

# Feuerbachova kružnica i Simsonov pravac

---

**Mikulić, Magdalena**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:280669>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Magdalena Mikulić

**FEUERBACHOVA KRUŽNICA I**  
**SIMSONOV PRAVAC**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se svojoj mentorici prof. dr. sc. D. Ilišević na razumijevanju, strpljenju i motivaciji.*

# Sadržaj

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Sadržaj</b>                                                              | <b>iv</b> |
| <b>Uvod</b>                                                                 | <b>1</b>  |
| <b>1 Kružnica devet točaka (Feuerbachova kružnica) i Feuerbachov teorem</b> | <b>2</b>  |
| 1.1 Kružnica devet točaka . . . . .                                         | 2         |
| 1.2 Feuerbachov teorem . . . . .                                            | 17        |
| 1.3 Konstruktivni zadaci . . . . .                                          | 38        |
| <b>2 Simsonov pravac</b>                                                    | <b>41</b> |
| 2.1 Svojstva Simsonovog pravca . . . . .                                    | 41        |
| 2.2 Veze Simsonovog pravca i kružnice devet točaka . . . . .                | 50        |
| <b>Bibliografija</b>                                                        | <b>55</b> |

# Uvod

Iako je trokut najjednostavniji lik u ravnini, svejedno je u povijesti bio predmet brojnih istraživanja i proučavanja te su danas poznata brojna svojstva tog geometrijskog lika. Kada govorimo o trokutu, ne možemo ne spomenuti najvažnije njemu pridružene kružnice: opisane, upisane i pripisane kružnice. U ovom radu ćemo se baviti još jednom značajnom trokutu pridruženom kružnicom i njenim svojstvima, kao i jednim osobitim pravcem trokuta koji je s njom u bliskoj vezi. Pritom ćemo iskazati i dokazati neke od najljepših teorema geometrije trokuta.

Ovaj diplomski rad sastoji se od dva poglavlja. U prvom poglavlju proučavamo kružnicu devet točaka (Feuerbachovu kružnicu) i Feuerbachov teorem. Prvo ćemo dokazati da devet točaka svakog trokuta (polovišta stranica, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi ortocentar trokuta) leže na istoj kružnici, a potom ćemo proučavati neka svojstva te kružnice. Jedno od svojstava kružnice devet točaka je iskazano Feuerbachovim teoremom koji tvrdi da kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i pripisane kružnice.

U drugom poglavlju proučavat ćemo svojstva Simsonovog pravca na kojem leže nožišta okomica spuštenih iz bilo koje točke opisane kružnice zadanog trokuta na pripadne stranice. Zatim ćemo proučiti veze između Simsonovog pravca i Feuerbachove kružnice.

# Poglavlje 1

## Kružnica devet točaka (Feuerbachova kružnica) i Feuerbachov teorem

### 1.1 Kružnica devet točaka

Proučavat ćemo kružnicu devet točaka, koja se u literaturi još pojavljuje pod nazivima Eulerova<sup>1</sup> kružnica ili Feuerbachova<sup>2</sup> kružnica. Teorem o kružnici devet točaka objavio je Leonhard Euler 1765. godine.

**Teorem 1.1.1 (o kružnici devet točaka).** *Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $D, E, F$  nožišta visina, točke  $A', B', C'$  polovišta stranica te točke  $M, N, P$  polovišta dužina  $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ , gdje je  $H$  ortocentar. Točke  $D, E, F, A', B', C', M, N, P$  leže na jednoj kružnici  $k_9$  koju nazivamo kružnicom devet točaka. Središte  $O_9$  kružnice  $k_9$  je polovište dužine  $\overline{HO}$ , gdje je  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , a njen polumjer  $R_9$  jednak je polovini polumjera  $R$  kružnice opisane trokutu  $ABC$ .*

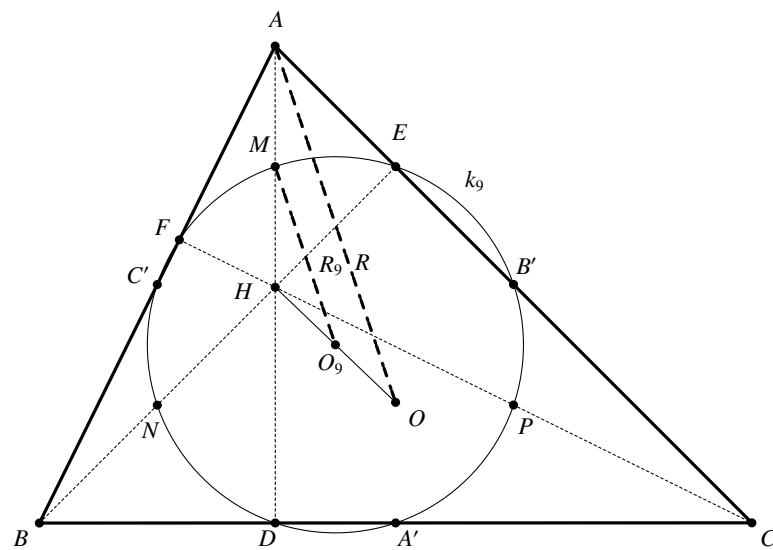
Polovišta dužina  $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ , tj. točke  $M, N, P$ , nazivaju se Eulerovim točkama.

Slika 1.1 prikazuje šiljastokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka, slika 1.2 tupokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka, a slika 1.3 pravokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka. Uočimo da se u pravokutnom trokutu neke od tih devet točaka podudaraju: ako je  $ABC$  pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu  $A$ , tada se podudaraju točke  $C'$  i  $N$ , također i točke  $B'$  i  $P$ , a točke  $E, F$  i  $M$  se podudaraju s vrhom pravog kuta, tj. s vrhom  $A$ .

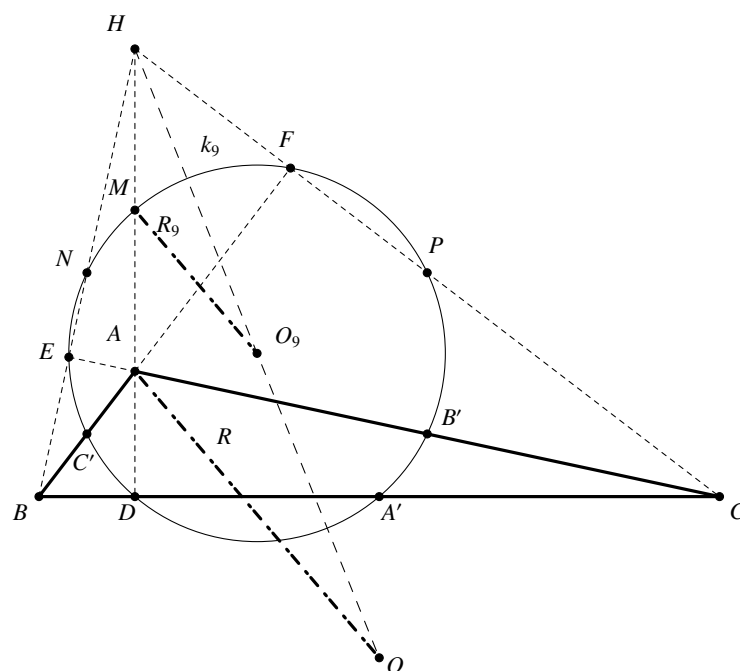
---

<sup>1</sup>Leonhard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom

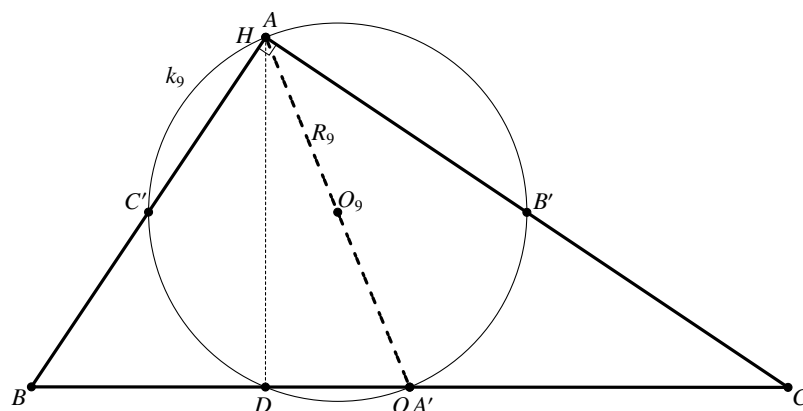
<sup>2</sup>Karl Wilhelm Feuerbach (1800. – 1834.), njemački matematičar



Slika 1.1: Šiljastokutan trokut i kružnica devet točaka



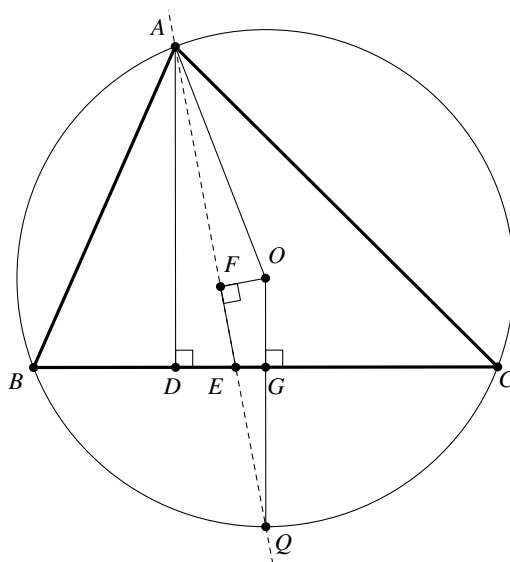
Slika 1.2: Tupokutan trokut i kružnica devet točaka



Slika 1.3: Pravokutan trokut i kružnica devet točaka

Za dokaz teorema o kružnici devet točaka bit će nam potrebne sljedeće dvije leme.

**Lema 1.1.2.** *Neka je trokutu  $ABC$  točka  $D$  nožište visine iz vrha  $A$ , a  $O$  središte tom trokutu opisane kružnice. Ako je  $\overline{OQ}$  onaj polumjer kružnice koji je okomit na  $\overline{BC}$ , tada točka  $Q$  leži na simetrali kuta  $\angle DAO$ . Simetrala kuta  $\angle DAO$  je ujedno i simetrala kuta  $\angle BAC$ .*



Slika 1.4: Slika uz dokaz leme 1.1.2

*Dokaz.* Želimo dokazati da je pravac  $AQ$  simetrala kuta  $\angle DAO$ . Neka je točka  $F$  nožište okomice iz vrha  $O$  na pravac  $AQ$ . Nadalje, neka je točka  $E$  presjek pravca  $AQ$  i stranice

$\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  te neka je točka  $G$  presjek pravca  $OQ$  i stranice  $\overline{BC}$ . Promotrimo sada četverokut  $OFEG$  na slici 1.4. Kako je  $\sphericalangle OFE = 90^\circ$  i  $\sphericalangle EGO = 90^\circ$ , to je

$$\sphericalangle FOG = 180^\circ - \sphericalangle GEF. \quad (1.1)$$

Promotrimo sada trokute  $FOQ$  i  $DEA$ . Kutovi  $\sphericalangle DEA$  i  $\sphericalangle GEF$  su suplementarni, pa je

$$\sphericalangle DEA = 180^\circ - \sphericalangle GEF. \quad (1.2)$$

Iz jednakosti (1.1) i (1.2) slijedi

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle FOG = \sphericalangle FOQ.$$

Također vrijedi:

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle OFQ = 90^\circ.$$

Dva kuta trokuta  $DEA$  su sukladna kutovima trokuta  $FOQ$ , pa je i

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle FQO. \quad (1.3)$$

Nadalje, trokut  $AOQ$  je jednakokračan trokut jer su mu stranice  $\overline{AO}$  i  $\overline{OQ}$  polumjeri kružnice opisane trokutu  $ABC$ , pa su kutovi uz osnovicu tog trokuta sukladni, tj.

$$\sphericalangle OAQ = \sphericalangle AQO = \sphericalangle FQO. \quad (1.4)$$

Iz jednakosti (1.3) i (1.4) slijedi

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle OAQ,$$

a kako točka  $Q$  leži na kraku  $AE$  kuta  $\sphericalangle EAD$ , to je

$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle OAQ,$$

tj. točka  $Q$  leži na simetrali kuta  $\sphericalangle DAO$ . Polumjer  $\overline{OQ}$  leži na simetrali stranice  $\overline{BC}$ , pa je

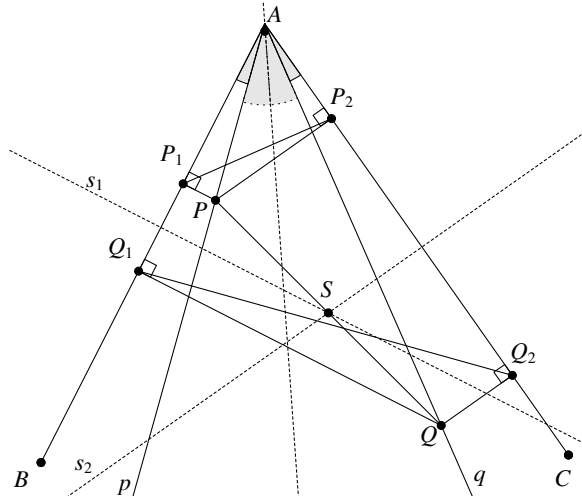
$$|BQ| = |QC|.$$

Uz to je i  $|OB| = |OC|$ , pa su trokuti  $OBQ$  i  $OCQ$  sukladni prema S-S-S teoremu o sukladnosti. Slijedi  $\sphericalangle BOQ = \sphericalangle COQ$ . Primjenom teorema o obodnom i središnjem kutu zaključujemo da vrijedi

$$\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAQ.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi da točka  $Q$  leži na simetrali kuta  $\sphericalangle BAC$  čime je lema dokazana.  $\square$

**Lema 1.1.3.** *Neka je dan kut  $\angle BAC$  te neka su  $p$  i  $q$  polupravci s početkom u vrhu  $A$  koji sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove. Neka je  $P$  točka na polupravcu  $p$ , a  $Q$  točka na polupravcu  $q$ . Tada su nožišta  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  okomica spuštenih iz točaka  $P$  i  $Q$  na krakove danog kuta koncikličke točke. Središte kružnice koju te točke određuju je polovište dužine  $\overline{PQ}$ .*



Slika 1.5: Slika uz dokaz leme 1.1.3

*Dokaz.* Promotrimo četverokute  $AP_1PP_2$  i  $AQ_1QQ_2$  na slici 1.5. Zbog pravih kutova, zbroj nasuprotnih kutova u oba četverokuta jednak je  $180^\circ$ , pa su četverokuti  $AP_1PP_2$  i  $AQ_1QQ_2$  tetivni i kut  $\angle BAC$  im je zajednički. Promotrimo trokute  $AP_1P$  i  $AQ_2Q$ . Kako je  $\angle PP_1A = \angle QQ_2A = 90^\circ$  i  $\angle P_1AP = \angle Q_2AQ$  jer pravci  $p$  i  $q$  sa simetralom kuta  $\angle ABC$  čine sukladne kutove, pa tada čine sukladne kutove i s krakovima kuta  $\angle ABC$ , to je i  $\angle P_1PA = \angle Q_2QA$ . Zaključujemo da su trokuti  $AP_1P$  i  $AQ_2Q$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz sličnosti danih trokuta slijedi

$$\frac{|AP_1|}{|AQ_2|} = \frac{|AP|}{|AQ|}. \quad (1.5)$$

Analogno se dokaže da su trokuti  $AP_2P$  i  $AQ_1Q$  sukladni iz čega slijedi

$$\frac{|AP_2|}{|AQ_1|} = \frac{|AP|}{|AQ|}. \quad (1.6)$$

Iz jednakosti (1.5) i (1.6) slijedi

$$|AP_1| \cdot |AQ_1| = |AP_2| \cdot |AQ_2|. \quad (1.7)$$

Neka je  $k$  kružnica određena točkama  $P_1, P_2, Q_1$ . Potencija točke  $A$  obzirom na kružnicu  $k$  je  $|AP_1| \cdot |AQ_1|$ . Ako je  $R$  točka različita od  $Q_2$  u kojoj pravac  $AP_2$  siječe kružnicu  $k$ , tada je

$$|AP_1| \cdot |AQ_1| = |AP_2| \cdot |AR|. \quad (1.8)$$

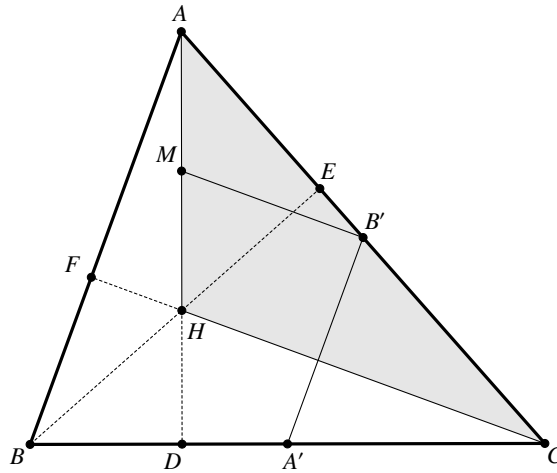
Iz jednakosti (1.7) i (1.8) slijedi da je  $|AR| = |AQ_2|$ , a kako su točke  $A, R, Q$  kolinearne, to se točke  $R$  i  $Q_2$  podudaraju, pa točka  $Q_2$  leži na kružnici  $k$ . Dakle, točke  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  su koncikličke.

Dužine  $\overline{P_1Q_1}$  i  $\overline{P_2Q_2}$  su tetive kružnice  $k$ , pa je središte te kružnice sjecište simetrala tih tetiva. Na simetrali  $s_1$  tetive  $\overline{P_1Q_1}$  leži srednjica trapeza  $Q_1QPP_1$ , a na simetrali  $s_2$  tetive  $\overline{P_2Q_2}$  leži srednjica trapeza  $QQ_2P_2P$ . Stranica  $\overline{PQ}$  je zajednička tim trapezima, pa će se pravci na kojima leže srednjice tih trapeza (a ti pravci su simetrale tetiva  $\overline{P_1Q_1}$  i  $\overline{P_2Q_2}$ ) sjeći u polovištu te stranice. Dakle, središte kružnice  $k$  je polovište  $S$  dužine  $\overline{PQ}$ .  $\square$

Sada smo spremni dokazati teorem 1.1.1 o kružnici devet točaka.

