Numerička metoda za model lineariziranog stenta

Iveković, Josip

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:401004

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Iveković

NUMERIČKA METODA ZA MODEL LINEARIZIRANOG STENTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Josip Tambača

Zagreb, veljača, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Mješovita varijacijska zadaća **3**
1.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja mješovite zadaće 3

2 Model stenta - formulacija problema **9**
2.1 Diferencijalna formulacija problema za jedan štap 9
2.2 Slaba formulacija problema za jedan štap 10
2.3 Slaba formulacija problema za stent 10
2.4 Mješovita formulacija problema 13

3 Numerika **33**
3.1 Numerika za jedan ravni štap 33
3.2 Numerika za stent 53
3.3 Rezultati 60

Bibliografija **67**

Uvod

U ovome radu bavimo se numerikom za model stacionarnog problema za stent, elastične metalne mrežice cilindričnog oblika (detaljnija definicija je dana u drugom poglavlju). Budući da je stent skup tankih metalnih štapova spojenih u mrežu, na njega možemo gledati kao na jednodimenzionalnu strukturu smještenu u trodimenzionalnom prostoru. U skladu s time razvijen je model stenta koji koristimo u radu. Takav način modeliranja razlikuje se od uobičajenog modela, u kojem se na stent gleda kao na 3D elastično tijelo.

Numeriku razvijamo za mješovitu formulaciju problema, koja je numerički stabilnija od originalne slabe formulacije. Funkcije kojima opisujemo deformaciju stenta po dijelovima aproksimiramo prostorima polinoma. Želja nam je ispitati konvergira li naša metoda uz postupno profinjavanje mreže stenta. Također, u interesu nam je odrediti red konvergencije metode, za koji očekujemo da ovisi o stupnju polinoma koje koristimo.

Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju iznosimo teorijske rezultate vezane uz egzistenciju i jedinstvenost rješenja općenite mješovite varijacijske zadaće. U drugom poglavlju iznosimo model stenta koji koristimo te pokazujemo da naš model zadovoljava pretpostavke koje su potrebne za primjenu teorije iznesene u prvom poglavlju. U trećem poglavlju bavimo se naposljetku numerikom, središnjom temom ovog rada, te iznosimo dobivene rezultate. Za računanje koristimo programski jezik *Matlab*.

Poglavlje 1

Mješovita varijacijska zadaća

U ovome poglavlju navodimo teorijske rezultate iz [1] koje ćemo kasnije primijeniti na model stenta, središnju temu ovoga rada.

1.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja mješovite zadaće

Neka su X i M dva realna *Hilbertova prostora* s normama $\|.\|_X$ i $\|.\|_M$, respektivno. Neka su X' i M' odgovarajući dualni prostori te neka $\|.\|_{X'}$ i $\|.\|_{M'}$ označavaju njihove dualne norme. Za djelovanje funkcionala na vektor koristit ćemo oznaku $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$.

Sada uvodimo dvije *bilinearne* neprekidne forme:

$$a(.,.)\colon X \times X \to \mathbb{R}\,, \qquad b(.,.)\colon M \times X \to \mathbb{R}\,,$$

pri čemu su njihove norme definirane sa

$$\|a\| = \sup_{\substack{u,v\in X\\ u,v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X\|v\|_X}\,, \qquad \|b\| = \sup_{\substack{v\in X,\,\mu\in M\\ v\neq 0,\,\mu\neq 0}} \frac{b(\mu,v)}{\|\mu\|_M\|v\|_X}\,.$$

Promatrat ćemo sljedeći varijacijski problem, nazvan *Problem (Q)*:

Uz dane $l \in X'$ i $\chi \in M'$, naći par $(u,\lambda) \in X \times M$, takav da je

$$a(u,v) + b(\lambda,v) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in X, \tag{1.1a}$$

$$b(\mu,u) = \langle \chi, \mu\rangle \qquad \forall \mu \in M. \tag{1.1b}$$

Da bismo analizirali Problem(Q), potrebne su nam dodatne oznake. Sa bilinearnim formama $a(.,.)$ i $b(.,.)$ povezujemo linearne operatore $A \in \mathscr{L}(X;X')$ i $B \in \mathscr{L}(X;M')$, defini-

rane sa:

$$\langle Au, v\rangle = a(u, v) \qquad \forall u, v \in X, \tag{1.2}$$
$$\langle Bv, \mu\rangle = b(\mu, v) \qquad \forall v \in X,\ \forall \mu \in M. \tag{1.3}$$

Neka je $B' \in \mathscr{L}(M; X')$ dualni operator od B, tj.

$$\langle B'\mu, v\rangle = \langle Bv, \mu\rangle = b(\mu, v) \qquad \forall v \in X,\ \forall \mu \in M. \tag{1.4}$$

Lako se pokaže da je

$$\|A\|_{\mathscr{L}(X;X')} = \|a\|, \qquad \|B\|_{\mathscr{L}(X;M')} = \|b\|. \tag{1.5}$$

Sada, uz dane operatore, Problem(Q) možemo zapisati u sljedećem obliku:

Naći $(u, \lambda) \in X \times M$ koji zadovoljava

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= l \qquad \text{u } X', \\ Bu &= \chi \qquad \text{u } M'. \end{aligned}$$

Uvedimo još linearan operator $\Phi \in \mathscr{L}(X \times M; X' \times M')$, definiran sa:

$$\Phi(v, \mu) = (Av + B'\mu, Bv).$$

Očito je Problem(Q) *dobro postavljen* (tj. ima jedinstveno rješenje) ako je Φ izomorfizam iz $X \times M$ u $X' \times M'$. Želja nam je dati nužne i dovoljne uvjete da Problem(Q) bude dobro postavljen. Uvodimo oznaku

$$V = \mathrm{Ker}(B),$$

i općenitije, za svaki $\chi \in M'$ definiramo afinu mnogostrukost

$$V(\chi) = \{v \in X;\ Bv = \chi\}.$$

Drugačije zapisano,

$$\begin{cases} V(\chi) = \{v \in X;\ b(\mu, v) = \langle \chi, \mu\rangle \quad \forall \mu \in M\}, \\ V = V(0). \end{cases}$$

Nadalje, neprekidnost operatora B povlači da je V zatvoren potprostor od X ($V \leq X$). S Problemom(Q) povezat ćemo sada sljedeći problem, nazvan *Problem(P)*:

Naći $u \in V(\chi)$ takav da vrijedi

$$a(u, v) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.6}$$

Ako je $(u, \lambda) \in X \times M$ rješenje Problema(Q), onda je očito $u \in V(\chi)$ i u zadovoljava jednadžbu (1.6), pa je u rješenje Problema(P). Htjeli bismo naći prikladne uvjete koji bi osigurali obratnu tvrdnju. U tu svrhu, definirat ćemo anihilator skupa V ($V^0 \leq X'$):

$$V^0 = \{g \in X';\ \langle g, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Lema 1.1.1. *Sljedeća tri svojstva su ekvivalentna:*

(i) postoji konstanta $\beta > 0$ takva da je

$$\inf_{\mu\in M} \sup_{v\in X} \frac{b(\mu, v)}{\|\mu\|_M \|v\|_X} \geq \beta\,; \tag{1.7}$$

(ii) operator B' je izomorfizam sa M u V^0 i

$$\|B'\mu\|_{X'} \geq \beta\,\|\mu\|_M \qquad \forall \mu \in M; \tag{1.8}$$

(iii) operator B je izomorfizam sa $V^\perp$ u M' i

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta\,\|v\|_X \qquad \forall v \in V^\perp. \tag{1.9}$$

Dokaz. 1) Pokažimo prvo da je (i) ekvivalentno sa (ii).
Ako primijenimo (1.4) na tvrdnju (i), slijedi da je

$$\|B'\mu\|_{X'} = \sup_{\substack{v\in X\\ v\neq 0}} \frac{\langle B'\mu, v\rangle}{\|v\|_X} \geq \beta\,\|\mu\|_M \qquad \forall \mu \in M,$$

odnosno (1.7) je ekvivalentno sa (1.8). Slijedi da (ii) povlači (i). Da bismo pokazali da (i) povlači (ii), dovoljno je pokazati da je, uz uvjet da vrijedi (1.8), B' izomorfizam sa M u V^0. Za početak, iz (1.8) očito slijedi da je B' injekcija ($\mathrm{Ker}(B') = \{0\}$). Nadalje, iz (1.8) proizlazi da B' ima neprekidan inverz, pa je B' izomorfizam sa M u $\mathscr{R}(B')$ i $\mathscr{R}(B')$ je zatvoren potprostor od X'.
Preostaje, dakle, pokazati da je

$$\mathscr{R}(B') = V^0.$$

Budući da je B' operator sa zatvorenim grafom (ekvivalentno s neprekidnošću), možemo primijeniti *Banachov teorem o zatvorenom rangu*: iz zatvorenosti prostora $\mathscr{R}(B')$ slijedi da je

$$\mathscr{R}(B') = (\mathrm{Ker}(B))^0 = V^0.$$

Time smo dokazali da je (i) ekvivalentno sa (ii).

2) Sada pokazujemo da je tvrdnja (ii) ekvivalentna sa tvrdnjom (iii).
Prvo uočimo da je V^0 *izometrički izomorfno* sa $(V^\perp)'$. Da to pokažemo, neka $v^\perp$ označava ortogonalnu projekciju proizvoljnog $v \in X$ na $V^\perp$. Sada svakom $g \in (V^\perp)'$ pridružimo element $\tilde{g} \in X'$ definiran sa:

$$\langle \tilde{g}, v \rangle = \langle g, v^\perp \rangle \qquad \forall v \in X.$$

Očito je $\tilde{g} \in V^0$. Naime, za svaki $v \in V$ vrijedi da je $v^\perp = 0$, pa je $\langle \tilde{g}, v \rangle = \langle g, 0 \rangle = 0$. Konačno, lako se pokaže da je preslikavanje $g \to \tilde{g}$ izometrička bijekcija sa $(V^\perp)'$ u V^0, pa su, stoga, prostori V^0 i $(V^\perp)'$ doista izometrički izomorfni.

Posljedica je te činjenice da je B izomorfizam sa $V^\perp$ u M', sa

$$\|B^{-1}\|_{\mathscr{L}(M';V^\perp)} \leq \frac{1}{\beta},$$

ako i samo ako je B' izomorfizam sa M u $(V^\perp)' = V^0$, i

$$\|(B')^{-1}\|_{\mathscr{L}(V^0;M)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Slijedi da su tvrdnje (ii) i (iii) ekvivalentne. □

Uvjet (1.7) obično se naziva "inf-sup uvjet", a neovisno su ga uveli Babuška i Brezzi.

Da bismo iznijeli glavni rezultat ovog poglavlja, uvodimo neprekidan linearan operator $\pi \in \mathscr{L}(X'; V')$ sa:

$$\langle \pi f, v \rangle = \langle f, v \rangle \qquad \forall f \in X', \quad \forall v \in V.$$

Očito vrijedi:

$$\|\pi f\|_{V'} \leq \|f\|_{X'}.$$

Teorem 1.1.2. *Problem(Q) je* dobro postavljen *(tj. operator* Φ *je izomorfizam sa* $X \times M$ *u* $X' \times M'$*) ako i samo ako vrijede sljedeći uvjeti:*

(i) operator πA *je izomorfizam sa* V *u* V'*;*

(ii) bilinearna forma $b(.,.)$ *zadovoljava* inf-sup uvjet *(Babuška-Brezzi uvjet)* (1.7).

Dokaz. 1) Uvjeti (i) i (ii) su dovoljni.
Iz uvjeta (1.7) i Leme 1.1.1 slijedi da je $B\colon V^\perp \to M'$ izomorfizam, pa za svaki $\chi \in M'$ postoji jedinstveni $u_0 \in V^\perp$ takav da je

$$\begin{cases} Bu_0 = \chi, \\ \|u_0\|_X \leq \dfrac{1}{\beta} \|\chi\|_{M'}. \end{cases}$$

Sada Problem(P) možemo zapisati na ovaj način:

Naći $w = u - u_0 \in V$ koji zadovoljava jednakost

$$a(w, v) = \langle l, v\rangle - a(u_0, v) \qquad \forall v \in V,$$

odnosno,

$$\pi A w = \pi(l - Au_0).$$

Zbog pretpostavke (i), πA je izomorfizam sa V u V', pa Problem(P) ima jedinstveno rješenje $u = u_0 + w \in V(\chi)$, te vrijedi

$$\|w\|_X \leq C_1 \|\pi(l - Au_0)\|_{V'} \leq C_1 \|l - Au_0\|_{X'},$$

odnosno

$$\|u\|_X \leq C_2 (\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}).$$

Vrijedi da je $l - Au \in V^0$. Stoga, po Lemi 1.1.1 postoji jedinstveni $\lambda \in M$ takav da je

$$B'\lambda = l - Au\,,$$

sa

$$\|\lambda\|_M \leq \frac{1}{\beta}\|l - Au\|_{X'} \leq C_3 (\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}).$$

Zaključujemo da Problem(Q) ima jedinstveno rješenje (u, λ), a preslikavanje $(l, \chi) \mapsto (u, \lambda)$ je neprekidna funkcija sa $X' \times M'$ u $X \times M$. Iz toga slijedi da je Φ izomorfizam sa $X \times M$ u $X' \times M'$.

2) Uvjeti (i) i (ii) su nužni.
Pretpostavimo da je Φ izomorfizam sa $X \times M$ u $X' \times M'$. Prvo ćemo pokazati da tada vrijedi inf-sup uvjet (1.7). Neka je $\chi \in M'$ i postavimo $(u, \lambda) = \Phi^{-1}(0, \chi)$. Tada je $Bu = \chi$, pa je očito $\mathscr{R}(B) = M'$. Ako uzmemo u obzir i jedinstvenost od u, slijedi da je B neprekidna bijekcija sa $V^\perp$ u M', dakle izomorfizam sa $V^\perp$ u M'. Po Lemi 1.1.1 zaključujemo da je zadovoljen uvjet (1.7).

Pokažimo sada da je πA izomorfizam sa V u V'. Prvo provjeravamo da je πA injekcija na V. U tu svrhu, neka $u \in V$ zadovoljava $\pi A u = 0$, tako da je $Au \in V^0$. Budući da vrijedi inf-sup uvjet, po Lemi 1.1.1 znamo da je B' izomorfizam sa M u V^0. Postoji, stoga, $\lambda \in M$ takav da je $B'\lambda = -Au$. Sada zaključujemo da je $\Phi(u, \lambda) = (0, 0)$, pa zbog injektivnosti od Φ slijedi da je $u = 0$. Drugim riječima, πA je injekcija.

Na redu je provjera surjektivnosti od πA. Neka je $g \in V'$. Po Hahn-Banachovom teoremu, postoji barem jedan $l \in X'$ takav da je $g = \pi l$. Postavimo $(u, \lambda) = \Phi^{-1}(l, 0)$. Tada je $u \in V$ i

$$Au + B'\lambda = l\,. \tag{1.10}$$

Budući da je za svaki $v \in V$

$$\langle \pi B' \lambda, v \rangle = \langle B' \lambda, v \rangle = \langle \lambda, Bv \rangle = \langle \lambda, 0 \rangle = 0 \,,$$

vrijedi $\pi B' \lambda = 0$, pa onda iz (11) slijedi da je

$$\pi A u = \pi l = g \,.$$

Time smo pokazali da je $\pi A \colon V \to V'$ surjekcija. Zaključno, πA je neprekidna linearna bijekcija, dakle izomorfizam. □

Korolar 1.1.3. *Pretpostavimo da je bilinearna forma $a(.,.)$ V-eliptička, tj. da postoji $\alpha > 0$ takav da je*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \qquad \forall v \in V. \tag{1.11}$$

Tada je Problem(Q) dobro postavljen ako i samo ako bilinearna forma $b(.,.)$ zadovoljava inf-sup uvjet (1.7).

Dokaz. Neka je $l \in V'$. Kako je $a(.,.)$ V-eliptička, možemo primijeniti *Lax-Milgramovu lemu*: postoji jedinstveni $u \in V$ takav da je

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \qquad \forall v \in V,$$

odnosno

$$\pi A u = l \,.$$

Štoviše, $l \mapsto u$ je neprekidno preslikavanje sa V' u V. Slijedi da je πA izomorfizam sa V u V', pa tvrdnja korolara slijedi primjenom Teorema 1.1.2. □

Poglavlje 2

Model stenta - formulacija problema

U ovome poglavlju izvodimo jednodimenzionalni model stenta, koji je dan u [2].

2.1 Diferencijalna formulacija problema za jedan štap

U ovoj sekciji iznosimo model stacionarnog problema za savijeni elastični štap duljine h. Koristit ćemo linearizirani *Antman-Cosserat model* za nerastezljive i nesmičljive štapove. Zanima nas kako se štap deformira pod utjecajem neke zadane vanjske sile. Model glasi:

Naći (y, θ, m, n) takve da vrijedi

$$0 = \partial_s n + f\,, \tag{2.1}$$
$$0 = \partial_s m + t \times n + l\,, \tag{2.2}$$
$$0 = \partial_s \theta - QH^{-1}Q^T m\,, \tag{2.3}$$
$$0 = \partial_s y + t \times \theta\,. \tag{2.4}$$

U prethodnom sustavu $s \in [0, h]$ je varijabla kojom parametriziramo središnju liniju štapa, y označava pomak središnje linije štapa, θ je infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka štapa, m je kontaktni moment, n kontaktna sila, t je tangenta na nedeformiranu središnju liniju štapa, $Q = (t, n, b)$ je Frentov okvir za nedeformiranu središnju liniju štapa, l je linijska gustoća vanjskog momenta, a f linijska gustoća vanjske sile koja djeluje na štap.

Prve dvije jednadžbe opisuju, redom, ravnotežu kontaktne sile i ravnotežu kontaktnog momenta, dok posljednje dvije jednadžbe opisuju, redom, konstitutivnu relaciju za zakrivljeni, linearno elastični štap, te uvjet nerastezljivosti i nesmičljivosti za štap.

2.2 Slaba formulacija problema za jedan štap

Prvo uvodimo testni prostor kojim opisujemo pomak središnje linije štapa i infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka štapa. Budući da se u (2.3) i (2.4) javljaju derivacije funkcija y i θ, logično je da testni prostor za slabu formulaciju bude potprostor od $H^1(0,h;\mathbb{R}^3) \times H^1(0,h;\mathbb{R}^3)$, odnosno $H^1(0,h)^3 \times H^1(0,h)^3$, gdje je h duljina štapa. Za funkcije iz tog prostora zahtijevamo također da zadovoljavaju uvjet nerastezljivosti i nesmičljivosti, pa je testni prostor V dan sa

$$V = \left\{(\tilde{y},\tilde{\theta}) \in H^1(0,h)^3 \times H^1(0,h)^3 \ : \ \partial_s\tilde{y} + t \times \tilde{\theta} = 0\right\}.$$

Za funkcijski par $(\tilde{y},\tilde{\theta}) \in V$ kažemo da je *slabo rješenje* problema (2.1)-(2.4), uz $l = 0$, ako vrijedi

$$\int_0^h QHQ^T \partial_s\theta \cdot \partial_s\tilde{\theta}\, ds = \int_0^h f \cdot \tilde{y}\, ds - m(h)\cdot\tilde{\theta}(h) - m(0)\cdot\tilde{\theta}(0) + n(h)\cdot\tilde{y}(h) - n(0)\cdot\tilde{y}(0) \quad (2.5)$$

za sve $(\tilde{y},\tilde{\theta}) \in V$. Za jedan štap, rubni uvjeti u $s = 0, h$ trebaju biti zadani.

2.3 Slaba formulacija problema za stent

Stent je metalna mrežica cilindričnog oblika koja se postavlja u ljudsku arteriju sa svrhom poboljšanja toka krvi kroz žilu. Na mjesto suženja krvne žile postavlja se stent unutar kojeg je balon. Nakon postavljanja stenta na mjesto suženja, balon se napuhuje kako bi raširio stent, a time i krvnu žilu. Na kraju se balon vadi iz žile, a ostaje stent koji pruža otpor ponovnom sužavanju žile.

Uobičajeno je stent promatrati kao 3D elastično tijelo, ali mi ga u ovom radu promatramo kao niz (metalnih) štapića međusobno spojenih u mrežicu u određenim točkama, vrhovima stenta. Drugim riječima, za nas je stent *neusmjeren graf*, u kojem štapići predstavljaju bridove grafa, a vrhovi stenta su ujedno i vrhovi grafa koji predstavlja stent. Iako se ti tanki štapići nalaze u trodimenzionalnom prostoru, mi ih promatramo kao bridove u jednoj dimenziji, pa cijeli stent postaje 1D objekt.

