Svojstva Biot-Savartovog operatora i njegova primjena u prirodnim znanostima

Suton, Marina

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:972629

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marina Suton

SVOJSTVA BIOT-SAVARTOVOG OPERATORA I NJEGOVA PRIMJENA U PRIRODNIM ZNANOSTIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Davor Horvatić

Zagreb, studeni, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Davoru Horvatiću na pomoći, vodstvu i izuzetnoj suradnji tijekom izrade rada.
Hvala svim kolegama i prijateljima koje sam upoznala na fakultetu što su svojim prisustvom uljepšali moje studentsko razdoblje.
Posebna zahvala mojim roditeljima, sestri i bratu na strpljenju, razumijevanju i podršci koje nikada nije manjkalo tijekom mog studiranja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Povijesna pozadina **3**
1.1 Maxwellove jednadžbe 4
1.2 Biot-Savartov zakon 6
1.3 Biot-Savartov zakon u nastavi fizike 10

2 Hodgeov teorem dekompozicije **13**
2.1 Hodgeov teorem dekompozicije 13
2.2 Primjeri vektorskih polja 16

3 Biot-Savartov operator **21**
3.1 Svojstva Biot Savartovog operatora 22

4 Primjena Biot-Savartovog operatora **45**
4.1 Helicitet i broj prijevoja 47
4.2 Gornje granice za helicitet i broj prijevoja 49
4.3 Primjena u molekularnoj biologiji 50

Bibliografija **59**

Uvod

Biot-Savartov i Ampèreov zakon temeljni su zakoni magnetostatike i analiza magnetskih polja temelji se na njima. Razumijevanje magnetskih polja je neophodno jer se fenomeni koji ih prate javljaju u našoj svakodnevici i igraju važnu ulogu u elektrotehničkoj praksi. Potrebno je spomenuti kako se na svojstvima magnetskih polja temelji rad generatora električne energije, motora, transformatora, kompasa, mikrofona, sustava za fokusiranje u televizoru, telefonskog zvona, vlakova na bazi magnetske levitacije, memorijskih ćelija itd. Međutim, istraživanja su pokazala kako učenici imaju poteškoća u razumijevanju svojstava polja, bilo magnetskih bilo električnih. Stoga je važno detaljnije i jasnije približiti učenicima ovo područje tijekom poučavanja.

U ovom radu ćemo definirati Biot-Savartov operator (BS) i opisat nekoliko njegovih svojstava. Biot-Savartov zakon u području elektrodinamike, magnetostatici omogućava nam računanje magnetskog polja B[1] koje se javlja kao posljedica toka električne struje, preciznije za računanje magnetskog polja koristit ćemo gustoću električne struje J. Kako bi definirali Biot-Savartov operator, promatrati ćemo gustoću struje J koja postoji u kompaktnom području $\Omega \subset R^3$. Pojam magnetskog polja se proširuje na Biot-Savartov operator koji djeluje na sva vektorska polja u Ω, stoga takva generalizacija Biot-Savartovog zakona upućuje na povezanost elektrodinamike s matematikom, posebice s topologijom i linearnom algebrom. Kako bi dokazali ta ista svojstva, potreban nam je Hodgeov zakon dekompozicije kojeg ćemo opisati u drugom poglavlju te dati primjere vektorskih polja koji se javljaju u tom teoremu. Između ostalog pokazat ćemo da je Biot-Savartov operator hermitski, ograničeni operator te ćemo opisati njegovu sliku i pronaći jezgru ovog operatora.

Biot-Savartov operator ima široku primjenu u raznim granama znanosti. Veličine koje ćemo opisati, a koje su usko povezane s Biot-Savartovim operatorom su *broj prijevoja* krivulje koja se pokazala bitnom u molekularnoj biologiji pri proučavanju superzavijanja DNA i enzima koji utječu na nju te *helicitet* vektorskog polja koji igra važnu ulogu u fizici plazme i dinamici fluida.

[1] Sve vektorske veličine ubuduće ćemo označavati kosim slovima.

Poglavlje 1

Povijesna pozadina

Električni naboji koji se usmjereno gibaju čine električnu struju. Električni naboj je izvor električnog polja, a struja električnih naboja je jedan od izvora magnetskog polja. Arheološki nalazi pokazuju da su magneti poznati ljudima duže od 3000 godina. U antici, Grci su ih nalazili u prirodi kao posebnu vrstu rude koja privlači željezo. Aristotel navodi Talesa Milećanina kao autora prve znanstvene rasprave o megnetizmu. U ovom radu baviti ćemo se strujama kao izvorima magnetskog polja, dok u spomenutim prirodnim magnetima izvor magnetskog polja ima kompliciranije kvantno porijeklo.

Prava narav magnetizma istražena je u 19. stoljeću kada je cijelim nizom izvanrednih otkrića utvrđena međusobna povezanost električnih i magnetskih pojava. Tu vezu je potvrdio 1819. godine danski fizičar Öersted tako što je eksperimentalno dokazao postojanje sile između vodiča kojim teče struja i magnetske igle koja nije posljedica statičkog električnog naboja u vodiču. To otkriće je potaklo André-Marie Ampérea da serijom eksperimenata utvrdi kako električne struje djeluju jedna na drugu silama koje je kvantitativno odredio. U međuvremenu, Jean-Baptiste Biot i Felix Savart ponavljajući Öerstedove eksperimente odredili su iznos magnetske sile koja upravlja tom pojavom te Öerstedovo otkriće kvantificirali u obliku *Biot-Savartovog zakona*.

Oko 1830. Michael Faraday, Joseph Henry i Heinrich Lenz otkrili su elektromagnetsku indukciju i njezine zakonitosti, a James Clerk Maxwell je 1873. sjedinio Öerstedove i Faradayeve spoznaje u zaokruženu cjelinu električnih i magnetskih pojava. Koristeći u to doba poznate zakone (Ampèreov zakon, Faradayev zakon indukcije i Gaussov zakon) te postavivši hipotezu o struji pomaka, Maxwell ih je sve skupa ujedinio u skladu sa jednadžbom kontinuiteta.

1.1 Maxwellove jednadžbe

Maxwellove se jednadžbe mogu prikazati u diferencijalnom i integralnom obliku. Ekvivalencija između ovih oblika zasniva se na Stokesovom i Gaussovom teoremu. Univerzalni oblik Maxwellovih jednadžbi opisuje elektromagnetske fenomene u vakuumu, a u diferencijalnoj formi Maxwellove jednadžbe glase:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{1.4}$$

gdje je

ρ gustoća naboja (količina naboja po jedinici vremena),
J gustoća struje (tok naboja po jedinici površine u jedinici vremena),
ϵ_0 dielektrična konstanta vakuuma (permitivnost),
μ_0 permeabilnost vakuuma.

U Maxwellovim jednadžbama implicitno se pretpostavlja da vrijedi jednadžba kontinuiteta (zakon očuvanja naboja),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \tag{1.5}$$

a možemo ju dobiti primijenimo li divergenciju na 1.4. Jednadžba 1.5 govori da ako se u nekoj točki prostora mijenja gustoća naboja u vremenu onda je ta točka izvor ili ponor gustoće električne struje. Integralni oblik jednadžbe (1.6) kaže da za svaku zatvorenu plohu u prostoru vrijedi da je tok struje koja prolazi kroz tu zatvorenu plohu jednak negativnoj promjeni količine naboja u vremenu unutar volumena omeđenog tom plohom.

$$\int_V (\nabla \cdot J)\, d\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau \tag{1.6}$$

Za potpuni opis elektromagnetskih fenomena pored Maxwellovih jednadžbi nužna je i jednadžba za Lorentzovu silu, kako bi se iz danih polja mogla odrediti dinamiku nabijenih čestica

$$F = \mathrm{q}\,(E + v \times B). \tag{1.7}$$

Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku glase

$$\oint E \cdot da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{1.8}$$

$$\oint B \cdot da = 0 \tag{1.9}$$

$$\oint E \cdot dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot da \tag{1.10}$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int E \cdot da \tag{1.11}$$

Prva jednadžba (1.1) naziva se Gaussovim zakonom i govori da je električni naboj izvor (ili ponor) električnog polja. Ukupni električni tok kroz zatvorenu plohu proporcionalan je količini električnog naboja koji se nalazi unutar volumena te plohe. Ako unutar te zatvorene plohe nema električnog naboja (ili je količina pozitivnog jednaka količini negativnog električnog naboja), ukupni električni tok kroz tu zatvorenu plohu je nula. No to ne znači da u tom volumenu uopće nema električnog polja, već samo da ukupni tok iščezava. Dakle, ako nema električnog naboja u tom promatranom volumenu, koliko linija električnog polja ulazi kroz plohu koja opisuje volumen, toliko silnica negdje i izlazi iz te iste zatvorene plohe.