*Dokaz.* Ortocentar  $H$  trokuta  $ABC$  nalazi se na visini iz vrha  $A$ . Prema lemi 1.1.2 pravci  $AH$  i  $AO$  sa simetralom kuta  $\angle BAC$  čine sukladne kutove. Točke  $E, F, B', C'$  su nožišta okomica iz točaka  $H$  i  $O$  na stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ , pa prema lemi 1.1.3 leže na istoj kružnici  $k_1$  čije se središte nalazi na polovištu dužine  $\overline{HO}$ . Analogno, ortocentar  $H$  leži i na visini iz vrha  $B$ , pa prema lemmama 1.1.2 i 1.1.3 točke  $A', D, F, C'$  leže na istoj kružnici  $k_2$  čije se središte nalazi na polovištu dužine  $\overline{HO}$ . Točke  $C'$  i  $F$  leže na  $k_1$  i  $k_2$ , a središte im je ista točka, pa su kružnice  $k_1$  i  $k_2$  iste kružnice, tj. točke  $A', B', C', D, E, F$  leže na istoj kružnici čije je središte polovište dužine  $\overline{HO}$ , a tu kružnicu ćemo označiti sa  $k_9$ .

Preostaje nam dokazati da točke  $M, N$  i  $P$  leže na kružnici  $k_9$ . Promotrimo trokut  $AHC$  na slici 1.6.



Slika 1.6: Trokut  $AHC$

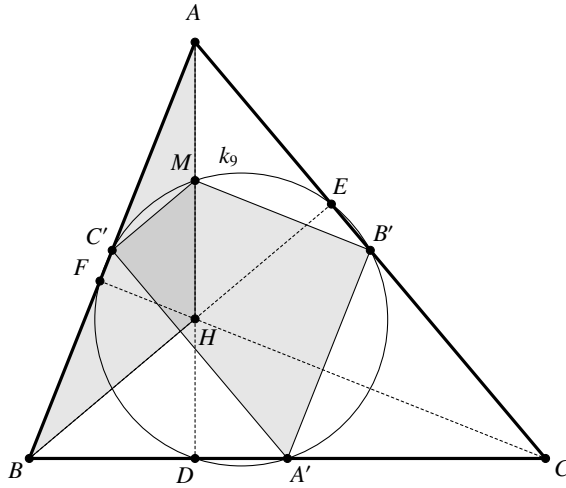
Točka  $M$  je polovište dužine  $\overline{AH}$ , a točka  $B$  polovište dužine  $\overline{AC}$ , pa je  $\overline{MB'}$  srednjica trokuta  $AHC$  iz čega slijedi da je pravac  $B'M$  paralelan pravcu  $HC$ , odnosno  $FC$ . Kako je  $\overline{A'B'}$  srednjica trokuta  $ABC$ , to su pravci  $A'B'$  i  $AB$  paralelni. Kako je  $\overline{FC}$  visina trokuta  $ABC$  iz vrha  $C$ , to su pravci  $AB$  i  $FC$  međusobno okomiti, a kako su pravci  $B'M$  i  $FC$  paralelni te  $A'B'$  i  $AB$  paralelni, zaključujemo da su pravci  $A'B'$  i  $B'M$  međusobno okomiti. Dakle,

$$\sphericalangle MB'A' = 90^\circ. \quad (1.9)$$

Analogno iz trokuta  $ABH$  (slika 1.7) zaključujemo da je

$$\sphericalangle MC'A' = 90^\circ. \quad (1.10)$$

Iz jednakosti (1.9) i (1.10) slijedi da je  $A'B'MC'$  tetivni četverokut (slika 1.7), pa točka  $M$



Slika 1.7: Trokut  $ABH$  i četverokut  $A'B'MC'$

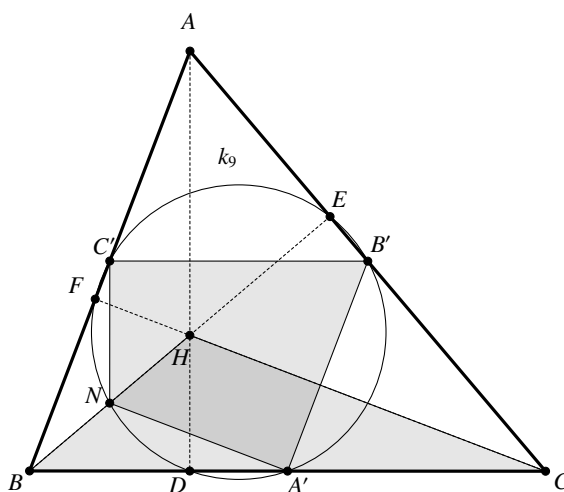
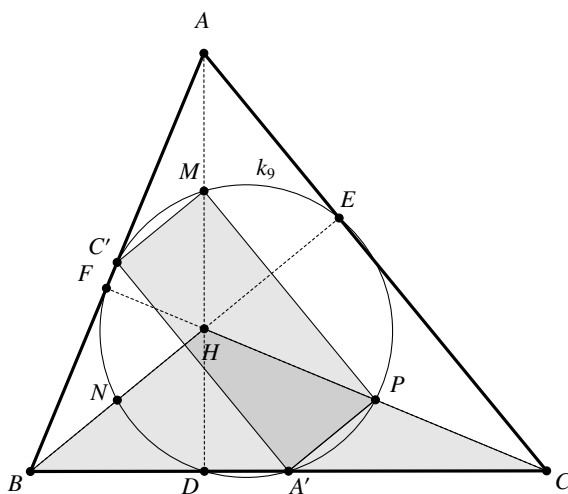
leži na kružnici koja je određena točkama  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ , tj. točka  $M$  leži na kružnici  $k_9$ .

Preostaje nam još dokazati da točke  $N$  i  $P$  leže na kružnici  $k_9$ . Promotrimo četverokute  $A'B'C'N$  i  $A'PMC'$  na slikama 1.8 i 1.9. Analognim postupcima kao za točku  $M$  dokaže se da točke  $N$  i  $P$  leže na kružnici  $k_9$ .

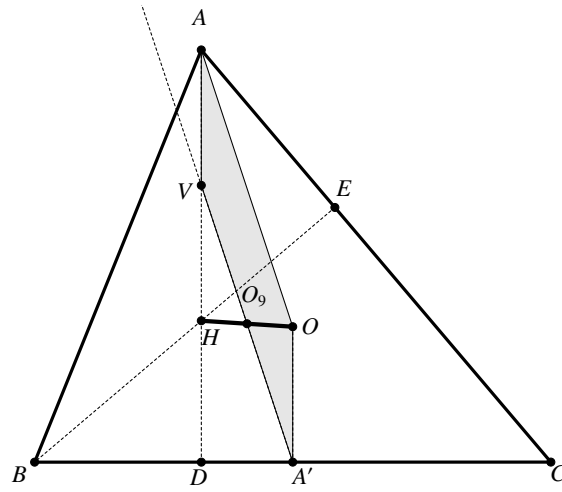
Time smo dokazali da točke  $D, E, F, A', B', C', M, N, P$  leže na istoj kružnici  $k_9$  čije je središte  $O_9$  polovište dužine  $\overline{HO}$ .

Sada dokažimo da je polumjer kružnice  $k_9$  jednak polovini polumjera kružnice opisane trokutu  $ABC$ , tj. da je

$$R_9 = \frac{1}{2}R.$$


 Slika 1.8: Trokut  $BHC$  i četverokut  $A'B'C'N$ 

 Slika 1.9: Trokut  $BHC$  i četverokut  $A'PMC'$ 

Pravac  $\overline{A'O_9}$  siječe visinu  $\overline{AD}$  u točki koju ćemo označiti sa  $V$  (slika 1.10). Kako je  $|HO_9| = |OO_9|$ ,  $\angle OO_9A' = \angle HO_9V$  jer su to vršni kutovi,  $\angle O_9VH = \angle O_9A'O$  jer su to kutovi uz transversalu paralelnih pravaca  $AD$  i  $OA'$  (oba pravca su okomita na pravac  $BC$ ), to su trokuti  $VHO_9$  i  $A'OO_9$  sukladni prema teoremu K-S-K o sukladnosti. Iz sukladnosti slijedi da je  $|VO_9| = |A'O_9|$ , pa točka  $V$  leži na kružnici  $k_9$ . Kako točka  $V$  uz to leži i na visini iz vrha  $A$ , to se ona podudara s točkom  $M$ . Znači da je  $V$  polovište dužine  $\overline{HA}$  iz čega

Slika 1.10: Paralelogram  $AVA'O$ 

slijedi da je  $|AV| = |VH|$ . Četverokut  $AVA'O$  je paralelogram, jer je  $|AV| = |VH| = |A'O|$  i jer su dužine  $\overline{AV}$  i  $\overline{OA'}$  paralelne (obje leže na okomicama na stranicu  $\overline{BC}$ ). Iz toga proizlazi da je  $|VA'| = |AO| = R$ , a kako je  $\overline{VA'}$  promjer kružnice  $k_9$ , to je  $|VA'| = 2R_9$ , iz čega slijedi

$$R_9 = \frac{1}{2}R.$$

□

**Napomena 1.1.4.** Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A', B', C'$  polovišta stranica,  $O$  središte njemu opisane kružnice, a  $H$  ortocentar. Tada je

$$|AH| = 2|OA'|,$$

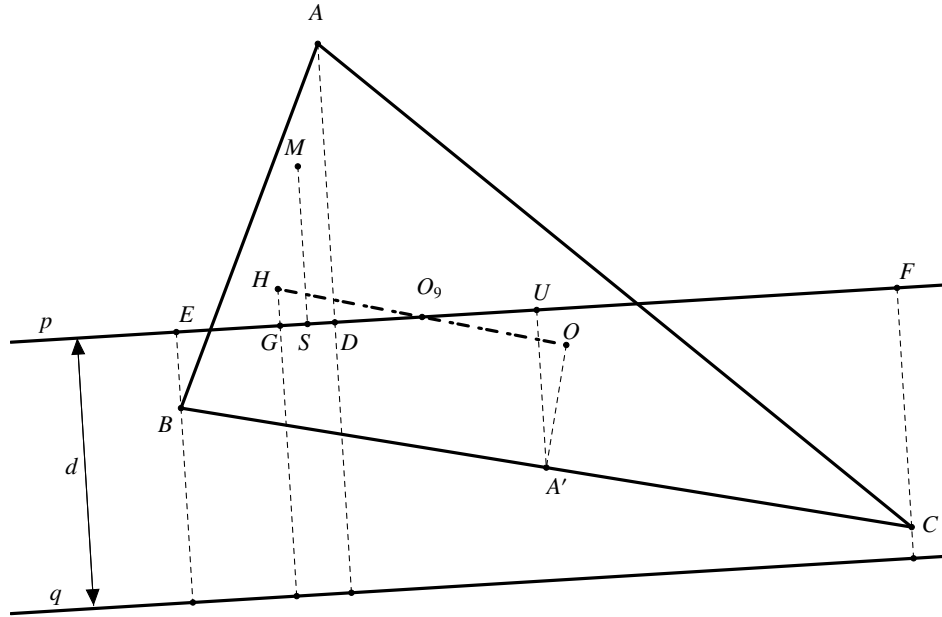
što smo dokazali na kraju dokaza teorema 1.1.1 (vidite sliku 1.10). Analogno bi se dokazalo i da je

$$|BH| = 2|OB'| \quad \text{i} \quad |CH| = 2|OC'|.$$

**Teorem 1.1.5.** Neka je  $p$  označen bilo koji pravac koji prolazi središtem  $O_9$  kružnice devet točaka trokuta  $ABC$ . Neka su  $d_1, d_2, d_3$  udaljenosti vrhova trokuta od pravca  $p$ , a  $d_4$  udaljenost ortocentra  $H$  od pravca  $p$ . Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = 0,$$

pri čemu su  $k_1, k_2, k_3, k_4$  prirodni brojevi koji su iste parnosti za točke koje leže s iste strane pravca  $p$ , a suprotne za točke koje leže sa suprotnih strana pravca  $p$ .



Slika 1.11: Slika uz dokaz teorema 1.1.5

*Dokaz.* Neka su točke  $D, E, F, G$  redom nožišta okomica iz točaka  $A, B, C, H$  na pravac  $p$ . Tada su  $d_1 = |AD|$ ,  $d_2 = |BE|$ ,  $d_3 = |CF|$ ,  $d_4 = |HG|$  udaljenosti navedenih točaka od pravca  $p$ . Promotrit ćemo dva slučaja, jedan u kojem se po dvije točke nalaze s različitih strana pravca  $p$  te onaj u kojem se tri točke nalaze s jedne strane, a četvrta točka s druge strane pravca  $p$ .

Promotrimo prvi slučaj. Neka je  $S$  nožište okomice iz polovišta  $M$  dužine  $\overline{AH}$  na pravac  $p$ , a  $U$  nožište okomice iz polovišta  $A'$  stranice  $\overline{BC}$  od pravca  $p$ . Promotrimo sliku 1.11. Pravci na kojima leže dužine  $\overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  su okomiti na pravac  $p$ , pa su međusobno paralelni iz čega slijedi da je četverokut  $BCFE$  trapez. Točka  $A'$  je polovište stranice  $\overline{BC}$ , pravci  $A'U$  i  $p$  su međusobno okomiti, pa je dužina  $\overline{A'U}$  srednjica trapeza  $BCFE$ . Tada vrijedi

$$|A'U| = \frac{|BE| + |CF|}{2} = \frac{d_2 + d_3}{2}. \quad (1.11)$$

Prema teoremu 1.1.1 o kružnici devet točaka, točke  $A'$  i  $M$  leže na toj kružnici, pa je  $|MO_9| = |A'O_9|$ ,  $\angle SO_9M = \angle UO_9A'$  jer su to vršni kutovi i  $\angle MSO_9 = \angle A'UO_9 = 90^\circ$  pa su trokuti  $MO_9S$  i  $A'O_9U$  sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti, iz čega slijedi

$$|MS| = |A'U|. \quad (1.12)$$

Za četverokut  $HGDA$  se analogno kao za četverokut  $BCFE$  dokaže da je trapez, pa je dužina  $\overline{MS}$  srednjica tog trapeza te tada vrijedi

$$|MS| = \frac{|AD| + |HG|}{2} = \frac{d_1 + d_4}{2}. \quad (1.13)$$

Sada iz jednakosti (1.11), (1.12) i (1.13) slijedi

$$d_2 + d_3 = d_1 + d_4,$$

odnosno

$$d_1 + d_4 - d_2 - d_3 = 0.$$

Točke  $A$  i  $H$  se nalaze s jedne strane pravca  $p$ , a točke  $B$  i  $C$  sa suprotne strane, pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = d_1 - d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

Promotrimo sada drugi slučaj. Neka je  $P_1$  nožište okomice iz polovišta  $P$  dužine  $\overline{CH}$  na pravac  $p$  te neka je  $V$  nožište okomice iz polovišta  $C'$  stranice  $\overline{AB}$  na pravac  $p$ . Promotrimo sliku 1.12. Pravci  $BE$  i  $AD$  su okomiti na pravac  $p$ , pa su međusobno paralelni iz čega slijedi da je četverokut  $BEDA$  trapez. Točka  $C'$  je polovište stranice  $\overline{AB}$ , pravci  $C'V$  i  $p$  su međusobno okomiti, pa je dužina  $C'V$  srednjica trapeza  $BEDA$ . Tada vrijedi

$$|C'V| = \frac{|AD| + |BE|}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (1.14)$$

Prema teoremu 1.1.1 o kružnici devet točaka, točke  $C'$  i  $P$  leže na toj kružnici, pa je  $|PO_9| = |C'O_9|$ ,  $\angle VO_9C' = \angle P_1O_9P$  jer su to vršni kutovi i  $\angle CVO_9 = \angle PP_1O_9 = 90^\circ$  pa su trokuti  $C'VO_9$  i  $PP_1O_9$  sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti, iz čega slijedi

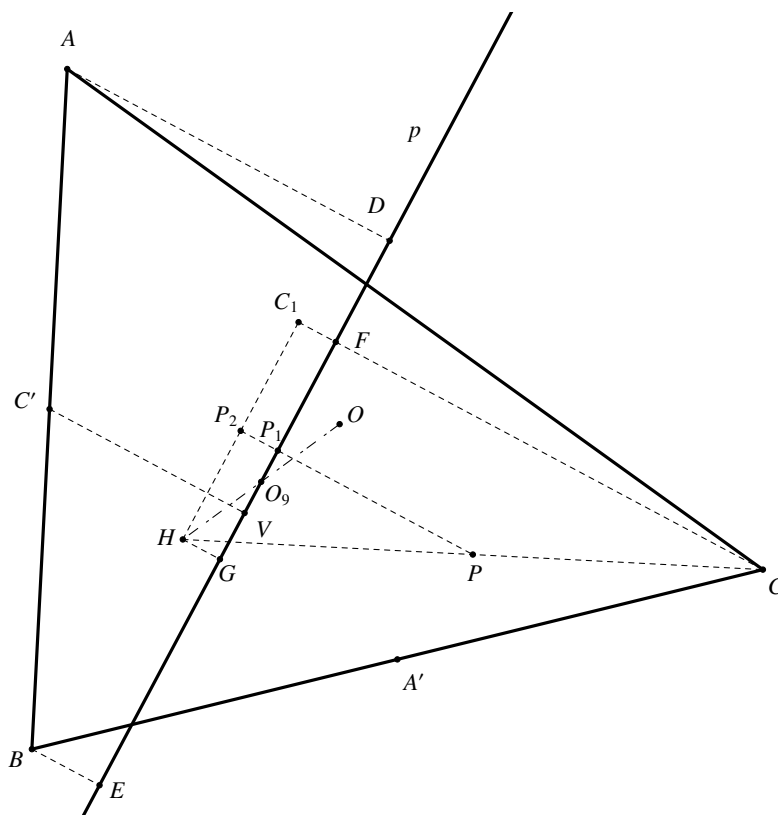
$$|C'V| = |P_1P|. \quad (1.15)$$

Povucimo sada točkom  $H$  paralelu s pravcem  $p$ . Ta paralela siječe pravac  $CF$  u točki koju označimo sa  $C_1$ . Uočavamo da je  $HGFC_1$  pravokutnik pa je

$$|C_1F| = |HG|. \quad (1.16)$$

Neka je točka  $P_2$  točka u kojoj pravac  $P_1P$  siječe pravac  $C_1H$ . Promotrimo sada trokut  $C_1CH$ . Kako je  $P$  polovište stranice  $\overline{HC}$  i kako su pravci  $P_2P$  i  $C_1C$  paralelni to je  $\overline{P_2P}$  srednjica trokuta  $C_1CH$  te stoga vrijedi

$$|P_2P| = \frac{1}{2}|C_1C|. \quad (1.17)$$



Slika 1.12: Slika uz dokaz teorema 1.1.5

Proučavajući sliku (1.12) i uzimajući u obzir (1.16) i (1.17), uočavamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} |P_1P| &= |P_2P| - |P_2P_1| = \frac{|C_1C|}{2} - |C_1F| \\ &= \frac{|HG| + |FC|}{2} - |HG| = \frac{|FC| - |HG|}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$|P_1P| = \frac{d_3 - d_4}{2}. \quad (1.18)$$