U prošloj sekciji smo modelirali štap lineariziranim hiperboličkim zakonima očuvanja (*linearizirani Antman-Cosserat model*), i tim se modelom koristimo za modeliranje stenta. Dok su za jedan štap rubni uvjeti morali biti zadani, za stent će rubni uvjeti biti prirodno dani uvjetom *kinematičkog kontakta*, koji traži da je

1. pomak središnje linije y neprekidan,
2. rotacija poprečnog presjeka θ neprekidna,

te uvjetom *dinamičkog kontakta*, koji traži da je

1. suma kontaktnih sila u svakom vrhu jednaka 0,

2. suma kontaktnih momenata u svakom vrhu jednaka 0.

Napomena 2.3.1. *Primijetimo da bi prekid u vrhu stenta pomaka središnje linije ili infinitezimalne rotacije poprečnog presjeka u praksi značio pucanje stenta.*

Navedeni uvjeti na stent ne sprječavaju pomicanje stenta unutar žile, odnosno "klizanje" kroz žilu. To ćemo "klizanje" izbjeći zahtjevom da je ukupan pomak na stentu, odnosno integral pomaka po stentu, jednak 0. Slično, zahtjevat ćemo i da je integral po stentu infinitezimalne rotacije jednak 0. Dodavanje tih uvjeta osigurat će jedinstvenost rješenja našeg problema, a matematički ćemo ih izraziti nešto kasnije.

Stent od sada pa nadalje označavamo sa $\mathcal{N}$, broj bridova stenta neka je N, a broj vrhova M. Uvodimo i oznaku e^i za i-ti brid stenta, te oznaku $\mathcal{V}$ za skup vrhova stenta. Također, neka je $P^i\colon K_i = [0, l_i] \to e^i$ prirodna parametrizacija i-tog brida, pri čemu je l_i duljina brida. U definiciji testnog prostora koristit ćemo vektorske funkcije U, koje se sastoje od funkcijskih parova (y^i, θ^i) definiranih za svaki brid e^i stenta, $i = 1, \ldots, N$. Stoga,

$$U = (U^1, \ldots, U^N) = ((y^1, \theta^1), \ldots, (y^N, \theta^N)).$$

Kinematički uvjet uparivanja zahtijeva da su pomak središnje linije y, i infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka θ, neprekidne za svaki vrh $V \in \mathcal{V}$. Točnije, ako se u vrhu V sastaju bridovi e^i i e^j, tada vrijednost od U^i za parametar $s \in \{0, l_i\}$ kojem je pridružen vrh V, tj., $U^i((P^i)^{-1}(V))$, mora imati istu vrijednost kao i $U^j((P^j)^{-1}(V))$. Sada definiramo prostor H^1-funkcija nad cijelom mrežom stenta $\mathcal{N}$, takvih da zadovoljavaju kinematički uvjet uparivanja:

$$H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^k) = \{U = (U^1, \ldots, U^N) \in \prod_{i=1}^{N} H^1([0, l_i]; \mathbb{R}^k) \ : \ U^i((P^i)^{-1}(V)) = U^j((P^j)^{-1}(V)), \\ \forall V \in \mathcal{V},\ V \in e^i \cap e^j\}. \quad (2.6)$$

Testni prostor V_S za slabo rješenje problema za stent sastoji se od svih funkcija $U \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)$ koje zadovoljavaju

1. uvjet nerastezljivosti i nesmičljivosti za svaki brid koji modelira štapić stenta,

2. $\int_{\mathcal{N}} U = 0.$

Točnije,

$$V_S = \Big\{ U = ((\tilde{y}^1, \tilde{\theta}^1), \dots, (\tilde{y}^N, \tilde{\theta}^N)) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6) \,:\, \partial_s \tilde{y}^i + t^i \times \tilde{\theta}^i = 0\,,\ i = 1, \dots, N\,, \\ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} y^j \, ds = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \theta^j \, ds = 0 \Big\}, \quad (2.7)$$

pri čemu je t^i tangenta na nedeformiranu središnju liniju i-tog brida.

Budući da je stent posebno unija svih svojih bridova, slaba formulacija problema za stent dana je sumom slabih formulacija problema za svaki pojedini štap. Kao što smo već spomenuli, kinematički kontaktni uvjeti su uključeni u definiciju prostora V_S. Dinamički kontaktni uvjeti će biti uzeti u obzir kod sume po svim bridovima rubnih uvjeta iz (2.5). Za svaki vrh $V \in \mathcal{V}$, dinamički kontaktni uvjet traži da je

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V \in e^i}}^{N} \operatorname{sgn}^i(V)\, m((P^i)^{-1}(V)) = 0\,, \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ V \in e^i}}^{N} \operatorname{sgn}^i(V)\, n((P^i)^{-1}(V)) = 0\,, \quad (2.8)$$

pri čemu vrijednost od $\operatorname{sgn}^i(V)$ ovisi o tome da li je vrh V početak ili kraj u parametrizaciji i-tog brida e^i. Točnije,

$$\operatorname{sgn}^i(V) := \begin{cases} -1, & ((P^i)^{-1}(V)) = 0\,, \\ 1, & ((P^i)^{-1}(V)) \neq 0\,. \end{cases} \quad (2.9)$$

Prisjetimo se sada da su testne funkcije $((\tilde{y}^1, \tilde{\theta}^1), \dots, (\tilde{y}^N, \tilde{\theta}^N)) \in V_S$ neprekidne u svakom vrhu stenta, pa se rubni uvjeti iz (2.5), kad se sumiraju po svim vrhovima, međusobno poništavaju zbog dinamičkih kontaktnih uvjeta. Iz toga slijedi da je *slaba formulacija* 1D-problema za stent dana sa:

Naći $U = ((y^1, \theta^1), \dots, (y^N, \theta^N)) \in V_S$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} Q^i H^i (Q^i)^T \, \partial_s \theta^i \cdot \partial_s \tilde{\theta}^i \, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} f^i \cdot \tilde{y}^i \, ds\,, \quad (2.10)$$

za sve $\tilde{U} = ((\tilde{y}^1, \tilde{\theta}^1), \dots, (\tilde{y}^N, \tilde{\theta}^N)) \in V_S$.

Napomena 2.3.2. *Funkcije $U = ((y^1, \theta^1), \dots, (y^N, \theta^N)) \in V_S$ ubuduće ćemo označavati sa (y, θ).*

2.4 Mješovita formulacija problema

Na štapu duljine l definiramo forme $a : H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \times H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $b : L^2(0,l;\mathbb{R}^3) \times H^1(0,l;\mathbb{R}^6) \to \mathbb{R}$ i $f : H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, koje su dane sa

$$\begin{aligned} a(\theta,\tilde{\theta}) &= \int_0^l QHQ^T\partial_s\theta \cdot \partial_s\tilde{\theta}\, ds\,, \\ b(\lambda,(y,\theta)) &= \int_0^l \lambda \cdot (y' + t\times\theta)\, ds\,, \\ f(y) &= \int_0^l f \cdot y\,. \end{aligned}$$

Mješovita formulacija problema (za jedan štap) dana je sa:

Naći $(y,\theta,\lambda) \in H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \times H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \times L^2(0,l;\mathbb{R}^3)$ takav da vrijedi

$$a(\theta,\tilde{\theta}) + b(\lambda,(\tilde{y},\tilde{\theta})) = f(\tilde{y})\,, \qquad \forall \tilde{y},\tilde{\theta} \in H^1(0,l;\mathbb{R}^3)\,, \tag{2.11a}$$

$$b(\tilde{\lambda},(y,\theta)) = 0\,, \qquad \forall \tilde{\lambda} \in L^2(0,l;\mathbb{R}^3)\,. \tag{2.11b}$$

Problem za stent je analogan:

Naći $(y,\theta,\lambda,\alpha,\beta) \in (H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\times H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)) \times (L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ takav da vrijedi

$$a_S(\theta,\tilde{\theta}) + b_S((\lambda,\alpha,\beta),(\tilde{y},\tilde{\theta})) = f_S(\tilde{y})\,, \qquad \forall \tilde{y},\tilde{\theta} \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\,, \tag{2.12a}$$

$$b_S((\tilde{\lambda},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}),(y,\theta)) = 0\,, \qquad \forall \tilde{\lambda} \in L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\,,\ \forall \tilde{\alpha},\tilde{\beta} \in \mathbb{R}^3\,, \tag{2.12b}$$

pri čemu je

$$L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3) = \left\{\tilde{\lambda}\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^3 \ :\ \tilde{\lambda}^i = \tilde{\lambda}\big|_{K_i} \in L^2(K_i;\mathbb{R}^3) \quad \forall i = 1,\dots,N\right\}, \tag{2.13}$$

gdje $K_i = [0,l_i]$ označava i-ti brid stenta (preciznije, K_i je segment kojim parametriziramo središnju liniju i-tog brida), dok su forme a_S, b_S i f_S na stentu definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_S(\theta,\tilde{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} Q^iH^i(Q^i)^T\partial_s\theta^i \cdot \partial_s(\tilde{\theta})^i\, ds = \int_{\mathcal{N}} QHQ^T\theta' \cdot \theta'\, ds\,, \\ b_S((\lambda,\alpha,\beta),(y,\theta)) &= \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \lambda^i \cdot \left((y^i)' + t^i\times\theta^i\right) ds + \alpha \cdot \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} y^i\, ds + \\ &\quad + \beta \cdot \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \theta^i\, ds = \int_{\mathcal{N}} \lambda\cdot(y' + t\times\theta) + \alpha\cdot\int_{\mathcal{N}} y + \beta\cdot\int_{\mathcal{N}}\theta\,, \\ f_S(y) &= \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} f^i\cdot y^i\, ds = \int_{\mathcal{N}} f\cdot y\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Napomena 2.4.1. U (2.13) i (2.14) λ^i, y^i, θ^i, itd., označavaju restrikcije funkcija na i-ti brid. Dakle, $\lambda^i = \lambda\big|_{K_i}$, $y^i = y\big|_{K_i}$, $\theta^i = \theta\big|_{K_i}$, itd. Također, od sada nadalje formu b definiranu na i-tom bridu označavamo sa b^i, a umjesto b_S, za formu definiranu na stentu pišemo b.

Sustavom (2.12) je zapravo dana naša verzija *Problema(Q)*, odnosno sustava (1.1), pri čemu je

$$X = H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)\,,$$
$$M = L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\,.$$

Nadalje, (2.10) sada možemo zapisati kao

$$a_S(\theta,\tilde{\theta}) = f_S(\tilde{y}) \quad \forall(\tilde{y},\tilde{\theta})\in V_S\,, \tag{2.15}$$

odnosno

$$a_S((y,\theta),(\tilde{y},\tilde{\theta})) = \langle f_S,\tilde{y}\rangle = \langle f_S,(\tilde{y},\tilde{\theta})\rangle \quad \forall(\tilde{y},\tilde{\theta})\in V_S\,,$$

gdje posljednjim izrazom naglašavamo da formu f možemo promatrati kao funkcional na prostoru $H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)$.

Napomena 2.4.2. Analizirajmo uvjet (2.12b). Neka je S skup funkcija (y,θ) iz $H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)$ koje zadovoljavaju (2.12b):

$$S = \Big\{(y,\theta)\in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)\ :\ b_S((\tilde{\lambda},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}),(y,\theta)) = 0\,,\quad \forall\tilde{\lambda}\in L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3),\ \forall\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathbb{R}^3\Big\}.$$

Lako je pokazati da je S zapravo vektorski prostor. Dovoljni i nužni uvjeti da $(y,\theta)\in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)$ bude element iz S su dani sa:

$$b_S((\tilde{\lambda},0,0),(y,\theta)) = 0 \qquad \forall\tilde{\lambda}\in L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\,, \tag{2.16a}$$
$$b_S((0,\tilde{\alpha},0),(y,\theta)) = 0 \qquad \forall\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^3\,, \tag{2.16b}$$
$$b_S((0,0,\tilde{\beta}),(y,\theta)) = 0 \qquad \forall\tilde{\beta}\in\mathbb{R}^3\,. \tag{2.16c}$$

Iz (2.16b) i (2.16c) slijedi

$$\tilde{\alpha}\cdot\int_{\mathcal{N}} y = 0 \qquad \forall\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^3\,,$$
$$\tilde{\beta}\cdot\int_{\mathcal{N}} \theta = 0 \qquad \forall\tilde{\beta}\in\mathbb{R}^3\,.$$

Dane jednakosti vrijede za proizvoljne $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathbb{R}^3$ ako i samo ako vrijede za elemente kanonske baze prostora $\mathbb{R}^3$, što je ekvivalentno sa

$$\int_{\mathcal{N}} y_i = \int_{\mathcal{N}}\theta_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,3\,,$$

odnosno

$$\int_{\mathcal{N}} y = \int_{\mathcal{N}} \theta = 0\,.$$

Uvjet (2.16a) je ekvivalentan sa

$$\int_{\mathcal{N}} \tilde{\lambda} \cdot (y' + t \times \theta) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \tilde{\lambda}^i \cdot \left((y^i)' + t^i \times \theta^i \right) ds = 0 \qquad \forall \tilde{\lambda} \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)\,.$$

Napomena 2.4.3. Uvjet

$$\int_{\mathcal{N}} \tilde{\lambda} \cdot (y' + t \times \theta) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \tilde{\lambda}^i \cdot \left((y^i)' + t^i \times \theta^i \right) ds = 0 \qquad \forall \tilde{\lambda} \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3) \tag{2.17}$$

je ekvivalentan sa

$$b^i(\tilde{\lambda}^i, (y^i, \theta^i)) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, N\,. \tag{2.18}$$

Dokaz. Zbog

$$b^i(\tilde{\lambda}^i, (y^i, \theta^i)) = \int_0^{l_i} \tilde{\lambda}^i \cdot \left((y^i)' + t^i \times \theta^i \right) ds$$

(2.18) očito povlači (2.17). Međutim, vrijedi i obrat. Odaberimo proizvoljan brid K_i. Za razliku od prostora $H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$, funkcije iz prostora $L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$ nisu nužno neprekidne. Preciznije, $\tilde{\lambda}$ je element prostora $L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$ ako i samo ako je $\tilde{\lambda}^j \in L^2(K_j; \mathbb{R}^3)$ za svaki brid K_j. Zato funkciju $\tilde{\lambda}$ u (2.17) možemo odabrati tako da je netrivijalna samo na bridu K_i. Odatle slijedi da (2.17) povlači (2.18). □

Iz prethodnih dviju napomena i definicije (2.7) slijedi da je

$$V_S = \left\{ (y, \theta) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6) \;:\; b_S((\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), (y, \theta)) = 0\,, \quad \forall \tilde{\lambda} \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3),\ \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

pa (2.12b) zapravo osigurava da su komponente rješenja (y, θ) iz prostora V_S. U smislu (1.6) iz Sekcije 1.1, $V_S = V$, pa je sa (2.15) dana naša verzija *Problema(P)*.

Napomena 2.4.4. *Primijetimo da tražimo rješenje problema* (y, θ) *u prostoru V, pa je za nas parametar* χ *iz* (1.1) *jednak* 0*.*

Eliptičnost forme "a"

Cilj nam je pokazati V-eliptičnost forme a. Prisjetimo se,

$$V = \left\{ (y, \theta) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6) \;:\; b((\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), (y, \theta)) = 0 \quad \forall (\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in M \right\}, \tag{2.19}$$

odnosno, kao što smo ustvrdili u prošloj sekciji,

$$V = \Big\{(y,\theta) \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6) \,:\, b^i(\tilde{\lambda}^i,(y^i,\theta^i)) = 0\,, \quad \forall \tilde{\lambda}^i \in L^2(K_i;\mathbb{R}^3)\,,\ \forall i = 1,\dots,N\,, \\ \int_{\mathcal{N}} y = \int_{\mathcal{N}} \theta = 0\Big\}\,. \quad (2.20)$$

Trebamo pokazati da je

$$a_S((y,\theta),(y,\theta)) = a_S(\theta,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} Q^i H^i (Q^i)^T (\theta^i)' \cdot (\theta^i)'\, ds \geq \\ \geq \sum_{i=1}^{N} \left(\|y^i\|^2_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)} + \|\theta^i\|^2_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)} \right) = \|(y,\theta)\|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\,.$$

Matrice $H^i \in M_3(\mathbb{R})$ su *simetrične pozitivno definitne*. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} a(\theta,\theta) &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} Q^i H^i (Q^i)^T \partial_s\theta^i \cdot \partial_s\theta^i\, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} H^i (Q^i)^T (\theta^i)' \cdot (Q^i)^T (\theta^i)'\, ds = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle H^i (Q^i)^T (\theta^i)', (Q^i)^T (\theta^i)' \rangle_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} \geq \left[H^i \text{ pozitivno definitne} \right] \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{N} m_i \langle (Q^i)^T (\theta^i)', (Q^i)^T (\theta^i)' \rangle_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} \geq m \sum_{i=1}^{N} \langle (\theta^i)', (\theta^i)' \rangle_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} = m\,|\theta|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

za svaki $\theta \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)$, pri čemu je $m_i > 0$ najmanja svojstvena vrijednost matrice H^i, a $m = \min_i m_i$.

Čini se da smo time pokazali koercitivnost, pa onda i V-eliptičnost forme a, ali to nije istina. U prethodnome smo računu, naime, formu a promatrali kao funkciju od θ, ali ona je, ako želimo koristiti teoriju iznesenu u prvome poglavlju, funkcija para (y,θ). Zbog toga mi moramo naći $c > 0$ takav da je

$$a((y,\theta),(y,\theta)) = a(\theta,\theta) \geq c\,\|(y,\theta)\|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} \qquad \forall (y,\theta) \in V\,.$$

Napomena 2.4.5. *Za norme i polunorme u nastavku pišemo, npr.,* $|\cdot|_{H^1}$ *i* $\|\cdot\|_{L^2}$ *umjesto* $|\cdot|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}$ *i* $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}$.

Sjetimo se da koercitivnost pokazujemo na prostoru V, a za $(y,\theta) \in V$ vrijedi $\int_{\mathcal{N}} y = \int_{\mathcal{N}} \theta = 0$. Zbog toga možemo primijeniti *Poincaréovu nejednakost*: postoji $C_1 > 0$ takav da je

$$|y|_{H^1} \leq C_1\,\|y\|_{H^1}\,, \qquad |\theta|_{H^1} \leq C_1\,\|\theta\|_{H^1}\,.$$

To pak povlači da je dovoljno naći $C > 0$ takav da je

$$|y|^2_{H^1} \leq C \, \|\theta\|^2_{H^1} \qquad \forall (y, \theta) \in V \, . \tag{2.22}$$

Tada je, naime,

$$\|(y, \theta)\|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} = \|y\|^2_{H^1} + \|\theta\|^2_{H^1} \leq C_1 \, |y|^2_{H^1} + \|\theta\|^2_{H^1} \leq C_2 \, \|\theta\|^2_{H^1} \leq C_3 \, |\theta|^2_{H^1} \, ,$$

gdje je $C_2 = \max(C_1 C, 1)$, pa iz (2.21) slijedi da je za neki $c > 0$

$$a((y, \theta), (y, \theta)) = a(\theta, \theta) \geq m \, |\theta|^2_{H^1} \geq c \, \|(y, \theta)\|^2_{H^1} \qquad \forall (y, \theta) \in V.$$

U svrhu postizanja ocjene (2.22) koristimo činjenicu da za $(y, \theta) \in V$ vrijedi (ispuštamo pisanje varijable)

$$(y^i)' + t^i \times \theta^i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, N \, ,$$

odnosno

$$(y^i)' = -t^i \times \theta^i \qquad \forall i = 1, \ldots, N \, ,$$

do na skup mjere 0. Ako na prethodnu jednadžbu djelujemo sa $\| \cdot \|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)}$, dobijemo da je

$$\begin{aligned} |y^i|^2_{H^1(K_i;\mathbb{R}^3)} = \|(y^i)'\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} = |-t^i \times \theta^i|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} = \int_0^{l_i} |t^i \times \theta^i|^2 \, ds = \\ = \int_0^{l_i} |t^i|^2 \, |\theta^i|^2 \, |\sin \sphericalangle(t^i, \theta^i)| \, ds \leq \int_0^{l_i} |t^i|^2 \, |\theta^i|^2 \, ds \leq \\ \left[M := \max_{1 \leq j \leq N} \|t^j\|_\infty \right] \leq M^2 \int_0^{l_i} |\theta^i|^2 \, ds = M^2 \, \|\theta^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} \, . \end{aligned}$$

Sada možemo ocijeniti normu funkcija na stentu:

$$|y|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = \sum_{i=1}^N |y^i|^2_{H^1(K_i;\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{i=1}^N M^2 \, \|\theta^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} = M^2 \, \|\theta\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \, ,$$

pa je

$$|y|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \leq M \, \|\theta\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \, .$$

Time smo konačno pokazali da je

$$a((y, \theta), (y, \theta)) \geq c \, \|(y, \theta)\|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} \qquad \forall (y, \theta) \in V \, ,$$

odnosno da je forma a V-eliptička. To je uz inf-sup uvjet (Babuška-Brezzi uvjet) na formu b, ključna pretpostavka u dokazu egzistencije i jedinstvenosti rješenja problema (2.12).