Druga Maxwellova (1.2) jednadžba slična je prvoj (u situaciji u kojoj ne postoji električni naboj), ali opisuje magnetsko polje. Ova jednadžba izriče da ne postoji izvor magnetskog polja (ne postoji magnetski monopol) iz kojega bi proizlazio magnetski tok različit od nule za bilo koju zatvorenu plohu. U svakoj točki prostora, količina silnica magnetskog polja koja ulazi u tu točku jednaka je količini silnica koje izlaze iz te točke; linije magnetskog polja nemaju izvora (ili ponora). Prema tome, ukupni magnetski tok kroz zatvorenu plohu uvijek iščezava. Budući da ono vrijedi i za izvore magnetskog polja, svaki je izvor magnetskog polja barem dipol.

Treća jednadžba (1.3) je Faradayev zakon indukcije; ako se magnetsko polje mijenja u vremenu ono će biti praćeno promijenom električnog polja u prostoru i obrnuto.

Četvrta jednadžba (1.4) je prvo bila poznata kao Ampèreov zakon. Međutim, Maxwell ju je proširio jer je uvidio kako Ampèreov zakon ne vrijedi izvan magnetostatike. Prošireni Ampèreov zakon kaže da se oko vodiča kojim teče struja inducira magnetsko polje, ali i da će svako električno polje koje se mijenja u vremenu inducirati magnetsko polje.

1.2 Biot-Savartov zakon

Analiza magnetskih polja temelji se na dva zakona: Biot-Savartovom i Ampèrovom zakonu. Poput Coulombova zakona u elektrostatici, Biot-Savartov zakon je opći zakon magnetostatike koji daje izraz za računanje jakosti magnetskog polja uzrokovanog stalnom strujom koja teče linijskim vodičem. Integralni oblik Biot-Savartovog zakona glasi

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \times \hat{\eta}}{\eta^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl \times \hat{\eta}}{\eta^2} \tag{1.12}$$

Ovaj izraz može se generalizirati na volumni integral po gustoći struje

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r) \times \hat{\eta}}{\eta^2} d\tau' \tag{1.13}$$

Primijenimo li divergenciju na 1.13, dobijemo $\nabla \cdot B = 0$. Primjenom operatora rotacije dobijemo Ampèreov zakon: $\nabla \times B = \mu_0 J$. Primjenjujući Stokesov teorem dobijemo integralni oblik ovog zakona.

$$\int (\nabla \times B) \cdot da = \oint B \cdot dl = \mu_0 \int J \cdot da$$

gdje je $\int J \cdot da$ je ukupna struja koja prolazi kroz površinu i nazivamo ju I_{enc} (struja zatvorena ampèreovom površinom). Stoga

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{enc} \tag{1.14}$$

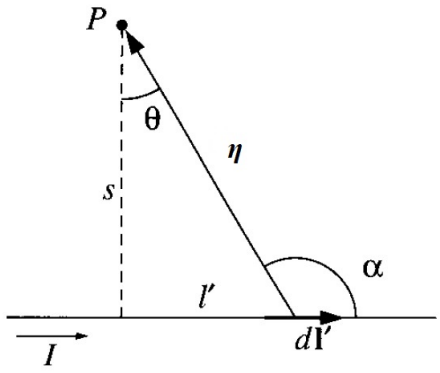
Jednadžba 1.14 je integralni oblik Ampèreovog zakona i pomoću njega možemo odrediti jakost magnetskog polja na udaljenosti s od dugog, ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I (str. 336 u Griffits [1]). Pomoću Biot-Savartovog zakona određujemo smjer magnetskog polja ravnog vodiča, a iznos magnetskog polja B je konstantna oko Ampèreove petlje polumjera s sa središtem na vodiču. Prema tome, Ampèreov zakon daje

$$\oint B \cdot dl = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I$$

ili

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \tag{1.15}$$

Primjenjujući Biot-Savartov zakon na dugi, ravni vodič kojim teče stalna struja jakosti I dobije se formula za izračun jakosti magnetskog polja na udaljenosti s od vodiča (Primjer 5.5 iz D. J. Griffits [1]).



Slika 1.1

Na slici 1.1 preuzetoj iz D. J. Griffits [1], $dl' \times \hat{\eta}$ ima smjer iz papira i iznosi

$$dl' \sin\alpha = dl' \cos\theta$$

$l' = s\,\mathrm{tg}\,\theta$, stoga

$$dl' = \frac{s}{\cos^2\theta} d\theta$$

$s = \eta \cos\theta$, pa imamo

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{\cos^2\theta}{s^2}$$

Prema tome

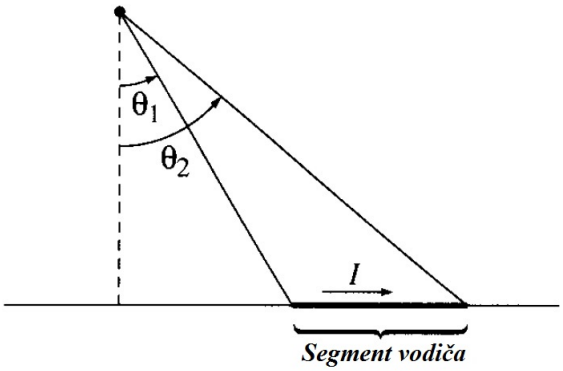
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2\theta}{s^2}\right)\left(\frac{s}{\cos^2\theta}\right) \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \tag{1.16}$$

Pomoću jednadžbe 1.16 možemo izračunati jakost magnetskog polja bilo kojeg ravnog segmenta vodiča u oznakama početnog i konačnog kuta θ_1 i θ_2 (Slika 1.2 preuzeta iz D. J. Griffits [1]). Naravno, konačni segment sam po sebi ne bi mogao stvarati stalnu struju (gdje bi naboji išli kad bi došli do kraja vodiča?), ali mogao bi biti dio zatvorene petlje i

jednadžba (1.16) bi predstavljala njegov doprinos ukupnom magnetskom polju. U slučaju beskonačnog vodiča, $\theta_1 = -\pi/2$ i $\theta_2 = \pi/2$, pa dobivamo

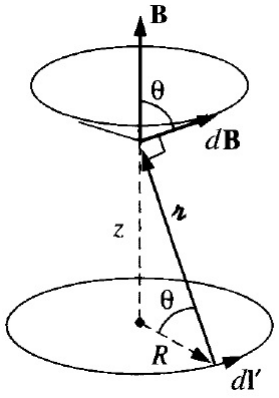
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \tag{1.17}$$



Slika 1.2

Uočavamo kako su jednadžbe 1.18 i 1.17 u potpunosti jednake, ali smo na različite načine došli do njih, odnosno upotrebom Biot-Savartovog i Ampèreovog zakona.

Odredimo magnetsko polje strujne kružne petlje polumjera R na udaljenosti z iznad njezina središta (Slika 1.3 preuzeta iz D. J. Griffits [1]) .



Slika 1.3: Magnetsko polje kružne petlje

Integrirajući dl' po kružnici, dB opisuje konusnu površinu. Horizontalne komponente se pokrate, a vertikalne komponente daju

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl'}{\eta^2} \cos\theta \tag{1.18}$$

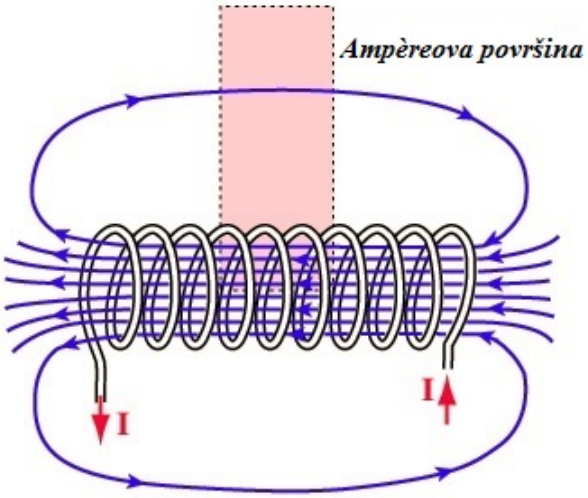
Budući da su $\cos\theta$ i η^2 konstante, a $\int dl' = 2\pi R$, slijedi

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cos\theta}{\eta^2}\right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{1.19}$$

Prema tome, u središtu kružne petlje ($z = 0$) magnetsko polje jednako je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{1.20}$$

Sada želimo odrediti magnetsko polje unutar valjkaste zavojnice s N zavoja kojom teče stalna struja I pretpostavljajući da je $B = 0$ izvan zavojnice (u slučaju beskonačno duge zavojnice $B = 0$ egzaktno). Promotrimo Ampèreovu površinu kojoj se jedan dio nalazi unutar, a jedan dio izvan zavojnice (Slika 1.4).