Sada iz jednakosti (1.14), (1.15) i (1.18) slijedi

$$d_1 + d_2 = d_3 - d_4$$

odnosno

$$d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

Točke  $A, B, H$  se nalaze s jedne strane pravca  $p$ , a točka  $C$  sa suprotne strane, pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

□

**Teorem 1.1.6.** *Zbroj udaljenosti vrhova danog trokuta  $ABC$  i njegova ortocentra  $H$  do bilo kojeg pravca  $q$  ravnine jednaka je četverostrukoj udaljenosti središta  $O_9$  kružnice devet točaka  $k_9$  do tog pravca  $q$ .*

*Dokaz.* Označimo sa  $p$  pravac koji je paralelan s pravcem  $q$  i prolazi točkom  $O_9$  (vidite slike 1.11 i 1.12). Označimo sa  $d_1, d_2, d_3$  udaljenosti vrhova danog trokuta od pravca  $p$ , sa  $d'_1, d'_2, d'_3$  njihove udaljenosti od pravca  $q$ , sa  $d_4$  udaljenost ortocentra od pravca  $p$  i sa  $d'_4$  udaljenost ortocentra od pravca  $q$ . Sa  $d$  ćemo označiti udaljenost pravaca  $p$  i  $q$ , tj. udaljenost pravca  $q$  od točke  $O_9$ . Uočimo da je

$$d'_i = (-1)^{k_i} d_i + d, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

pri čemu su  $k_1, k_2, k_3, k_4$  prirodni brojevi iste parnosti za točke koje leže s iste strane pravca  $p$ , a suprotne za točke koje leže sa suprotnih strana pravca  $p$ . Zbrajanjem se dobije

$$\sum_{i=1}^4 d'_i = \sum_{i=1}^4 ((-1)^{k_i} d_i + d) = \sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i + 4d = 4d$$

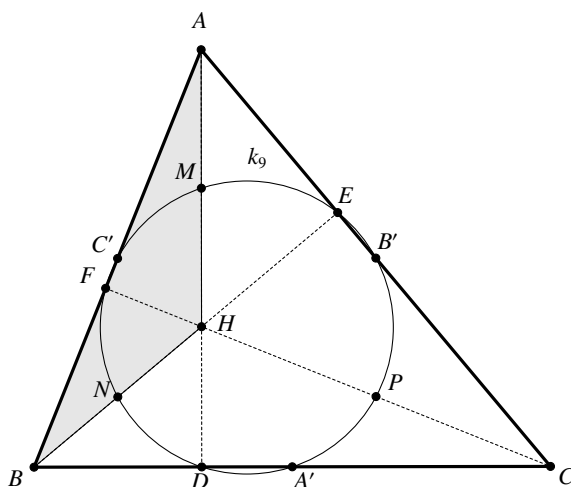
jer je

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = 0$$

prema prethodnom teoremu. □

**Teorem 1.1.7.** *Ako  $ABC$  nije pravokutan trokut, tada četiri trokuta  $ABC, ABH, BCH, ACH$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ , imaju zajedničku kružnicu devet točaka. Kružnice opisane tim trokutima imaju jednak polumjer  $R$ .*

*Dokaz.* Neka je  $k_9$  kružnica devet točaka trokuta  $ABC$ . Na njoj leže nožišta visina (točka  $D$  je nožište visine iz vrha  $A$ , točka  $E$  iz vrha  $B$ , a točka  $F$  iz vrha  $C$ ), polovišta stranica (točka  $A'$  je polovište dužine  $\overline{BC}$ , točka  $B'$  dužine  $\overline{AC}$ , a točka  $C'$  dužine  $\overline{AB}$ ) i polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta (točka  $M$  je polovište dužine  $\overline{HA}$ , točka  $N$  dužine  $\overline{HB}$ , a točka  $P$  dužine  $\overline{HC}$ ). Promotrimo prvo trokut  $ABH$  (slika 1.13).

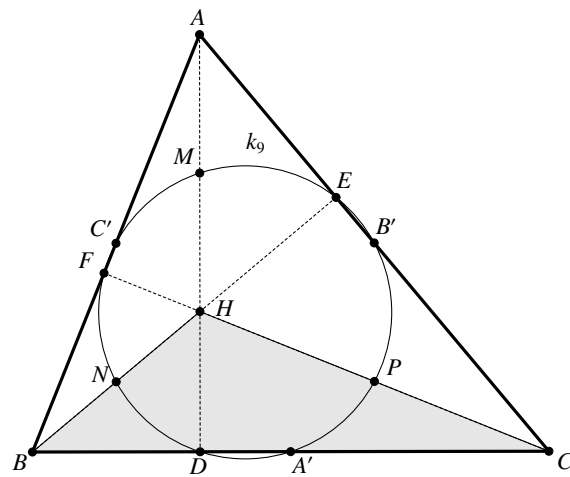
Slika 1.13: Trokut  $ABH$ 

Pravac  $BH$  se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha  $B$  u trokutu  $ABC$ , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha  $A$  na stranicu  $\overline{BH}$  trokuta  $ABH$ , a to je točka  $E$ . Pravac  $AH$  se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha  $A$  u trokutu  $ABC$ , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha  $B$  na stranicu  $\overline{AH}$  trokuta  $ABH$ , a to je točka  $F$ . Pravac  $CH$  se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha  $C$  u trokutu  $ABC$ , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha  $H$  na stranicu  $\overline{AB}$  trokuta  $ABH$ , a to je točka  $P$ . Polovište stranice  $\overline{AB}$  je točka  $D$ , polovište stranice  $\overline{BH}$  je točka  $N$ , polovište stranice  $\overline{HA}$  je točka  $M$ . Sve navedene točke pripadaju kružnici  $k_9$ . Pravci na kojima leže visine trokuta  $ABH$  sijeku se u točki  $C$ , pa je točka  $C$  ortocentar trokuta  $ABH$ . Točka  $A'$  je polovište dužine  $\overline{BC}$ , točka  $P$  je polovište dužine  $\overline{HC}$  i točka  $B'$  je polovište dužine  $\overline{AC}$ , a te tri točke leže na kružnici  $k_9$ . Uočavamo da smo za trokut  $ABH$  dobili istih devet točaka kao i za trokut  $ABC$ , tj. trokuti  $ABH$  i  $ABC$  imaju zajedničku kružnicu devet točaka  $k_9$ . Analogno bi se dokazalo i da trokuti  $BCH$  i  $ACH$  imaju  $k_9$  za svoju kružnicu devet točaka (slike 1.14 i 1.15).

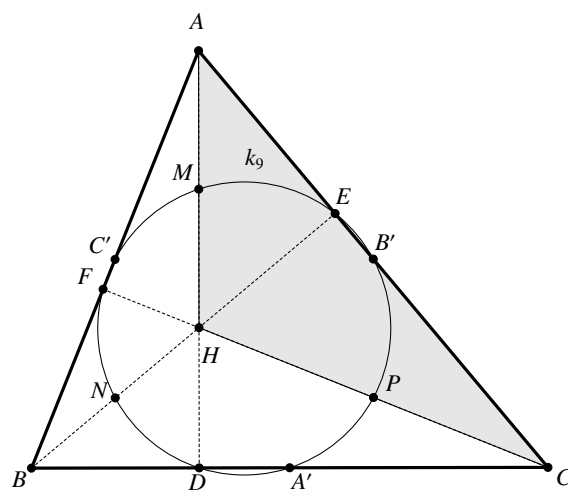
Dokažimo sada da opisane kružnice sva četiri trokuta imaju jednak polumjer  $R$ . Kao što smo prethodno dokazali, trokuti  $ABC, ABH, BCH, ACH$  imaju zajedničku kružnicu devet točaka  $k_9$  polumjera  $R_9$ . Prema teoremu 1.1.1, polumjer kružnice opisane trokutu je

$$R = 2R_9,$$

a s obzirom na to da svi trokuti imaju zajedničku kružnicu devet točaka  $k_9$ , tada će i svi polumjeri opisanih kružnica biti jednaki.  $\square$



Slika 1.14: Trokut  $BCH$



Slika 1.15: Trokut  $AHC$

## 1.2 Feuerbachov teorem

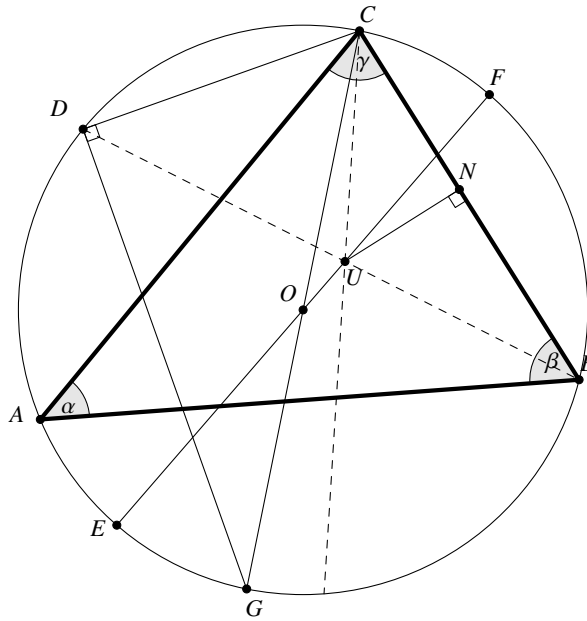
Prije Feuerbachovog teorema ćemo izreći i dokazati nekoliko teorema koje ćemo koristiti u daljnjim dokazima teorema vezanih uz kružnicu devet točaka (Feuerbachovu kružnicu).

**Teorem 1.2.1.** *Udaljenost središta  $O$  opisane kružnice  $k_o$  i središta  $U$  upisane kružnice danog trokuta  $ABC$  dana je sa*

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

gdje je  $R$  polumjer trokutu  $ABC$  opisane kružnice, a  $r$  polumjer tom trokutu upisane kružnice.

*Dokaz.* Označimo sa  $\alpha$  kut pri vrhu  $A$ , sa  $\beta$  kut pri vrhu  $B$  te sa  $\gamma$  kut pri vrhu  $C$ . Neka je točka  $D$  sjecište pravca  $BU$  i kružnice  $k_o$  opisane trokutu  $ABC$ . Pravac  $BU$  je simetrala kuta  $\beta$ , a pravac  $CU$  je simetrala kuta  $\gamma$ . Neka su  $E$  i  $F$  sjecišta pravca  $OU$  i kružnice opisane trokutu (slika 1.16).



Slika 1.16: Slika uz dokaz teorema 1.2.1

Točke  $E$  i  $F$  leže na  $k_o$ , pa je potencija  $p$  točke  $U$  obzirom na kružnicu  $k_o$  jednaka

$$p = |UF| \cdot |UE|, \quad (1.19)$$

a kako točke  $B$  i  $D$  također leže na kružnici  $k_o$ , vrijedi

$$p = |UB| \cdot |UD|. \quad (1.20)$$

Izjednačavanjem jednakosti (1.19) i (1.20) dobivamo

$$|UB| \cdot |UD| = |UF| \cdot |UE|. \quad (1.21)$$

Nadalje, vrijedi

$$|UF| \cdot |UE| = (R - |OU|) \cdot (R + |OU|) = R^2 - |OU|^2. \quad (1.22)$$

Iz (1.21) i (1.22) slijedi

$$|OU|^2 = R^2 - |UD| \cdot |UB|. \quad (1.23)$$

Sada nam preostaje dokazati da je  $|UD| \cdot |UB| = 2Rr$ . Kutovi  $\sphericalangle DBA$  i  $\sphericalangle DCA$  su obodni kutovi nad lukom  $\widehat{DA}$ , pa vrijedi  $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$ . Kako je  $DB$  simetrala kuta  $\beta$ , to je  $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC = \frac{\beta}{2}$ , a kako je  $CU$  simetrala kuta  $\gamma$ , to je  $\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU = \frac{\gamma}{2}$ . Iz toga slijedi

$$\sphericalangle DCU = \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACU = \sphericalangle DBA + \sphericalangle ACU = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \quad (1.24)$$

Kut  $\sphericalangle DUC$  je vanjski kut trokuta  $BCU$ , pa je

$$\sphericalangle DUC = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCU = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \quad (1.25)$$

Iz jednakosti (1.24) i (1.25) slijedi da je  $\sphericalangle DCU = \sphericalangle DUC$ , iz čega zaključujemo da je trokut  $DUC$  jednakokraki s krakovima  $\overline{UD}$  i  $\overline{DC}$ , tj.

$$|UD| = |DC|. \quad (1.26)$$

Neka je  $N$  nožište okomice iz točke  $U$  na stranicu  $\overline{BC}$  te neka je  $G$  sjecište pravca  $CO$  i kružnice  $k_o$ . Prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice,  $\sphericalangle CDG = 90^\circ$  i stoga je  $\sphericalangle CDG = \sphericalangle UNB$ . Uz to je i  $\sphericalangle DGC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle UBN$ , jer su kutovi  $\sphericalangle DGC$  i  $\sphericalangle DBC$  obodni kutovi nad lukom  $\widehat{DC}$ , pa su trokuti  $DCG$  i  $NUB$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{|UB|}{|GC|} = \frac{|NU|}{|DC|},$$

odnosno

$$\frac{|UB|}{2R} = \frac{r}{|DC|},$$

pa uzimajući u obzir (1.26) dobivamo

$$|UB| \cdot |UD| = 2Rr.$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u jednakost (1.23) konačno zaključujemo

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr.$$

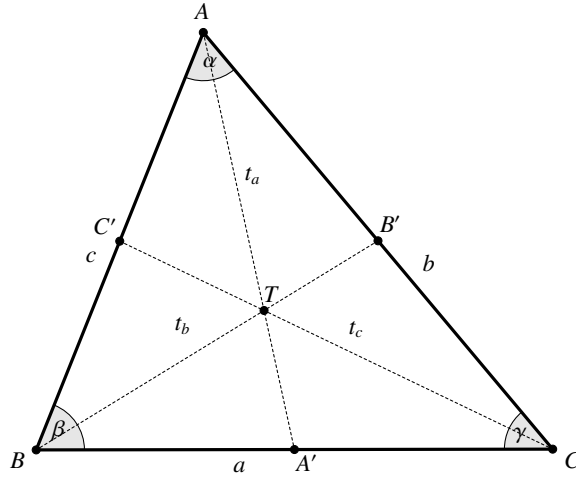
□

**Teorem 1.2.2.** Neka je dan trokut  $ABC$  sa stranicama duljina  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  te neka su  $A', B', C'$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Za duljine težišnica  $t_a, t_b, t_c$  vrijedi:

$$t_a = |AA'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

$$t_b = |BB'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2},$$

$$t_c = |CC'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$



Slika 1.17: Slika uz dokaz teorema 1.2.2

*Dokaz.* Neka je točka  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Tada je dužina  $\overline{AA'}$  težišnica trokuta  $ABC$  iz vrha  $A$ . Neka je  $\beta$  kut pri vrhu  $B$ . Primjenom teorema o kosinusu na trokut  $ABC$  dobivamo:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad (1.27)$$

a primjenom teorema o kosinusu na trokut  $ABA'$ :

$$\cos \beta = \frac{c^2 + \frac{a^2}{4} - t_a^2}{2 \cdot c \cdot \frac{a}{2}}. \quad (1.28)$$

Izjednačavanjem jednakosti (1.27) i (1.28) dobivamo

$$\frac{c^2 + \frac{a^2}{4} - t_a^2}{2 \cdot c \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

iz čega slijedi

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Analogno, za težišnice  $t_b$  i  $t_c$  dobivamo

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \quad t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

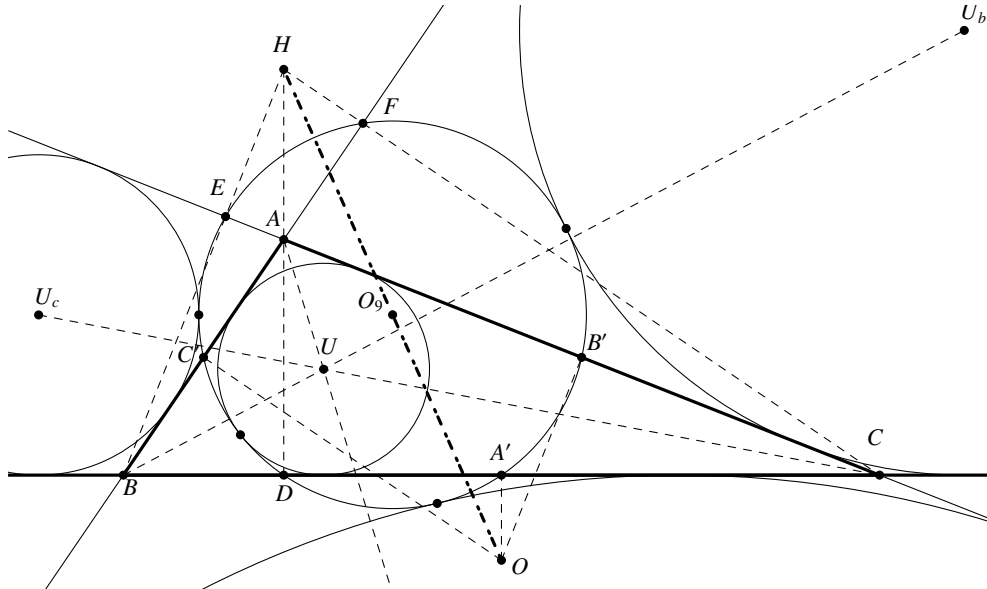
□

Sljedeći teorem je otkrio i dokazao Karl Wilhelm Feuerbach 1822. godine.