Babuška-Brezzi uvjet

Ključan uvjet u dokazu egzistencije i jedinstvenosti rješenja mješovite zadaće bio je inf-sup uvjet. Želimo da taj uvjet vrijedi za našu formu b, tj. da za proizvoljan $(\lambda, \alpha, \beta) \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ postoji $(y, \theta) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3) \times H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$ takav da je

$$\frac{b((\lambda, \alpha, \beta), (y, \theta))}{\|(y, \theta)\|_{H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)}} \geq \beta \sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}\,, \tag{2.23}$$

gdje $|\cdot|$ označava 2-normu na prostoru $\mathbb{R}^3$. U tom slučaju je, naime,

$$\sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{b(\mu, v)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M\,,$$

uz $v = (y, \theta)$ i $\mu = (\lambda, \alpha, \beta)$, pa zbog proizvoljnosti od μ slijedi inf-sup uvjet:

$$\inf_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{b(\mu, v)}{\|\mu\|_M \|v\|_X} \geq \beta\,.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} b((\lambda, \alpha, \beta), (y, \theta)) &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \lambda^i \cdot \left((y^i)' + t^i \times \theta^i\right) + \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} y^i + \beta \cdot \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \theta^i = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle \lambda^i,\, (y^i)' + t^i \times \theta^i \rangle_{L^2(K_i; \mathbb{R}^3)} + \left\langle \alpha, \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} y^i \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \left\langle \beta, \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \theta^i \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned}$$

ideja nam je za dani $(\lambda, \alpha, \beta) \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ naći $(y, \theta) \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)$ takav da je

$$\begin{aligned} (y^i)' + t^i \times \theta^i &= \lambda^i \qquad \forall i = 1, \ldots, N\,, \\ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} y^j &= \alpha\,, \\ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \theta^j &= \beta\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Tada bi vrijedilo sljedeće:

$$\frac{b((\lambda, \alpha, \beta), (y, \theta))}{\sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}\, \|(y, \theta)\|_{H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)}} = \frac{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}\, \|(y, \theta)\|_{H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}}{\|(y, \theta)\|_{H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^6)}}\,,$$

pa ako bismo pokazali da postoji konstanta $C > 0$ takva da za proizvoljan (λ, α, β), (y, θ) dano sa (2.24) zadovoljava

$$\|(y,\theta)\|_X = \|(y,\theta)\|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} \leq C\sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2} = \|(\lambda,\alpha,\beta)\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} = \\ = C\,\|(\lambda,\alpha,\beta)\|_M\,,$$

onda bi vrijedilo da je

$$\frac{b((\lambda,\alpha,\beta),(y,\theta))}{\|(\lambda,\alpha,\beta)\|_M\,\|(y,\theta)\|_X} = \frac{\|(\lambda,\alpha,\beta)\|_M}{\|(y,\theta)\|_X} \geq \frac{\|(\lambda,\alpha,\beta)\|_M}{C\,\|(\lambda,\alpha,\beta)\|_M} = \frac{1}{C}\,.$$

U tom slučaju je za $\beta \leq \dfrac{1}{C}$ zadovoljen inf-sup uvjet.

Najveći problem u pronalaženju rješenja sustava (2.24) je postići da su $y, \theta \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)$, pa posebno i da su neprekidne u vrhovima stenta. Zbog toga ćemo rješenje naći kao rješenje originalnog sustava za stent, uz trivijalnu funkciju f te proizvoljne netrivijalne parametre λ, α i β. Drugim riječima, za svaki $i = 1, \ldots, N$ tražimo rješenje problema

$$\forall i = 1,\ldots,N \qquad \begin{cases} (n^i)' = 0\,, \\ (m^i)' + t^i \times n^i = 0\,, \\ (\theta^i)' - Q^i(H^i)^{-1}(Q^i)^T m^i = 0\,, \\ (y^i)' + t^i \times \theta^i = \lambda^i\,, \end{cases} \tag{2.25}$$

za koje vrijedi

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} y^j = \alpha\,,$$
$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \theta^j = \beta\,.$$

Za izvod rješenja problema (2.25) koristimo [3].

Označimo sa Y^j i Θ^j vrijednosti funkcija y i θ u j-tom vrhu, respektivno. Nadalje, označimo sa J_j^+ i J_j^- skup svih bridova koji izlaze, odnosno ulaze u j-ti vrh, respektivno, za $j = 1, \ldots, M$ (M do kraja ovog poglavlja ne označava funkcijski prostor, već broj vrhova

stenta). Sada sustavu (2.25) dodajemo kontaktne uvjete za svaki vrh j:

$$\forall\, j = 1, \ldots, M \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in J_j^+} n^i(0) - \sum_{i \in J_j^-} n^i(l_i) = 0\,, \\ \displaystyle\sum_{i \in J_j^+} m^i(0) - \sum_{i \in J_j^-} m^i(l_i) = 0\,, \\ Y^j = y^i(0) = y^k(l_k) \quad \forall i \in J_j^+,\ \forall k \in J_j^-, \\ \Theta^j = \theta^i(0) = \theta^k(l_k) \quad \forall i \in J_j^+,\ \forall k \in J_j^-. \end{cases} \tag{2.26}$$

Integriranjem, redom, prve i druge jednadžbe iz (2.25), dobijemo

$$n^i(x) = n^i(l_i) =: n^i \tag{2.27}$$

i

$$m^i(x) = m^i(l_i) + \int_x^{l_i} t^i(r) \times n^i \, dr\,. \tag{2.28}$$

Kada to uvrstimo u treću jednadžbu iz (2.25), slijedi da je

$$(\theta^i)'(x) = (H_Q^i)^{-1} \left(m^i(l_i) + \int_x^{l_i} t^i(s) \times n^i \, ds \right),$$

pri čemu koristimo oznaku $H_Q^i = Q^i H^i (Q^i)^T$. Uvrstimo li izraz (2.27) u kontaktni uvjet za silu, tj. u prvu jednadžbu iz (2.26), dobijemo

$$\sum_{i \in J_j^+} n^i - \sum_{i \in J_j^-} n^i = 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, M. \tag{2.29}$$

Ako sada uvedemo oznaku

$$N_0 = \begin{pmatrix} n^1 \\ \vdots \\ n^N \end{pmatrix},$$

(2.29) možemo zapisati kao sustav

$$A_s N_0 = 0\,, \tag{2.30}$$

gdje je A_s matrica tipa $3M \times 3N$. Da bismo pojasnili strukturu matrice A_s, sjetimo se da je stent usmjeren graf kod kojeg je broj vrhova strogo manji od broja bridova, tj. $M < N$. Slijedi da je $3M < 3N$, pa je matrica A_s singularna. Gledamo li strukturu stenta po komponentama (stent se nalazi u 3D prostoru), zaključujemo da naš graf ima 3 komponente povezanosti, što povlači da je matrica A_s matrica incidencije usmjerenog grafa sa 3 komponente povezanosti. Uzmimo da brid i ima početak u vrhu j, a kraj u vrhu k. Tada

matrica A_s u stupcima $3i-2, 3i-1$ te $3i$ ima blok I (jediničnu matricu reda 3) za retke $3j-2, 3j-1, 3j$, a blok $-I$ za retke $3k-2, 3k-1, 3k$. Može se pokazati da je

$$\operatorname{rang}(A_s) = 3M - 3\,.$$

Vratimo se sada na originalni problem. Za funkciju m^i vrijedi

$$\begin{aligned} m^i(x) &= m^i(l_i) + \int_x^{l_i} t^i(s) \times n^i ds = \left[t^i(s) = (\Phi^i)'(s)\right] = \\ &= m^i(l_i) + \left(\Phi^i \times n^i\right)\Big|_x^{l_i} = m^i(l_i) + (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(x)) \times n^i\,, \end{aligned}$$

gdje je $\Phi^i\colon K_i = [0, l_i] \to e^i$ prirodna parametrizacija brida e^i. Sada uzimamo $x = 0$ te izraz za $m^i(0)$ uvrštavamo u drugu jednadžbu u (2.26). Tako za $j = 1, \ldots, M$ dobijemo

$$\sum_{i \in J_j^+} m^i(l_i) - \sum_{i \in J_j^-} m^i(l_i) = -\sum_{i \in J_j^+} (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times n^i\,. \tag{2.31}$$

Definiramo li vektore

$$M_0 = \begin{pmatrix} m^1(l_1) \\ \vdots \\ m^N(l_N) \end{pmatrix}$$

i

$$C = -\begin{pmatrix} \sum_{i \in J_1^+} (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times n^i \\ \vdots \\ \sum_{i \in J_M^+} (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times n^i \end{pmatrix},$$

tada sustav (2.31) možemo zapisati kao

$$A_s M_0 = C. \tag{2.32}$$

Vidimo da se u definiciji vektora C javljaju komponente vektora N_0, pa ćemo to iskoristiti u zapisu problema. U tu svrhu, uvodimo sljedeće projektore:

$$\mathbb{P}_i \text{ tipa } 3 \times 3N,$$

koji ima jediničnu matricu u stupcima $3i-2, 3i-1, 3i$, te

$$\mathbb{K}_j \text{ tipa } 3 \times 3M,$$

koji ima jediničnu matricu u stupcima $3j-2, 3j-1, 3j$.

Neka A_v označava antisimetričnu matricu (operator) rotacije za proizvoljan aksijalni vektor $v \in \mathbb{R}^3$. Drugim riječima, neka je $A_v x = v \times x$ za svaki $x \in \mathbb{R}^3$. Tada je, za vektor $\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)$, $A_{\tilde{\Phi}^i}\, n^i = (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times n^i$, pa dobijemo da je

$$\mathbb{K}_j C = -\sum_{i \in J_j^+} (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times n^i = -\sum_{i \in J_j^+} A_{\tilde{\Phi}^i}\, n^i \,.$$

Stoga je

$$C = \sum_{j=1}^{M} \mathbb{K}_j^T (\mathbb{K}_j C) = -\sum_{j=1}^{M} \sum_{i \in J_j^+} \mathbb{K}_j^T (A_{\tilde{\Phi}^i}\, \mathbb{P}_i = -A^M_{A_{\tilde{\Phi}}} N_0 \,,$$

pri čemu je

$$A^M_{A_{\tilde{\Phi}}} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i \in J_j^+} \mathbb{K}_j^T A_{\tilde{\Phi}^i} \mathbb{P}_i \,.$$

Matrica $A^M_{A_{\tilde{\Phi}}}$ je slične strukture kao i matrica A_s; ima sve nule, osim na pozicijama gdje matrica A_s ima jedinični blok. Na tim pozicijama matrica A_s ima blok $A_{\tilde{\Phi}^i}$. Sada jednadžba (2.32) glasi

$$A_s M_0 + A^M_{A_{\tilde{\Phi}}} N_0 = 0 \,. \tag{2.33}$$

Integrirajmo sada treću jednadžbu u (2.25), ali prvo uvedimo oznaku

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \vdots \\ \Theta^M \end{pmatrix}.$$

Iz treće jednadžbe u (2.25) slijedi da je

$$\begin{aligned} \theta^i(0) - \theta^i(l_i) &= -\int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} m^i(s)\, ds \\ &= -\int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} (m^i(l_i) + A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \mathbb{P}_i N_0)\, ds \\ &= -\int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} \mathbb{P}_i M_0\, ds - \int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \mathbb{P}_i N_0\, ds \,, \end{aligned}$$

pri čemu je $\tilde{\Phi}^i(s) := \Phi^i(l_i) - \Phi^i(s)$. Zbog *neprekidnosti rotacije u vrhovima*, lijeva je strana jednaka $\mathbb{P}_i A_s^T \Theta_0$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} A_s^T \Theta_0 &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_i^T (\mathbb{P}_i A_s^T \Theta_0) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[-\mathbb{P}_i^T \int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} \mathbb{P}_i\, ds\, M_0 - \mathbb{P}_i^T \int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \mathbb{P}_i\, ds\, N_0 \right]. \end{aligned}$$

Danu jednakost ćemo zapisati na sljedeći način:

$$A_s^T \Theta_0 = -N_K M_0 - N_{KA_{\tilde{\Phi}(s)}} N_0 \,,$$

gdje smo sa N označili blok dijagonalnu matricu reda $3N \times 3N$ čiji indeks označava vrstu bloka:

$$K = \int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1}\, ds\,, \quad KA_{\tilde{\Phi}(s)} = \int_0^{l_i} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)}\, ds\,,$$
$$A_{\tilde{\Phi}(s)}K = \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1}\, ds\,, \quad A_{\tilde{\Phi}(s)} K A_{\tilde{\Phi}(s)} = \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)}\, ds\,,$$

za $i = 1, \ldots, N$. Ovi i-ti blokovi zapravo dolaze u retke i stupce matrice N sa indeksima $3i-2, 3i-1$ te $3i$.

Na taj smo način dobili još jednu jednadžbu:

$$A_s^T \Theta_0 + N_K M_0 + N_{KA_{\tilde{\Phi}(s)}} N_0 = 0\,. \tag{2.34}$$

Preostala je četvrta jednadžba u (2.25). Treća jednadžba u (2.25) povlači da je

$$\theta^i(x) = \theta^i(0) + \int_0^x (H_Q^i)^{-1} m^i\, ds\,.$$

Sada računamo (povremeno ispuštamo pisanje varijabli):

$$\begin{aligned}
y^i(0) - y^i(l_i) &= \int_0^{l_i} t^i \times \theta^i\, dx - \int_0^{l_i} \lambda^i\, dx \\
&= \int_0^{l_i} t^i \times \left(\theta^i(0) + \int_0^x (H_Q^i)^{-1} m^i\, ds\right) dx - \int_0^{l_i} \lambda^i\, dx \\
&= (\Phi^i(l_i) - \Phi^i(0)) \times \theta^i(0) + \left(\Phi^i \times \int_0^x (H_Q^i)^{-1} m^i\, ds\right)\Bigg|_0^{l_i} \\
&\qquad - \int_0^{l_i} \Phi^i \times (H_Q^i)^{-1} m^i\, ds - \int_0^{l_i} \lambda^i\, ds \\
&= A_{\tilde{\Phi}^i} \theta^i(0) + \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} m^i\, ds - \int_0^{l_i} \lambda^i\, ds
\end{aligned}$$

Slično kao i prije, definiramo vektor

$$Y_0 = \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^M \end{pmatrix},$$

a uvodimo i oznaku

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \int_0^{l_1} \lambda^1 \, ds \\ \vdots \\ \int_0^{l_N} \lambda^N \, ds \end{pmatrix}.$$

Uvažimo li neprekidnost pomaka u vrhovima na lijevoj strani, dobijemo da je ($o(i)_1$ označava izlazni vrh brida i)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i A_s^T Y_0 &= A_{\tilde{\Phi}^i} \mathbb{K}_{o(i)_1} \Theta_0 + \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} (m^i(l_i) + A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \mathbb{P}_i N_0) \, ds - \mathbb{P}_i \Lambda \\ &= A_{\tilde{\Phi}^i} \mathbb{K}_{o(i)_1} \Theta_0 + \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} \, ds \, \mathbb{P}_i M_0 \\ &\quad + \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \, ds \, \mathbb{P}_i N_0 - \mathbb{P}_i \Lambda \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_s^T Y_0 &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_i^T A_{\tilde{\Phi}^i} \mathbb{K}_{o(i)_1} \Theta_0 + \mathbb{P}_i^T \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} \, ds \, \mathbb{P}_i M_0 \\ &\quad + \mathbb{P}_i^T \int_0^{l_i} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} (H_Q^i)^{-1} A_{\tilde{\Phi}^i(s)} \, ds \, \mathbb{P}_i N_0 - \mathbb{P}_i^T \mathbb{P}_i \Lambda \\ &= A^N_{A_{\tilde{\Phi}}} \Theta_0 + N_{A_{\tilde{\Phi}(s)} K} M_0 + N_{A_{\tilde{\Phi}(s)} K A_{\tilde{\Phi}(s)}} N_0 - \Lambda \,, \end{aligned}$$

gdje je

$$A^N_{A_{\tilde{\Phi}}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_i^T A_{\tilde{\Phi}^i} \mathbb{K}_{o(i)_1},$$

pri čemu, zbog antisimetričnosti matrice $A_{\tilde{\Phi}^i}$ za svaki $i = 1, \ldots, N$, vrijedi da je

$$A^N_{A_{\tilde{\Phi}}} = -(A^M_{A_{\tilde{\Phi}}})^T.$$

Tako smo dobili i posljednju jednadžbu

$$A_s^T Y_0 - A^N_{A_{\tilde{\Phi}}} \Theta_0 - N_{A_{\tilde{\Phi}(s)} K} M_0 - N_{A_{\tilde{\Phi}(s)} K A_{\tilde{\Phi}(s)}} N_0 = -\Lambda. \tag{2.35}$$

Sustav jednadžbi (2.30), (2.33), (2.34) i (2.35) koji sada moramo riješiti možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

gdje su

$$B = \begin{pmatrix} N_K & N_{KA_{\tilde{\Phi}(s)}} \\ -N_{A_{\tilde{\Phi}(s)}K} & -N_{A_{\tilde{\Phi}(s)}KA_{\tilde{\Phi}(s)}} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_s & A^M_{A_{\tilde{\Phi}}} \\ 0 & A_s \end{pmatrix},$$
$$x = \begin{pmatrix} M_0 \\ N_0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \Theta_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Lambda \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Rješavanje sustava (2.36) svodi se na rješavanje sustava

$$Bx + A^T y = F\,, \tag{2.38a}$$
$$Ax = 0\,. \tag{2.38b}$$

Jednadžba (2.38b) ima trivijalno rješenje $x = 0$ (može se pokazati da, za proizvoljnu desnu stranu G, sustav $Ax = G$ ima rješenje ako i samo ako ukupna sila i ukupni moment na stent iznose 0, što za $f = 0$ očito vrijedi). Također, za danu pravokutnu matricu A tipa $6M \times 6N$ vrijedi (vidi Lemu 3.1 u [3])

$$\operatorname{rang}(A) = 6M - 6$$

pa rješenja sustava $Ax = 0$ čine potprostor prostora $\mathbb{R}^{6N}$ dimenzije 6.

Za opis rješenja sustava (2.38) iskoristit ćemo singularnu dekompoziciju matrice A:

$$A = U\Sigma V^T = U_r \Sigma_r V_r^T,$$

gdje su $U \in \mathbb{R}^{6M\times 6M}$ i $V \in \mathbb{R}^{6N\times 6N}$ ortogonalne matrice te

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{rang} A = 6M - 6\,, \\ U_r &= (u_1\ u_2\ \ldots\ u_r)\,, \\ V_r &= (v_1\ v_2\ \ldots\ v_r)\,, \\ \Sigma_r &= diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)\,, \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0\,. \end{aligned}$$

Neka je $V_{6N-r} = (v_{r+1}\ v_{r+2}\ \ldots\ v_{6N})$. Tada stupci matrice V_{6N-r} razapinju jezgru od A, pa slijedi da je opće rješenje od (2.38b) dano sa

$$x = V_{6N-r}\beta\,, \qquad \beta \in \mathbb{R}^{6N-r}.$$

Uvrstimo x u (2.38a) pa slijedi

$$B(V_{6N-r}\beta) + A^T y = F. \tag{2.39}$$

Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju rješenja y jest da se slobodni koeficijenti u (2.39) nalaze u slici od A^T. Iz singularne dekompozicije lako vidimo da je $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A^T$ pa uvjet glasi

$$V_{6N-r}^T(F - BV_{6N-r}\beta) = 0\,.$$

To je jednadžba za β:

$$(V_{6N-r}^T B V_{6N-r})\beta = V_{6N-r}^T F, \tag{2.40}$$

pa ako pokažemo da je matrica $V_{6N-r}^T B V_{6N-r}$ regularna, imamo nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja β. Posljedično, imat ćemo egzistenciju rješenja y sustava (2.39).