Slika 1.4: Magnetsko polje zavojnice

Integrirajući po toj površini, Ampèreov zakon daje

$$\oint B \cdot dl = BL = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 nIL, \tag{1.21}$$

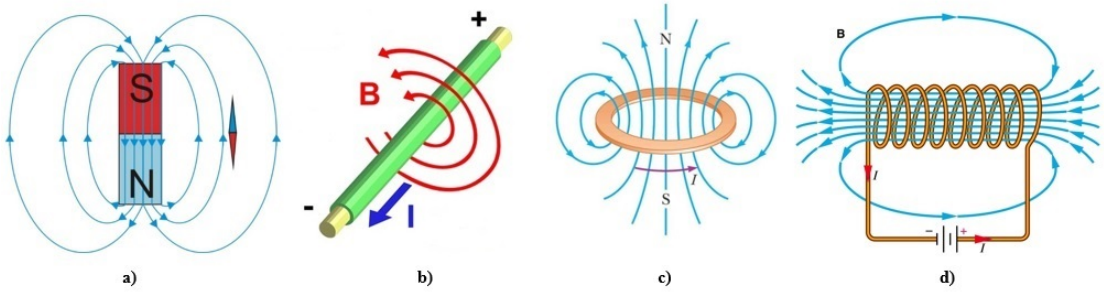
gdje je B polje unutar zavojnice. S time da gornja strana površine ne doprinosi prilikom integriranja jer je $B = 0$ izvan zavojnice. Dakle, magnetsko polje unutar zavojnice jednako je

$$B = \mu_0 nI \tag{1.22}$$

1.3 Biot-Savartov zakon u nastavi fizike

Sa magnetskim pojavama učenici se prvi puta susreću u 8. razredu te se upoznaju s djelovanjem i gibanjem magneta, zakonitostima električnog i magnetskog polja te vezom između električne struje i magneta (Öerstedov pokus). U udžbeniku V. Paara [6] na taj pokus nailazimo pod temom „Magneti i magnetno djelovanje električne struje“ tj., pod podnaslovom „Električna struja stvara magnetsko polje.“ U udžbeniku objašnjenje pokusa i način na koji je to predočeno glasi: ”Ako je u blizini žice magnetna igla, možemo uočiti zanimljivu pojavu: kada kroz žicu poteče električna struja, magnetna igla se zakrene.”A u udžbeniku [7] pod naslovom teme „Što o struji otkriva njezino magnetno djelovanje?“ nailazimo na traženi pokus. Međutim, osim pokusa sa ravnim vodičem, prikazan je i pokus sa zavojnicom.

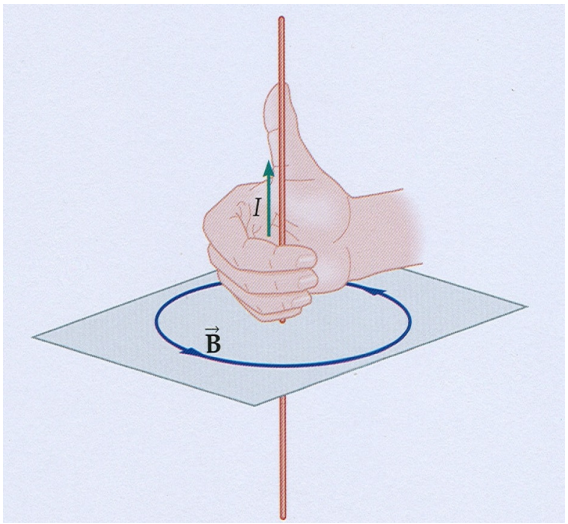
Prema obrazovnim ishodima koji su navedeni u Nacionalnom okvirnom kurikulumu učenici bi nakon osmog razreda trebali znati opisati djelovanje stalnoga magneta na predmete od različitoga materijala te međusobno djelovanje dvaju magneta.[8] Dakle, učenici predočavaju magnetska polja magneta, ravnog vodiča, petlje i zavojnice linijama[1], ali ne računaju jakosti njihovih magnetskih polja.



Slika 1.5: a) linije magnetskog polja magneta; b) linije magnetskog polja vodiča kojim teče struja; c) linije magnetskog polja petlje; d) linije magnetskog polja zavojnice

[1]Naziv ”linije magnetskog polja” koristimo jer one ne pokazuju smjer sile već smjer magnetskog polja, dok pod pojmom ”silnica” podrazumijevamo pokazivanje i smjera sile prouzrokovano magnetskim poljem.

U srednjoškolskom obrazovanju u općim i prirodoslovnim gimnazijama magnetostatika se poučava u 2. razredu. Učenici se upoznaju s pojmom magnetske indukcije i magnetskog toka, djelovanjem magnetske sile na električnu struju (Ampèreova sila), djelovanjem magnetske sile na nabijenu česticu (Lorentzova sila) te uočavaju kako magnetsko polje djeluje na električnu struju. Postavlja se pitanje: Djeluje li električna struja na magnet, odnosno, stvara li električna struja magnetsko polje? Na to pitanje potvrdno odgovara Öersted, pa se učenicima ponovno prezentira Öerstedov pokus koji pokazuje da se magnetska igla otklanja u blizini vodiča kojim teče struja. Smjer magnetskog polja iskazuje se pomoću pravila desne ruke: "Obuhvatimo li žicu desnom rukom tako da ispruženi palac pokazuje smjer struje, tada prsti savijeni oko žice pokazuju smjer magnetskih silnica oko žice." [4]



Slika 1.6: Pravilo desne ruke

Dakle, pravilom desne ruke možemo odrediti smjer magnetskog polja, no to vrijedi za ravni vodič i pravilo izlazi iz Biot-Savartovog zakona. To pravilo primjenjujemo u svim slučajevima kada koristimo vodljivu bakrenu žicu, npr. za strujnu petlju ili zavojnicu. Što nam pokazuje da, iako se integralni oblik Biot-Savartovog zakona u srednjoj školi ne poučava, naravno, zbog nepoznavanja integralnog računa, rezultati ovog zakona (formule 1.17, 1.20 i 1.22) pojavljuju u udžbenicima i učenici ih koriste prilikom rješavanja zadataka.

Što se tiče državne mature iz fizike, očekivani obrazovni ishodi vezani uz određivanje smjera i iznosa magnetskog polja, između ostalog, su sljedeći [5]:
" Opisati i primijeniti osnovne pojmove vezane uz magnetske i elektromagnetske pojave:

- skicirati linije magnetskog polja oko ravnog vodiča kojim teče struja te za strujnu petlju i zavojnicu
- primijeniti izraz za magnetsko polje u središtu zavojnice
-..."

Prema tome, razlika između srednjoškolskog i osnovnoškolskog obrazovanja je u tome što se u osnovnim školama rade temelji za daljnje školovanje tj. razvijaju apstraktna mišljenja kod djece o magnetskim pojavama, da bi se u srednjim školama ti zakoni i principi mogli matematički izraziti i primjeniti u različitim fizikalnim problemima.

Istraživanja o razumijevanju polja su pokazala da učenici imaju poteškoća s primjenom principa superpozicije polja, bilo električnog bilo magnetskog. Još jedan problem jest shvaćanje dosega polja. Naime, mnogi učenici smatraju da polje ima konačan doseg, a ne da trne tek u beskonačnosti. Jednako tako, problem im stvara i određivanje smjera magnetskog polja, odnosno crtanje vektora magnetskog polja, koji su u smjeru tangente na linije magnetskog polja. Nadalje, učenici imaju problema s crtanjem i interpretacijom silnica. Smatraju kako linije magnetskog polja ujedno prikazuju i smjer sile (kao što je to slučaj kod silnica električnog polja) i vrlo često silnice/linije polja interpretiraju kao putanje nabijenih čestica. Također, učenici imaju puno problema s konceptom magnetskog toka i s određivanjem smjera magnetskog polja pravilom desne ruke. S obzirom da su navedeni koncepti važni za razumijevanje daljnjeg dijela elektromagnetizma potrebno je učenicima što bolje približiti koncept magnetskog polja, kao i magnetskih silnica i vektora.

Biot-Savartov zakon je od velike važnosti jer nam ono omogućava konstrukciju Biot-Savartovog operatora čija je primjena u prirodnim znanostima široka. Međutim, dokazivanje svojstava ovog operatora zahtjeva razumijevanje Hodgeovog teorema dekompozicije koji iznimnu važnost postiže jer povezuje topologiju domene, tradicionalnu algebru vektorskih polja na toj domeni i strukturu L^2 prostora kvadratno integrabilnih funkcija.