**Teorem 1.2.3 (Feuerbachov teorem).** *Kružnica devet točaka  $k_9$  dira upisanu kružnicu  $k_u$  i sve tri pripisane kružnice  $k_a, k_b, k_c$  danog trokuta  $ABC$ . Pri tome upisana kružnica  $k_u$  dira kružnicu  $k_9$  iznutra, dok je ostale pripisane kružnice diraju izvana. Nadalje, ako je  $O_9$  središte kružnice  $k_9$ ,  $R$  polumjer trokutu  $ABC$  opisane kružnice, a  $k_u = k(U, r)$ ,  $k_a = k(U_a, r_a)$ ,  $k_b = k(U_b, r_b)$ ,  $k_c = k(U_c, r_c)$ , tada vrijedi*

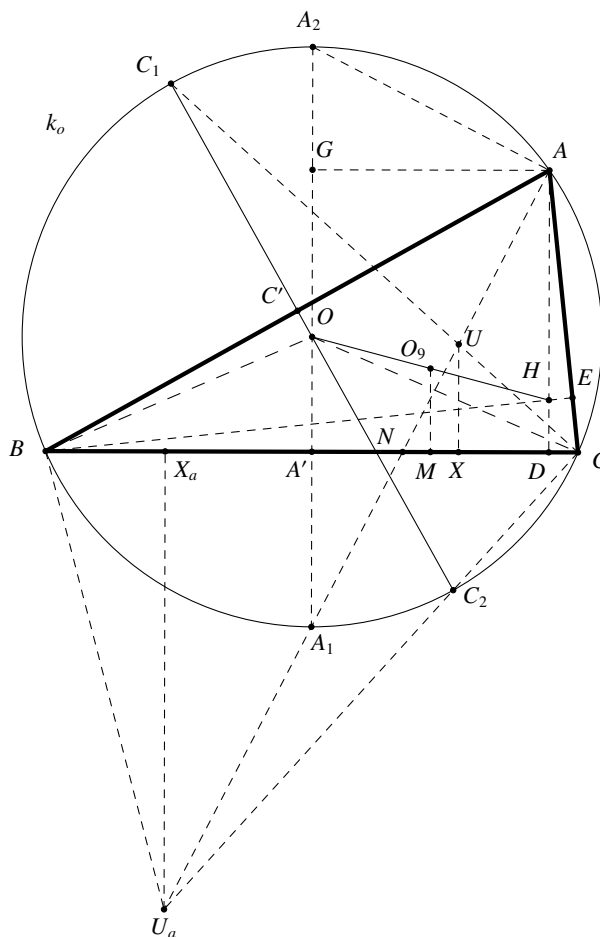
$$|O_9 U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9 U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$

$$|O_9 U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9 U_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$



Slika 1.18: Kružnica devet točaka dodiruje upisanu i pripisane kružnice trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Neka su  $A_1$  i  $A_2$  točke presjeka kružnice  $k_o$  opisane trokutu  $ABC$  i pravca  $OA'$ , pri čemu je točka  $O$  središte kružnice  $k_o$ , a točka  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$  (slika 1.19). Kako je  $OA'$  simetrala stranice  $\overline{BC}$ , a točka  $A_1$  leži na toj simetrali, to su trokuti  $BOA_1$  i



Slika 1.19: Slika uz teorem 1.2.3

$COA_1$  sukladni prema S-S-S teoremu o sukladnosti. Sada slijedi da je  $\sphericalangle BOA_1 = \sphericalangle COA_1$ , a primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu zaključujemo da je  $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AC$ , iz čega slijedi da je  $AA_1$  simetrala kuta pri vrhu  $A$ . Neka su sada  $C_1$  i  $C_2$  točke presjeka kružnice  $k_o$  opisane trokutu  $ABC$  i pravca  $OC'$ , pri čemu je točka  $C'$  polovište stranice  $\overline{AB}$ . Analogno zaključujemo da je  $CC_1$  simetrala kuta pri vrhu  $C$ . Neka je  $G$  nožište okomice iz vrha  $A$  na dužinu  $\overline{A_1A_2}$  te neka su točke  $M$  i  $D$  redom nožišta okomica iz središta  $O_9$  kružnice devet točaka i vrha  $A$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Svi kutovi četverokuta  $A'DAG$  su pravi i

zato vrijedi

$$|GA'| = |AD|, \quad |GA| = |A'D|. \quad (1.29)$$

Kako je  $|AH| = 2|OA'|$ , pri čemu je točka  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$  (vidite napomenu 1.1.4), to je

$$\begin{aligned} |OG| &= |GA'| - |OA'| = |AD| - |OA'| = |AH| + |HD| - |OA'| \\ &= 2|OA'| + |HD| - |OA'| = |OA'| + |HD|. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Kako su pravci  $OA'$ ,  $O_9M$ ,  $HD$  paralelni i točka  $O_9$  je prema teoremu 1.1.1 polovište dužine  $\overline{OH}$ , to je četverokut  $OA'DH$  trapez, a dužina  $\overline{O_9M}$  mu je srednjica. Tada iz (1.30) slijedi

$$|OG| = 2 \cdot \frac{|OA'| + |HD|}{2} = 2|O_9M|,$$

odnosno

$$|O_9M| = \frac{|OG|}{2}. \quad (1.31)$$

Neka je  $X$  nožište okomice iz središta  $U$  trokutu upisane kružnice na stranicu  $\overline{BC}$  te neka je točka  $N$  presjek pravaca  $A_1A$  i  $BC$ . Promotrimo trokute  $AGA_2$  i  $UXN$ . Kut  $\sphericalangle A_2AA_1$  je kut nad promjerom  $\overline{A_2A_1}$  kružnice  $k_o$  pa je  $\sphericalangle A_2AA_1 = 90^\circ$ , te su stoga pravci  $A_2A$  i  $UN$  okomiti. Pravci  $UX$  i  $GA$  su okomiti jer su pravci  $GA$  i  $BC$  paralelni, a pravci  $BC$  i  $UX$  su međusobno okomiti. Sada uočavamo da su krakovi kutova  $\sphericalangle A_2AG$  i  $\sphericalangle NUX$  međusobno okomiti i  $\sphericalangle AGA_2 = \sphericalangle UXN = 90^\circ$  pa su stoga trokuti  $AGA_2$  i  $UXN$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Stoga vrijedi

$$\frac{|A_2G|}{|AG|} = \frac{|NX|}{|UX|},$$

iz čega primjenom jednakosti (1.29) slijedi

$$\frac{|A_2G|}{|A'D|} = \frac{|NX|}{|UX|}.$$

Prema tome,

$$|A_2G| \cdot |UX| = |A'D| \cdot |NX|. \quad (1.32)$$

Ranije smo dokazali da je  $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AC$ , a kako je kut  $\sphericalangle BCA_1$  također obodni kut nad lukom  $\overline{BA_1}$  kao i kut  $\sphericalangle BAA_1$  te kako točka  $N$  leži na stranici  $\overline{BC}$ , to je

$$\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle NCA_1.$$

Trokutima  $A_1AC$  i  $A_1CN$  još je kut  $\sphericalangle AA_1C$  zajednički, pa su tada ta dva trokuta slična prema K-K-K teoremu o sličnosti te stoga vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_1C|} = \frac{|A_1C|}{|A_1A|}. \quad (1.33)$$

Promotrimo sada trokut  $A_1UC$ . Kut  $\sphericalangle A_1UC$  je vanjski kut trokuta  $UAC$ , pa vrijedi

$$\sphericalangle A_1UC = \sphericalangle UAC + \sphericalangle UCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad (1.34)$$

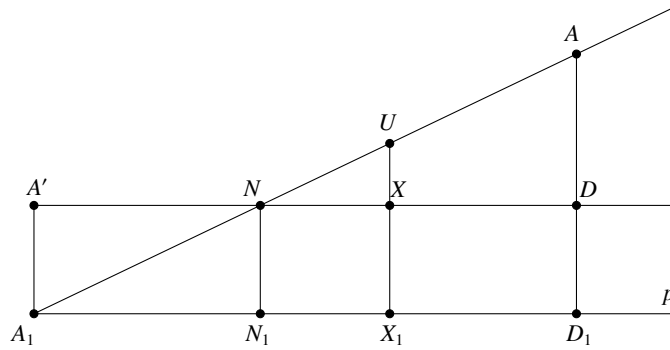
pri čemu su  $\alpha$  i  $\gamma$  kutovi trokuta  $ABC$  pri vrhu  $A$ , odnosno  $C$ . Nadalje,

$$\sphericalangle UCA_1 = \sphericalangle UCB + \sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle UCB + \sphericalangle BAA_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (1.35)$$

Iz jednakosti (1.34) i (1.35) slijedi da je  $\sphericalangle UCA_1 = \sphericalangle A_1UC$ , pa je trokut  $UA_1C$  jednako-kračan trokut te je tada  $|A_1C| = |A_1U|$ . Uvrštavanjem dobivene jednakosti u jednakost (1.33) dobivamo

$$\frac{|A_1N|}{|A_1U|} = \frac{|A_1U|}{|A_1A|}. \quad (1.36)$$

Promotrimo sada posebno dio slike 1.19 na slici 1.20.



Slika 1.20: Slika uz teorem 1.2.3

Neka je  $p$  pravac koji prolazi točkom  $A_1$  i paralelan je s pravcem  $A'D$ . Neka su  $N_1, X_1, D_1$  redom nožišta okomica iz točaka  $N, X, D$  na pravac  $p$ , a znamo da je  $A_1$  nožište okomice iz točke  $A'$  na taj pravac. Sada prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_1U|} = \frac{|A_1N_1|}{|A_1X_1|}, \quad (1.37)$$

te

$$\frac{|A_1U|}{|A_1A|} = \frac{|A_1X_1|}{|A_1D_1|}. \quad (1.38)$$

Sada iz jednakosti (1.36) te (1.37) i (1.38) slijedi

$$\frac{|A_1N_1|}{|A_1X_1|} = \frac{|A_1X_1|}{|A_1D_1|}. \quad (1.39)$$

U četverokutu  $A'NN_1A_1$  svi kutovi su pravi pa je taj četverokut pravokutnik te je

$$|A_1N_1| = |A'N|. \quad (1.40)$$

Analogno zaključujemo da je četverokut  $A'DD_1A_1$  pravokutnik te stoga vrijedi

$$|A_1D_1| = |A'D|. \quad (1.41)$$

Također,

$$|A_1X_1| = |A'X|. \quad (1.42)$$

Sada iz jednakosti (1.39), (1.40), (1.41) i (1.42) slijedi

$$\frac{|A'N|}{|A'X|} = \frac{|A'X|}{|A'D|},$$

pa je

$$|A'X|^2 = |A'N| \cdot |A'D| \quad (1.43)$$

te se sada možemo vratiti promatranju slike 1.19. Jednakost (1.43) možemo proširiti na sljedeći način:

$$|A'X| \cdot |A'D| - |A'X|^2 = |A'X| \cdot |A'D| - |A'N| \cdot |A'D|,$$

iz čega slijedi

$$|A'X|(|A'D| - |A'X|) = |A'D|(|A'X| - |A'N|),$$

pa promatranjem slike konačno zaključujemo da vrijedi

$$|A'X| \cdot |XD| = |A'D| \cdot |NX|. \quad (1.44)$$

Iz jednakosti (1.32) i (1.44) sada imamo

$$|A_2G| \cdot |UX| = |A'X| \cdot |XD|. \quad (1.45)$$

Promatrajući sliku 1.19 uočavamo da vrijedi

$$|O_9U|^2 = (|UX| - |O_9M|)^2 + (|A'X| - |A'M|)^2.$$

Kako je točka  $M$  polovište dužine  $\overline{A'D}$ , to je

$$|A'M| = \frac{|A'D|}{2}. \quad (1.46)$$

Sada uz primjenu jednakosti (1.31) i (1.46) vrijedi

$$\begin{aligned} |O_9U|^2 &= \left(|UX| - \frac{|OG|}{2}\right)^2 + \left(|A'X| - \frac{|A'D|}{2}\right)^2 \\ &= |UX|^2 - |UX| \cdot |OG| + \frac{1}{4}|OG|^2 + |A'X|^2 - |A'X| \cdot |A'D| + \frac{1}{4}|A'D|^2 \\ &= \frac{1}{4}|OG|^2 + \frac{1}{4}|A'D|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A'X|(|A'D| - |A'X|). \end{aligned}$$

Uz primjenu Pitagorinog teorema na trokut  $OAG$  i jednakosti (1.29), odatle dobivamo

$$|O_9U|^2 = \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A'X| \cdot |DX|.$$

Primjenom jednakosti (1.45) imamo dalje

$$\begin{aligned} |O_9U|^2 &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A_2G| \cdot |UX| \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |UX|(|OG| + |A_2G|) \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OA_2| \cdot |UX| \\ &= \frac{1}{4}R^2 + r^2 - Rr \\ &= \left(\frac{R}{2} - r\right)^2. \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.1 vrijedi

$$R^2 - 2Rr \geq 0,$$

iz čega slijedi

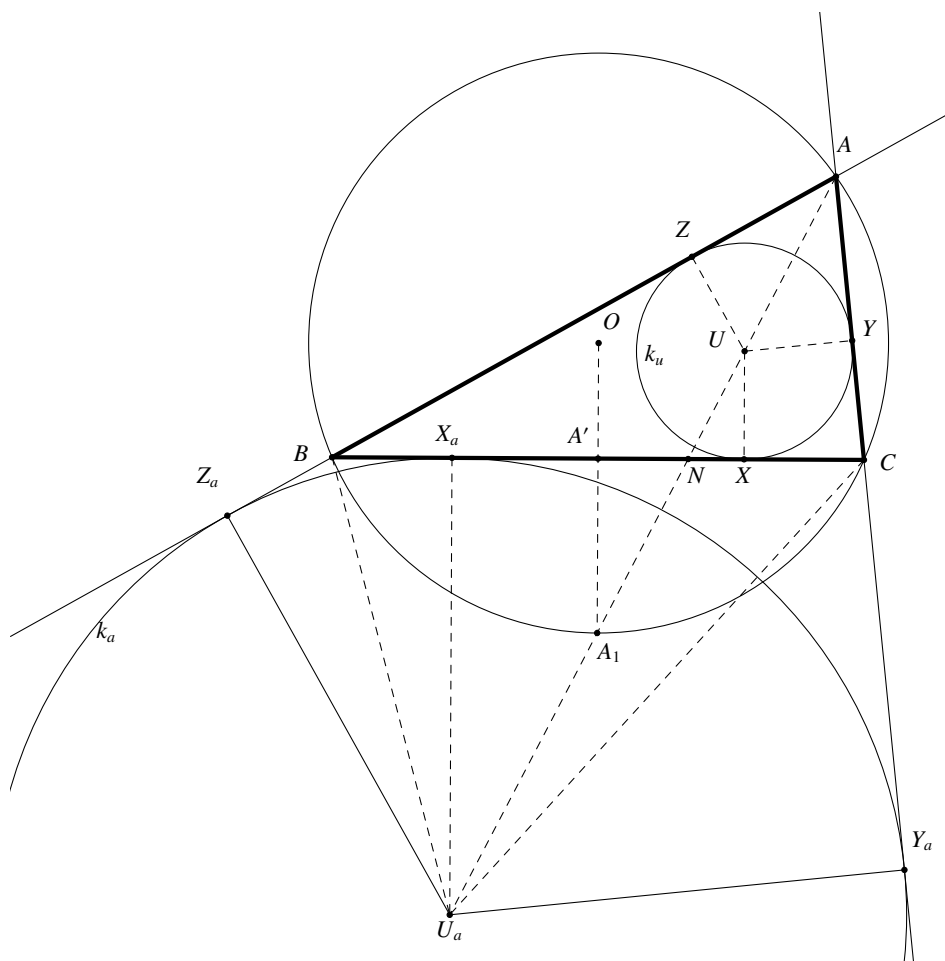
$$\frac{R}{2} \geq r.$$

Sada konačno zaključujemo

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r. \quad (1.47)$$

Iz posljednje jednakosti vidimo da je udaljenost središta  $O_9$  kružnice devet točaka i središta upisane kružnice  $U$  jednaka razlici njihovih polumjera što dokazuje da se te dvije kružnice dodiruju, pri čemu se upisana kružnica (kružnica s manjim polumjerom) nalazi unutar kružnice devet točaka pa dodiruje kružnicu  $k_9$  iznutra.

Sada trebamo dokazati da kružnica devet točaka dodiruje pripisanu kružnicu  $k_a$  izvana. Neka su  $X_a, Y_a, Z_a$  dirališta pripisane kružnice  $k_a$  s odgovarajućim stranicama trokuta  $ABC$  (slika 1.21).