Prije nego što krenemo sa dokazom regularnosti, precizno ćemo odrediti klasu stentova koju u ovom radu proučavamo.

Definicija 2.4.6. *Za stent kažemo da se nalazi u klasi $S_{\mathcal{L}}$ ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

(i) Svi bridovi u stentu su zakrivljeni.

(ii) Postoje bridovi u stentu koji su ravni. Ako sa t^i označimo vektor smjera ravnog brida i, onda za sve bridove u stentu vrijedi

$$\sum_{i \in J_j^+} \alpha_i t^i - \sum_{i \in J_j^-} \alpha_i t^i = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0\,,$$

pri čemu za zakrivljeni brid k stavljamo da je $\alpha_k = 0$.

Napomena 2.4.7. *Uzmimo npr. Palmaz stent, koji u većini vrhova ima četiri brida, no u krajnjim vrhovima se nalaze dva nekolinearna brida. U tim su vrhovima, zbog nekolinearnosti, koeficijenti bridova jednaki nuli pa induktivno možemo dalje nastaviti zaključivanje te dobiti da su svi koeficijenti α_i jednaki nuli.*

Regularnost matrice sustava (2.40) pokazujemo u sljedećoj lemi.

Lema 2.4.8. *Matrica $L = V_{6N-r}^T B V_{6N-r}$ je regularna matrica reda $6N - r$ za stentove iz klase $S_{\mathcal{L}}$.*

Dokaz. Dokaz Leme 3.4 u [3]. □

Iduća propozicija u potpunosti opisuje rješenje sustava (2.36).

Propozicija 2.4.9. *Sustav* (2.36)*, tj. sustav*

$$\begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix},$$

ima rješenje. Nadalje, matrica sustava je ranga $6N+6M-6$ te je x komponenta rješenja jedinstvena, dok je y komponenta jedinstvena do na kruti pomak (translaciju i infinitezimalnu

rotaciju). Jezgra sustava je, dakle, skup

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} : \ y^1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}, \ y^2 = \begin{pmatrix} b_0 + \Psi^1 \times a_0 \\ \vdots \\ b_0 + \Psi^M \times a_0 \end{pmatrix}, \quad 0 \in \mathbb{R}^{3N}, \ y^1, y^2 \in \mathbb{R}^{3M}, \ a_0, b_0 \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

pri čemu je Ψ^j vrijednost parametrizacije u vrhu j, odnosno $\Psi^j = \Phi^i(0) = \Phi^k(l_k)$ za sve $i \in J_j^+$ i $k \in J_j^-$.

Dokaz. Dokaz Propozicije 3.5 u [3]. □

Teorem 2.4.10. *Neka su $Q^i \in L^\infty(K_i; M_3(\mathbb{R}))$ i $\lambda^i \in L^2(K_i; \mathbb{R}^3)$ za svaki $i = 1, \ldots, N$. Tada postoji rješenje problema* (2.25) *sa uvjetima* (2.26)*. Nadalje, rješenje je takvo da je*

$$n, m \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3), \quad y, \theta \in H^1(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3), \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Štoviše, n i m su jedinstveno određeni, dok su y i θ jedinstveni do na krutu deformaciju.

Dokaz. Direktnom integracijom iz sustava (2.25) dobijemo da je

$$\begin{aligned} n^i(x) &= n^i(l_i) = n^i, \\ m^i(x) &= m^i(l_i) + \int_x^{l_i} t^i(s) \times n^i \, ds, \\ \theta^i(x) &= \theta^i(0) + \int_0^x (H_Q^i)^{-1} m^i(s) \, ds, \\ y^i(x) &= y^i(0) - \int_0^x t^i(s) \times \theta^i(s) \, ds + \int_0^x \lambda^i(s) \, ds, \end{aligned} \tag{2.41}$$

za svaki $i = 1, \ldots, N$. Vektori M_0 i N_0 iz Propozicije (2.4.9) su jedinstveni. Zbog toga su jedinstveno određene konstante n^i i $m^i(l_i)$, za svaki $i = 1, \ldots, N$. S druge strane, vektor Θ_0 je jedinstveno određen do na aditivnu konstantu $a_0 \in \mathbb{R}^3$, za koju je vektor Y_0 jedinstveno određen do na aditivnu konstantu $b_0 + \Psi^j \times a_0$, za proizvoljan $b_0 \in \mathbb{R}^3$. Slijedi da su i Θ_0 i Y_0 jedinstveni do na proizvoljne aditivne konstante. Stoga ista tvrdnja vrijedi za konstante $y^i(0)$ i $\theta^i(0)$, odnosno za vrijednosti funkcija y i θ u vrhovima stenta.

Neka je i proizvoljan. Funkcija n^i je konstanta na bridu, pa je posebno $n^i \in L^2(K_i; \mathbb{R}^3)$. Zato vrijedi $n = (n^1, \ldots, n^N) \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$. Budući da za tangentu na i-ti brid vrijedi $t^i \in L^2(K_i; \mathbb{R}^3)$, $m^i \in L^2(K_i; \mathbb{R}^3)$, pa opet zaključujemo da je $m = (m^1, \ldots, m^N) \in L^2(\mathcal{N}; \mathbb{R}^3)$. Ograničenost brida K_i i $Q^i \in L^\infty(K_i; M_3(\mathbb{R}))$ povlače $Q^i \in L^2(K_i; M_3(\mathbb{R}))$. Uzmemo li

još u obzir da je H^i konstantna, možemo zaključiti da je $(H^i_Q)^{-1}m^i \in L^2(K_i;\mathbb{R}^3)$, pa je $\theta^i \in H^1(K_i;\mathbb{R}^3)$. Neprekidnost funkcije θ u vrhovima slijedi iz četvrte jednadžbe u (2.26), što konačno povlači da je $\theta \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)$. Neprekidnost funkcije y u vrhovima slijedi iz treće jednadžbe u (2.26), a budući da je $\lambda^i \in L^2(K_i;\mathbb{R}^3)$, lako se vidi da je $y^i \in H^1(K_i;\mathbb{R}^3)$. Sada zaključujemo da je i $y \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)$. Očito je da su funkcije y i θ jedinstvene do na aditivnu konstantu. □

Korolar 2.4.11. *Neka su $Q^i \in L^\infty(K_i; M_3(\mathbb{R}))$ i $\lambda^i \in L^2(K_i;\mathbb{R}^3)$ za svaki $i = 1,\dots,N$. Tada postoji rješenje problema* (2.25) *s uvjetima* (2.26) *takvo da vrijedi*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} y^j &= \alpha\,, \\ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \theta^j &= \beta\,. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Nadalje, za to rješenje postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$\|(y,\theta)\|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} \le C\sqrt{\|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} + |\alpha|^2 + |\beta|^2}\,. \tag{2.43}$$

Dokaz. Egzistenciju i opis rješenja za problem (2.25) s uvjetima (2.26) daje Teorem 2.4.10. Preostaje pokazati da među rješenjima postoji takvo za koje vrijedi (2.42), te da za to rješenje možemo postići ocjenu (2.43).

Krenimo od rješenja sustava

$$\begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix},$$

iz Propozicije 2.4.9. Uvedimo oznake

$$M = \begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da sustav ima rješenja, znamo da je jedno oblika

$$\tilde{v} = M^\dagger d\,,$$

gdje je $M^\dagger$ *generalizirani inverz* matrice M. Sva ostala rješenja sustava su oblika

$$v = M^\dagger d + v_0\,, \qquad v_0 \in \operatorname{Ker} M\,.$$

Sjetimo se strukture rješenja $\tilde{v}$:

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_0 \\ \tilde{N}_0 \\ \tilde{\Theta}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{pmatrix}.$$

Iz opisa jezgre matrice sustava, danog u Propoziciji 2.4.9 i Teoremu 2.4.10, vidimo da za proizvoljno rješenje

$$v = \begin{pmatrix} M_0 \\ N_0 \\ \Theta_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} M_0 &= \tilde{M}_0\,, \\ N_0 &= \tilde{N}_0\,, \\ \Theta_0 &= \tilde{\Theta}_0 + a_0\,, \qquad a_0 \in \mathbb{R}^3\,, \\ Y_0 &= \tilde{Y}_0 + b_0\,, \qquad b_0 \in \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Ako sa $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$ označimo rješenje sustava (2.25) pridruženo vektoru $\tilde{v}$, a sa (y, θ) rješenje pridruženo vektoru v, onda je

$$\begin{aligned} \theta^i(0) &= \tilde{\theta}^i(0) + a_0\,, \qquad a_0 \in \mathbb{R}^3\,, \\ y^i(0) &= \tilde{y}^i(0) + b_0\,, \qquad b_0 \in \mathbb{R}^3\,, \end{aligned}$$

za svaki $i = 1, \ldots, N$. Prirodna je ideja iskoristiti slobodu u odabiru vektora a_0 i b_0 za postizanje uvjeta (2.42). Ako uzmemo u obzir da su rješenja za (2.25) dana sa (2.41), želimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \beta = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \theta^i(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\theta^i(0) + \int_0^x (H_Q^i)^{-1}(s)\, m^i(s)\,ds \right) dx = \\ &= \sum_{i=1}^{N} l_i\, \theta^i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x (H_Q^i)^{-1}(s)\, m^i(s)\,ds \right), \\ \alpha = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} y^i(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(y^i(0) - \int_0^x t^i(s) \times \theta^i(s)\,ds + \int_0^x \lambda^i(s)\,ds \right) dx = \\ &= \sum_{i=1}^{N} l_i\, y^i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x \left(\lambda^i(s) - t^i(s) \times \theta^i(s) \right) ds \right) dx\,. \end{aligned}$$

To je ekvivalentno sa

$$\beta = \sum_{i=1}^{N} l_i\,(\tilde{\theta}^i(0) + a_0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x (H_Q^i)^{-1}(s)\, m^i(s)\, ds \right) dx\,,$$
$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} l_i\,(\tilde{y}^i(0) + b_0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x \left(\lambda^i(s) - t^i(s) \times \theta^i(s) \right) ds \right) dx\,,$$

odakle slijedi da je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} \left(\beta - \sum_{i=1}^{N} l_i\, \tilde{\theta}^i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x (H_Q^i)^{-1}(s)\, m^i(s)\, ds \right) dx \right), \\ b_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} \left(\alpha - \sum_{i=1}^{N} l_i\, \tilde{y}^i(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{l_i} \left(\int_0^x \left(\lambda^i(s) - t^i(s) \times \theta^i(s) \right) ds \right) dx \right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Navedene a_0 i b_0 koristimo u definiciji vektora Θ_0 i Y_0. Iz druge jednadžbe u (2.41) slijedi da za proizvoljan i te neku konstantu $C_1 > 0$ vrijedi

$$|m^i(x)| \le |\tilde{M}_0| + C_1\, |\tilde{N}_0|\,.$$

Sada iz prve jednakosti u (2.44) zaključujemo da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$a_0 \le C \left(|\beta| + |\tilde{\Theta}_0| + |\tilde{M}_0| + |\tilde{N}_0| \right).$$

Na sličan način, iz treće jednadžbe u (2.41) slijedi

$$|\theta^i(x)| \le |\Theta_0| + C_1\, \|m^i\|_{L^\infty(K_i;\mathbb{R}^3)} \le |\tilde{\Theta}_0| + |a_0| + C_2\, (|\tilde{M}_0| + |\tilde{N}_0|)\,.$$

Zbog kompaktnosti bridova kao skupova u $\mathbb{R}$, vrijedi da je

$$\left| \int_0^x \lambda^i(s)\, ds \right| \le C_3\, \|\lambda^i\|_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} \le C_3\, \|\lambda\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\,.$$

Iz druge jednakosti u (2.44) sada možemo dobiti ocjenu

$$b_0 \le C \left(|\alpha| + |\tilde{Y}_0| + |a_0| + |\tilde{\Theta}_0| + |\tilde{M}_0| + |\tilde{N}_0| \right).$$

S druge strane, imamo da je

$$|\tilde{v}| \le \|M^\dagger\|\, |d|\,,$$

iz čega slijedi da je

$$|\tilde{M}_0|, |\tilde{N}_0|, |\tilde{Y}_0|, |\tilde{\Theta}_0| \le C\, \|\lambda\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.45}$$

Zaključujemo konačno da je za neki $C > 0$

$$|a_0| \leq C \sqrt{|\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}}\,,$$
$$|b_0| \leq C \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}}\,,$$

a to ćemo iskoristiti za dobivanje ocjene (2.43). Demonstrirat ćemo kako se dobije ocjena za $\|\theta\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}$ (postupak je isti za $\|y\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}$). Za svaki $i = 1, \ldots, N$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|\theta^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} &= \int_0^{l_i} \left(\theta^i(0) + \int_0^x (H^i_Q)^{-1}(s)\, m^i(s)\, ds \right)^2 dx \leq \\
&\leq C_1 \left(|\theta^i(0)|^2 + \int_0^{l_i} \left(\int_0^x (H^i_Q)^{-1}(s)\, m^i(s)\, ds \right)^2 dx \right) \leq \\
&\leq C_2 \left(|\tilde{\Theta}_0|^2 + |a_0|^2 \right) + C_3 \|m^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Za postizanje zadnje nejednakosti iskoristili smo, osim kompaktnosti brida, i činjenicu da je $Q^i \in L^\infty(K_i; M_3(\mathbb{R}))$. Ocjenimo sada $\|m^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)}$:

$$\begin{aligned}
\|m^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} &= \int_0^{l_i} \left(m^i(l_i) + \int_x^{l_i} t^i(s) \times n^i\, ds \right)^2 dx \leq \\
&\leq C_1 \left(|\tilde{M}_0|^2 + \int_0^{l_i} \left(\int_0^x t^i(s) \times n^i\, ds \right)^2 dx \right) \leq \\
&\leq C_2\, |\tilde{M}_0|^2 + C_3\, |\tilde{N}_0|^2\,.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Iz ocjena (2.45), (2.46) i (2.47) slijedi da je

$$\|\theta\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = \sum_{i=1}^N \|\theta^i\|^2_{L^2(K_i;\mathbb{R}^3)} \leq C \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \right).$$

Na sličan način dobije se ocjena

$$\|y\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \leq C \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \right).$$

Ostaje još ocijeniti polunorme

$$|\theta|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = \|\theta'\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\,, \qquad |y|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = \|y'\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\,.$$

Deriviranjem sustava (2.41) dobijemo

$$\begin{aligned}
(n^i)'(x) &= 0\,, \\
(m^i)'(x) &= -t^i(x) \times n^i\,, \\
(\theta^i)'(x) &= (H^i_Q)^{-1}(x)\, m^i(x)\,, \\
(y^i)'(x) &= -t^i(x) \times \theta^i(x) + \lambda^i(x)\,,
\end{aligned}$$

za svaki $i = 1, \ldots, N$. Odatle je lako pokazati da je

$$|y|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \leq C\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\right),$$
$$|\theta|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} \leq C\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\right).$$

Naposljetku zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\|(y,\theta)\|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6)} &= \left(\|y\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} + |y|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} + \|\theta\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} + |\theta|^2_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\lambda\|^2_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)}},\end{aligned}$$

čime je dokaz korolara dovršen. □

Prethodni korolar daje ocjenu koja osigurava da Babuška-Brezzi uvjet vrijedi za našu formu b. Zajedno sa V-eliptičnošću forme a, taj uvjet osigurava egzistenciju i jedinstvenost rješenja problema za stent, što iznosimo u sljedećem teoremu.

Teorem 2.4.12. *Problem* (2.12) *ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Pokazali smo da je forma $a = a_S$ (dana u (2.14)) V-eliptična, gdje je prostor V dan sa (2.19). S druge strane, forma $b = b_S$, također definirana u (2.14), zadovoljava Babuška-Brezzi uvjet. Egzistencija i jedinstvenost rješenja zadaće (2.12) sada slijedi direktnom primjenom Teorema 1.1.2 i Korolara 1.1.3. □

Poglavlje 3

Numerika

U ovome poglavlju želimo aproksimirati rješenje problema (2.12) konačnodimenzionalnim prostorom kako bismo sveli dani problem na *linearan sustav*.

3.1 Numerika za jedan ravni štap

Prvo odaberemo konačnodimenzionalan potprostor prostora $H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \times H^1(0,l;\mathbb{R}^3) \times L^2(0,l;\mathbb{R}^3)$ (koristimo polinome stupnja $\leq m$ te polinome stupnja $\leq n$):

$$V = (P_m \times P_m \times P_m) \times (P_m \times P_m \times P_m) \times (P_n \times P_n \times P_n),$$

gdje je $P_m = P_m(0,l;\mathbb{R})$ i $P_n = P_n(0,l;\mathbb{R})$.

Zatim odaberemo neku bazu $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_{m+1}\}$ za P_m, i bazu $\{\Psi_1, \ldots \Psi_{n+1}\}$ za P_n. Pomoću tih baza konstruiramo bazu za V na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\Phi_1,0,0,0,0,0,0,0,0), & \varphi_2 &= (0,\Phi_1,0,0,0,0,0,0,0), & \varphi_3 &= (0,0,\Phi_1,0,0,0,0,0,0),\\
\varphi_4 &= (0,0,0,\Phi_1,0,0,0,0,0), & \varphi_5 &= (0,0,0,0,\Phi_1,0,0,0,0), & \varphi_6 &= (0,0,0,0,0,\Phi_1,0,0,0),\\
\varphi_7 &= (\Phi_2,0,0,0,0,0,0,0,0), & \varphi_8 &= (0,\Phi_2,0,0,0,0,0,0,0), & \varphi_9 &= (0,0,\Phi_2,0,0,0,0,0,0),\\
\varphi_{10} &= (0,0,0,\Phi_2,0,0,0,0,0), & \varphi_{11} &= (0,0,0,0,\Phi_2,0,0,0,0), & \varphi_{12} &= (0,0,0,0,0,\Phi_2,0,0,0),
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(i-1)\cdot 6+1} &= (\Phi_i,0,0,0,0,0,0,0,0), & \varphi_{(i-1)\cdot 6+2} &= (0,\Phi_i,0,0,0,0,0,0,0),\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+3} &= (0,0,\Phi_i,0,0,0,0,0,0), & \varphi_{(i-1)\cdot 6+4} &= (0,0,0,\Phi_i,0,0,0,0,0),\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+5} &= (0,0,0,0,\Phi_i,0,0,0,0), & \varphi_{i\cdot 6} &= (0,0,0,0,0,\Phi_i,0,0,0),
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{m\cdot 6+1} = (\Phi_{m+1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \qquad \varphi_{m\cdot 6+2} = (0, \Phi_{m+1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$
$$\varphi_{m\cdot 6+3} = (0, 0, \Phi_{m+1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \qquad \varphi_{m\cdot 6+4} = (0, 0, 0, \Phi_{m+1}, 0, 0, 0, 0, 0),$$
$$\varphi_{m\cdot 6+5} = (0, 0, 0, 0, \Phi_{m+1}, 0, 0, 0, 0), \qquad \varphi_{(m+1)\cdot 6} = (0, 0, 0, 0, 0, \Phi_{m+1}, 0, 0, 0),$$

$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_1, 0, 0), \qquad \varphi_{(m+1)\cdot 6+2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_1, 0),$$
$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+3} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_1),$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_i, 0, 0), \qquad \varphi_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_i, 0),$$
$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+i\cdot 3} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_i),$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+n\cdot 3+1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_{n+1}, 0, 0), \qquad \varphi_{(m+1)\cdot 6+n\cdot 3+2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_{n+1}, 0),$$
$$\varphi_{(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \Psi_{n+1}).$$

Označimo sa $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$ projektore sa $\mathbb{R}^9$ na, redom, prve tri, druge tri i treće tri varijable. Zadaća na V, u skladu s metodom konačnih elemenata, je dana sa:

Naći $(y, \theta, \lambda) \in V$ tako da vrijedi

$$a(\theta, \tilde{\theta}) + b(\lambda, (\tilde{y}, \tilde{\theta})) = f(\tilde{y}), \qquad \forall \tilde{y} \in \mathbb{P}_1 V,\ \forall \tilde{\theta} \in \mathbb{P}_2 V,$$
$$b(\mu, (y, \theta)) = 0, \qquad \forall \mu \in \mathbb{P}_3 V.$$

