - Matematički odjel. Student sam diplomskog studija Matematička statistika.