Slika 1.21: Slika uz teorem 1.2.3

Kako trokuti  $U_a X_a N$  i  $UXN$  imaju po jedan pravi kut i  $\sphericalangle X_a N U_a = \sphericalangle U N X$  jer su to vršni kutovi, to su ti trokuti slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, a već smo dokazali da je trokut  $UXN$  sličan trokutu  $AGA_2$ , pa su prema tome i trokuti  $U_a X_a N$  i  $AGA_2$  slični i zato vrijedi

$$\frac{|A_2 G|}{|AG|} = \frac{|X_a N|}{|X_a U_a|}.$$

Ako sada uzmemo u obzir (1.29), imamo

$$\frac{|A_2 G|}{|A' D|} = \frac{|X_a N|}{|X_a U_a|},$$

pa je

$$|A_2 G| \cdot |X_a U_a| = |A' D| \cdot |X_a N|. \quad (1.48)$$

Kako je udaljenost neke točke ravnine od oba dirališta tangenata položenih tom točkom na neku kružnicu jednaka (jer su trokuti kojima su vrhovi jedno diralište, točka iz koje je položena tangenta i središte kružnice, sukladni prema S-S-K<sup>></sup> teoremu o sukladnosti), to za udaljenosti točaka  $A, B, C$  od dirališta  $X_a, Y_a, Z_a$  trokutu pripisane kružnice i odgovarajućih stranica trokuta vrijedi

$$|AZ_a| = |AY_a|, \quad |BZ_a| = |BX_a|, \quad |CX_a| = |CY_a|. \quad (1.49)$$

Uvrštavajući jednakosti iz (1.49) u formulu za opseg trokuta, dobivamo

$$o = |AB| + |AC| + |BC| = |AZ_a| - |BZ_a| + |AY_a| - |CY_a| + |BX_a| + |CX_a| = 2|AZ_a|,$$

iz čega slijedi

$$|AZ_a| = s,$$

pri čemu je  $s$  poluopseg trokuta  $ABC$ . Primjenom prethodne jednakosti dobivamo

$$|BX_a| = |BZ_a| = |AZ_a| - |AB| = s - |AB|. \quad (1.50)$$

Analogno za udaljenosti vrhova trokuta  $ABC$  od dirališta  $X, Y, Z$  trokutu upisane kružnice i odgovarajućih stranica trokuta vrijedi

$$|AZ| = |AY|, \quad |BZ| = |BX|, \quad |CY| = |CX|, \quad (1.51)$$

pa je opseg trokuta  $ABC$  jednak

$$o = |AB| + |AC| + |BC| = |AZ| + |BZ| + |AY| + |CY| + |BX| + |CX| = 2(|AY| + |BX| + |CX|),$$

iz čega slijedi

$$|AY| + |BX| + |CX| = \frac{o}{2} = s.$$

Iz posljednje jednakosti i (1.51) dobivamo

$$|CX| = s - (|AY| + |BX|) = s - (|AZ| + |BZ|) = s - |AB|. \quad (1.52)$$

Uočavamo da su desne strane jednakosti (1.50) i (1.52) jednake te stoga vrijedi

$$|BX_a| = |CX|.$$

Točke  $X_a$  i  $X$  leže na stranici  $\overline{BC}$  kojoj je točka  $A'$  polovište pa su točke  $X_a$  i  $X$  simetrične obzirom na točku  $A'$  tj. vrijedi

$$|A'X| = |A'X_a|. \quad (1.53)$$

Sada jednakost (1.43) možemo zapisati kao

$$|A'X_a|^2 = |A'N| \cdot |A'D|$$

iz čega analognim postupcima kao u dokazu jednakosti (1.44) dolazimo do

$$|A'X_a| \cdot |DX_a| = |A'D| \cdot |X_aN|. \quad (1.54)$$

Sada iz jednakosti (1.48) i (1.54) slijedi

$$|A_2G| \cdot |X_aU_a| = |A'X_a| \cdot |DX_a|. \quad (1.55)$$

Promatrajući sliku 1.19 te koristeći Pitagorin teorem uočavamo da vrijedi

$$|O_9U_a|^2 = (|O_9M| + |X_aU_a|)^2 + (|A'X_a| + |A'M|)^2,$$

odnosno, uz primjenu jednakosti (1.46) i (1.31),

$$\begin{aligned} |O_9U_a|^2 &= (|O_9M| + |X_aU_a|)^2 + (|A'X_a| + |A'M|)^2 \\ &= \left(\frac{|OG|}{2} + |X_aU_a|\right)^2 + \left(|A'X_a| + \frac{|A'D|}{2}\right)^2 \\ &= \frac{|OG|^2}{4} + \frac{|A'D|}{4} + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A'X_a|(|A'X_a| + |A'D|). \end{aligned}$$

Sada uz primjenu Pitagorinog teorema na trokut  $OAG$  i jednakosti (1.29) dalje vrijedi

$$|O_9U_a|^2 = \frac{|OA|^2}{4} + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A'X_a| \cdot |DX_a|.$$

Primjenom jednakosti (1.55) imamo dalje

$$\begin{aligned} |O_9U_a|^2 &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A_2G| \cdot |X_aU_a| \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |X_aU_a|(|OG| + |A_2G|) \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |X_aU_a|(|OA_2|) \\ &= \frac{1}{4}R^2 + r_a^2 + r_aR \\ &= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$|O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a.$$

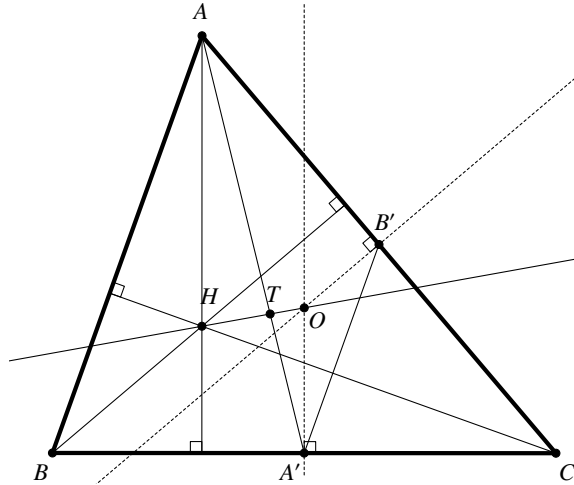
Iz posljednje jednakosti vidimo da je udaljenost središta pripisane kružnice  $U_a$  i središta  $O_9$  kružnice devet točaka jednaka zbroju njihovih polumjera što dokazuje da se te dvije kružnice dodiruju izvana. Analogno se dokaže da i kružnice  $k_b$  i  $k_c$  izvana dodiruju kružnicu devet točaka  $k_9$ , tj. da vrijede jednakosti

$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$

□

**Teorem 1.2.4.** Središte  $O$  opisane kružnice, težište  $T$  i ortocentar  $H$  nekog trokuta  $ABC$  leže na jednom pravcu  $p$  kojeg nazivamo Eulerovim pravcem tog trokuta. Pritom se  $T$  nalazi između  $H$  i  $O$  te vrijedi

$$|HT| = 2|TO|.$$



Slika 1.22: Slika uz dokaz teorema 1.2.4

*Dokaz.* Neka je u trokutu  $ABC$  točka  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , a  $B'$  polovište stranice  $\overline{AC}$ . Tada je  $A'B'$  srednjica trokuta  $ABC$ , pa su pravci  $A'B'$  i  $AB$  paralelni i  $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ . Kako je pravac  $AH$  okomit na  $BC$  i  $A'O$  okomit na  $BC$ , to su pravci  $AH$  i  $A'O$  paralelni. Pravac  $BH$  je okomit na  $AC$  i  $B'O$  je okomit na  $AC$ , pa su pravci  $BH$  i  $B'O$  paralelni. Zaključujemo da su odgovarajuće stranice trokuta  $ABH$  i  $A'B'O$  paralelne. Stoga su šiljasti kutovi  $\angle HAB$  i  $\angle OA'B'$  s paralelnim krakima međusobno sukladni, kao i kutovi  $\angle ABH$  i  $\angle A'B'O$ . Dakle, trokuti  $ABH$  i  $A'B'O$  su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, pa vrijedi

$$\frac{|AH|}{|A'O|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = 2. \quad (1.56)$$

Neka je točka  $T_1$  presjek pravaca  $HO$  i  $AA'$ . Kako su pravci  $AH$  i  $A'O$  paralelni, a točke  $A, A', T_1$  odnosno  $H, O, T_1$  kolinearne, to su trokuti  $AHT_1$  i  $A'OT_1$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz te sličnosti i jednakosti (1.56) slijedi

$$\frac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \frac{|AH|}{|A'O|} = 2. \quad (1.57)$$

Dužina  $\overline{AA'}$  je težišnica trokuta  $ABC$  i za težište  $T$  tog trokuta vrijedi

$$\frac{|AT|}{|A'T|} = 2. \quad (1.58)$$

Izjednačavanjem (1.57) i (1.58) dobivamo

$$\frac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \frac{|AT|}{|A'T|}.$$

Točke  $T$  i  $T_1$  pripadaju dužini  $\overline{AA'}$  i dijele je u istom omjeru što znači da se točke  $T$  i  $T_1$  podudaraju. Dakle, točka  $T$  leži na pravcu  $HO$ , tj. točke  $T, H, O$  su kolinearne. Kako su trokuti  $AHT$  i  $A'OT$  slični, to je

$$\frac{|TH|}{|TO|} = \frac{|AT|}{|A'T|} = 2,$$

pa je prema tome

$$|TH| = 2|TO|.$$

Dokazana tvrdnja će vrijediti za svaki trokut jer se težište uvijek nalazi između točaka  $O$  i  $H$ . Naime, težišnica iz bilo kojeg vrha trokuta uvijek se nalazi između visine trokuta iz tog vrha i simetrale nasuprotne stranice tog trokuta, pa je prema tome i težište trokuta uvijek između ortocentra  $H$  i središta  $O$  kružnice opisane trokutu.  $\square$

**Teorem 1.2.5.** *Za središte  $O_9$  kružnice devet točaka trokuta  $ABC$  i središta  $U_a, U_b, U_c$  tom trokutu pripisanih kružnica vrijedi*

$$|UO_9| + |U_aO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 6R,$$

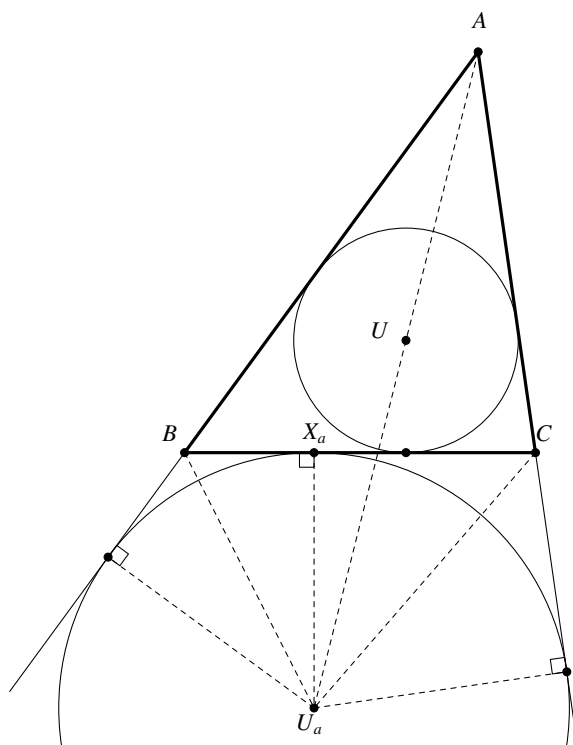
*pri čemu je  $R$  polumjer kružnice opisane trokutu  $ABC$ .*

*Dokaz.* Prema teoremu 1.2.3 vrijedi

$$\begin{aligned} |UO_9| &= \frac{R}{2} - r, & |U_aO_9| &= \frac{R}{2} + r_a, \\ |U_bO_9| &= \frac{R}{2} + r_b, & |U_cO_9| &= \frac{R}{2} + r_c, \end{aligned}$$

pri čemu su  $r_a, r_b, r_c$  polumjeri kružnica pripisanih trokutu  $ABC$ , a  $r$  polumjer kružnice upisane tom trokutu. Zbrajanjem navedenih udaljenosti dobivamo

$$|UO_9| + |U_aO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 2R + r_a + r_b + r_c - r. \quad (1.59)$$



Slika 1.23: Slika uz dokaz teorema 1.2.3

Neka je  $P$  površina trokuta  $ABC$ , te neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta  $ABC$ . Promatrajući sliku 1.23 uočavamo da površinu trokuta  $ABC$  možemo izraziti preko površina trokuta  $ABU_a, ACU_a, BCU_a$  na sljedeći način:

$$P = P(ABU_a) + P(ACU_a) - P(BCU_a).$$

Kako je visina svakog tog trokuta iz vrha  $U_a$  jednaka  $r_a$ , to je

$$P = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{r_a}{2}(c + b - a) = r_a(s - a),$$

pri čemu je  $s$  poluopseg trokuta  $ABC$ . Iz toga slijedi

$$r_a = \frac{P}{s - a}.$$

Analogno se dokaže da je

$$r_b = \frac{P}{s-b} \quad \text{i} \quad r_c = \frac{P}{s-c}.$$

Primjenom Heronove formule na dobivene izraze dobivamo

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{s(s-b)(s-c)}{P}. \quad (1.60)$$

Analogno slijedi

$$r_b = \frac{s(s-a)(s-c)}{P}, \quad r_c = \frac{s(s-a)(s-b)}{P}. \quad (1.61)$$

Iz poznate formule za površinu trokuta  $P = rs$  slijedi

$$r = \frac{P}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{P}. \quad (1.62)$$

Iz jednakosti (1.60), (1.61), (1.62) dobivamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{s(s-b)(s-c)}{P} + \frac{s(s-a)(s-c)}{P} + \frac{s(s-a)(s-b)}{P} - \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{P} \\ &= \frac{s(s-c)(s-b-(s-a))}{P} + \frac{(s-a)(s-b)(s-(s-c))}{P} \\ &= \frac{s(s-c)(2s-a-b)}{P} + \frac{(s-a)(s-b)c}{P} \\ &= \frac{s(s-c)c}{P} + \frac{(s-a)(s-b)c}{P} \\ &= \frac{c(s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab)}{P} \\ &= \frac{c(2s^2 - s(a+b+c) + ab)}{P} \\ &= \frac{c(s(2s-a-b-c) + ab)}{P} \\ &= \frac{abc}{P}. \end{aligned}$$

Kako površinu trokuta možemo izraziti i kao

$$P = \frac{abc}{4R},$$

to zaključujemo

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Ovo uvrstimo u (1.59) i konačno dobivamo

$$|UO_9| + |U_aAO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 6R.$$

□

**Teorem 1.2.6.** *Za središte opisane kružnice  $O$ , težište trokuta  $T$  i središte  $O_9$  kružnice devet točaka trokuta  $ABC$  vrijedi*

$$|OT| = 2|TO_9|.$$

*Dokaz.* Prema teoremu 1.1.1, središte kružnice  $k_9$  je polovište dužine  $\overline{OH}$  pa je  $|OO_9| = \frac{1}{2}|OH|$ , a prema teoremu 1.2.4 je  $|HT| = 2|OT|$ , ili

$$|OT| = \frac{1}{3}|OH|. \quad (1.63)$$

Također prema teoremu 1.2.4, točke  $O, H, T$  su kolinearne, a kako je točka  $O_9$  polovište dužine  $\overline{OH}$ , to su sve četiri točke kolinearne. Stoga je

$$|O_9T| = |OO_9| - |OT| = \frac{1}{2}|OH| - \frac{1}{3}|OH| = \frac{1}{6}|OH|. \quad (1.64)$$

Iz jednakosti (1.63) i (1.64) slijedi

$$|OT| : |O_9T| = \frac{1}{3}|OH| : \frac{1}{6}|OH| = 2 : 1,$$

tj.

$$|OT| = 2|O_9T|.$$

□

**Teorem 1.2.7.** *Neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta  $ABC$ , a  $R$  polumjer tom trokutu opisane kružnice. Za udaljenost težišta  $T$  i središta  $O$  opisane kružnice vrijedi*

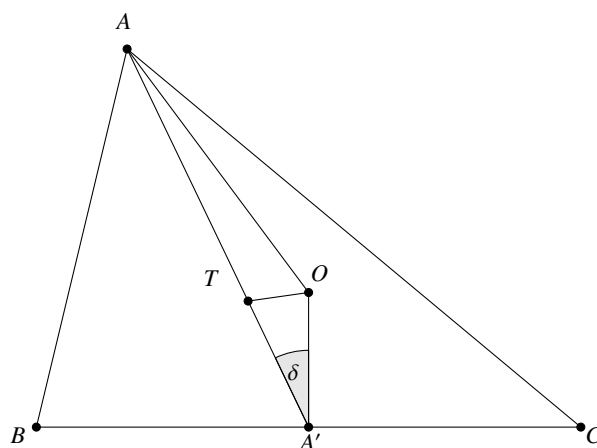
$$|OT|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

*Dokaz.* Neka je  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  te neka je  $\delta = \angle OA'A = \angle OA'T$ . Primjenom teorema o kosinusu na trokut  $OA'T$  dobivamo

$$\cos \delta = \frac{|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2}{2|OA'| \cdot |A'T|},$$

a primjenom na trokut  $OAA'$  dobivamo

$$\cos \delta = \frac{|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2}{2|AA'| \cdot |OA'|},$$



Slika 1.24: Slika uz dokaz teorema 1.2.7

te stoga slijedi

$$\frac{|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2}{2|OA'| \cdot |A'T|} = \frac{|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2}{2|AA'| \cdot |OA'|},$$

tj.

$$|AA'|(|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2) = |A'T|(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2). \quad (1.65)$$

Kako je

$$|A'T| = \frac{1}{3}|AA'|,$$

jednakost (1.65) postaje

$$|AA'|(|OA'|^2 + \frac{1}{9}|AA'|^2 - |OT|^2) = \frac{1}{3}|AA'|(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2),$$

tj.

$$|OA'|^2 + \frac{1}{9}|AA'|^2 - |OT|^2 = \frac{1}{3}(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2),$$

iz čega slijedi

$$|OT|^2 = \frac{1}{3}|OA|^2 + \frac{2}{3}|OA'|^2 - \frac{2}{9}|AA'|. \quad (1.66)$$

Uočimo da je

$$|OA| = R. \quad (1.67)$$

Primjenom Pitagorinog teorema u trokutu  $BOA'$  dobivamo

$$|OA'| = \sqrt{|BO|^2 - |BA'|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - a^2}. \quad (1.68)$$

Prema teoremu 1.2.2 vrijedi

$$|AA'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}. \quad (1.69)$$

Uvrštavanjem izraza iz jednakosti (1.67), (1.68) i (1.69) u jednakost (1.66) dobivamo

$$\begin{aligned} |OT|^2 &= \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{6}(4R^2 - a^2) - \frac{1}{18}(2(b^2 + c^2) - a^2) \\ &= \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2 + \frac{1}{18}a^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

□

**Teorem 1.2.8.** *Neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta  $ABC$ , a  $R$  polumjer tom trokutu opisane kružnice. Zbroj kvadrata udaljenosti središta  $O_9$  kružnice devet točaka  $k_9$  do vrhova trokuta  $ABC$  dan je sa*