Kada raspišemo varijable u bazi prostora V,

$$y = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{3} x_{(j-1)\cdot 6+i} \cdot \mathbb{P}_1 \varphi_{(j-1)\cdot 6+i}, \qquad \theta = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=4}^{6} x_{(j-1)\cdot 6+i} \cdot \mathbb{P}_2 \varphi_{(j-1)\cdot 6+i},$$
$$\lambda = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i} \cdot \mathbb{P}_3 \varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i},$$

zadaću na V možemo zapisati na sljedeći način:

$$a\left(\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=4}^{6} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot \mathbb{P}_2\varphi_{(j-1)\cdot 6+i}\,,\ \mathbb{P}_2\varphi_k\right)+$$
$$+\ b\left(\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i}\cdot \mathbb{P}_3\varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i}\,,\ (\mathbb{P}_1\varphi_k, \mathbb{P}_2\varphi_k)\right) = f(\mathbb{P}_1\varphi_k)$$
$$k = 1,\ldots,(m+1)\cdot 6\,,$$

$$b\left(\mathbb{P}_3\varphi_k\,,\ \left(\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{3} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot \mathbb{P}_1\varphi_{(j-1)\cdot 6+i}\,,\ \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=4}^{6} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot \mathbb{P}_2\varphi_{(j-1)\cdot 6+i}\right)\right) = 0\,,$$
$$k = (m+1)\cdot 6+1,\ldots,(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3\,,$$

odnosno, uzmemo li u obzir linearnosti formi a i b,

$$\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=4}^{6} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot a\left(\mathbb{P}_2\varphi_{(j-1)\cdot 6+i}\,,\ \mathbb{P}_2\varphi_k\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i}\cdot b\left(\mathbb{P}_3\varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+i}\,,\ (\mathbb{P}_1\varphi_k, \mathbb{P}_2\varphi_k)\right) = f(\mathbb{P}_1\varphi_k)$$
$$k = 1,\ldots,(m+1)\cdot 6\,,$$

$$\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{3} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot b\left(\mathbb{P}_3\varphi_k\,,\ (\mathbb{P}_1\varphi_{(j-1)\cdot 6+i},\ 0)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=4}^{6} x_{(j-1)\cdot 6+i}\cdot b\left(\mathbb{P}_3\varphi_k\,,\ (0,\ \mathbb{P}_2\varphi_{(j-1)\cdot 6+i})\right) = 0\,,$$
$$k = (m+1)\cdot 6+1,\ldots,(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3\,.$$

Potrebno je izračunati samo ne-nul elemente:

$$\begin{aligned}
&a(\mathbb{P}_2\varphi_i, \mathbb{P}_2\varphi_j)\,, && i,j \in \left\{(k-1)\cdot 6+4,\ (k-1)\cdot 6+5,\ k\cdot 6\ :\ k = 1,\ldots,m+1\right\},\\
&b(\mathbb{P}_3\varphi_i, (\mathbb{P}_1\varphi_j, \mathbb{P}_2\varphi_j))\,, && i = (m+1)\cdot 6+1,\ldots,(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3\,,\\
& && j = 1,\ldots,(m+1)\cdot 6\,,\\
&f(\mathbb{P}_1\varphi_j)\,, && j \in \left\{(k-1)\cdot 6+1,\ (k-1)\cdot 6+2,\ (k-1)\cdot 6+3\ :\right.\\
& && \left. k = 1,\ldots,m+1\right\}.
\end{aligned}$$

Račun ćemo provesti za $V = P_2^6 \times P_1^3$ i $V = P_3^6 \times P_2^3$, gdje P_i označava prostor polinoma stupnja $\leq i$.

P2P1 elementi

Ako uz vrhove štapa uzmemo i polovište štapa kao nodalnu točku, tada je nodalna baza za prostor P_2 dana sa:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{2}{l^2} \cdot (s - \frac{l}{2}) \cdot (s - l) = \frac{2}{l^2} s^2 - \frac{3}{l} s + 1 \,, \\
\Phi_2(s) &= \frac{2}{l^2} \cdot s \cdot (s - \frac{l}{2}) = \frac{2}{l^2} s^2 - \frac{1}{l} s \,, \\
\Phi_3(s) &= \frac{-4}{l^2} \cdot s \cdot (s - l) = \frac{-4}{l^2} s^2 + \frac{4}{l} s \,.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dok je nodalna baza za P_1, uz vrhove štapa kao nodalne točke, dana sa

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \frac{-1}{l} s + 1 \,, \\
\Psi_2 &= \frac{1}{l} s \,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Matricu linearnog sustava za $V = P_2^6 \times P_1^3$ možemo zapisati kao blok matricu koja se sastoji od matrica dimenzije 3×3:

$$K = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{11} & B^{12} \\
0 & A^{11} & 0 & A^{12} & 0 & A^{13} & B^{21} & B^{22} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{31} & B^{32} \\
0 & A^{21} & 0 & A^{22} & 0 & A^{23} & B^{41} & B^{42} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{51} & B^{52} \\
0 & A^{31} & 0 & A^{32} & 0 & A^{33} & B^{61} & B^{62} \\
(B^{11})^T & (B^{21})^T & (B^{31})^T & (B^{41})^T & (B^{51})^T & (B^{61})^T & 0 & 0 \\
(B^{12})^T & (B^{22})^T & (B^{32})^T & (B^{42})^T & (B^{52})^T & (B^{62})^T & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

gdje je

$$\begin{aligned}
A_{j,i}^{\alpha,\beta} &= a(\Phi_\alpha e_i, \Phi_\beta e_j) \,, && \alpha \in \{1,2,3\} \,, \quad \beta \in \{1,2,3\} \,, \\
B_{j,i}^{2\alpha-1,\beta} &= b(\Psi_\beta e_i, (\Phi_\alpha e_j, 0)) \,, && \alpha \in \{1,2,3\} \,, \quad \beta \in \{1,2\} \,, \\
B_{j,i}^{2\alpha,\beta} &= b(\Psi_\beta e_i, (0, \Phi_\alpha e_j)) \,, && \alpha \in \{1,2,3\} \,, \quad \beta \in \{1,2\} \,.
\end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi

$$\Psi_2(s) = \Psi_1(l - s) \,, \quad \Phi_2(s) = \Phi_1(l - s) \,, \quad \Phi_3(s) = \Phi_3(l - s) \,.$$

Također, ako za proizvoljne funkcije f i g vrijedi $f = g \circ h$, pri čemu je $h(s) = l - s$, tada vrijedi

$$f'(s) = g'(h(s)) \cdot h'(s) = g'(l-s) \cdot (-1) = -g'(l-s)\,;$$

iz toga slijedi da je

$$\Phi_2'(s) = -\Phi_1'(l-s)\,, \quad \Phi_3'(s) = -\Phi_3'(l-s)\,.$$

To navodimo jer će nam za izračun podmatrica trebati i derivacije baznih funkcija za P_2:

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(s) &= \frac{4}{l^2}s - \frac{3}{l}\,,\\
\Phi_2'(s) &= \frac{4}{l^2}s - \frac{1}{l}\,,\\
\Phi_3'(s) &= \frac{-8}{l^2}s + \frac{4}{l}\,.
\end{aligned}$$

Sada ćemo raspisati podmatrice $A^{\alpha\beta}$, ali spomenimo prvo da forma a ovisi samo o varijabli θ, dakle ne ovisi o stupnju polinoma koje smo odabrali za aproksimaciju varijable λ. Također, forma a je *simetrična*, pa je $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ za proizvoljne α i β. Zbog pojednostavljenja računa, pretpostavljamo da je štap ravan s konstantnim poprečnim presjekom, tj. uzimamo da su Q i t konstante. Raspišimo podmatrice $A^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
A^{11}_{j,i} &= a(\Phi_1 e_i, \Phi_1 e_j) = \int_0^l QHQ^T \partial_s(\Phi_1' e_i) \cdot \partial_s(\Phi_1' e_j)\, ds = \int_0^l (\Phi_1'\Phi_1')\,(QHQ^T e_i \cdot e_j)\, ds = \\
&= (QHQ^T)_{j,i} \int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_1'(s)\, ds\,,\\
&\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_1'(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{4}{l^2}s - \frac{3}{l}\right)^2 ds = \int_0^l \left(\frac{16}{l^4}s^2 - \frac{2\cdot 12}{l^3}s + \frac{9}{l^2}\right) ds = \\
&= \left(\frac{16}{l^4}\cdot\frac{s^3}{3} - \frac{24}{l^3}\cdot\frac{s^2}{2} + \frac{9}{l^2}s\right)\Bigg|_0^l = \frac{16}{l^4}\cdot\frac{l^3}{3} - \frac{24}{l^3}\cdot\frac{l^2}{2} + \frac{9}{l^2}\cdot l = \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{16}{3} - \frac{24}{2} + 9\right) = \\
&= \frac{1}{l}\cdot\frac{16\cdot 2 - 24\cdot 3 + 9\cdot 6}{6} = \frac{14}{6l} = \frac{7}{3l}\,,
\end{aligned}$$

$$\implies A^{11} = \frac{7}{3l} QHQ^T\,.$$

Analogno,

$$A^{12} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_2'(s)\, ds = A^{21}\,,$$

$$\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{4}{l^2}s - \frac{3}{l}\right)\cdot\left(\frac{4}{l^2}s - \frac{1}{l}\right) ds =$$
$$= \int_0^l \left(\frac{4\cdot 4}{l^4}s^2 - \frac{4\cdot 1 + 4\cdot 3}{l^3}s + \frac{3\cdot 1}{l^2}\right) ds =$$
$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 3\right) = \frac{1}{l}\cdot\frac{16\cdot 2 - 16\cdot 3 + 3\cdot 6}{6} = \frac{2}{6l} = \frac{1}{3l}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad A^{12} = \frac{1}{3l}QHQ^T = A^{21}\,.$$

$$A^{13} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = A^{31}\,,$$

$$\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{4}{l^2}s - \frac{3}{l}\right)\cdot\left(\frac{-8}{l^2}s + \frac{4}{l}\right) ds =$$
$$= \int_0^l \left(\frac{4\cdot(-8)}{l^4}s^2 + \frac{4\cdot 4 + 3\cdot 8}{l^3}s - \frac{3\cdot 4}{l^2}\right) ds =$$
$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{-32}{3} + \frac{40}{2} - 12\right) = \frac{1}{l}\cdot\frac{-32\cdot 2 + 40\cdot 3 - 12\cdot 6}{6} = \frac{-16}{6l} = \frac{-8}{3l}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad A^{13} = \frac{-8}{3l}QHQ^T = A^{31}\,.$$

$$A^{33} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-8}{l^2}s + \frac{4}{l}\right)^2 ds = \int_0^l \left(\frac{64}{l^4}s^2 - \frac{(8\cdot 4)\cdot 2}{l^3}s + \frac{16}{l^2}\right) ds =$$
$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{2} + 16\right) = \frac{1}{l}\cdot\frac{64\cdot 2 - 64\cdot 3 + 16\cdot 6}{6} = \frac{32}{6l} = \frac{16}{3l}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad A^{33} = \frac{16}{3l}QHQ^T\,.$$

$$A^{22} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_2'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = (QHQ^T)\int_0^l (-\Phi_1'(l-s))\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds =$$
$$= (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_1'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = A^{11}\,,$$
$$A^{23} = A^{32} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = (QHQ^T)\int_0^l (-\Phi_3'(l-s))\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds =$$
$$= (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_3'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = A^{31} = A^{13}\,.$$

Konačno,

$$A^{11} = A^{22} = \frac{7}{3l}QHQ^T\,,$$
$$A^{12} = A^{21} = \frac{1}{3l}QHQ^T\,,$$
$$A^{13} = A^{31} = A^{23} = A^{32} = \frac{-8}{3l}QHQ^T\,,$$
$$A^{33} = \frac{16}{3l}QHQ^T\,.$$

Za izračun podmatrica $B^{\alpha\beta}$ koristit ćemo još jednu oznaku: neka A_t označava antisimetričnu matricu pridruženu aksijalnome vektoru t (za kojeg pretpostavljamo da je konstantan), tj. neka je $A_t x = t \times x \quad$ za svaki $x \in \mathbb{R}^3$.

$$B^{11}_{j,i} = b(\Psi_1 e_i, (\Phi_1 e_j, 0)) = \int_0^l \Psi_1 e_i \cdot (\Phi_1' e_j + A_t 0)\,ds = \int_0^l (\Psi_1\Phi_1')\,(e_i \cdot e_j)\,ds =$$
$$= \delta_{i,j}\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_1'(s)\,ds\,,$$
$$\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_1'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-1}{l}s + 1\right)\Phi_1'(s)\,ds = -\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1'(s)\,ds + \int_0^l \Phi_1'(s)\,ds =$$
$$= \Phi_1(s)\Big|_0^l - \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1'(s)\,ds = -1 - \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1'(s)\,ds\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{11} = -I - B^{12}\,.$$

Oznaka I stoji za jediničnu matricu dimenzije 3. Analogno,

$$B^{12} = I\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1'(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1'(s)\,ds = \int_0^l \frac{1}{l}s\cdot\left(\frac{4}{l^2}s-\frac{3}{l}\right)ds = \int_0^l\left(\frac{4}{l^3}s^2-\frac{3}{l^2}s\right)ds = \left(\frac{4}{l^3}\cdot\frac{s^3}{3}-\frac{3}{l^2}\cdot\frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^l =$$
$$= \frac{4}{l^3}\cdot\frac{l^3}{3}-\frac{3}{l^2}\cdot\frac{l^2}{2} = \frac{4}{3}-\frac{3}{2} = \frac{4\cdot 2-3\cdot 3}{6} = \frac{-1}{6},$$

$$\Longrightarrow\quad B^{12} = \frac{-1}{6}I,$$
$$B^{11} = (-1-(-\frac{-1}{6}))\,I = \frac{-5}{6}I.$$

$$B^{21}_{j,i} = b(\Psi_1 e_i,(0,\Phi_1 e_j)) = \int_0^l \Psi_1 e_i\cdot(0+A_t(\Phi_1 e_j))\,ds = \int_0^l(\Psi_1\Phi_1)\,(e_i\cdot A_t e_j)\,ds =$$
$$= (A_t)_{i,j}\int_0^l \Psi_1\Phi_1\,ds = (-A_t)_{j,i}\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_1(s)\,ds$$
$$\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_1(s)\,ds = \int_0^l\left(\frac{-1}{l}s+1\right)\cdot\left(\frac{2}{l^2}s^2-\frac{3}{l}s+1\right)ds =$$
$$= \int_0^l\left(\frac{-2}{l^3}s^3+\frac{3+2}{l^2}s^2+\frac{-1-3}{l}s+1\right)ds = \left(\frac{-2}{l^3}\cdot\frac{s^4}{4}+\frac{5}{l^2}\cdot\frac{s^3}{3}+\frac{-4}{l}\cdot\frac{s^2}{2}+s\right)\Big|_0^l =$$
$$= l\cdot\left(\frac{-2}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4}{2}+1\right) = l\cdot\frac{-2\cdot 3+5\cdot 4-4\cdot 6+12}{12} = \frac{2l}{12} = \frac{l}{6},$$

$$\Longrightarrow\quad B^{21} = \frac{-l}{6}A_t.$$

Analogno,

$$B^{22} = -A_t\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1(s)\,ds,$$

$$\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_1(s)\,ds = \int_0^l \frac{1}{l}s\cdot\left(\frac{2}{l^2}s^2-\frac{3}{l}s+1\right)ds = \int_0^l\left(\frac{2}{l^3}s^3-\frac{3}{l^2}s^2+\frac{1}{l}s\right)ds =$$
$$= l\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right) = l\cdot\frac{2\cdot 3-3\cdot 4+1\cdot 6}{12} = 0,$$

$$\Longrightarrow\quad B^{22} = 0.$$

$$B^{51} = I\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_2'(s)\,ds,$$

$$\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \Phi_3(s)\Big|_0^l - \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = -\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3'(s)\,ds\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{51} = -B^{52}\,.$$

$$B^{52} = I\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3'(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \frac{1}{l}s\cdot\left(\frac{-8}{l^2}s+\frac{4}{l}\right)ds = \int_0^l \left(\frac{-8}{l^3}s^2+\frac{4}{l^2}s\right)ds =$$
$$= \frac{-8}{3}+\frac{4}{2} = \frac{-16+12}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{52} = \frac{-2}{3}I\,.$$

$$B^{61} = -A_t\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_3(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_3(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-1}{l}s+1\right)\cdot\left(\frac{-4}{l^2}s^2+\frac{4}{l}s\right)ds = \int_0^l \left(\frac{4}{l^3}s^3+2\cdot\frac{-4}{l^2}s^2+\frac{4}{l}s\right)ds =$$
$$= l\cdot\left(\frac{4}{4}-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right) = l\cdot\frac{12-32+24}{12} = \frac{4l}{12} = \frac{l}{3}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{61} = \frac{-l}{3}A_t\,.$$

$$B^{62} = -A_t\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3(s)\,ds = -A_t\int_0^l \Psi_1(l-s)\,\Phi_3(l-s)\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t\int_l^0 -\Psi_1(z)\,\Phi_3(z)\,dz = -A_t\int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_3(z)\,dz = B^{61}\,,$$

$$B^{31} = I\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_2(l-s)\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I\int_l^0 \Psi_2(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -B^{12}\,,$$

$$B^{32} = I \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = I \int_0^l \Psi_1(l-s)\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I \int_l^0 \Psi_1(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -I \int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -B^{11}\,,$$

$$B^{41} = -A_t \int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_2(s)\,ds = -A_t \int_0^l \Psi_2(l-s)\,\Phi_1(l-s)\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t \int_l^0 -\Psi_2(z)\,\Phi_1(z)\,dz = -A_t \int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_1(z)\,dz = B^{22}\,,$$

$$B^{42} = -A_t \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_2(s)\,ds = -A_t \int_0^l \Psi_1(l-s)\,\Phi_1(l-s)\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t \int_l^0 -\Psi_1(z)\,\Phi_1(z)\,dz = -A_t \int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_1(z)\,dz = B^{21}\,.$$

Konačno,

$$B^{11} = -B^{32} = \frac{-5}{6} I\,,$$
$$B^{12} = -B^{31} = \frac{-1}{6} I\,,$$
$$B^{21} = B^{42} = \frac{-l}{6} A_t\,,$$
$$B^{22} = B^{41} = 0\,,$$
$$B^{51} = -B^{52} = \frac{2}{3} I\,,$$
$$B^{61} = B^{62} = \frac{-l}{3} A_t\,.$$

P3P2 elementi

Slično kao u slučaju baze za P_2, za generiranje nodalne baze prostora P_3 na bridu $[0, l]$ uzimamo nodalne točke u $s = 0, l, \frac{l}{3}, \frac{2l}{3}$. Takva je baza dana sa:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{-9}{2l^3} \cdot (s - \frac{l}{3}) \cdot (s - \frac{2l}{3}) \cdot (s - l) = \frac{-9}{2l^3} s^3 + \frac{9}{l^2} s^2 - \frac{11}{2l} s + 1 \,, \\
\Phi_2(s) &= \frac{9}{2l^3} \cdot s \cdot (s - \frac{l}{3}) \cdot (s - \frac{2l}{3}) = \frac{9}{2l^3} s^3 - \frac{9}{2l^2} s^2 + \frac{1}{l} s \,, \\
\Phi_3(s) &= \frac{27}{2l^3} \cdot s \cdot (s - \frac{2l}{3}) \cdot (s - l) = \frac{27}{2l^3} s^3 - \frac{45}{2l^2} s^2 + \frac{9}{l} s \,, \\
\Phi_4(s) &= \frac{-27}{2l^3} \cdot s \cdot (s - \frac{l}{3}) \cdot (s - l) = \frac{-27}{2l^3} s^3 + \frac{18}{l^2} s^2 - \frac{9}{2l} s \,.
\end{aligned}$$

Kao bazu za P_2 ponovno uzimamo nodalnu bazu

$$\begin{aligned}
\Psi_1(s) &= \frac{2}{l^2} \cdot (s - \frac{l}{2}) \cdot (s - l) = \frac{2}{l^2} s^2 - \frac{3}{l} s + 1 \,, \\
\Psi_2(s) &= \frac{2}{l^2} \cdot s \cdot (s - \frac{l}{2}) = \frac{2}{l^2} s^2 - \frac{1}{l} s \,, \\
\Psi_3(s) &= \frac{-4}{l^2} \cdot s \cdot (s - l) = \frac{-4}{l^2} s^2 + \frac{4}{l} s \,.
\end{aligned}$$