Poglavlje 2

Hodgeov teorem dekompozicije

Pretpostavimo da nam je dano vektorsko polje definirano na ograničenoj domeni u 3-prostoru. Kako možemo znati je li to vektorsko polje gradijent neke funkcije? Ili je rotacija nekog drugog vektorskog polja? Možemo li pronaći vektorsko polje (različito od nula) u našoj domeni čija su rotacija i divergencija nula i koje je tangenta na rub domene? Ili koje je okomito na rub domene? Kako bi odgovorili na ova pitanja, trebamo razumijeti vezu između vektorskih polja i topologije njihovih domena što je najbolje opisano u [3]. Upravo u tome nam pomaže Hodgeov teorem dekompozicije prostora vektorskih polja na domeni u obliku pet međusobno ortogonalnih potprostora. Ovakva dekompozicija nije samo korisna u matematici, nego i u dinamici fluida, elektrodinamici i fizici plazme.

2.1 Hodgeov teorem dekompozicije

U ovom poglavlju predstavit ćemo Hodgeov teorem dekompozicije za vektorska polja s ograničenom domenom Ω u R^3. Ovo je vrlo važan teorem jer ćemo ga kasnije koristiti kroz dokaze svojstava Biot-Savartovog operatora. Bez obzira što je ovaj teorem zapisan za prostor glatkih vektorskih polja $\mathrm{VF}(\Omega)$ sa definiranim L^2 prostorom kvadratno integrabilnih funkcija, ono vrijedi i za L^2 potprostore od $\mathrm{VF}(\Omega)$, ali i za različite niže opisane potprostore.

Teorem 2.1.1. *(Hodgeov teorem dekompozicije)*
Neka je Ω kompaktna domena sa glatkim rubom $\partial\Omega$ u 3-prostoru, i neka je $\mathrm{VF}(\Omega)$ *prostor glatkih vektorskih polja na Ω s definiranim L^2 prostorom kvadratno integrabilnih funkcija*

$$\langle V, W\rangle = \int_\Omega V \cdot W \, d\tau$$

Tada je moguća dekompozicija $\mathrm{VF}(\Omega)$ *u obliku direktne sume pet međusobno ortogonalnih potprostora,*

$$\mathrm{VF}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG},$$

sa

$$\begin{aligned} \ker curl &= \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}, \\ \mathrm{im}\, grad &= \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}, \\ \mathrm{im}\, curl &= \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG}, \\ \ker div &= \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG}, \end{aligned}$$

gdje su potprostori definirani na sljedeći način

$$\begin{aligned} \mathrm{FK} &= \textit{bestočni čvorovi} = \{\nabla \cdot V = 0, V \cdot n = 0, \textit{ svi unutarnji tokovi su 0}\}, \\ \mathrm{HK} &= \textit{harmonijski čvorovi} = \{\nabla \cdot V = 0, \nabla \times V = 0, V \times n = 0\}, \\ \mathrm{CG} &= \textit{rotacijski gradijenti} = \{V = \nabla\varphi, \nabla \cdot V = 0, \textit{ svi rubni tokovi su 0}\}, \\ \mathrm{HG} &= \textit{harmonijski gradijenti} = \{V = \nabla\varphi, \nabla \cdot V = 0, \varphi \textit{ je lokalno konstantna na } \partial\Omega\}, \\ \mathrm{GG} &= \textit{uzemljeni gradijenti} = \{V = \nabla\varphi, \varphi\,|_{\partial\Omega} = 0\}, \end{aligned}$$

i nadalje,

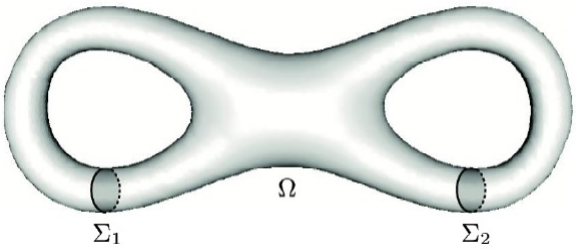
$$\begin{aligned} \mathrm{FK} &\cong H_1(\Omega; R) \cong H_2(\Omega; \partial\Omega; R) \cong R^{\textit{rod od } \partial\Omega}, \\ \mathrm{HG} &\cong H_2(\Omega; R) \cong H_1(\Omega; \partial\Omega; R) \cong R^{(\textit{broj komponenti od } \partial\Omega) - (\textit{broj komponenti od} \Omega)}. \end{aligned}$$

Sada ćemo opisati potprostore koji se pojavljuju u ovom teoremu i objasniti uvjete koji ih definiraju.

Jediničnо vektorsko polje okomito na $\partial\Omega$ označeno je s n, stoga uvjet $V \cdot n = 0$ kaže da je vektorsko polje V tangenta na rub od Ω.

Neka je Σ oznaka za bilo koju glatku površinu u Ω, takva da je $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. Orijentirajmo Σ izabirući jedan od njegova dva jedinična vektora n. Tada za bilo koje vektorsko polje V na Ω možemo definirati tok od V kroz površinu Σ kao vrijednost integrala $\Phi = \int_\Sigma V \cdot n \, d\sigma$.

Pretpostavimo da je divergencija od V nula i da je V tangenta na $\partial\Omega$. Tada vrijednost toka ovisi o klasi homologije od Σ u relativnoj homološkoj grupi $H_2(\Omega; \partial\Omega; Z)$. Naprimjer, ako je Ω torus s n otvora, tada postoje odvojeni orijentirani poprečni presjeci (diskovi) $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$, postavljeni tako da rezanjem Ω duž tih diskova nastaju jednostavna povezana područja (Slika 2.1). Tokovi $\Phi_1, ..., \Phi_n$ od V kroz te diskove određuju tok od V kroz bilo koju drugu površinu nastalu poprečnim presjekom.



Slika 2.1

Ako tok od V kroz svaku glatku površinu Σ u Ω sa $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ isčezava, kažemo da su "*svi unutarnji tokovi*= 0" i time je opisan potprostor

$$\text{FK} = \{\nabla \cdot V = 0, V \cdot n = 0, \text{svi unutarnji tokovi su } 0\}$$

Potprostor

$$\text{HK} = \{\nabla \cdot V = 0, \nabla \times V = 0, V \times n = 0\}$$

je izomorfan apsolutnoj homološkoj grupi $H_1(\Omega; R)$ i, prema Poincareovoj dualnosti relativnoj homološkoj grupi $H_2(\Omega, \partial\Omega; R)$, pa je ovaj potprostor konačnodimenzionalan, sa dimenzijom jednakom genusu od $\partial\Omega$.

Ortogonalna direktna suma ovih dvaju potprostora

$$\text{K}(\Omega) = \text{FK} \oplus \text{HK}$$

je potprostor od VF(Ω) koji sadrži sva vektorska polja definirana na Ω čija je divergencija nula i tangente su na njegov rub te ih nazivamo *fluidnim čvorovima*. Takva su i vektorska polja koja predstavljaju gustoću struje u zakonima magnetostatike.

Ako je V vektorsko polje definirano na Ω, tada ćemo reći da su svi granični tokovi od V jednaki nula ako je tok od V kroz svaku komponentu od $\partial\Omega$ nula. Tada

$$\text{CG} = \{V = \nabla\varphi, \nabla \cdot V = 0, \text{svi rubni tokovi su } 0\}$$

nazivamo potprostorom rotacijskih gradijenata zato jer sadrže jedine gradijente koji leže u slici rotacije.

Sada definirajmo potprostor harmonijskih gradijenata

$$\mathrm{HG} = \{V = \nabla\varphi, \nabla \cdot V = 0, \varphi \text{ je lokalno konstantna na } \partial\Omega\},$$

što znači da je φ konstantna na svakoj komponenti od $\partial\Omega$. Ovaj potprostor je izomorfan apsolutnoj homološkoj grupi $H_2(\Omega; R)$ i, prema Poincareovoj dualnosti, relativnoj homološkoj grupi $H_1(\Omega, \partial\Omega; R)$, pa je ovaj potprostor konačnodimenzionalan, sa dimenzijom jednakom razlici broja komponenata od $\partial\Omega$ i broja komponenata od Ω.

Definicija potprostora uzemljenih gradijenata

$$\mathrm{GG} = \{V = \nabla\varphi, \varphi\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$

je razumljiva sama po sebi.

Hodgeov teorem o dekompoziciji možemo zapisati i u obliku jezgri rotacije i divergencije te slika gradijenta i rotacije:

$$\mathrm{FK} = (\ker \mathit{curl})^{\perp},$$

$$\mathrm{HK} = (\ker \mathit{curl}) \cap (\mathrm{im}\ \mathit{grad})^{\perp},$$

$$\mathrm{CG} = (\mathrm{im}\ \mathit{grad}) \cap (\mathrm{im}\ \mathit{curl}),$$

$$\mathrm{HG} = (\ker \mathit{div}) \cap (\mathrm{im}\ \mathit{curl})^{\perp},$$

$$\mathrm{GG} = (\ker \mathit{div})^{\perp},$$

Ovakva karakterizacija pokazuje geometrijsku i analitičku važnost sumanada.