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

*Dokaz.* Neka su  $A_1, B_1, C_1$  redom nožišta okomica spuštenih iz vrhova  $A, B, C$  na pravac  $O_9T$ . Primjenom teorema o kosinusu na trokute  $ATO_9, BTO_9, CTO_9$  dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 &= |AT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |AT| \cos \angle ATO_9, \\ |BO_9|^2 &= |BT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |BT| \cos \angle BTO_9, \\ |CO_9|^2 &= |CT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |CT| \cos \angle CTO_9. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokute  $AA_1T, BB_1T, CC_1T$  dobivamo

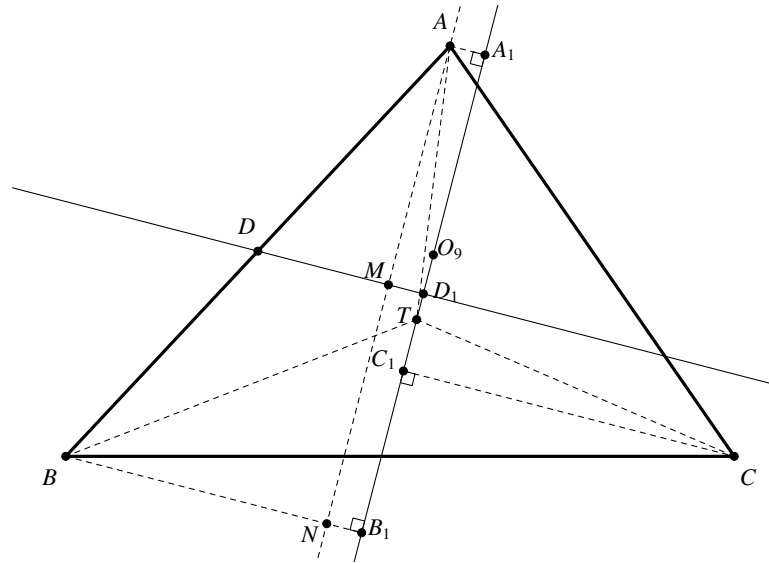
$$\cos \angle ATA_1 = \frac{|A_1T|}{|AT|}, \quad \cos \angle BTB_1 = \frac{|B_1T|}{|BT|}, \quad \cos \angle CTC_1 = \frac{|C_1T|}{|CT|},$$

tj.

$$\cos \angle ATO_9 = \frac{|A_1T|}{|AT|}, \quad \cos \angle BTO_9 = -\frac{|B_1T|}{|BT|}, \quad \cos \angle CTO_9 = -\frac{|C_1T|}{|CT|}.$$

Kada to uvrstimo u (1.70) dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 &= |AT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |A_1T|, \\ |BO_9|^2 &= |BT|^2 + |O_9T|^2 + 2|O_9T| \cdot |B_1T|, \end{aligned}$$



Slika 1.25: Slika uz dokaz teorema 1.2.8

$$|CO_9|^2 = |CT|^2 + |O_9T|^2 + 2|O_9T| \cdot |C_1T|.$$

Zbrajanjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 &= |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|O_9T|^2 \\ &\quad - 2|O_9T|(|A_1T| - |B_1T| - |C_1T|). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Neka je sada točka  $N$  nožište okomice iz vrha  $A$  na  $BB_1$ , točka  $D$  polovište dužine  $\overline{AB}$ , a točka  $M$  polovište dužine  $\overline{AN}$ . Tada je dužina  $\overline{MD}$  srednjica trokuta  $ABN$ , pa su pravci  $DM$  i  $BB_1$  paralelni. Kako su pravci  $BB_1$  i  $O_9T$  okomiti, to su i pravci  $DM$  i  $O_9T$  okomiti. Označimo sa  $D_1$  sjecište ta dva okomita pravca. Očito je da su četverokuti  $NB_1D_1M$  i  $MD_1A_1A$  pravokutnici te kako je  $|AM| = |MN|$  to je  $|A_1D_1| = |B_1D_1|$ . Kako su  $\angle CTC_1$  i  $\angle DTD_1$  vršni, to je  $\angle CTC_1 = \angle DTD_1$ , a  $\angle CC_1T = \angle DD_1T = 90^\circ$ , pa su trokuti  $CC_1T$  i  $DD_1T$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Stoga slijedi

$$\frac{|C_1T|}{|D_1T|} = \frac{|CT|}{|DT|} = 2, \quad (1.72)$$

jer je  $\overline{DC}$  težišnica trokuta  $ABC$ , a točka  $T$  ju dijeli u omjeru  $2 : 1$ . Iz (1.72) slijedi da je

$$|C_1T| = 2|D_1T|,$$

pa sada imamo

$$\begin{aligned} |A_1T| &= |A_1D_1| + |D_1T| = |B_1D_1| + |D_1T| \\ &= |B_1T| + |D_1T| + |D_1T| = |B_1T| + 2|D_1T| \\ &= |B_1T| + |C_1T|. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u (1.71) dobivamo

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|O_9T|^2. \quad (1.73)$$

Kako je

$$\begin{aligned} |AT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(b^2 + c^2) - a^2)}, \\ |BT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + c^2) - b^2)}, \\ |CT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + b^2) - c^2)}, \end{aligned}$$

pri čemu su  $t_a, t_b, t_c$  duljine težišnica trokuta  $ABC$ , to iz teorema 1.2.2 slijedi

$$|AT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(b^2 + c^2) - a^2)}, \quad |BT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + c^2) - b^2)}, \quad |CT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + b^2) - c^2)},$$

pa je

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (1.74)$$

Prema teoremu 1.2.7,

$$|O_9T| = \frac{1}{2}|OT|,$$

pa jednakost (1.73) postaje

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + \frac{3}{4}|OT|^2.$$

Sada primjenom teorema 1.2.7 i jednakosti (1.74) dobivamo

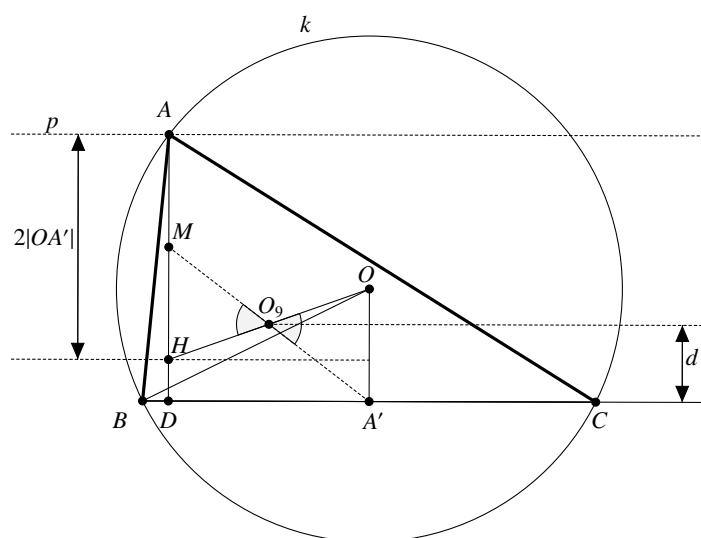
$$\begin{aligned} |AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{4}\left(R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right) \\ &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{12}b^2 - \frac{1}{12}c^2 \\ &= \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

□

### 1.3 Konstruktivni zadaci

Sada ćemo riješiti nekoliko konstruktivnih zadataka vezanih za kružnicu devet točaka.

**Primjer 1.3.1.** Konstruirajte trokut  $ABC$  kojemu je zadana stranica  $\overline{BC}$ , polumjer opisane kružnice  $R$  i udaljenost  $d$  središta  $O_9$  Feuerbachove kružnice od stranice  $\overline{BC}$ .



Slika 1.26: Slika uz primjer 1.3.1

Obzirom da je zadana stranica  $\overline{BC}$  i polumjer opisane kružnice  $R$ , možemo konstruirati jednakokračan trokut  $BOC$  s kracima duljine  $R$  i time smo konstruirali središte  $O$  opisane kružnice  $k$ . Prema teoremu 1.1.1, točka  $O_9$  je polovište dužine  $\overline{HO}$  pri čemu je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Neka je  $D$  nožište okomice iz ortocentra  $H$  na stranicu  $\overline{BC}$ , a  $A'$  nožište okomice iz središta  $O$  opisane kružnice na tu istu stranicu. Sa slike 1.26 uočavamo da je

$$|OA'| = |HD| + (d - |HD|) + (d - |HD|)$$

odakle možemo izraziti udaljenost ortocentra  $H$  do stranice  $\overline{BC}$ :

$$|HD| = 2d - |OA'|. \quad (1.75)$$

Kako je

$$|AH| = 2 \cdot |OA'|$$

(vidite napomenu 1.1.4), to je visina iz vrha  $A$  trokuta  $ABC$  jednaka

$$|AD| = |HD| + 2 \cdot |OA'|. \quad (1.76)$$

Iz jednakosti (1.75) i (1.76) slijedi

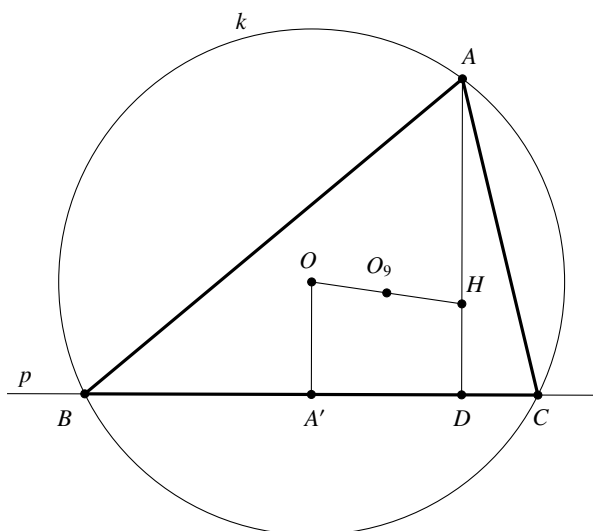
$$|AD| = 2d + |OA'|. \quad (1.77)$$

Sada konstruiramo pravac  $p$  paralelan s pravcem  $BC$  i udaljen od njega za  $|AD|$ . Točka u kojoj pravac  $p$  siječe kružnicu  $k$  je točka  $A$ . Zadatak će imati rješenje ako je  $|AD| \leq |OA'| + R$  odnosno, zbog jednakosti (1.77), ako je

$$2d \leq R.$$

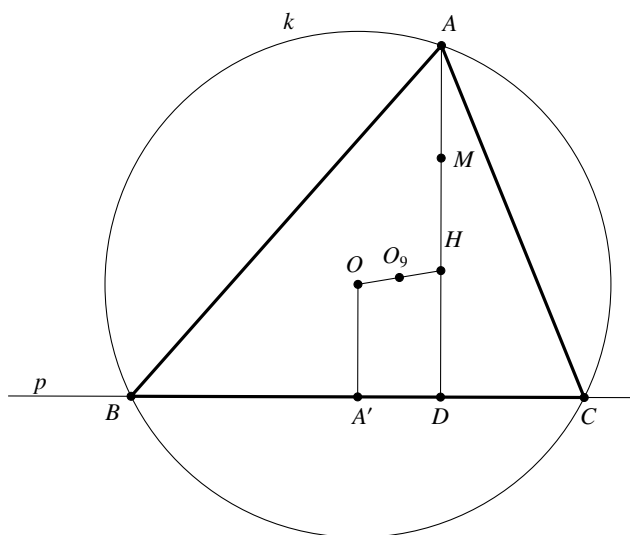
**Primjer 1.3.2.** Konstruirajte trokut  $ABC$  ako su mu zadani položaji ortocentra  $H$ , središta Feuerbachove kružnice  $O_9$  i nožišta  $D$  visine iz vrha  $A$ .

Kako su zadani položaji točaka  $H$  i  $O_9$ , a prema teoremu 1.1.1 znamo da je točka  $O_9$  polovište dužine  $\overline{HO}$ , tada znamo odrediti središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Točkom  $D$  položimo okomicu  $p$  na  $HD$ . Na toj okomici se nalaze točke  $B$  i  $C$ . Nožište okomice iz točke  $O$  na  $p$  označimo sa  $A'$ . Uočimo da je  $|AH| = 2 \cdot |OA'|$  (napomena 1.1.4), pa na pravac  $HD$  naneseemo dužinu  $\overline{OA'}$  dva puta i tako dobijemo vrh  $A$ , s tim da su točke  $D$  i  $A$  na različitim stranama pravca  $HD$  u odnosu na točku  $H$  (slika 1.27). Sada oko točke  $O$  opišemo kružnicu  $k$  polumjera duljine  $\overline{OA}$  i točke koje su presjeci kružnice i pravca  $p$  su vrhovi  $B$  i  $C$  trokuta  $ABC$ .



Slika 1.27: Slika uz primjer 1.3.2

**Primjer 1.3.3.** *Konstruirajte trokut  $ABC$  ako su mu zadani položaji vrha  $A$ , središte Feuerbachove kružnice  $O_9$  i središte opisane kružnice  $O$ .*



Slika 1.28: Slika uz primjere 1.3.3 i 1.3.4

Opišemo kružnicu  $k$  sa središtem u točki  $O$  polumjera  $|OA|$ . Kao i u prethodnom zadatku, uz primjenu teorema 1.1.1 znamo odrediti položaj ortocentra  $H$ , tako da je  $O_9$  polovište dužine  $\overline{OH}$ . Potom odredimo polovište  $M$  dužine  $\overline{AH}$  te točkom  $O$  položimo pravac paralelan s pravcem  $AH$  i na tom pravcu odredimo točku  $A'$  tako da je  $|OA'| = |AM|$ . Sada točkom  $A'$  položimo okomicu  $p$  na pravac  $OA'$ . Presjeci pravca  $p$  i kružnice  $k$  su vrhovi  $B$  i  $C$  trokuta  $ABC$ .

**Primjer 1.3.4.** *Konstruirajte trokut  $ABC$  kojem je zadan položaj vrha  $A$ , ortocentar  $H$  i središte  $O_9$  Feuerbachove kružnice.*

Odredimo prvo polovište  $M$  dužine  $\overline{AH}$ . Kako su zadani položaji točaka  $H$  i  $O_9$ , a prema teoremu 1.1.1 znamo da je točka  $O_9$  polovište dužine  $\overline{HO}$ , znamo odrediti središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Središte  $O$  opisane kružnice leži na pravcu  $HO_9$  tako da je  $O_9$  polovište dužine  $\overline{OH}$ . Opišimo kružnicu  $k(O, |OA|)$ . Zatim točkom  $O$  položimo pravac paralelan pravcu  $MH$ , i na tom pravcu odredimo točku  $A'$  tako da je  $|OA'| = |AM|$ . Točkom  $A'$  položimo okomicu  $p$  na pravac  $OA'$ . Presjeci pravca  $p$  i kružnice  $k$  su točke  $B$  i  $C$  trokuta  $ABC$ .

## Poglavlje 2

# Simsonov pravac

### 2.1 Svojstva Simsonovog pravca

U prvom dijelu ovog poglavlja proučavat ćemo svojstva Simsonovog<sup>1</sup> pravca.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je dan trokut  $ABC$  i njemu opisana kružnica  $k_o$ . Nožišta  $A_1, B_1, C_1$  okomica spuštenih iz neke točke  $P$  kružnice  $k_o$  na stranice danog trokuta  $ABC$  su kolinearne točke. Pravac  $s$  na kojem leže nožišta  $A_1, B_1, C_1$  zovemo Simsonovim pravcem točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .*

*Dokaz.* Kako je  $\sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PA_1B = 90^\circ$ , to su kutovi  $\sphericalangle PC_1B$  i  $\sphericalangle PA_1B$  kutovi nad promjerom  $\overline{BP}$  kružnice opisane tom četverokutu te je stoga četverokut  $C_1PA_1B$  tetivni. Kutovi  $\sphericalangle BPC_1$  i  $\sphericalangle BA_1C_1$  su obodni kutovi nad istim lukom te stoga vrijedi

$$\sphericalangle BPC_1 = \sphericalangle BA_1C_1 = \delta.$$

Analogno zaključujemo da je četverokut  $PCB_1A_1$  tetivni četverokut, pa vrijedi

$$\sphericalangle CPB_1 = \sphericalangle CA_1B_1 = \varepsilon.$$

Kako su trokuti  $PBC_1$  i  $PCB_1$  pravokutni, to vrijedi

$$\sphericalangle PBC_1 = 90^\circ - \delta, \quad (2.1)$$

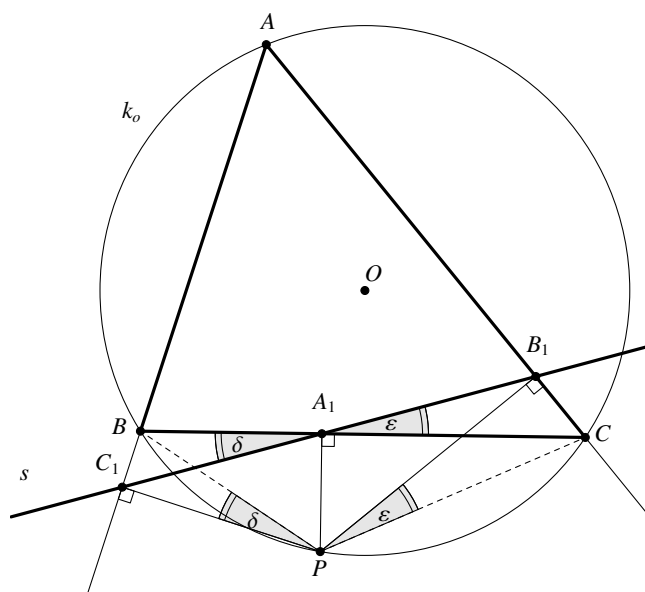
$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCB_1 = 90^\circ - \varepsilon. \quad (2.2)$$

Četverokut  $ABPC$  je tetivni pa uz primjenu jednakosti (2.1) vrijedi

$$\sphericalangle ACP = 180^\circ - \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC_1 = 90^\circ - \delta. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Robert Simson (1687. – 1768), škotski matematičar

Slika 2.1: Simsonov pravac točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ 