Matricu linearnog sustava za $V = P_3^6 \times P_2^3$ možemo zapisati kao blok matricu koja se sastoji od matrica dimenzije 3×3:

$$\begin{aligned}
A_{j,i}^{\alpha,\beta} &= a(\Phi_\alpha e_i, \Phi_\beta e_j) \,, && \alpha \in \{1,2,3,4\} \,, \quad \beta \in \{1,2,3,4\} \,, \\
B_{j,i}^{2\alpha-1,\beta} &= b(\Psi_\beta e_i, (\Phi_\alpha e_j, 0)) \,, && \alpha \in \{1,2,3,4\} \,, \quad \beta \in \{1,2,3\} \,, \\
B_{j,i}^{2\alpha,\beta} &= b(\Psi_\beta e_i, (0, \Phi_\alpha e_j)) \,, && \alpha \in \{1,2,3,4\} \,, \quad \beta \in \{1,2,3\} \,.
\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}
\Psi_2(s) &= \Psi_1(l - s) \,, \qquad & \Psi_3(s) &= \Psi_3(l - s) \,, \\
\Phi_2(s) &= \Phi_1(l - s) \,, \qquad & \Phi_4(s) &= \Phi_3(l - s) \,,
\end{aligned}$$

iz čega pak slijedi

$$\Phi_2'(s) = -\Phi_1'(l - s) \,, \qquad \Phi_4'(s) = -\Phi_3'(l - s) \,.$$

Derivacije baznih funkcija za P_3:

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(s) &= \frac{-27}{2l^3}s^2 + \frac{18}{l^2}s - \frac{11}{2l}\,,\\
\Phi_2'(s) &= \frac{27}{2l^3}s^2 - \frac{9}{l^2}s + \frac{1}{l}\,,\\
\Phi_3'(s) &= \frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\,,\\
\Phi_4'(s) &= \frac{-81}{2l^3}s^2 + \frac{36}{l^2}s - \frac{9}{2l}\,.
\end{aligned}$$

Raspišimo prvo podmatrice $A^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
A^{11}_{j,i} &= a(\Phi_1 e_i, \Phi_1 e_j) = \int_0^l QHQ^T \partial_s(\Phi_1' e_i)\cdot\partial_s(\Phi_1' e_j)\,ds = \int_0^l (\Phi_1'\Phi_1')\,(QHQ^T e_i\cdot e_j)\,ds =\\
&= (QHQ^T)_{j,i}\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_1'(s)\,ds\,,\\
&\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_1'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-27}{2l^3}s^2 + \frac{18}{l^2}s - \frac{11}{2l}\right)^2 ds =\\
&= \int_0^l \left(\frac{27^2}{4l^6}s^4 - \frac{27\cdot 18}{l^5}s^3 + \Big(\frac{18^2}{l^4} + \frac{27\cdot 11}{2l^4}\Big)s^2 - \frac{18\cdot 11}{l^3}s + \frac{11^2}{4l^2}\right) ds\\
&= \left(\frac{27^2}{4l^6}\cdot\frac{s^5}{5} - \frac{27\cdot 18}{l^5}\cdot\frac{s^4}{4} + \Big(\frac{18^2}{l^4} + \frac{27\cdot 11}{2l^4}\Big)\cdot\frac{s^3}{3} - \frac{18\cdot 11}{l^3}\cdot\frac{s^2}{2} + \frac{11^2}{4l^2}\cdot s\right)\Bigg|_0^l =\\
&= \left(\frac{27^2}{4\cdot 5}\cdot\frac{l^5}{l^6} - \frac{27\cdot 18}{4}\cdot\frac{l^4}{l^5} + \frac{18^2\cdot 2 + 27\cdot 11}{2\cdot 3}\cdot\frac{l^3}{l^4} - \frac{18\cdot 11}{2}\cdot\frac{l^2}{l^3} + \frac{11^2}{4}\cdot\frac{l}{l^2}\right) =\\
&= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{729\cdot 3 - 486\cdot 15 + 945\cdot 10 - 198\cdot 30 + 121\cdot 15}{3\cdot 4\cdot 5}\right) = \frac{222}{60l} = \frac{37}{10l}\,,
\end{aligned}$$

$$\implies A^{11} = \frac{37}{10l}QHQ^T\,.$$

Analogno,

$$A^{12} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = A^{21}\,,$$

$$\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-27}{2l^3}s^2 + \frac{18}{l^2}s - \frac{11}{2l}\right)\cdot\left(\frac{27}{2l^3}s^2 - \frac{9}{l^2}s + \frac{1}{l}\right) ds =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{-27^2}{4l^6}s^4 + \frac{27\cdot 9 + 27\cdot 18}{2l^5}s^3 + \Big(\frac{-27}{2l^4} - \frac{27\cdot 11}{4l^4} - \frac{18\cdot 9}{l^4}\Big)s^2 + \right.$$

$$\left. + \Big(\frac{18}{l^3} + \frac{9\cdot 11}{2l^3}\Big)s - \frac{11}{2l^2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{-729}{4\cdot 5} + \frac{729}{2\cdot 4} - \frac{999}{4\cdot 3} + \frac{135}{2\cdot 2} - \frac{11}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot\frac{-729\cdot 6 + 729\cdot 15 - 999\cdot 10 + 135\cdot 30 - 11\cdot 60}{3\cdot 5\cdot 8} =$$

$$= \frac{-39}{120l} = \frac{-13}{40l},$$

$$\Longrightarrow \quad A^{12} = \frac{-13}{40l}QHQ^T = A^{21}.$$

$$A^{13} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = A^{31},$$

$$\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-27}{2l^3}s^2 + \frac{18}{l^2}s - \frac{11}{2l}\right)\cdot\left(\frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\right) ds =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{-27\cdot 81}{4l^6}s^4 + \frac{27\cdot 45 + 18\cdot 81}{2l^5}s^3 + \Big(\frac{-27\cdot 9}{2l^4} - \frac{81\cdot 11}{4l^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{18\cdot 45}{l^4}\Big)s^2\right) + \left(\Big(\frac{18\cdot 9}{l^3} + \frac{45\cdot 11}{2l^3}\Big)s - \frac{11\cdot 9}{2l^2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{-2187}{4\cdot 5} + \frac{2673}{2\cdot 4} - \frac{4617}{4\cdot 3} + \frac{819}{2\cdot 2} - \frac{99}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot\frac{-2187\cdot 6 + 2673\cdot 15 - 4617\cdot 10 + 819\cdot 30 - 99\cdot 60}{3\cdot 5\cdot 8} =$$

$$= \frac{-567}{120l} = \frac{-189}{40l},$$

$$\Longrightarrow \quad A^{13} = \frac{-189}{40l}QHQ^T = A^{31}.$$

$$A^{14} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = A^{41},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \Phi_1'(s)\,\Phi_4'(s)\,ds &= \int_0^l \left(\frac{-27}{2l^3}s^2 + \frac{18}{l^2}s - \frac{11}{2l}\right)\cdot\left(\frac{-81}{2l^3}s^2 + \frac{36}{l^2}s - \frac{9}{2l}\right) ds = \\
&= \int_0^l \left(\frac{27\cdot 81}{4l^6}s^4 - \frac{27\cdot 36 + 18\cdot 81}{2l^5}s^3 + \Big(\frac{27\cdot 9 + 81\cdot 11}{4l^4} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{18\cdot 36}{l^4}\Big)s^2\right) - \left(\frac{18\cdot 9 + 11\cdot 36}{2l^3}s + \frac{11\cdot 9}{4l^2}\right) ds = \\
&= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{2187}{4\cdot 5} - \frac{2430}{2\cdot 4} + \frac{3726}{4\cdot 3} - \frac{558}{2\cdot 2} + \frac{99}{4}\right) = \\
&= \frac{1}{l}\cdot\frac{2187\cdot 6 - 2430\cdot 15 + 3726\cdot 10 - 558\cdot 30 + 99\cdot 30}{3\cdot 5\cdot 8} = \\
&= \frac{162}{120l} = \frac{27}{20l},
\end{aligned}$$

$$\implies A^{14} = \frac{27}{20l}QHQ^T = A^{41}\,.$$

$$A^{33} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds\,,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_3'(s)\,ds &= \int_0^l \left(\frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\right)^2 ds = \\
&= \int_0^l \left(\frac{81^2}{4l^6}s^4 - \frac{81\cdot 45}{l^5}s^3 + \frac{81\cdot 9 + 45^2}{l^4}s^2 - \frac{45\cdot 9\cdot 2}{l^3}s + \frac{9^2}{l^2}\right) ds = \\
&= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{6561}{4\cdot 5} - \frac{3645}{4} + \frac{2754}{3} - \frac{810}{2} + 81\right) = \\
&= \frac{1}{l}\cdot\frac{6561\cdot 6 - 3645\cdot 30 + 2754\cdot 40 - 810\cdot 60 + 81\cdot 120}{3\cdot 5\cdot 8} = \\
&= \frac{1296}{120l} = \frac{54}{5l},
\end{aligned}$$

$$\implies A^{22} = \frac{-189}{40l}QHQ^T\,.$$

$$A^{34} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = A^{43}\,,$$

$$\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\right)\cdot\left(\frac{-81}{2l^3}s^2 + \frac{36}{l^2}s - \frac{9}{2l}\right) ds =$$
$$= \int_0^l \left(\frac{-81^2}{4l^6}s^4 + \frac{81\cdot 36 + 81\cdot 45}{2l^5}s^3 - \Big(\frac{81\cdot 9}{4l^4} + \frac{81\cdot 9}{2l^4} + \frac{45\cdot 36}{l^4}\Big)s^2 + \right.$$
$$\left. + \Big(\frac{45\cdot 9}{2l^3} + \frac{36\cdot 9}{l^3}\Big)s - \frac{9^2}{2l^2}\right) ds =$$
$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{-6561}{4\cdot 5} + \frac{6561}{2\cdot 4} - \frac{8667}{4\cdot 3} + \frac{1053}{2\cdot 2} - \frac{81}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{l}\cdot\frac{-6561\cdot 6 + 6561\cdot 15 - 8667\cdot 10 + 1053\cdot 30 - 81\cdot 60}{3\cdot 5\cdot 8} =$$
$$= \frac{-891}{120l} = \frac{-297}{40l},$$
$$\Longrightarrow \quad A^{34} = \frac{-297}{40l}QHQ^T = A^{43}.$$

$$A^{22} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_2'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = (QHQ^T)\int_0^l (-\Phi_1'(l-s))\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds =$$
$$= \begin{bmatrix} z = l - s \\ dz = -ds \end{bmatrix} = (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_1'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_1'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = A^{11},$$

$$A^{23} = A^{32} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = (QHQ^T)\int_0^l (-\Phi_4'(l-s))\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds =$$
$$= \begin{bmatrix} z = l - s \\ dz = -ds \end{bmatrix} = (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_4'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_4'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz =$$
$$= A^{41} = A^{14},$$

$$A^{24} = A^{42} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_4'(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = (QHQ^T)\int_0^l (-\Phi_3'(l-s))\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds =$$
$$= \begin{bmatrix} z = l - s \\ dz = -ds \end{bmatrix} = (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_3'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(z)\,\Phi_1'(z)\,dz =$$
$$= A^{31} = A^{13},$$

$$A^{44} = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_4'(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = (QHQ^T)\cdot\int_0^l (-\Phi_3'(l-s))\,(-\Phi_3'(l-s))\,ds =$$
$$= \begin{bmatrix} z = l - s \\ dz = -ds \end{bmatrix} = (QHQ^T)\int_l^0 -\Phi_3'(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = (QHQ^T)\int_0^l \Phi_3'(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = A^{33}.$$

Konačno,

$$
\begin{aligned}
A^{11} &= A^{22} = \frac{37}{10l} QHQ^T \,, \\
A^{12} &= A^{21} = \frac{-13}{40l} QHQ^T \,, \\
A^{13} &= A^{31} = A^{24} = A^{42} = \frac{-189}{40l} QHQ^T \,, \\
A^{14} &= A^{41} = A^{23} = A^{32} = \frac{27}{20l} QHQ^T \,, \\
A^{33} &= A^{44} = \frac{54}{5l} QHQ^T \,, \\
A^{34} &= A^{43} = \frac{-297}{40l} QHQ^T \,.
\end{aligned}
$$

Raspišimo sada podmatrice $B^{\alpha\beta}$:

$$
\begin{aligned}
B^{11}_{j,i} &= b(\Psi_1 e_i, (\Phi_1 e_j, 0)) = \int_0^l \Psi_1 e_i \cdot (\Phi_1' e_j + A_t 0)\, ds = \int_0^l (\Psi_1 \Phi_1')\, (e_i \cdot e_j)\, ds = \\
&= \delta_{i,j} \int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_1'(s)\, ds \,, \\
&\int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_1'(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} s^2 - \frac{3}{l} s + 1 \right) \cdot \left(\frac{-27}{2l^3} s^2 + \frac{18}{l^2} s - \frac{11}{2l} \right) ds = \ldots = \frac{-83}{120} \,,
\end{aligned}
$$

$$
\implies \quad B^{11} = \frac{-83}{120} I \,.
$$

Analogno,

$$
B^{12} = I \int_0^l \Psi_2(s)\, \Phi_1'(s)\, ds \,,
$$

$$
\int_0^l \Psi_2(s)\, \Phi_1'(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} s^2 - \frac{1}{l} s \right) \cdot \left(\frac{-27}{2l^3} s^2 + \frac{18}{l^2} s - \frac{11}{2l} \right) ds = \ldots = \frac{7}{120} \,,
$$

$$
\implies \quad B^{12} = \frac{7}{120} I \,.
$$

$$
B^{13} = I \int_0^l \Psi_3(s)\, \Phi_1'(s)\, ds \,,
$$

$$
\int_0^l \Psi_3(s)\, \Phi_1'(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{-4}{l^2} s^2 + \frac{4}{l} s \right) \cdot \left(\frac{-27}{2l^3} s^2 + \frac{18}{l^2} s - \frac{11}{2l} \right) ds = \ldots = \frac{-11}{30} \,,
$$

$$\Longrightarrow \quad B^{13} = \frac{-11}{30} I\,.$$

$$B^{21}_{j,i} = b(\Psi_1 e_i, (0, \Phi_1 e_j)) = \int_0^l \Psi_1 e_i \cdot (0 + A_t(\Phi_1 e_j))\, ds = \int_0^l (\Psi_1 \Phi_1)\, (e_i \cdot A_t e_j)\, ds =$$
$$= (A_t)_{i,j} \int_0^l \Psi_1 \Phi_1\, ds = (-A_t)_{j,i} \int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_1(s)\, ds\,,$$
$$\int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_1(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} s^2 - \frac{3}{l} s + 1\right) \cdot \left(\frac{-9}{2l^3} s^3 + \frac{9}{l^2} s^2 - \frac{11}{2l} s + 1\right) ds = \ldots = \frac{11l}{120}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{21} = \frac{-11l}{120} A_t\,.$$

Analogno,

$$B^{22} = -A_t \int_0^l \Psi_2(s)\, \Phi_1(s)\, ds\,,$$
$$\int_0^l \Psi_2(s)\, \Phi_1(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} s^2 - \frac{1}{l} s\right) \cdot \left(\frac{-9}{2l^3} s^3 + \frac{9}{l^2} s^2 - \frac{11}{2l} s + 1\right) ds = \ldots = 0\,,$$
$$\Longrightarrow \quad B^{22} = 0\,.$$

$$B^{23} = -A_t \int_0^l \Psi_3(s)\, \Phi_1(s)\, ds\,,$$
$$\int_0^l \Psi_3(s)\, \Phi_1(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{-4}{l^2} s^2 + \frac{4}{l} s\right) \cdot \left(\frac{-9}{2l^3} s^3 + \frac{9}{l^2} s^2 - \frac{11}{2l} s + 1\right) ds = \ldots = \frac{l}{30}\,,$$
$$\Longrightarrow \quad B^{23} = \frac{-l}{30} A_t\,.$$

$$B^{51} = I \int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_3'(s)\, ds\,,$$
$$\int_0^l \Psi_1(s)\, \Phi_3'(s)\, ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} s^2 - \frac{3}{l} s + 1\right) \cdot \left(\frac{81}{2l^3} s^2 - \frac{45}{l^2} s + \frac{9}{l}\right) ds = \ldots = \frac{33}{40}\,,$$
$$\Longrightarrow \quad B^{51} = \frac{33}{40} I\,.$$

$$B^{52} = I \int_0^l \Psi_2(s)\, \Phi_3'(s)\, ds$$

$$\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2}s^2 - \frac{1}{l}s\right)\cdot\left(\frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\right) ds = \ldots = \frac{3}{40}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{52} = \frac{3}{40}I\,.$$

$$B^{53} = I\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_3'(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_3'(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-4}{l^2}s^2 + \frac{4}{l}s\right)\cdot\left(\frac{81}{2l^3}s^2 - \frac{45}{l^2}s + \frac{9}{l}\right) ds = \ldots = \frac{-9}{10}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{53} = \frac{-9}{10}I\,.$$

$$B^{61} = -A_t\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_3(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_3(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2}s^2 - \frac{3}{l}s + 1\right)\cdot\left(\frac{27}{2l^3}s^3 - \frac{45}{2l^2}s^2 + \frac{9}{l}s\right) ds = \ldots = \frac{3l}{20}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{61} = \frac{-3l}{20}A_t\,.$$

$$B^{62} = -A_t\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_3(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{2}{l^2}s^2 - \frac{1}{l}s\right)\cdot\left(\frac{27}{2l^3}s^3 - \frac{45}{2l^2}s^2 + \frac{9}{l}s\right) ds = \ldots = \frac{-3l}{40}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{62} = \frac{3l}{40}A_t\,,$$

$$B^{63} = -A_t\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_3(s)\,ds\,,$$

$$\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_3(s)\,ds = \int_0^l \left(\frac{-4}{l^2}s^2 + \frac{4}{l}s\right)\cdot\left(\frac{27}{2l^3}s^3 - \frac{45}{2l^2}s^2 + \frac{9}{l}s\right) ds = \ldots = \frac{3l}{10}\,,$$

$$\Longrightarrow \quad B^{43} = \frac{-3l}{10}A_t\,.$$

$$B^{31} = I\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_2(l-s)\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$

$$= I\int_l^0 \Psi_2(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -B^{12}\,,$$

$$B^{32} = I\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_1(l-s)\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I\int_l^0 \Psi_1(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -B^{11}\,,$$

$$B^{33} = I\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_2'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_3(l-s)\,(-\Phi_1'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I\int_l^0 \Psi_3(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_3(z)\,\Phi_1'(z)\,dz = -B^{13}\,,$$

$$B^{41} = -A_t\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_2(s)\,ds = -A_t\int_0^l \Psi_2(l-s)\,\Phi_1(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t\int_l^0 (-\Psi_2(z))\,\Phi_1(z)\,dz = -A_t\int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_1(z)\,dz = B^{22}\,,$$

$$B^{42} = -A_t\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_2(s)\,ds = -A_t\int_0^l \Psi_1(l-s)\,\Phi_1(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t\int_l^0 (-\Psi_1(z))\,\Phi_1(z)\,dz = -A_t\int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_1(z)\,dz = B^{21}\,,$$

$$B^{43} = -A_t\int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_2(s)\,ds = -A_t\int_0^l \Psi_3(l-s)\,\Phi_1(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t\int_l^0 (-\Psi_3(z))\,\Phi_1(z)\,dz = -A_t\int_0^l \Psi_3(z)\,\Phi_1(z)\,dz = B^{23}\,,$$

$$B^{71} = I\int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_2(l-s)\,(-\Phi_3'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I\int_l^0 \Psi_2(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -B^{52}\,,$$

$$B^{72} = I\int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = I\int_0^l \Psi_1(l-s)\,(-\Phi_3'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I\int_l^0 \Psi_1(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -I\int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -B^{51}\,,$$

$$B^{73} = I \int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_4'(s)\,ds = I \int_0^l \Psi_3(l-s)\,(-\Phi_3'(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= I \int_l^0 \Psi_3(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -I \int_0^l \Psi_3(z)\,\Phi_3'(z)\,dz = -B^{53}\,,$$

$$B^{81} = -A_t \int_0^l \Psi_1(s)\,\Phi_4(s)\,ds = -A_t \int_0^l \Psi_2(l-s)\,\Phi_3(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t \int_l^0 (-\Psi_2(z))\,\Phi_3(z)\,dz = -A_t \int_0^l \Psi_2(z)\,\Phi_3\,dz = B^{62}\,,$$

$$B^{82} = -A_t \int_0^l \Psi_2(s)\,\Phi_4(s)\,ds = -A_t \int_0^l \Psi_1(l-s)\,\Phi_3(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t \int_l^0 (-\Psi_1(z))\,\Phi_3(z)\,dz = -A_t \int_0^l \Psi_1(z)\,\Phi_3\,dz = B^{61}\,,$$

$$B^{83} = -A_t \int_0^l \Psi_3(s)\,\Phi_4(s)\,ds = -A_t \int_0^l \Psi_3(l-s)\,\Phi_3(l-s))\,ds = \begin{bmatrix} z = l-s \\ dz = -ds \end{bmatrix} =$$
$$= -A_t \int_l^0 (-\Psi_3(z))\,\Phi_3(z)\,dz = -A_t \int_0^l \Psi_3(z)\,\Phi_3\,dz = B^{63}\,.$$