2.2 Primjeri vektorskih polja

U ovom poglavlju razmatramo primjere i slike vektorskih polja iz pet različitih potprostora od VF(Ω) koji se pojavljuju u Hodgeovom teoremu o dekompoziciji.

Neka je Ω_0 kugla polumjera 1, s centrom u ishodištu 3-prostora. Jer je rod (genus) od $\partial\Omega_0$ nula, ne postoje harmonijski čvorovi, tj. HK= 0. Kako su Ω_0 i $\partial\Omega_0$ obje povezane, ne postoje harmonijski gradijenti, tj. HG= 0. Prema tome

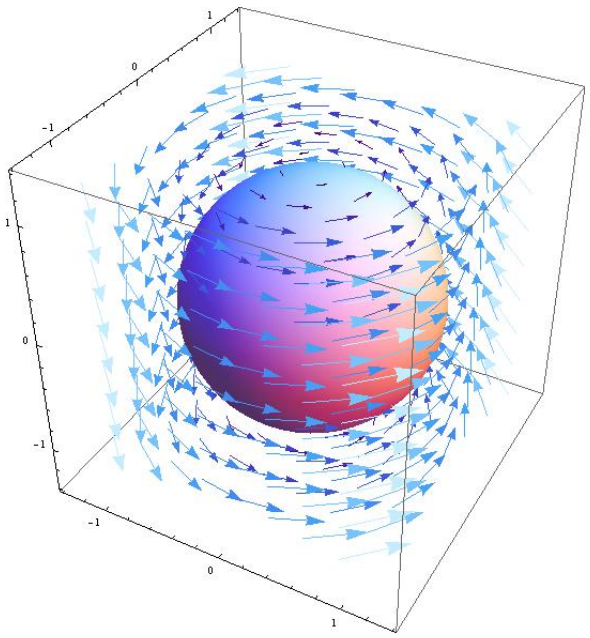
$$\mathrm{VF}\,(\Omega_0) = \ \mathrm{FK} \oplus\ \mathrm{CG} \oplus \mathrm{GG}.$$

Najprije ćemo prikazati primjere vektorskih polja iz tri napisana potprostora, da možemo koristiti kuglu Ω_0 kao zajedničku domenu.

Promotrimo vektorsko polje

$$V = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

Ovo polje možemo zamisliti kao rotaciju 3-prostora oko z-osi s konstantnom kutnom brzinom. Njegova je divegencija nula i tangenta je na rub kugle Ω_0 (Slika 2.2).

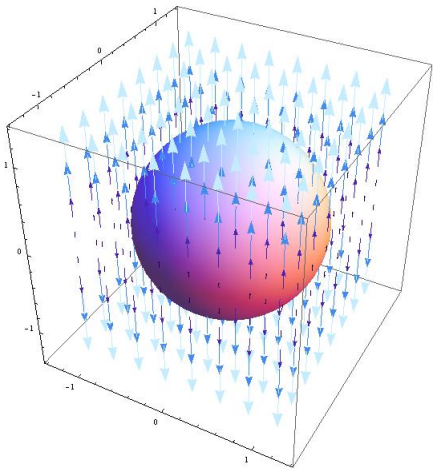


Slika 2.2: Vektorsko polje u potprostoru FK

Sada promotrimo gradijent harmonijske funkcije z koje je konstantno vektorsko polje

$$V = \hat{k}$$

Ovo vektorsko polje ima divergenciju i tok kroz jednu jedinu komponentu od $\partial\Omega_0$ nula, pa ono pripada potprostoru CG (Slika 2.3).

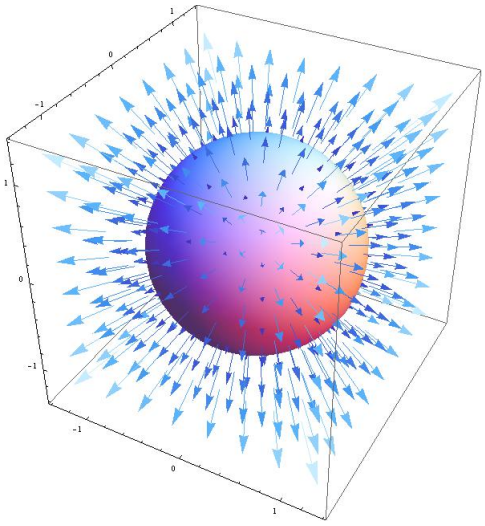


Slika 2.3: Vektorsko polje u potprostoru CG

Promotrimo funkciju $r^2 - 1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ na kugli Ω_0. Ova funkcija ima vrijednost nula na rubu od Ω_0. Stoga vektorsko polje

$$V = \nabla(r^2 - 1) = 2x\hat{i} + 2x\hat{j} + 2z\hat{k}$$

pripada potprostoru GG (Slika 2.4).



Slika 2.4: Vektorsko polje u potprostoru GG

Kako bi prikazali primjere vektorskih polja u potprostorima harmonijskih čvorova i harmonijskih gradijenata moramo napustiti kuglu i postaviti da je Ω_1 torus čija je os rotacije

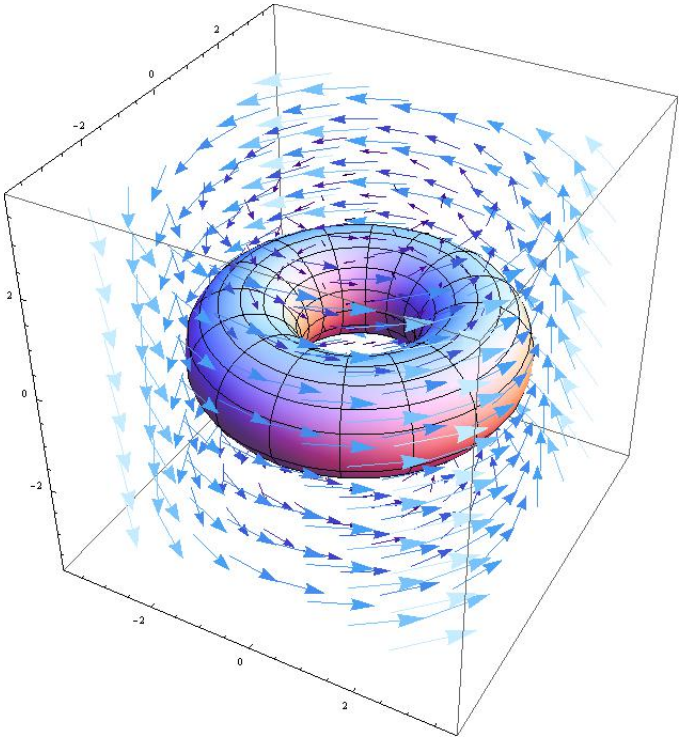
z-os. Jer je rod (genus) od $\partial\Omega_1$ jedan, postoje harmonijski čvorovi: HK$\cong R^1$. Ne postoje harmonijski gradijenti, tj. HG= 0 jer su Ω_1 i $\partial\Omega_1$ obje povezane. Stoga

$$\mathrm{VF}(\Omega_1) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{GG}.$$

Promotrimo vektorsko polje zapisano u cilindričnim koordinatama (r, φ, z)

$$V = \frac{1}{r}\hat{\varphi}$$

Ono je ujedno i magnetsko polje koje se javlja kao posljedica toka stalne struje duž z-osi. Njegova je divegencija nula i tangenta je na rub torusa Ω_1, stoga pripada potprostoru HK.



Slika 2.5: Vektorsko polje u potprostoru HK

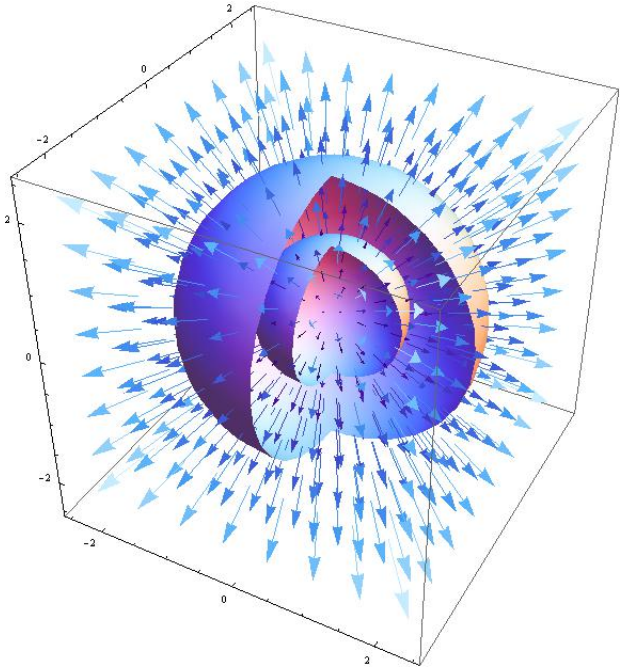
Promjeniti ćemo domenu ponovno kako bi dobili primjer harmonijskog gradijenta. Neka je Ω_2 prostor između dvije koncentrične sfere polumjera jedan i dva, s centrom u ishodištu. Ova domena ima harmonijske gradijente, jer $\partial\Omega_2$ ima dvije komponente, dok Ω_2 ima samo jednu, i zato HG$\cong R^1$. Rod (genus) svake granične komponente je nula, pa Ω_2 nema harmonijskih čvorova. Stoga

$$\mathrm{VF}(\Omega_2) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$$

Promotrimo harmonijsku funkciju $-1/r$ zapisanu u sfernim koordinatama (r, θ, φ) i njezin gradijent

$$V = \nabla\Big(-\frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Kako je harmonijska funkcija $-1/r$ konstantna na svakoj komponenti od $\partial\Omega_2$, vektorsko polje V pripada potprostoru HG (Slika 2.6).