Sada iz jednakosti (2.2) i (2.3) slijedi da je  $\delta = \varepsilon$ . Time smo dokazali da je

$$\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle CA_1B_1,$$

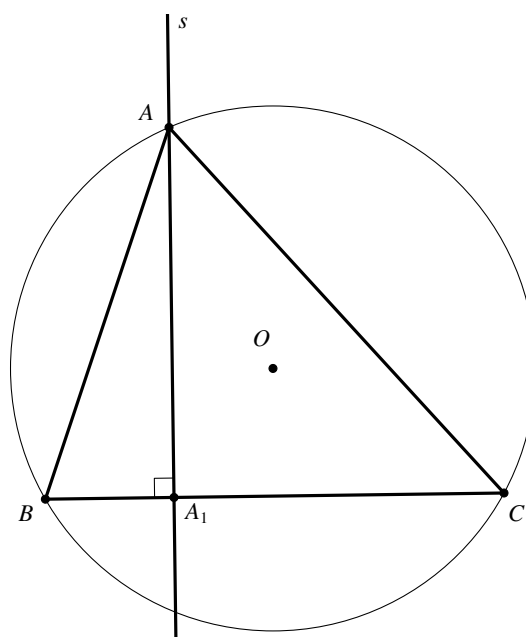
što znači da su kutovi  $\sphericalangle BA_1C_1$  i  $\sphericalangle CA_1B_1$  vršni kutovi pa im se po dva kraka nadopunjuju na pravac iz čega slijedi da točke  $A_1, B_1, C_1$  leže na istom pravcu.  $\square$

**Korolar 2.1.2.** *Simsonov pravac trokuta pridružen jednom vrhu tog trokuta podudara se s pravcem visine trokuta povučene iz tog vrha.*

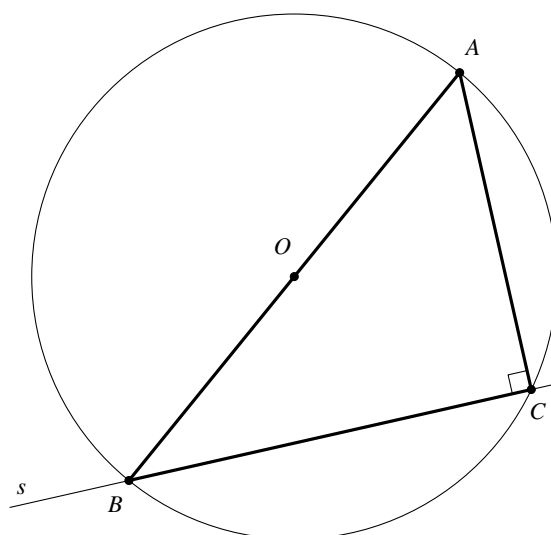
*Dokaz.* Ako iz bilo kojeg vrha trokuta spustimo okomice na priležeće stranice, nožišta će biti baš u tom vrhu, a ako spustimo okomicu na nasuprotnu stranicu, okomica će se podudarati s pravcem visine iz tog vrha (slika 2.2). Iz toga slijedi da se Simsonov pravac pridružen nekom vrhu trokuta podudara s pravcem visine iz tog vrha.  $\square$

**Korolar 2.1.3.** *Simsonov pravac pravokutnog trokuta pridružen jednom vrhu hipotenuze podudara se s pravcem katete kojoj pripada taj vrh.*

*Dokaz.* Ako iz bilo kojeg vrha hipotenuze spustimo okomice na priležeće stranice, nožišta će biti baš u tom vrhu, a ako spustimo okomicu na nasuprotnu stranicu, okomica će se podudarati s pravcem katete kojoj pripada taj vrh (slika 2.3).  $\square$



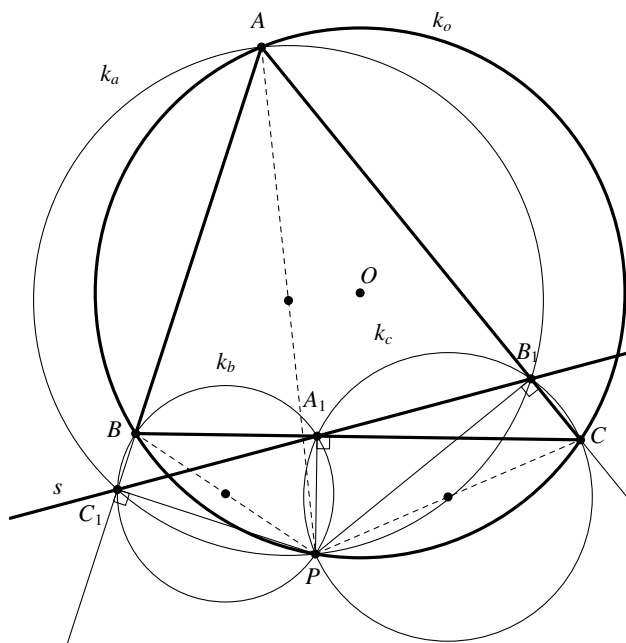
Slika 2.2: Simsonov pravac pridružen jednom vrhu trokuta (vrhu  $A$ )



Slika 2.3: Simsonov pravac pravokutnog trokuta pridružen jednom vrhu hipotenuze (vrhu  $B$ )

**Teorem 2.1.4.** *Točkom  $P$  dane kružnice  $k_o$  povucimo tri različite tetive  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PC}$ . Konstruirajmo tri kružnice  $k_a, k_b, k_c$  kojima su te tetive promjeri. Osim što sve te tri kružnice prolaze točkom  $P$ , sijeku se još u parovima u tri kolinearne točke  $A_1, B_1, C_1$ .*

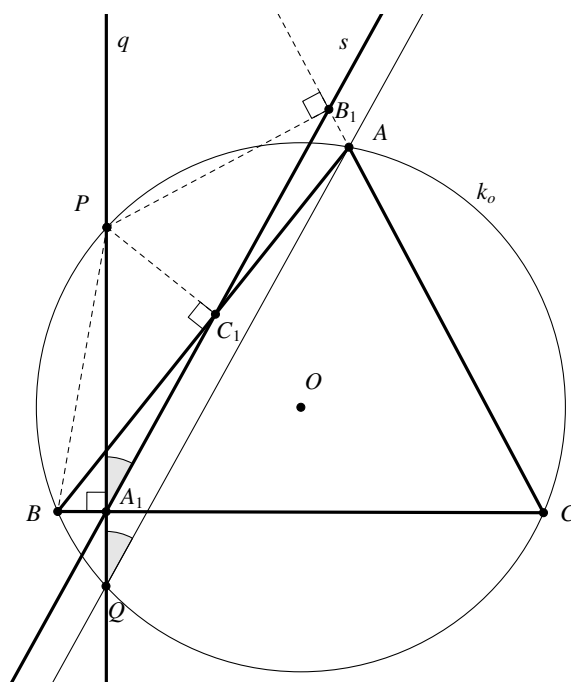
*Dokaz.* Neka je točka  $A_1$  drugo sjecište kružnica  $k_b$  i  $k_c$  (slika 2.4). Tada su kutovi  $\angle PA_1C$  i  $\angle PA_1B$  pravi jer su to obodni kutovi nad promjerima  $\overline{PB}$  i  $\overline{PC}$  kružnica  $k_b$  i  $k_c$ . Iz toga slijedi da su točke  $B, C, A_1$  kolinearne, a tada je točka  $A_1$  nožište okomice iz točke  $P$  na stranicu  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ . Analogno se dokaže da su točke  $B_1$  i  $C_1$  nožišta okomica iz točke  $P$  na stranice  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Prema prethodnom teoremu, nožišta  $A_1, B_1, C_1$  okomica spuštenih iz točke  $P$  na opisanoj kružnici  $k_o$  trokuta  $ABC$  na stranice tog trokuta leže na Simsonovom pravcu  $s$ .  $\square$



Slika 2.4: Slika uz teorem 2.1.4

**Teorem 2.1.5.** *Neka je  $s$  Simsonov pravac određen točkom  $P$  kružnice  $k_o$  opisane trokutu  $ABC$  te neka je pravac  $q$  položen točkom  $P$  okomit na  $BC$  i siječe kružnicu  $k$  u točki  $Q$ . Tada je pravac  $AQ$  paralelan s pravcem  $s$ .*

*Dokaz.* Točka  $A_1$  leži na kraku  $PQ$  kuta  $\angle PQA$  što znači da kutovi  $\angle PA_1C_1$  i  $\angle PQA$  imaju jedan zajednički krak pa samo trebamo dokazati da je  $\angle PA_1C_1 = \angle PQA$ . Četverokut  $BA_1C_1P$  je tetivni četverokut jer je  $\angle PC_1B = \angle PA_1B = 90^\circ$ , pa su kutovi  $\angle PC_1B$  i  $\angle PA_1B$



Slika 2.5: Slika uz dokaz teorema 2.1.5

kutovi nad promjerom  $\overline{BP}$  kružnice opisane tom četverokutu. Kutovi  $\angle PBC_1$  i  $\angle PA_1C_1$  su obodni kutovi nad istim lukom te stoga vrijedi

$$\angle PBC_1 = \angle PA_1C_1. \quad (2.4)$$

Kako su kutovi  $\angle PQA$  i  $\angle PBA$  obodni kutovi nad lukom  $\widehat{PA}$ , to vrijedi

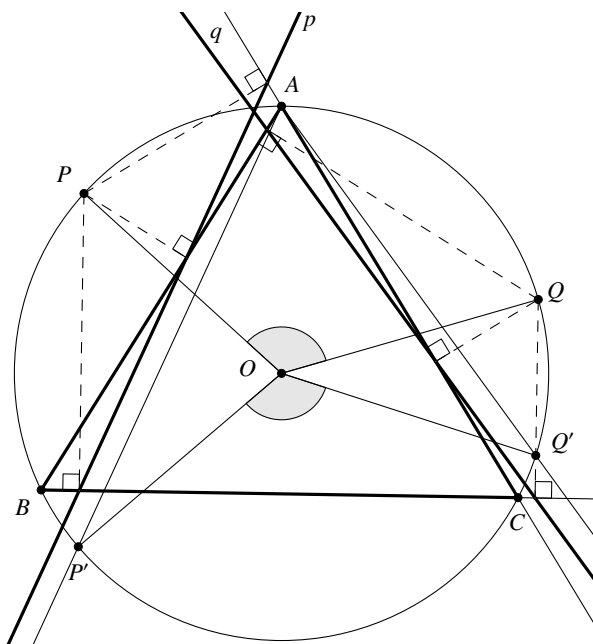
$$\angle PQA = \angle PBA = \angle PBC_1. \quad (2.5)$$

Iz jednakosti (2.4) i (2.5) slijedi

$$\angle PA_1C_1 = \angle PQA,$$

čime je tvrdnja teorema dokazana.  $\square$

**Teorem 2.1.6.** *Ako su  $p$  i  $q$  dva Simsonova pravca određena točkama  $P$  i  $Q$  kružnice  $k_O$  opisane trokutu  $ABC$ , tada je  $\angle(p, q) = \frac{1}{2}\angle QOP$ , pri čemu je  $O$  središte opisane kružnice danog trokuta.*



Slika 2.6: Slika uz dokaz teorema 2.1.6

*Dokaz.* Neka su  $P'$  i  $Q'$  sjecišta kružnice  $k_o$  i okomica iz točaka  $P$  i  $Q$  na pravac  $BC$ . Prema prethodnom teoremu vrijedi  $p \parallel P'A$  i  $q \parallel Q'A$ , iz čega slijedi

$$\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(P'A, Q'A) = \sphericalangle Q'AP'.$$

Primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu dobivamo

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle Q'OP'. \quad (2.6)$$

Kako su pravci  $PP'$  i  $QQ'$  paralelni, to je četverokut  $P'Q'QP$  trapez, a s obzirom na to da točke  $P, Q', Q, P'$  leže na istoj kružnici, taj trapez je tetivni. Prema tome, četverokut  $P'Q'QP$  je jednakokračni trapez. Dakle,  $|PQ| = |P'Q|$ , pa su trokuti  $P'Q'O$  i  $PQO$  sukladni prema S-S-S teoremu iz sukladnosti. Iz toga slijedi

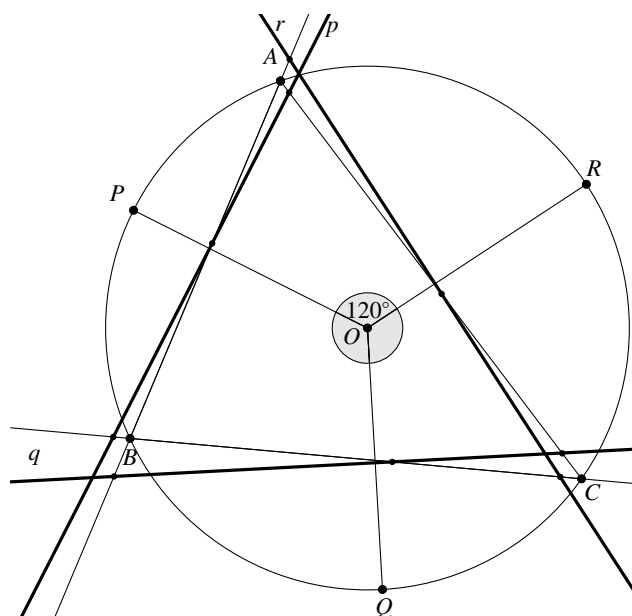
$$\sphericalangle Q'OP' = \sphericalangle QOP,$$

pa tada iz jednakosti (2.6) slijedi

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle QOP.$$

□

**Teorem 2.1.7.** Točke  $P, Q, R$  određuju na kružnici  $k_o$  tri jednaka luka. Simsonovi pravci  $p, q, r$  tih točaka, s obzirom na bilo koji trokut upisan u kružnicu  $k_o$ , određuju jednakostraničan trokut.



Slika 2.7: Slika uz dokaz teorema 2.1.7

*Dokaz.* Ako je  $O$  središte kružnice  $k_o$ , tada je

$$\sphericalangle POQ = \sphericalangle QOR = \sphericalangle ROP = 120^\circ.$$

Prema teoremu 2.1.6 vrijedi:

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle POQ = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle(q, r) = \frac{1}{2} \sphericalangle QOR = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle(r, p) = \frac{1}{2} \sphericalangle ROP = 60^\circ,$$

pa pravci  $p, q, r$  određuju jednakostraničan trokut.

□

**Teorem 2.1.8.** *Za nožišta okomica  $A_1, B_1, C_1$  spuštenih iz točke  $P$  na opisanoj kružnici  $k_o$  danog trokuta  $ABC$  na stranice tog trokuta vrijedi*

$$|PA| \cdot |PA_1| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1| = 2Rd,$$

gdje je  $R$  polumjer tom trokutu opisane kružnice  $k_o$ , a  $d$  udaljenost točke  $P$  od pripadnog Simsonovog pravca  $s$ .

*Dokaz.* Točke  $A_1, B_1, C_1$  leže na Simsonovom pravcu  $s$  trokuta  $ABC$  određenog točkom  $P$ . Kako je  $\angle PB_1C = \angle PA_1C = 90^\circ$ , to su kutovi  $\angle PB_1C$  i  $\angle PA_1C$  kutovi nad promjerom  $\overline{PC}$  kružnice opisane tom četverokutu te je stoga četverokut  $A_1CPB_1$  tetivni, pa vrijedi

$$\angle A_1PC = \angle A_1B_1C. \quad (2.7)$$

Analogno se dokaže da je četverokut  $AB_1PC_1$  tetivni iz čega slijedi:

$$\angle C_1B_1A = \angle C_1PA. \quad (2.8)$$

Kako su kutovi  $\angle A_1B_1C$  i  $\angle C_1B_1A$  vršni, to znači da su sukladni, pa tada iz jednakosti (2.7) i (2.8) slijedi

$$\angle A_1PC = \angle C_1PA = \delta.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi da su pravokutni trokuti  $PA_1C$  i  $PC_1A$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, iz čega sad slijedi

$$|PA_1| : |PC_1| = |PC| : |PA|,$$

odnosno

$$|PA_1| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PC_1|. \quad (2.9)$$

Analogno iz sličnosti trokuta  $PAB_1$  i  $PBA_1$  slijedi

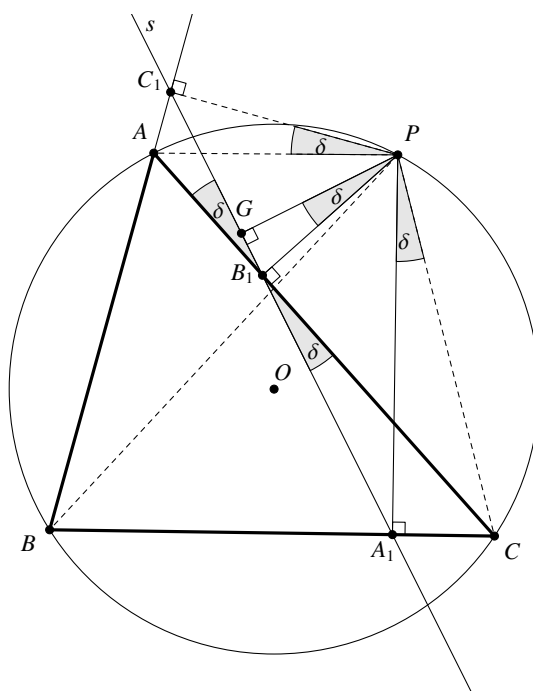
$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1|. \quad (2.10)$$

Sada iz jednakosti (2.9) i (2.10) dobivamo

$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1|. \quad (2.11)$$

Neka je točka  $G$  nožište okomice iz točke  $P$  na pravac  $s$ . Tada je  $|GP| = d$ . Kako kutovi  $\angle A_1B_1C$  i  $\angle GPB_1$  imaju u paru okomite krakove, to je  $\angle GPB_1 = \angle A_1B_1C = \delta$ , pa su pravokutni trokuti  $A_1CP$  i  $GB_1P$  slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, iz čega slijedi

$$|PA_1| : |PC| = |PG| : |PB_1|,$$



Slika 2.8: Slika uz dokaz teorema 2.1.8

odnosno

$$|PA_1| \cdot |PB_1| = d \cdot |PC|. \quad (2.12)$$

Izrazimo sada površinu trokuta  $BCP$  pomoću visine trokuta, te pomoću polumjera  $R$  tom trokutu opisane kružnice:

$$P = \frac{|BC| \cdot |PA_1|}{2} \quad \text{i} \quad P = \frac{|BC| \cdot |PC| \cdot |PB|}{4R}.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti slijedi

$$\frac{|BC| \cdot |PA_1|}{2} = \frac{|BC| \cdot |PC| \cdot |PB|}{4R},$$

iz čega dobivamo

$$2R \cdot |PA_1| = |PC| \cdot |PB|. \quad (2.13)$$

Dijeljenjem jednakosti (2.13) sa (2.12) dobivamo

$$\frac{2R \cdot |PA_1|}{|PA_1| \cdot |PB_1|} = \frac{|PC| \cdot |PB|}{d \cdot |PC|},$$

pa je

$$2Rd = |PB_1| \cdot |PB|. \quad (2.14)$$

Konačno iz jednakosti (2.11) i (2.14) zaključujemo

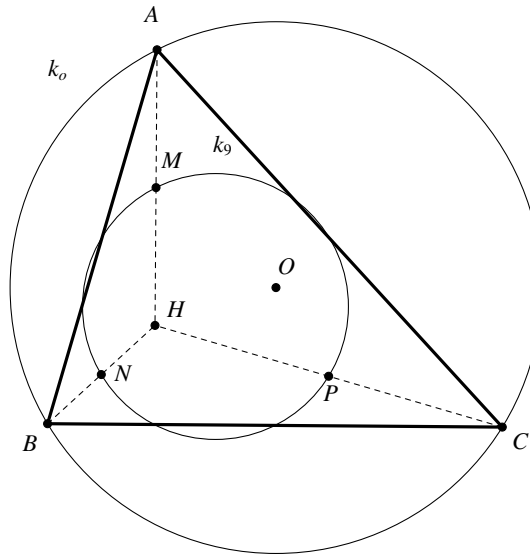
$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1| = 2Rd.$$

□

## 2.2 Veze Simsonovog pravca i kružnice devet točaka

U ovom poglavlju bavit ćemo se vezom između kružnice devet točaka i Simsonovog pravca. Na početku ovog poglavlja dokazat ćemo dva teorema koji će nam kasnije trebati.