Konačno,

$$B^{11} = -B^{32} = \frac{-83}{120} I\,,$$
$$B^{12} = -B^{31} = \frac{7}{120} I\,,$$
$$B^{13} = -B^{33} = \frac{-11}{30} I\,,$$
$$B^{21} = B^{42} = \frac{-11l}{120} A_t\,,$$
$$B^{22} = B^{41} = 0\,,$$
$$B^{23} = B^{43} = \frac{-l}{30} A_t\,,$$
$$B^{51} = -B^{72} = \frac{33}{40} I\,,$$
$$B^{52} = -B^{71} = \frac{3}{40} I\,,$$

$$B^{53} = -B^{73} = \frac{-9}{10} I\,,$$
$$B^{61} = B^{82} = \frac{-3l}{20} A_t\,,$$
$$B^{62} = B^{81} = \frac{3l}{40} A_t\,,$$
$$B^{63} = B^{83} = \frac{-3l}{10} A_t\,.$$

3.2 Numerika za stent

U prethodnom odjeljku formulirana je numerika za jedan štap. Stent je graf čiji su bridovi savijeni štapovi (nalaze se na plaštu cilindra), ali mi ih aproksimiramo ravnim štapovima. Budući da parametrizacija pojedinog štapa uvjetuje početni i krajnji vrh, zapravo se radi o strukturi usmjerenog grafa. Iz (2.12) i (2.14) vidimo da je mješovitu formulaciju za stent lako izvesti iz mješovitih formulacija za svaki pojedini štap. Tu ideju slijedimo pri generiranju matrice sustava za problem stenta. Neka su prostori X_h i M_h, u kojima tražimo rješenje

$$((y,\theta),(\lambda,\alpha,\beta)) \in X_h \times (M_h \times \mathbb{R}^6) \subset X \times M\,,$$

dani sa

$$X_h = \left\{ g \in H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^6) \;:\; g^i = g\big|_{K_i} \in P_m(K_i;\mathbb{R}^3) \times P_m(K_i;\mathbb{R}^3), \quad \forall i = 1,\dots,N \right\},$$
$$M_h = \left\{ \lambda \in L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3) \;:\; \lambda^i = \lambda\big|_{K_i} \in P_n(K_i;\mathbb{R}^3), \quad \forall i = 1,\dots,N \right\}.$$

Napomena 3.2.1. *U daljnjem razmatranju koristimo sljedeću karakterizaciju prostora X_h i M_h:*

$$X_h = \Big\{ g\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^6 \;:\; g^i = g\big|_{K_i} \in P_m(K_i;\mathbb{R}^3) \times P_m(K_i;\mathbb{R}^3), \quad \forall i = 1,\dots,N,$$
$$g \text{ neprekidna u vrhovima stenta} \Big\},$$
$$M_h = \left\{ \lambda\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^3 \;:\; \lambda^i = \lambda\big|_{K_i} \in P_n(K_i;\mathbb{R}^3), \quad \forall i = 1,\dots,N \right\}.$$

Za dobivanje obje karakterizacije koristili smo činjenicu da su funkcije iz prostora $P_k(K_i;\mathbb{R}^j)$ glatke za proizvoljne $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \mathbb{N}$. Naime, glatkoća i ograničenost brida zajedno povlače da je

$$P_k(K_i;\mathbb{R}^j) \subset H^1(K_i;\mathbb{R}^j) \subset L^2(K_i;\mathbb{R}^j)\,.$$

Sada karakterizacija za M_h direktno slijedi zbog ograničenosti stenta (konačan skup bridova), a iz definicije (2.6) *prostora $H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^j)$ vidimo da nam je za prostor X_h potreban još samo uvjet neprekidnosti u vrhovima stenta.*

Označimo naš testni prostor sa $V_h = X_h \times M_h \times \mathbb{R}^6$, pri čemu $\mathbb{R}^6$ odgovara varijablama $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, koje se javljaju kod forme b (definirane na stentu). Sjetimo se, te varijable služe da bismo izbjegli "klizanje" stenta.

Pozabavimo se prvo prostorom $X_h \times M_h$. Proizvoljna bazna funkcija iz $X_h \times M_h$ će biti netrivijalna samo za jedan element iz trojke (y, θ, λ). Za taj će pak element biti netrivijalna samo jedna njena komponenta u $\mathbb{R}^3$, u samo jednoj nodalnoj točki iz skupa svih nodalnih točaka stenta, označenog sa $\mathcal{N}_h$. Budući da stupnjevi polinoma m i n nisu nužno jednaki, funkcije y i θ nećemo nužno definirati preko istih nodalnih točaka kao i funkciju λ. Iz tog razloga skup $\mathcal{N}_h$ dijelimo na skup nodalnih točaka za potprostor X_h, označen sa $\mathcal{X}_h$, te skup nodalnih točaka za potprostor M_h, označen sa $\mathcal{M}_h$.

Znamo da je dimenzija prostora polinoma P_k jednaka $k + 1$ za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ (i za svaku domenu u $\mathbb{R}$). Stoga zaključujemo da svaki brid stenta treba sadržavati $m + 1$ nodalnih točaka za prostor X_h te $n + 1$ nodalnih točaka za prostor M_h.

Generirajmo prvo bazu za prostor X_h, koju ćemo označiti sa B. Svaki brid stenta sadržava $m + 1$ nodalnih točaka za bazu B, od kojih su dvije točke početni i krajnji vrh brida, dakle vrhovi stenta. Uzmimo proizvoljan brid stenta. Nodalne točke u vrhovima brida su nodalne točke u još nekim bridovima, jer se svaki vrh stenta nalazi u više bridova. Preostalih $m - 1$ nodalnih točaka pripada isključivo tom bridu. Ako sa N označimo broj bridova, a sa M broj vrhova stenta, onda je ukupan broj nodalnih točaka za prostor X_h, označen sa d_1, očito jednak $M + N(m - 1)$. Neka su sa

$$\mathcal{X}_h = \left\{w_1, w_2, \ldots, w_{d_1}\right\}$$

dane nodalne točke skupa $\mathcal{X}_h$. Svakoj od tih nodalnih točaka pridružujemo po 6 funkcija iz B; po jednu za svaku komponentu prostora $\mathbb{R}^6$. Fiksirajmo neku komponentu j u $\mathbb{R}^6$ i neku nodalnu točku stenta w_i. Paru (w_i, j) pridružujemo funkciju $b_{6(i-1)+j}$. Radi kraćeg zapisa, neka je $x = b_{6(i-1)+j}$. Funkcija x je takva da njena j-ta komponenta, x_j, poprima vrijednost 1 u točki w_i, dok je u ostalim nodalnim točkama jednaka 0. Ostale komponente funkcije su nul-funkcije na cijelome stentu. Ostaje definirati x_j za točke stenta koje nisu nodalne. Tu razlikujemo dva slučaja:

1. Ako točka w_i nije vrh stenta, tada ona pripada samo jednom bridu, kojeg ćemo označiti sa K. Na bridu K, x_j je jednaka 1 u w_i, dok je u preostalih m nodalnih točaka brida jednaka 0. Tih $m + 1$ vrijednosti jedinstveno definira polinom $p \in P_m(K; \mathbb{R})$, te uzimamo da je

   $$x_j\Big|_K = p\,.$$

   Na ostalim bridovima x_j je 0 u svih $m + 1$ nodalnih točaka. Da bi x mogao biti element baze za X_h, on mora biti polinom na svakom bridu stenta, pa zaključujemo

da je

$$x_j \Big|_{\mathcal{N}\setminus K} = 0\,.$$

Nadalje, x mora biti neprekidan, što je ekvivalentno s neprekidnošću svake pojedine komponente. Komponente x_k, $k \neq j$, trivijalno zadovoljavaju uvjet neprekidnosti jer su nul-funkcije. Što se komponente x_j tiče, ona je očito neprekidna na bridu K te na $\mathcal{N}\setminus K$, pa ostaje još ispitati neprekidnost u vrhovima od K. Neprekidnost u vrhovima od K slijedi iz činjenice da je x_j jednaka 0 u tim vrhovima, što je vrijednost koju x_j poprima i na $\mathcal{N}\setminus K$.

Konačno, zaključujemo da je ovako definirana funkcija x element iz X_h.

2. Ako je w_i vrh stenta, tada na svakom bridu koji sadrži taj vrh, x_j definiramo analogno kao u prvom slučaju. Na taj način dobijemo funkciju koja je polinom na svakom od tih bridova, te je jedinstveno definirana u vrhu w_i ($x_j(w_i) = 1$). Neprekidnost je, slično kao i prije, potrebno ispitati još samo u preostalim vrhovima onih bridova koji sadrže vrh w_i. Za neprekidnost u tim vrhovima primjenjujemo isti argument kao u prvom slučaju.

   I u ovom smo slučaju, dakle, pokazali da je $x \in X_h$.

Sada smo u potpunosti definirali skup $B \subset X_h$, koji sadrži $6\,(N + M(m-1))$ funkcija, odnosno

$$\operatorname{card}(B) = 6\,(N + M(m-1))\,.$$

Potrebno je još pokazati da taj skup doista jest baza za prostor X_h.

Propozicija 3.2.2. *Neka je $\{w_i : i = 1, \ldots, d_1\}$ skup nodalnih točaka stenta za prostor X_h, te neka je $B = \{B, \ldots, b_{6d_1}\}$ pripadni skup funkcija, generiran na prije opisan način. Tada je B baza za prostor X_h.*

Dokaz. Utvrdili smo ranije da je $B \subset X_h$, a sada ćemo pokazati da je skup B linearno nezavisan te da je sustav izvodnica za X_h. To su, naime, nužni i dovoljni uvjeti da skup bude baza prostora.

1) B je linearno nezavisan.
Neka su $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 6d_1$, takvi da je

$$\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{6} \alpha_{6(i-1)+j}\, b_{6(i-1)+j} = 0\,. \tag{3.3}$$

Za proizvoljne i_0 i j_0, funkcija $b_{6(i_0-1)+j_0}$ je jedina funkcija iz skupa B čija je j_0-ta komponenta u točki w_{i_0} različita od 0, pa iz (3.3) slijedi da je $\alpha_{i_0 j_0} = 0$. Budući da su i_0 i j_0

odabrani proizvoljno, slijedi da je $\alpha_k = 0$ za svaki $k = 1, \ldots, 6d_1$, pa je skup B linearno nezavisan.

2) B je sustav izvodnica za X_h.
Neka je x proizvoljna funkcija iz X_h. To je ekvivalentno sa zahtjevom da je restrikcija od x na proizvoljan brid K iz prostora $P_m(K;\mathbb{R}^3) \times P_m(K;\mathbb{R}^3)$, te da je x neprekidna (odnosno dobro definirana) u vrhovima stenta. Budući da su svi vrhovi stenta nodalne točke, te da svaki brid sadrži točno $m+1$ nodalnih točaka, funkcija x je jedinstveno zadana svojim vrijednostima u nodalnim točkama $\{w_1, \ldots, w_{d_1}\}$. Kodomena funkcije x je prostor $\mathbb{R}^6$, pa stoga možemo pisati $x(w_i) = (\gamma_{6(i-1)+1}, \ldots, \gamma_{6i})$. Jedina funkcija iz $[B]$ (prostora generiranog skupom B) koja postiže dane vrijednosti u nodalnim točkama, jest funkcija

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{6} \gamma_{6(i-1)+j}\, b_{6(i-1)+j}\,.$$

Ta funkcija je element prostora X_h, pa je nužno jednaka funkciji x. Time smo dokazali da je skup B sustav izvodnica za X_h. □

Razmotrimo sada prostor M_h. Za funkcije iz M_h ne zahtijevamo neprekidnost na stentu, pa posebno ni neprekidnost u vrhovima stenta. Prostor M_h je naša aproksimacija prostora $L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)$, u kojemu funkcije nisu eksplicitno definirane na skupu mjere 0. Stoga funkcije iz M_h nema ni smisla definirati u vrhovima stenta, koji čine konačan skup točaka u $\mathbb{R}^3$, dakle skup mjere 0. Posljedica toga je da će sada svaki vrh stenta predstavljati višestruku nodalnu točku (po jednu za svaki brid koji sadrži taj vrh). Neka C označava nodalnu bazu za M_h. Na svakom bridu imamo $n+1$ nodalnih točaka, kojima pridružujemo $3(n+1)$ baznih funkcija iz C. To radimo na sličan način kao i u slučaju prostora X_h, s time da je sada svaka bazna funkcija netrivijalna samo na jednom bridu stenta.

Uzmimo proizvoljan brid K_i (preciznije rečeno, indeks i je proizvoljan), za kojeg ćemo demonstrirati generiranje pripadnih $3(n+1)$ baznih funkcija. Neka je $\{v_1^i, \ldots, v_{n+1}^i\} \subset \mathcal{M}_h$ skup nodalnih točaka na bridu K_i. Tada za proizvoljne $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ i $k \in \{1, \ldots, 3\}$ definiramo funkciju $x := c^i_{3(j-1)+k} \in C$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
x\big|_{\mathcal{N}\setminus K_i} &= 0\,, \\
x_p\big|_{K_i} &= 0 && \text{za } p \neq k\,, \\
x_k\big|_{K_i} &\in P_n(K_i;\mathbb{R})\,, && \text{tako da je } x_k(v_r^i) = \delta_{rj}\,.
\end{aligned}$$

Uz karakterizaciju skupa M_h iz Napomene 3.2.1, lako se pokaže da je skup

$$C = \left\{c_1^1, \ldots, c^1_{3(n+1)}, \ldots, c_1^N, \ldots, c^N_{3(n+1)}\right\}$$

baza za prostor M_h, i očito je

$$\operatorname{card}(C) = 3N(n+1).$$

Pozabavimo se, naposljetku, varijablama $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$. One se javljaju u formi

$$b((\lambda,\alpha,\beta),(y,\theta)) = \int_{\mathcal{N}} \lambda \cdot (y' + t \times \theta) + \alpha \cdot \int_{\mathcal{N}} y + \beta \cdot \int_{\mathcal{N}} \theta .$$

Za rješenje $((y,\theta),(\lambda,\alpha,\beta))$ tražimo da vrijedi

$$b((0,\tilde{\alpha},0),(y,\theta)) = \tilde{\alpha} \cdot \int_{\mathcal{N}} y = 0 \qquad \forall \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^3 ,$$

što je ekvivalentno sa

$$e_i \cdot \int_{\mathcal{N}} y = \int_{\mathcal{N}} y_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,3 ,$$

gdje su e_i elementi kanonske baze za $\mathbb{R}^3$. Ako je $x \in V_h$ test funkcija za koju je $\tilde{\alpha} = e_i$, gdje je e_i element kanonske baze za $\mathbb{R}^3$, tada je

$$x = (0,0,0,e_i,0) ,$$

uz $0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Analogno, za testnu funkciju

$$x = (0,0,0,0,e_i)$$

$\tilde{\beta} = e_i$, i tražit ćemo da vrijedi

$$b((0,0,\tilde{\beta}),(y,\theta)) = \int_{\mathcal{N}} \theta_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,3 .$$

Ako sa D označimo kanonsku bazu za $\mathbb{R}^6$, tada skupovima B, C i D konačno možemo generirati bazu B_h za testni prostor V_h:

$$B_h = (B,(0,0,0)) \cup ((0,0),(C,0,0)) \cup ((0,0),(0,D)) .$$

Također znamo da je

$$\operatorname{card}(B_h) = 6(N + M(m-1)) + 3N(n+1) + 6 ,$$

što je, zaključno, dimenzija kvadratne matrice našeg linearnog sustava.

U sljedećem primjeru opisujemo postupak generiranja matrice sustava te vektora desne strane za elemente P2P1. Pri tome prirodno koristimo matricu pripadnog sustava za *problem štapa* iz prethodne sekcije.

Primjer 3.2.3. Prisjetimo se strukture matrice sustava za problem štapa u slučaju kada koristimo elemente P2P1:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{11} & B^{12} \\ 0 & A^{11} & 0 & A^{12} & 0 & A^{13} & B^{21} & B^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{31} & B^{32} \\ 0 & A^{21} & 0 & A^{22} & 0 & A^{23} & B^{41} & B^{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{51} & B^{52} \\ 0 & A^{31} & 0 & A^{32} & 0 & A^{33} & B^{61} & B^{62} \\ (B^{11})^T & (B^{21})^T & (B^{31})^T & (B^{41})^T & (B^{51})^T & (B^{61})^T & 0 & 0 \\ (B^{12})^T & (B^{22})^T & (B^{32})^T & (B^{42})^T & (B^{52})^T & (B^{62})^T & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća desna strana ima strukturu

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ D^1 \\ 0 \\ D^1 \\ 0 \\ D^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je M_S matrica sustava za problem stenta, a F_S vektor desne strane. Njih generiramo u petlji koja ide po bridovima stenta, pa stoga proučimo kakvi su doprinosi matrici i vektoru desne strane za proizvoljan brid $K_i = [0, l_i]$ (i-ti brid stenta).

Neka je v_j početni, a v_k krajnji brid stenta. Funkcije nodalne baze $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ za prostor $P_2(0, l_i; \mathbb{R})$ dane su (uz $l = l_i$) sa (3.1), a baza za $P_1(0, l_i; \mathbb{R})$ dana je sa (3.2). Uočimo da za svaku testnu funkciju iz B_h, doprinos formama a i b, pa stoga i samoj matrici, daje samo restrikcija rješenja na one bridove, na kojima je testna funkcija netrivijalna (privremeno zanemarujemo elemente α i β). Zbog toga i možemo generirati matricu brid po brid, te koristiti iste bazne funkcije za prostor polinoma. Prisjetimo se: za podmatrice $A^{r,s}$ vrijedi da je

$$A^{r,s}_{p,q} = a(\Phi_s e_q, \Phi_r e_p)\,,$$

za podmatrice $B^{2r-1,s}$ vrijedi

$$B^{2r-1,s}_{p,q} = b((\Psi_s e_q, 0, 0), (\Phi_r e_p, 0))\,,$$

dok je za podmatrice $B^{2r,s}$

$$B^{2r,s}_{p,q} = b((\Psi_s e_q, 0, 0), (0, \Phi_r e_p))\,.$$

Desna strana poprima vrijednosti

$$D_p^r = \int_N f \cdot \Phi_r e_p \,,$$

gdje je f gustoća vanjske sile (jedinica je N/m^2) u točki stenta. Također, $A^{rs} = (A^{sr})^T$, što je zbog simetričnosti forme a ekvivalentno sa $A^{rs} = A^{sr}$. Isto tako, ako je podmatrica A^{rs} u retcima r_1, r_2, r_3, te stupcima s_1, s_2, s_3, tada je matrica A^{sr} u retcima s_1, s_2, s_3, i stupcima r_1, r_2, r_3 (isti odnos pozicija u matrici M_S imaju i podmatrice B^{rs} i $(B^{rs})^T$).

Bazna funkcija Φ_1 odgovara početnom vrhu brida, tj., $\Phi_1(v_j) = 1$. Matrica A^{11} nalazi na dijagonali matrice M_S, u retcima i stupcima $6\,(j-1)+4$, $6\,(j-1)+5$ te $6j$. Primijetimo da će doprinos matrici na tim pozicijama dati svaki brid koji sadrži vrh v_j (ista situacija vrijedi za vektor D^1 na desnoj strani). Analogna situacija je za krajnji vrh v_k, odnosno podmatricu A^{22}, koja se nalazi na pozicijama redaka i stupaca sa indeksima $6\,(k-1)+4$, $6\,(k-1)+5$, $6k$, te za vektor D^2. Na pozicije matrice M_S koje odgovaraju ostalim podmatricama iz S, kao i na pozicije vektora D^3, doprinos će dati samo ovaj brid.

Zbog simetričnosti strukture matrice M_S, za ostale podmatrice navodimo samo retke u kojima se nalaze. Na primjer, stupci u kojima je podmatrica A^{rs} odgovaraju retcima u kojima je podmatrica A^{sr}.