Slika 2.6: Vektorsko polje u potprostoru HG

Poglavlje 3

Biot-Savartov operator

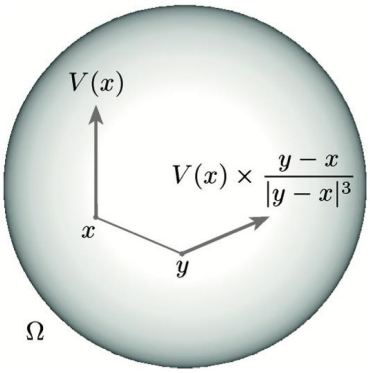
Neka je Ω kompaktna domena sa glatkim rubom $\partial\Omega$ u 3-prostoru, i neka je VF(Ω) prostor glatkih vektorskih polja na Ω s definiranim prostorom L^2 kvadratno integrabilnih funkcija za koje vrijedi: $\langle V, W\rangle = \int_\Omega V \cdot W \, d\tau$. Pod "glatkim" podrazumijevamo da su vektorska polja klase C^∞. Ako pod pojmom vektorskog polja V promatramo gustoću struje, tada *Biot-Savartova formula*

$$\mathrm{BS}\,(V)\,(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega V(x) \times \frac{y-x}{|y-x|^3} d\,(\tau_x)$$

daje magnetsko polje BS(V) u 3-prostoru. Magnetsko polje BS(V) je dobro definirano širom 3-prostora tj. neodređeni integrali konvergiraju za svaki $y \in R^3$. Nadalje, BS(V) je kontinuirano na cijelom R^3, premda njegove derivacije obično imaju prekide na $\partial\Omega$. Ako to magnetsko polje ograničimo na domenu Ω, tada dobijemo Biot-Savartov operator

$$\mathrm{BS} : VF(\Omega) \longrightarrow VF(\Omega)$$

čija su svojstva i primjenu u prirodnim znanostima opisali Cantarella, DeTurck i Gluck [2].



Slika 3.1: Prikaz podintegralne funkcije u Biot-Savartovoj formuli. Slika preuzeta iz [3].

3.1 Svojstva Biot-Savartovog operatora

Dano je glatko vektorsko polje V na Ω, a vektorski potencijal $\mathrm{A}(V)$ za $\mathrm{BS}(V)$ definiran je formulom

$$\mathrm{A}(V)(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{V(x)}{|y-x|}d(\tau_x) \tag{3.1}$$

Ovdje će biti izložena osnovna svojstva Biot-Savartovog operatora i njegovog vektorskog potencijala. Uočimo da neka od sljedećih svojstava vrijede za bilo koje vektorsko polje $V \in \mathrm{VF}(\Omega)$, te da nam za druga svojstva trebaju ograničene pretpostavke poput: divergencija od V je nula i da je V tangenta na $\partial\Omega$. Drugim riječima, da V leži u potprostoru fluidnih čvorova $\mathrm{K}(\Omega)$.

Osnovna svojstva: *Neka je Ω kompaktna domena u 3-prostoru s glatkim rubom $\partial\Omega$. Neka je V glatko vektorsko polje definirano na Ω. Tada:*

(1) $\mathrm{BS}(V)$ *i* $\mathrm{A}(V)$ *su dobro definirani u prostoru, tj. neodređeni integrali u definicijama konvergiraju;*

(2) $\mathrm{BS}(V)$ *i* $\mathrm{A}(V)$ *su klase C^∞ na Ω i na Ω' , tj. $R^3 - \Omega$.* $\mathrm{BS}(V)$ *je neprekidan na R^3, ali njegove derivacije obično imaju prekide na području ruba $\partial\Omega$.* $\mathrm{A}(V)$ *je klase C^1, ali njegova druga derivacija obično ima prekide na $\partial\Omega$;*

(3) $\Delta\mathrm{A}(V) = -V$ *u* Ω *i* $\Delta\mathrm{A}(V) = 0$ *u* Ω'*;*

(4) $\nabla \times \mathrm{A}(V) = \mathrm{BS}(V)$ *na* R^3*;*

(5) Ako je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$*, onda je divergencija od* $\mathrm{A}(V)$ *nula u* R^3*;*

(6) $\nabla \cdot \mathrm{BS}(V) = 0$ *u* Ω *i u* Ω'*;*

(7) Ako je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$*, onda* $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = V$ *u* Ω *i* $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = 0$ *u* Ω'*;*

(8) Ako je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$*, onda* $\int_C \mathrm{BS}(V) \cdot ds = 0$ *za sve zatvorene krivulje C na $\partial\Omega$ koje zatvaraju $R^3 - \Omega$;*

(9) Općenito, $\mathrm{A}(V)$ *iščezava u ∞ zbog člana $1/r$, a* $\mathrm{BS}(V)$ *u ∞ zbog člana $1/r^2$. Ako $V \in \mathrm{K}(\Omega)$, onda* $\mathrm{A}(V)$ *iščezava u ∞ zbog člana $1/r^2$, a* $\mathrm{BS}(V)$ *iščezava u ∞ zbog člana $1/r^3$.*

Dokazi većine ovih osnovnih svojstava mogu se pronaći u literaturi [1]. Svojstvo (7) sadrži prvu polovicu Teorema 3.1.2. i to ćemo odmah dokazati.

Dokaz svojstva (7)

Pretpostavimo da je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$. Moramo dokazati

$$\nabla_y \times BS\,(V)(y) = V(y),\ kada\ y \in \Omega$$

$$= 0,\ kada\ y \in \Omega'$$

Od sada pa nadalje koristit ćemo kraći zapis {V(y) u Ω/ 0 u Ω′}, ili {V(y)/ 0}. Da bi dokazali gornje svojstvo može nam pomoći sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1.1.

$$\begin{aligned}\nabla_y \times \mathrm{BS}(V)(y) = \{V(y)\ u\ \Omega/0\ u\ \Omega'\} \\ + \frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_\Omega \frac{\nabla_x \cdot V(x)}{|y-x|}\, d(\tau_x) \\ - \frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_{\partial\Omega} \frac{V(x)\cdot n(x)}{|y-x|}\, d(\sigma_x)\end{aligned}$$

Ako je divergencija od V jednaka nuli, onda drugi član s desne strane jednakosti iščezava. Slično, ako je V tangenta na $\partial\Omega$, onda treći član s desne strane jednakosti iščezava. Ako oboje vrijedi, odnosno ako je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$, onda dobijemo svojstvo (7).

Možemo promotriti Propoziciju 3.1.1. u obliku Maxwellove jednadžbe

$$\nabla \times B = J + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{3.2}$$

Neka V predstavlja gustoću struje J u domeni Ω. U vremenu $t = 0$ neka su volumna gustoća naboja ρ širom Ω i površinska gustoća naboja σ duž $\partial\Omega$ obje nula. Tada postavimo:

$$\rho = -(\nabla \cdot V)\, t \qquad na\ \Omega, \tag{3.3}$$

$$\sigma = (V \cdot n)\, t \qquad na\ \partial\Omega \tag{3.4}$$

Jednadžbu 3.3 za volumnu gustoću naboja ρ dobili smo iz jednadžbe kontinuiteta

$$\nabla \cdot V = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Slično, jednadžbu 3.4 za površinsku gustoću naboja σ smo dobili iz oblika jednadžbe kontinuiteta koja je prikladna za rub naše domene. Struju V opisujemo nabojima koji se gibaju unutar Ω, te onih koji se gibaju na rubu od Ω. Prema tome, površinska raspodjela naboja (3.4) ima promjenu naboja u vremenu jednaku gustoći toka struje V po rubu $\partial\Omega$. Sada volumni naboji širom Ω daju promjenjivo električno polje

$$E_\rho(y,t) = \left[\frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_\Omega \frac{\nabla_x \cdot V(x)}{|y-x|}\, d(\tau_x)\right] t,$$

a površinski naboj duž $\partial\Omega$ daje promjenivo električno polje

$$E_\sigma(y,t) = \left[-\frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_{\partial\Omega} \frac{V(x)\cdot n(x)}{|y-x|}\, d(\sigma_x)\right] t.$$

Oba polja se rasprostiru širom 3-prostora tako da ukupno električno polje

$$E(y,t) = E_\rho(y,t) + E_\sigma(y,t)$$

ima vremensku promjenu

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_\rho}{\partial t} + \frac{\partial E_\sigma}{\partial t} = E'_\rho + E'_\sigma.$$

Sa tim zapisom, Propozicija 3.1.1. poprima oblik

$$\nabla_y \times BS(V) = \{V/0\} + E'_\rho + E'_\sigma, \tag{3.5}$$

što je jednako Maxwellovoj jednadžbi (3.2). Dokaz Propozicije 3.1.1. potvrđuje ovu interpretaciju.