**Teorem 2.2.1.** *Za dani trokut  $ABC$  su njegova kružnica devet točaka  $k_9$  i njemu opisana kružnica  $k_o$  homotetične kružnice sa središtem homotetije u ortocentru  $H$  i konstantom homotetije  $k = \frac{1}{2}$ .*



Slika 2.9: Slika uz dokaz teorema 2.2.1

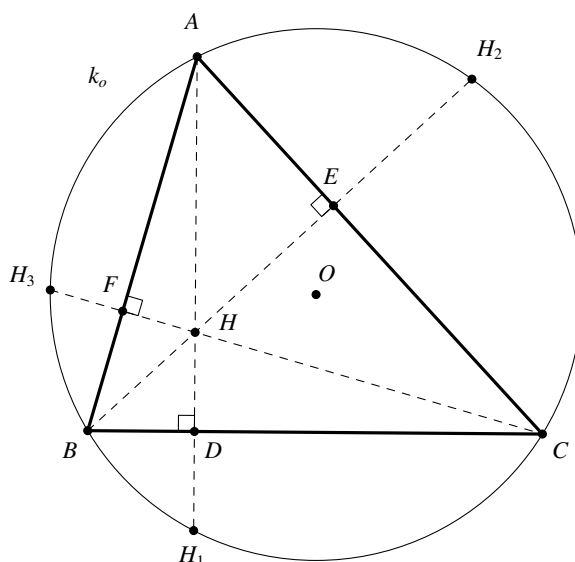
*Dokaz.* Neka su točke  $M, N, P$  redom polovišta dužina  $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ . Neka je sa  $h$  označena homotetija sa središtem u ortocentru  $H$  koja preslikava točku  $A$  u  $M$ , točku  $B$  u  $N$ , a točku  $C$  u  $P$ . Kako je

$$|MH| = \frac{1}{2}|AH|,$$

koefficient homotetije je očito  $k = \frac{1}{2}$ . Svaka kružnica je jednoznačno određena s tri točke. Kružnica  $k_o$  jednoznačno određena točkama  $A, B, C$  se homotetijom  $h$  preslika u kružnicu  $k$  određenu točkama  $M, N, P$ . Prema teoremu 1.1.1 te točke leže na kružnici devet točaka  $k_9$ , pa je kružnica  $k$  upravo kružnica  $k_9$ .  $\square$

**Korolar 2.2.2.** Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Za bilo koju točku  $T$  koja leži na kružnici opisanoj trokutu  $ABC$ , polovište dužine  $\overline{HT}$  leži na kružnici devet točaka tog trokuta.

**Lema 2.2.3.** Točke  $H_1, H_2, H_3$ , koje su simetrične ortocentru  $H$  s obzirom na stranice  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  danog trokuta  $ABC$ , leže na opisanoj kružnici tog trokuta.



Slika 2.10: Slika uz dokaz leme 2.2.3

*Dokaz.* Neka su točke  $D, E, F$  redom nožišta okomica iz vrhova  $A, B, C$  na nasuprotne stranice. Tada vrijedi

$$\sphericalangle HEA + \sphericalangle AFH = 180^\circ,$$

iz čega slijedi da je četverokut  $AFHE$  tetivni, pa vrijedi i

$$\sphericalangle EAF + \sphericalangle EHF = 180^\circ. \quad (2.15)$$

Promatrajući sliku 2.10 uočavamo, da zbog simetrije točaka  $H$  i  $H_1$  s obzirom na pravac  $BC$ , vrijedi

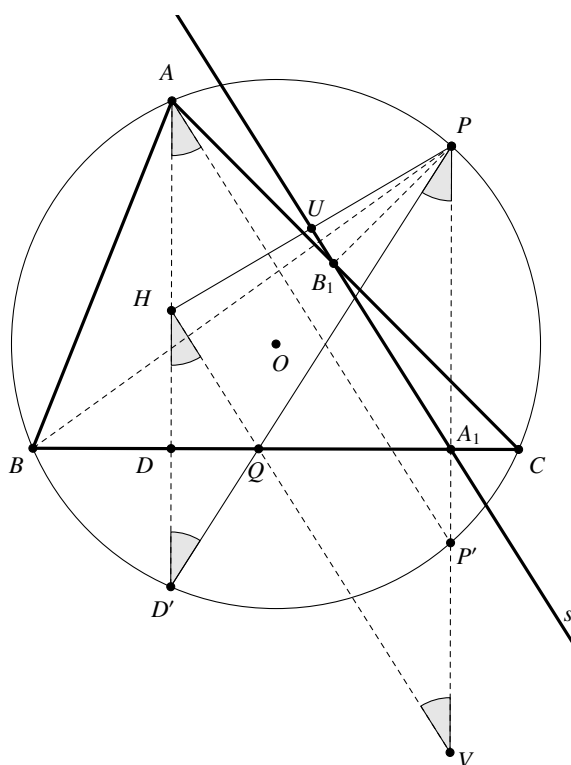
$$\sphericalangle BH_1C = \sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF,$$

jer su kutovi  $\angle BHC$  i  $\angle EHF$  vršni. Sada jednakost (2.15) postaje

$$\angle BAC + \angle BH_1C = 180^\circ,$$

pa je četverokut  $ABH_1C$  tetivni, tj. točka  $H_1$  leži na kružnici  $k_o$ . Analogno se dokaže za točke  $H_2$  i  $H_3$ .  $\square$

**Teorem 2.2.4.** *Simsonov pravac s neke točke  $P$ , koja leži na trokutu  $ABC$  opisanoj kružnici  $k_o$ , siječe dužinu  $\overline{PH}$  u njezinom polovištu  $U$ , pri čemu je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Pri tom točka  $U$  leži na Feuerbachovoj kružnici  $k_9$ .*



Slika 2.11: Slika uz dokaz teorema 2.2.4

*Dokaz.* Neka je točka  $D$  nožište visine iz vrha  $A$  na stranicu  $\overline{BC}$  te neka je točka  $D'$  presjek pravca te visine i kružnice  $k_o$ . Nadalje, neka je točka  $A_1$  nožište okomice iz točke  $P$  na stranicu  $\overline{BC}$ , a točka  $P'$  presjek te okomice i kružnice  $k_o$ . Neka je točka  $Q$  presjek pravca  $D'P$  i stranice  $\overline{BC}$ , a točka  $V$  presjek pravca  $HQ$  i  $PP'$ . Promotrimo sada trokute  $HDQ$  i  $D'DQ$  na slici 2.11. Kutovi pri vrhu  $D$  u oba trokuta su pravi. Prema lemi 2.2.3 vrijedi

$$|DH| = |DD'|,$$

a kako je stranica  $\overline{DQ}$  zajednička stranica promatranih trokuta  $HDQ$  i  $D'DQ$ , to su oni sukladni prema S-K-S teoremu o sukladnosti. Stoga vrijedi

$$\sphericalangle DHQ = \sphericalangle DD'Q. \quad (2.16)$$

Kutovima  $\sphericalangle DD'Q$  i  $\sphericalangle D'PP'$  jedan krak leži na pravcu  $D'P$ , a drugi leže na paralelnim pravcima ( $DD'$  i  $PP'$  koji su oba okomiti na  $BC$ ), pa je

$$\sphericalangle DD'Q = \sphericalangle D'PP'. \quad (2.17)$$

Kutovi  $\sphericalangle D'PP'$  i  $\sphericalangle D'AP'$  su obodni kutovi nad istim lukom pa vrijedi

$$\sphericalangle D'PP' = \sphericalangle D'AP'. \quad (2.18)$$

Iz (2.16), (2.17) i (2.18) slijedi

$$\sphericalangle DHQ = \sphericalangle D'AP'.$$

Kako tim kutovima po jedan krak leži na istom pravcu, to pravci na kojima leže druga dva kraka moraju biti paralelni, pa vrijedi

$$HV \parallel AP'.$$

Prema teoremu 2.1.5,

$$s \parallel AP',$$

pa je

$$HV \parallel s.$$

Nadalje, trokuti  $HD'Q$  i  $PVQ$  su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti jer im odgovarajuće stranice leže na međusobno paralelnim pravcima. Kako je točka  $D$  polovište dužine  $\overline{HD'}$ , to je točka  $A_1$  polovište dužine  $\overline{P\bar{V}}$ . Promotrimo sada trokut  $PHV$ . Simsonov pravac  $s$  paralelan je sa  $HV$  i siječe  $\overline{P\bar{V}}$  u točki  $A_1$  koja je polovište dužine  $\overline{P\bar{V}}$ , pa tada siječe i stranicu  $\overline{HP}$  u njenom polovištu  $U$ . Dokazali smo da je točka  $U$  polovište dužine  $\overline{HP}$ , a prema korolaru 2.2.2 ona leži na kružnici  $k_9$ .  $\square$

**Teorem 2.2.5.** *Neka su  $P_1$  i  $P_2$  dijametralno suprotne točke opisane kružnice  $k_o$  trokuta  $ABC$ . Simsonovi pravci  $s_1$  i  $s_2$  takvih točaka međusobno su okomiti pravci i sijeku se u točki  $V$  na Feuerbachovoj kružnici.*

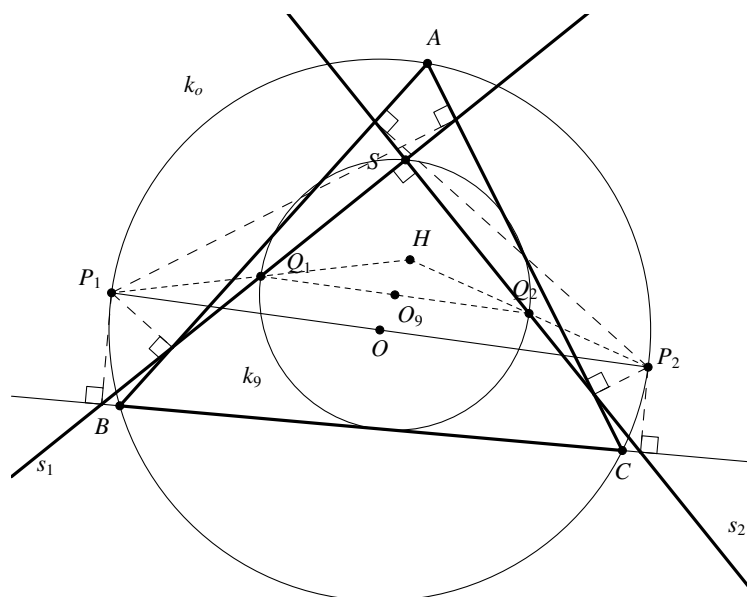
*Dokaz.* Kako su točke  $P_1$  i  $P_2$  dijametralno suprotne točke opisane kružnice  $k_o$ , to je

$$\sphericalangle P_1OP_2 = 180^\circ,$$

a prema teoremu 2.1.6 vrijedi

$$\sphericalangle(s_1, s_2) = \frac{1}{2} \sphericalangle P_1OP_2 = 90^\circ,$$

tj. pravci  $s_1$  i  $s_2$  su okomiti.  $\square$



Slika 2.12: Slika uz dokaz teorema 2.2.5

Neka je točka  $S$  sjecište pravaca  $s_1$  i  $s_2$  te neka su točke  $Q_1$  i  $Q_2$  polovišta dužina  $\overline{P_1H}$  i  $\overline{P_2H}$ , gdje je  $H$  ortocentar promatranog trokuta. Te točke prema teoremu 2.2.4 leže na pravcu  $s_1$ , odnosno  $s_2$ , a prema tom istom teoremu leže i na kružnici devet točaka  $k_9$ . Prema teoremu 2.2.1 postoji homotetija  $h$  sa središtem u ortocentru  $H$  trokuta  $ABC$  i koeficijentom  $k = \frac{1}{2}$  koja opisanu kružnicu  $k_o$  preslikava u kružnicu devet točaka  $k_9$ . Tada će ta homotetija preslikati promjer  $\overline{P_1P_2}$  kružnice  $k_o$  u promjer  $\overline{Q_1Q_2}$  kružnice  $k_9$ . Kako su pravci  $s_1$  i  $s_2$ , odnosno  $Q_1S$  i  $Q_2S$  međusobno okomiti, to prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice točka  $S$  pripada kružnici kojoj je  $\overline{Q_1Q_2}$  promjer, tj. pripada kružnici  $k_9$ .

# Bibliografija

- [1] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, (2007), dostupno na <http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (svibanj 2015.).
- [2] A. Marić, *Neki poučci o Simsonovom pravcu*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike – mentore **14** (2005), 58 – 64.
- [3] D. Palman, *Simsonov pravac trokuta*, Matematika **XIV** (1985), br. 2, 38 – 45.
- [4] D. Palman, *Kružnica devet točaka i Feuerbachov teorem*, Matematika **XV** (1986), br.1, 54 – 64.
- [5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 2004.

## Sažetak

U ovom radu proćavali smo kružnicu devet toćaka (Feuerbachovu kružnicu), Feuerbachov teorem i Simsonov pravac.

Za svaki trokut  $ABC$ , polovišta stranica  $A', B', C'$ , nožišta visina  $D, E, F$  te toćke  $M, N, P$  koje su polovišta dužina  $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ , pri ćemu je  $H$  ortocentar danog trokuta, leže na kružnici  $k_9$  koju nazivamo kružnicom devet toćaka ili Feuerbachovom kružnicom. Središte te kružnice je polovište dužine  $\overline{HO}$ , gdje je  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , a njen polumjer je jednak polovini polumjera opisane kružnice.

Prema Feuerbachovom teoremu, kružnica devet toćaka dodiruje trokutu  $ABC$  upisanu i sve tri pripisane kružnice, te vrijedi:

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$

$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c,$$

pri ćemu je toćka  $O_9$  središte kružnice devet toćaka,  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice,  $U, U_a, U_b, U_c$  središta upisane odnosno pripisanih kružnica te  $r, r_a, r_b, r_c$  redom njihovi polumjeri.

Simsonov pravac je pravac na kojem leže nožišta okomica spuštenih iz neke toćke opisane kružnice trokuta na stranice tog trokuta.

Ako je  $H$  ortocentar danog trokuta, Simsonov pravac neke toćke  $P$  koja leži na opisanoj kružnici tog trokuta sijeće dužinu  $\overline{PH}$  u njenom polovištu i to polovište leži na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.

Nadalje, Simsonovi pravci dijametralno suprotnih toćaka opisane kružnice danog trokuta su međusobno okomiti i sijeku se na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.

# Summary

In this thesis we studied the nine-point circle (Feuerbach's circle), Feuerbach's theorem and the Simson line.

For each triangle  $ABC$ , the midpoints  $A', B', C'$  of its sides, the feet  $D, E, F$  of its altitudes, and points  $M, N, P$  which are the midpoints of line segments  $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ , where  $H$  is the orthocentre of a given triangle, lie on a circle which is called the nine-point circle or Feuerbach's circle. The centre of that circle is the midpoint of line segment  $\overline{HO}$ , where  $O$  is the centre of the circumscribed circle of the triangle  $ABC$ , and its radius is half of the radius of the circumscribed circle.

According to Feuerbach's theorem, the nine-point circle touches the inscribed circle and all three escribed circles of triangle, and the following holds true:

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$

$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c,$$

where  $O_9$  is the centre of the nine-point circle,  $R$  is the radius of the triangle's inscribed circle,  $U, U_a, U_b, U_c$  are the centres of inscribed and escribed circles and  $r, r_a, r_b, r_c$  are their radii, respectively.

The Simson line is a line through the feet of perpendiculars from a point of the triangle's circumscribed circle to the sides of that triangle.

If  $H$  is the orthocentre of a given triangle, the Simson line of a point  $P$  that lies on that triangle's circumscribed circle intersects the line segment  $\overline{PH}$  in its midpoint and that midpoint lies on Feuerbach's circle of that triangle.

Furthermore, the Simson lines of diametrically opposite points of the circumscribed circle of given triangle are perpendicular and they intersect on that triangle's Feuerbach's circle.

# Životopis

Rođena sam 15.1.1989. godine u Đakovu, gdje 1995. upisujem Osnovnu školu Vladimira Nazora. Nakon osnovne škole, upisujem Opću gimnaziju A. G. Matoša, koju pohađam do 2007. godine, kada upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno – matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2012. završavam preddiplomski studij i upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.