B^{11}, B^{12}, D^1	su u retcima	$6\,(j-1)+1,\ 6\,(j-1)+2,\ 6\,(j-1)+3;$
$A^{12}, A^{13}, B^{21}, B^{22}$	su u retcima	$6\,(j-1)+4,\ 6\,(j-1)+5,\ 6j\,;$
B^{31}, B^{32}, D^2	su u retcima	$6\,(k-1)+1,\ 6\,(k-1)+2,\ 6\,(k-1)+3\,;$
$A^{21}, A^{23}, B^{41}, B^{42}$	su u retcima	$6\,(k-1)+4,\ 6\,(k-1)+5,\ 6k\,;$
B^{51}, B^{52}, D^3	su u retcima	$6M+6\,(i-1)+1,\ 6M+6\,(i-1)+2,$
		$6M+6\,(i-1)+3\,;$
$A^{31}, A^{32}, A^{33}, B^{61}, B^{62}$	su u retcima	$6M+6\,(i-1)+4,\ 6M+6\,(i-1)+5,\ 6M+6i\,;$
$(B^{11})^T, (B^{21})^T, (B^{31})^T,$	su u retcima	$6M+6N+6\,(i-1)+1,\ 6M+6N+6\,(i-1)+2,$
$(B^{41})^T, (B^{51})^T, (B^{61})^T$		$6M+6N+6\,(i-1)+3\,;$
$(B^{12})^T, (B^{22})^T, (B^{32})^T,$	su u retcima	$6M+6N+6\,(i-1)+4,\ 6M+6N+6\,(i-1)+5,$
$(B^{42})^T, (B^{52})^T, (B^{62})^T$		$6M+6N+6i\,.$

Iz strukture matrice M_S vidi se sljedeće: prvih $6M$ redaka odgovara testnim funkcijama koje su netrivijalne u vrhovima stenta, a definiraju par $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$; idućih $6N$ redaka odgovara funkcijama koje također definiraju par $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$, ali su netrivijalne samo na jednom bridu (tj. pridružene nodalnoj točki koja nije vrh stenta), dok ostali retci, do posljednjih šest, odgovaraju funkcijama koje definiraju $\tilde{\lambda}$.

Posljednjih šest redaka matrice odgovara testnim funkcijama koje definiraju $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$. Za te testne funkcije doprinos daju y i θ elementi rješenja, pa će se netrivijalne podmatrice u posljednjih šest redaka nalaziti u stupcima $1, \ldots, 6M + 6N$. Desna strana će u tim retcima imati nule (jer tražimo da je suma integrala po bridovima funkcija y i θ jednaka 0). Svaki brid, pa tako i i-ti, doprinos će dati u 12 podmatrica: po 6 za $\tilde{\alpha}$ i 6 za $\tilde{\beta}$. Te podmatrice označavamo sa C^{rs}, pri čemu je $r = 1, 2$, a $s = 1, 2, \ldots, 6$. Za $r = 2u - 1$ neparne, $C^{2u-1,s}$ odgovara y komponenti rješenja, dok za $r = 2u$ parne, $C^{2u,s}$ odgovara θ komponenti rješenja. Ipak, te podmatrice su istog oblika:

$$C^{2u-1,s}_{p,q} = C^{2u,s}_{p,q} = e_p \int_{\mathcal{N}} \Phi_u e_q = \delta_{pq} \int_{\mathcal{N}} \Phi_r \,,$$

odnosno

$$C^{2u-1,s} = C^{2u,s} = I \int_{\mathcal{N}} \Phi_u \,.$$

Vidimo da su podmatrice C^{rs} dijagonalne, pa će zadnjih šest stupaca matrice biti identično sa zadnjih šest redaka. Ponovno, ako je Φ_u pridružena vrhu stenta, tada više bridova daje doprinos pozicijama podmatrica $C^{2u-1,s}$ i $C^{2u,s}$. Ovime smo završili opis generiranja matrice M_S i vektora F_S.

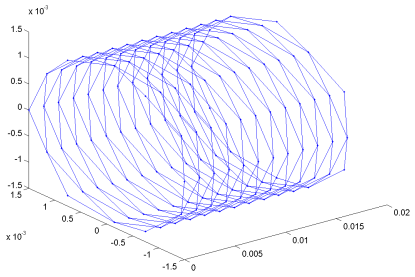
Napomena 3.2.4. *U izračunu podmatrica matrice M_S i vektora desne strane F_S, normalu na stent na svakome bridu aproksimiramo normalom u središnjoj točki brida. To znatno pojednostavljuje račun, odnosno svodi ga na egzaktno integriranje polinoma.*

3.3 Rezultati

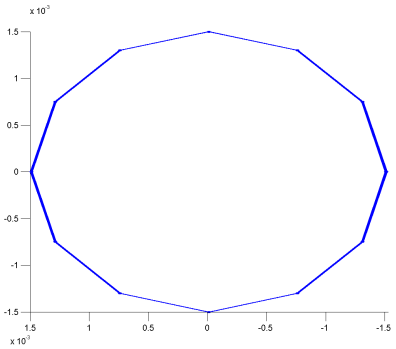
U ovoj sekciji proučavamo deformaciju *Palmaz stenta*, danog na slici 3.3, pod utjecajem uniformne radijalne sile. Ispitat ćemo red konvergencije metode s obzirom na parametar h, koji predstavlja maksimalnu duljinu brida u stentu. Želimo ustanoviti koja je ovisnost reda konvergencije o stupnju polinoma kojima aproksimiramo funkcije na pojedinom bridu.

Palmaz stent se sastoji od $N = 276$ bridova jednake duljine koji spajaju $M = 144$ vrha. Stent sadrži 6 vrhova po opsegu te 23 vrha po duljini stenta (prva komponenta u $\mathbb{R}^3$-prostoru). Cilindar kojeg sačinjava stent je radijusa 1.5mm, a bridovi su duljine 1.0661mm te imaju kvadratni poprečni presjek debljine 0.08mm. Materijal od kojeg je izrađen stent je legura kobalta i kroma. Za taj materijal Youngov modul iznosi $E = 2.4 \cdot 10^{11}$, a Laméova konstanta je $\mu = 10^{11}$.

Budući da nam egzaktno rješenje problema nije poznato, moramo uzeti neko referentno rješenje, što bolju aproksimaciju egzaktnog rješenja, s kojom ćemo uspoređivati ostale

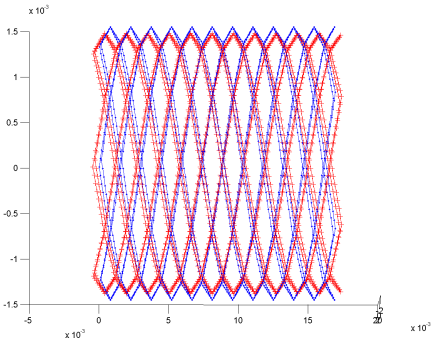


Slika 3.1: Palmaz stent

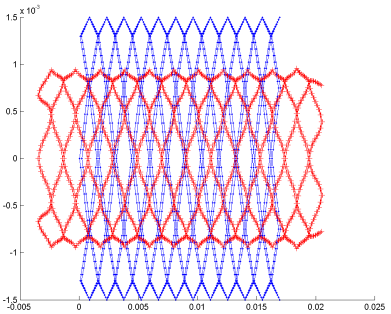


Slika 3.2: Poprečni presjek stenta

aproksimacije te utvrditi red konvergencije. Račun smo provodili za silu konstantnog iznosa koja djeluje u smjeru normale na cilindar stenta. Prije nego iznesemo konkretne iznose rješenja (y, θ, λ), na sljedećim slikama je prikazana deformacija središnje linije bridova stenta za uniformni pritisak iznosa $-300N/m^2$ te $-2400N/m^2$ (značenje predznaka minus je da sila djeluje prema osi cilindra, suprotno od smjera normale, odnosno da sila "stišće" stent). Za izračun smo koristili P3P2 elemente, a red profinjenja je 3, odnosno svaki brid je podijeljen na $8 = 2^3$ manjih. U toj situaciji je $N = 2076$, $M = 2208$, a $h = 1.3327 \cdot 10^{-4}$m. Crvenom bojom je označena deformacija, a plavom početna konfiguracija stenta.



Slika 3.3: $f = -300N/m^2$



Slika 3.4: $f = -2400N/m^2$

Razliku rješenja mjerimo L2-normom i H1-polunormom (u našem slučaju ekvivalentna sa H1-normom zbog uvjeta $\int_N y = \int_N \theta = 0$), a kao rješenje "najbliže" egzaktnom uzimamo ono dobiveno P3P2 elementima, za profinjenje mreže reda 7. Za to je profinjenje

$$h = 8.3293 \cdot 10^{-6}\text{m}\,, \quad M = 35196\,, \quad N = 35328\,.$$

U sljedećim tablicama iznosimo greške u L2-normi i H1-polunormi pojedinih aproksimacija za elemente P1P0, P2P1 te P3P2. Pritisak je iznosa $-300N/m^2$. Matrica linearnog sustava za originalnu mrežu, bez profinjenja, za P1P0 elemente je blizu singularnoj pa daje (kao i za ostale elemente) nestabilna rješenja koja odstupaju od dobivenih redova konvergencije. Rješenja za originalnu mrežu zbog toga ne navodimo u tablicama.

P1P0

		L2-greška	H1-greška
$h = 5.3307 \cdot 10^{-4}$m	y	$3.9459 \cdot 10^{-5}$	$1.4071 \cdot 10^{-2}$
	θ	$8.2691 \cdot 10^{-3}$	$4.6647 \cdot 10^{1}$
	λ	$2.5222 \cdot 10^{-2}$	-
$h = 2.6654 \cdot 10^{-4}$m	y	$1.0074 \cdot 10^{-5}$	$6.8470 \cdot 10^{-3}$
	θ	$2.1219 \cdot 10^{-3}$	$2.3608 \cdot 10^{1}$
	λ	$1.2539 \cdot 10^{-2}$	-
$h = 1.3327 \cdot 10^{-4}$m	y	$2.5306 \cdot 10^{-6}$	$3.3958 \cdot 10^{-3}$
	θ	$5.3372 \cdot 10^{-4}$	$1.1838 \cdot 10^{1}$
	λ	$6.2625 \cdot 10^{-3}$	-
$h = 6.6634 \cdot 10^{-5}$m	y	$6.3273 \cdot 10^{-7}$	$1.6943 \cdot 10^{-3}$
	θ	$1.3349 \cdot 10^{-4}$	$5.9195 \cdot 10^{0}$
	λ	$3.1304 \cdot 10^{-3}$	-
$h = 3.3317 \cdot 10^{-5}$m	y	$1.5752 \cdot 10^{-7}$	$8.4668 \cdot 10^{-4}$
	θ	$3.3230 \cdot 10^{-5}$	$2.9528 \cdot 10^{0}$
	λ	$1.5651 \cdot 10^{-3}$	-

P2P1

		L2-greška	H1-greška
$h = 5.3307 \cdot 10^{-4}$m	y	$3.4667 \cdot 10^{-6}$	$3.1996 \cdot 10^{-3}$
	θ	$1.1345 \cdot 10^{-3}$	$6.4529 \cdot 10^{0}$
	λ	$1.4025 \cdot 10^{-3}$	-
$h = 2.6654 \cdot 10^{-4}$m	y	$9.5333 \cdot 10^{-7}$	$8.1151 \cdot 10^{-4}$
	θ	$3.0136 \cdot 10^{-4}$	$3.0888 \cdot 10^{0}$
	λ	$3.5052 \cdot 10^{-4}$	-
$h = 1.3327 \cdot 10^{-4}$m	y	$2.4289 \cdot 10^{-7}$	$2.0358 \cdot 10^{-4}$
	θ	$7.6208 \cdot 10^{-5}$	$1.5230 \cdot 10^{0}$
	λ	$8.7464 \cdot 10^{-5}$	-
$h = 6.6634 \cdot 10^{-5}$m	y	$6.0330 \cdot 10^{-8}$	$5.0907 \cdot 10^{-5}$
	θ	$1.8919 \cdot 10^{-5}$	$7.5454 \cdot 10^{-1}$
	λ	$2.1702 \cdot 10^{-5}$	-
$h = 3.3317 \cdot 10^{-5}$m	y	$1.4384 \cdot 10^{-8}$	$1.2696 \cdot 10^{-5}$
	θ	$4.5347 \cdot 10^{-6}$	$3.6788 \cdot 10^{-1}$
	λ	$5.2608 \cdot 10^{-6}$	-

P3P2

		L2-greška	H1-greška
$h = 5.3307 \cdot 10^{-4}$m	y	$3.4458 \cdot 10^{-6}$	$7.1337 \cdot 10^{-4}$
	θ	$1.1151 \cdot 10^{-3}$	$6.0678 \cdot 10^{0}$
	λ	$1.4025 \cdot 10^{-3}$	-
$h = 2.6654 \cdot 10^{-4}$m	y	$9.5205 \cdot 10^{-7}$	$1.9343 \cdot 10^{-4}$
	θ	$3.0019 \cdot 10^{-4}$	$3.0394 \cdot 10^{0}$
	λ	$3.5052 \cdot 10^{-4}$	-

		L2-greška	H1-greška
$h = 1.3327 \cdot 10^{-4}$m	y	$2.4281 \cdot 10^{-7}$	$4.9151 \cdot 10^{-5}$
	θ	$7.6135 \cdot 10^{-5}$	$1.5167 \cdot 10^{0}$
	λ	$8.7464 \cdot 10^{-5}$	-
$h = 6.6634 \cdot 10^{-5}$m	y	$6.0325 \cdot 10^{-8}$	$1.2207 \cdot 10^{-5}$
	θ	$1.8914 \cdot 10^{-5}$	$7.5376 \cdot 10^{-1}$
	λ	$2.1702 \cdot 10^{-5}$	-
$h = 3.3317 \cdot 10^{-5}$m	y	$1.4383 \cdot 10^{-8}$	$2.9171 \cdot 10^{-6}$
	θ	$4.5344 \cdot 10^{-6}$	$3.6778 \cdot 10^{-1}$
	λ	$5.2608 \cdot 10^{-6}$	-

Uočimo da je duljina bridova svake iduće mreže dvostruko manja nego u prošloj. Prije nego navedemo redove konvergencije za pojedine funkcije i elemente, zbog boljeg razumijevanja veličine grešaka navodimo norme funkcija za referentno rješenje:

$$\|y\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = 1.4401 \cdot 10^{-4}\,, \quad \|\theta\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = 3.0200 \cdot 10^{-2}\,, \quad \|\lambda\|_{L^2(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = 3.3144 \cdot 10^{-1}\,,$$
$$|y|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = 2.9918 \cdot 10^{-2}\,, \quad |\theta|_{H^1(\mathcal{N};\mathbb{R}^3)} = 8.8701 \cdot 10^{1}\,.$$

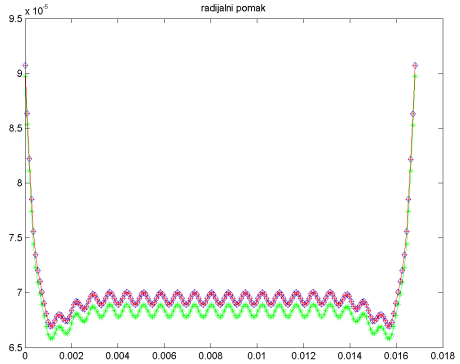
U tablici su prikazani redovi konvergencije za pojedine elemente i funkcije (L2 stoji za grešku u L2-normi, a H1 za grešku u H1-polunormi):

	L2			H1	
	y	θ	λ	y	θ
P1P0	2	2	1	1	1
P2P1	2	2	2	2	1
P3P2	2	2	2	2	1

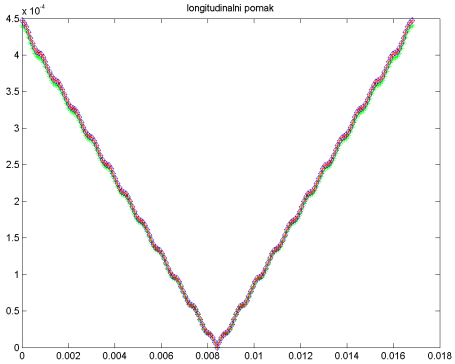
Usporedimo na mreži sa parametrima

$$h = 1.3327 \cdot 10^{-4}\text{m}\,, \quad M = 2076\,, \quad N = 2208\,,$$

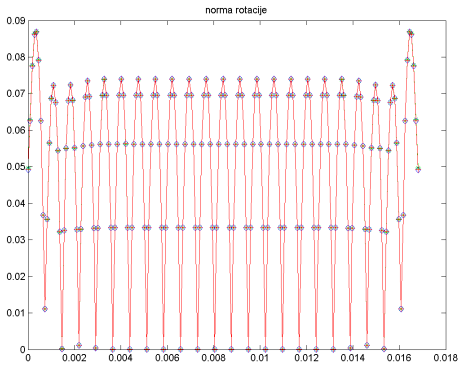
rješenja za različite elemente. Slike sa iduće stranice prikazuju razlike u radijalnoj komponenti pomaka, longitudinalnoj komponenti pomaka te normi (u $\mathbb{R}^3$) rotacije.



Slika 3.5: radijalni pomak



Slika 3.6: longitudinalni pomak



Slika 3.7: norma rotacije

Zelenom su bojom označeni parametri za elemente P1P0, plavom za P2P1 te crvenom za P3P2.

Razlike među elementima su najizraženije kod radijalnog pomaka, kod kojeg možemo uočiti znatnije odstupanje rezultata za P1P0 elemente od rezultata dobivenih P2P1 i P3P2 elementima. Elementi P2P1 i P3P2 općenito daju vrlo bliska, gotova identična rješenja, čemu ide u prilog i činjenica da među tim elementima nema razlike u redu konvergencije.

Bibliografija

[1] Girault, V. i Raviart, P.A., Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer-Verlag, 1986., 56-61

[2] Tambača, J. and Čanić, S., *Cardiovascular stents as PDE nets: 1D vs. 3D*, IMA Journal of Applied Mathematics **77**, (2012), 6, 748-770

[3] Žugec, B., Model biorazgradivog elastičnog stenta, disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2014.

Sažetak

Stent se obično modelira kao trodimenzionalno elastično tijelo. U ovome radu, mi smo mrežu stenta definirali kao neusmjeren graf, u kojemu tanki metalni štapovi, modelirani lineariziranim Antman-Cosserat modelom za nerastezljive i nesmičljive štapove, predstavljaju bridove toga grafa. Na taj smo način postigli da umjesto problema u tri dimenzije rješavamo problem u jednoj dimenziji, što zahtijeva manji utrošak memorije u procesu računanja.

Pokazali smo da uz određene uvjete mješovita formulacija tog modela ima jedinstveno rješenje. Za aproksimaciju pomaka središnje linije bridova te infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka bridova koristili smo prostore polinoma. Također, radi jednostavnijeg računanja, mi smo pojedine štapove u stentu, koji su savijeni, mi smo aproksimirali ravnim štapovima. Ustanovili smo da numerička metoda koju koristimo konvergira, uz redove konvergencije ovisne o prostoru polinoma kojima aproksimiramo funkcije. Ipak, između P2P1 i P3P2 elemenata nije bilo razlike u konvergenciji metode, a i razlike u dobivenim rezultatima su neznatne. Zanimljivo bi bilo dati teorijsku podlogu navedenim zapažanjima te vidjeti koliko brzu konvergenciju rješenja uopće možemo postići ovim pristupom.

Summary

Stent is usually modelled as a three-dimensional elastic body. In this paper, we have defined the stent net as a non-directed graph, in which the slender metallic rods, modelled by the linearized Antman-Cosserat model for inextensible, unshearable rods, represent the edges of the graph. In that way, we have transformed a three-dimensional problem into a one-dimensional problem, which is computationally cheaper and easier to handle.

We have shown that under certain conditions the mixed formulation of our model has a unique solution. For the approximation of the middle line shift of the stent struts and infinitesimal rotation of the cross-section of the stent struts, we have used polynomial spaces. In addition, to make the calculus simpler, we have taken the stent struts, which are actually curved, to be straight. We have established that the numerical method we use converges, and the scale of convergence depends on the polynomial space we use to approximate the functions. However, there is no difference between the convergence scale of P2P1 elements and that of P3P2 elements. Moreover, the solutions obtained by P2P1 elements are just slightly different from the solutions obtained by P2P1 elements. It would be interesting to give some theoretical background to these observations, and also to see what rate of convergence is actually possible to achieve with this approach.

Životopis

Rođen sam 04.07.1990. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Ante Kovačića, upisao sam zagrebačku V.gimnaziju, u kojoj sam sve razrede završio sa odličnim uspjehom. Godine 2009. upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, gdje 2012. upisujem diplomski studij Primijenjena matematika.