Dokaz. Moramo odrediti

$$\begin{aligned}\nabla_y \times BS(V)(y) &= \nabla_y \times \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{V(x)\times(y-x)}{|y-x|^3}\, d(\tau_x)\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \nabla_y \times \frac{V(x)\times(y-x)}{|y-x|^3}\, d(\tau_x)\end{aligned}$$

Potrebno nam je sljedeće pravilo produkta

$$\nabla\times(A\times B) = (B\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)B + A(\nabla\cdot B) - B(\nabla\cdot A)$$

Primjenjujući tu formulu dobijemo:

$$\begin{aligned}\nabla_y \times \frac{V(x)\times(y-x)}{|y-x|^3} &= \left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\cdot\nabla_y\right)V(x) - \left(V(x)\cdot\nabla_y\right)\left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right)\\ &\quad + V(x)\,\nabla_y\cdot\left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right) - \left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right)\left(\nabla_y\cdot V(x)\right)\end{aligned}$$

Prvi i zadnji član s desne strane jednakosti su nula, jer se vrši derivacija $V(x)$ po y, a $V(x)$ ovisi samo o x. Prema tome

$$\nabla_y \times \frac{V(x) \times (y-x)}{|y-x|^3} = V(x)\, \nabla_y \cdot \left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right) - \left(V(x) \cdot \nabla_y\right)\left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right)$$

Član

$$\nabla_y \cdot \left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3}\right)$$

nas podsjeća na

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

Smjer vektorske funkcije $\hat{r}/r^2$ u svakoj točki je radijalan tj. "prema van". Koristeći sferne koordinate sa središtem u x divergencija ove funkcije se može izračunati

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

Proizlazi da je volumni integral $\int \nabla \cdot v d\tau$ nula. Pretpostavimo sada da želimo ovu vektorsku funkciju integrirati po sferi radijusa R s centrom u ishodištu. Tada je površinski integral

$$\begin{aligned}\oint v \cdot da &= \int \left(\frac{1}{R^2}\hat{r}\right) \cdot (R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}) \\ &= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = 4\pi\end{aligned}$$

Uočimo kako se dobiveni rezultati ne slažu s Gaussovim teoremom o divergenciji. Izvor problema je točka $r = 0$ i zbog svoje specifičnosti pojavila se potreba za definiranjem **Dirac-Delta funkcije**

$$\delta^3(r) = \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ ako } r = 0 \\ \infty, \text{ ako } r \neq 0 \end{array} \right\}$$

Više o svojstvima Dirac-Delta funkcije možemo pronaći u [1]. Prema tome

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(r)$$

Ekvivalentno

$$\nabla_y \cdot \left(\frac{(y-x)}{|y-x|^3} \right) = 4\pi\delta^3 (y-x)$$

Stoga

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega V(x)\, \nabla_y \cdot \left(\frac{y-x}{|y-x|^3} \right) d(\tau_x) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Omega V(x)\, 4\pi\delta^3 (y-x)\ d(\tau_x) \\ &= V(y)\ u\ \Omega\ /\ 0\ u\ \Omega' \end{aligned}$$

Do sada smo pokazali

$$\nabla_y \times BS\ (V)\,(y) = \{V(y)/0\} - \frac{1}{4\pi} \int_\Omega (V(x) \cdot \nabla_y) \left(\frac{y-x}{|y-x|^3} \right) d(\tau_x)$$

Sada se fokusiramo na drugi član i moramo pokazati da je

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{4\pi} \int_\Omega (V(x) \cdot \nabla_y) \left(\frac{y-x}{|y-x|^3} \right) d(\tau_x) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla_y \int_\Omega \frac{\nabla_x \cdot V(x)}{|y-x|}\ d(\tau_x) - \frac{1}{4\pi} \nabla_y \int_{\partial\Omega} \frac{V(x) \cdot n}{|y-x|}\ d(\sigma_x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Započinjemo pisanjem svakog od ova tri člana u obliku

$$\pm \frac{1}{4\pi} \nabla_y \int_\Omega (...)\ d(\tau_x)$$

Krećući s lijeve strane tvrdimo da se podintegralna funkcija može zapisati na sljedeći način

$$(V(x) \cdot \nabla_y) \left(\frac{y-x}{|y-x|^3} \right) = \nabla_y \left(V(x) \cdot \left(\frac{y-x}{|y-x|^3} \right) \right)$$

Kako bi to mogli tvrditi, potrebno nam je pravilo produkta

$$\nabla\,(V \cdot W) = V \times (\nabla \times W) + W \times (\nabla \times V) + (V \cdot \nabla)\, W + (W \cdot \nabla)\, V \tag{3.7}$$

Tu formulu iskoristimo uvrštavajući da je $\nabla = \nabla_y$, $V = V(x)$ i $W = (y - x)/|y - x|^3$.
Tri od četiri člana s desne jednadžbe 3.7 biti će nula. Prvi član je nula jer je $\nabla_y \times W = 0$. Drugi član je nula jer $\nabla_y \times V(x) = 0$. Četvrti član je nula jer je $(W \cdot \nabla_y)\, V(x) = 0$.
Prema tome, $\nabla_y\, (V \cdot W) = (V \cdot \nabla_y)\, W$, a to je upravo ono što smo tvrdili. Prvi član s desne strane jednadžbe 3.6 je već u traženom obliku. Drugi član se može zapisati kao

$$\int_{\partial\Omega} \frac{V(x) \cdot n}{|y - x|}\, d(\sigma_x) = \int_{\Omega} \nabla_x \cdot \left(\frac{V(x)}{|y - x|} \right) d(\tau_x)$$

zahvaljujući Gaussovom teoremu o divergenciji.
Sada kada su svi članovi u jednadžbi 3.6 zapisani u željenom obliku, tvrdimo da su podintegralne funkcije na obje strane jednake, tj.

$$-V(x) \cdot \frac{(y - x)}{|y - x|^3} = \left(\frac{\nabla_x \cdot V(x)}{|y - x|} \right) - \nabla_x \cdot \left(\frac{V(x)}{|y - x|} \right)$$

To je upravo posljedica pravila produkta

$$\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f\, (\nabla \cdot A)$$

te je prema tome dokaz Propozicije 3.1.1. gotov. □

Primjeri

Sada slijede tri primjera kako bi što bolje ilustrirali Propoziciju 3.1.1.

Primjer 3.1.1. Promotrimo vektorsko polje

$$V = \partial/\partial z = \hat{z}$$

na kugli Ω polumjera a sa središtem u ishodištu. Uočimo da je $V \in \mathrm{CG}(\Omega)$.

Promjenom u sferne koordinate (r, θ, φ), jednostavnim računom dobijemo

$$\mathrm{BS}(V) = \frac{(a^3/3)\, (\sin\theta)}{r^2} \hat{\varphi}\, za\ r \geq a$$

$$= (1/3)\, r \sin\theta\, \hat{\varphi}\, za\ r \leq a.$$

Uočimo kako se unutar kugle $\mathrm{BS}(V)$ podudara sa poljem brzine tijela koje rotira konstantnom kutnom brzinom oko z-osi.

Sada računamo $\nabla \times \mathrm{BS}(V)$,

$$\nabla \times \mathrm{BS}(V) = (a^3/3)\{(2\cos\theta/r^3)\,\hat{r} + (\sin\theta/r^3)\,\hat{\theta}\}\ za\ r \geq a$$

$$= (2/3)\{(\cos\theta)\,\hat{r} - (\sin\theta)\,\hat{\theta}\} = (2/3)\,V\ za\ r \leq a$$

Unutar domene Ω vrijedi:

$$\nabla \times BS\ (V) = V + E'_\rho$$

Uvršavanjem $\nabla \times BS\ (V) = (2/3)\,V$ u jednadžbu (3.5) dobijemo $E'_\rho = (-1/3)\,V$.

Primjer 3.1.2. U ovom primjeru započinjemo s funkcijom $f = 1/r$ na domeni Ω između sfera polumjera 1 i 2 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Promotrimo vektorsko polje

$$V = \nabla f = -\hat{r}/r^2$$

na toj domeni. Uočimo da je funkcija f harmonijska i konstanta na svakoj komponenti od $\partial\Omega$. Prema tome, V leži u potprostoru harmonijskih gradijenata $\mathrm{HG}(\Omega)$ unutar $\mathrm{VF}(\Omega)$. Prema teoremu 3.1.5. uočavamo da V leži u jezgri Biot-Savartovog operatora.

Sada je samo potrebno potvrditi Maxwellovu jednadžbu (3.5) uvrštavajući da je

$$E'_\sigma = \hat{r}/r^2\ unutar\ \Omega$$

$$= 0\ izvan\ \Omega.$$

Primjer 3.1.3. U ovom primjeru započinjemo s funkcijom $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1 = r^2-1$ na jediničnoj kugli Ω sa središtem u ishodištu i promatramo vektorsko polje

$$V = \nabla f = 2r\hat{r}$$

na toj kugli. Uočimo da V leži u potprostoru $\mathrm{GG}(\Omega)$ unutar $\mathrm{VF}(\Omega)$ i prema teoremu 3.1.5. nalazi se u jezgri Biot-Savartovog operatora.

Sada preostaje samo potvrditi Maxwellovu jednadžbu (3.5) računajući da je

$$E'_\rho = -2r\hat{r}\ unutar\ \Omega$$

$$= -2\hat{r}/r^2\ izvan\ \Omega$$

i da je

$$E'_\sigma = 0\ unutar\ \Omega$$

$$= 2\hat{r}/r^2\ izvan\ \Omega.$$

Teorem 3.1.2. $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = V$ *vrijedi u* Ω *ako i samo ako je divergencija od* V *nula i ako je* V *tangenta na* $\partial\Omega$.

Uvjet da je divergencija od V nula i da je V tangenta na $\partial\Omega$ može se zapisati kao $V \in \mathrm{K}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK}$.

Dokaz. Pola Teorema 3.1.2. već se pojavilo u svojstvu (7) kojeg smo dokazali; ako $V \in \mathrm{K}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK}$ onda $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = V$ u Ω. Prema tome, ako je $V \in \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$, tada je nemoguće da je $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = V$ u Ω, osim ako $V = 0$ jer je prema Hodgeovom teoremu dekompozicije slika rotacije upravo $\mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG}$. Preostaje pokazati da je V u CG, onda $\nabla \times \mathrm{BS}(V)$ nikako ne može biti jednak V u Ω osim ako $V = 0$.

Dokaz započinjemo Maxwellovom jednadžbom

$$\nabla_y \times BS\ (V)(y) = \{V(y)\ u\ \Omega/0\ u\ \Omega'\} - \frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_{x\in\partial\Omega} \frac{V(x)\cdot n(x)}{|y-x|}\, d(\sigma_x)$$

Prisjetimo se dokaza svojstva (7) i zapišimo drugi član s desne strane jednakosti kao

$$E'_\sigma(y) = -\frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_{x\in\partial\Omega} \frac{V(x)\cdot n(x)}{|y-x|}\, d(\sigma_x)$$

Premda je E'_σ promjena elektrostatskog polja $E_{\sigma'}$ u vremenu, ono je i samo elektrostatsko polje koje se javlja zbog gustoće naboja $\sigma(x) = V(x)\cdot n(x)$ duž $\partial\Omega$ pa ga možemo zapisati

$$E'_\sigma(y) = -\nabla_y \psi(y)$$

gdje

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{x\in\partial\Omega} \frac{V(x)\cdot n(x)}{|y-x|}\, d(\sigma_x)$$

Dok je potencijalna funkcija ψ neprekidna, elektrostatsko polje E'_σ će općenito imati prekide na $\partial\Omega$. Ipak, imamo $\nabla \cdot E'_\sigma = 0$ u Ω i $\nabla \cdot E'_\sigma = 0$ u Ω'.

Tvrdimo da ako je $V \neq 0$ vektorsko polje u CG, tada E'_σ ne može biti nula u Ω. Podsjetimo se definicije potprostora CG. Glatko vektorsko polje V definirano na Ω je u CG ako i samo ako je $V = \nabla\varphi$, gdje je φ harmonijska funkcija na Ω i gdje je tok od V kroz svaku komponentu od $\partial\Omega$ nula. To znači, za svaku komponentu $\partial\Omega_i$ od $\partial\Omega$ imamo

$$\int_{\partial\Omega_i} V(x)\cdot n(x)\, d(\sigma_x) = \int_{\partial\Omega_i} \sigma(x)\, d(\sigma_x) = 0$$

Pretpostavimo sada da je $E'_\sigma = 0$ u Ω. Moramo pokazati da je $V = 0$. Prvo ćemo pokazati da je $E'_\sigma = 0$ u Ω', tj. $R^3 - \Omega$. Pretpostavka da $E'_\sigma = 0$ unutar Ω nam kaže da ψ mora biti konstantna na svakoj komponenti $\partial\Omega_i$ od $\partial\Omega' = \partial\Omega$.

Sada promatramo polje $\psi E'_\sigma$ u Ω' i koristimo standardni trik u elektrodinamici računajući njegovu divergenciju

$$\nabla \cdot (\psi E'_\sigma) = (\nabla\psi) \cdot E'_\sigma + \psi\,(\nabla \cdot E'_\sigma) = -E'_\sigma \cdot E'_\sigma = -\left|E'_\sigma\right|^2$$

Dakle,

$$\int_{\Omega'} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau = -\int_{\Omega'} \nabla \cdot (\psi E'_\sigma)\, d\tau = -\int_{\partial\Omega'} (\psi E'_\sigma) \cdot n'\, d\sigma$$

gdje je n' jedinični vektor normale od Ω', takav da je $n' = -n$. Korištenje teorema o divergenciji u Ω' zahtijeva komentar jer je jedna od njegovih komponenti neograničena. Ta neograničena komponenta treba biti aproksimirana s ograničenom domenom (pretpostavljajući da Ω' ima više domena) s jednom rubnom komponentom koja ide prema beskonačnosti. Tok od $\psi E'_\sigma$ kroz tu rubnu komponentu trne dok se ono povećava prema ∞ jer površina raste zbog r^2, dok polje E'_σ trne zbog člana $1/r^2$, a potencijal ψ trne zbog člana $1/r$.

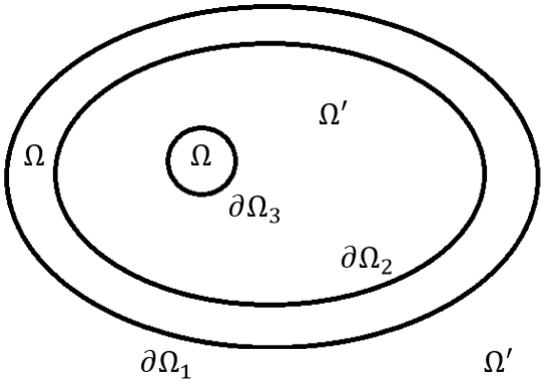
Možemo nastaviti

$$\int_{\Omega'} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau = -\int_{\partial\Omega'} (\psi E'_\sigma) \cdot n'\, d\sigma = -\sum_i \psi_i \int_{\partial\Omega_i} E'_\sigma \cdot n'\, d\sigma$$

jer je ψ konstantna i ima vrijednost ψ_i na svakoj komponenti $\partial\Omega_i$. Sada pomoću Gaussovog zakona

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega'} E'_\sigma \cdot n'\, d\sigma &= \pm\, \textit{ukupan naboj "unutar"}\ \partial\Omega_i \\ &= \pm \sum_{\textit{neki}\, j} \int_{\partial\Omega_j} \sigma(x)\, d(\sigma_x) = 0,\end{aligned}$$

jer je ukupan naboj na svakoj zasebnoj komponenti $\partial\Omega_j$ od $\partial\Omega$ nula što se vidi iz Slike 3.2.



Slika 3.2: Komponente domene Ω i njegovog komplementa Ω′

Prema tome, $\int_{\Omega'} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau = 0$ i zato $E'_\sigma \equiv 0$ u Ω'.

Sada imamo $E'_\sigma \equiv 0$ u Ω i u Ω'. Primjenjujući Gaussov zakon na $\partial\Omega$ zaključujemo da je površinska raspodjela naboja σ nula. Budući da je $\sigma(x) = V(x) \cdot n(x)$, zaključujemo da je V tangenta na rub od Ω. Stoga $V \in \mathrm{K}(\Omega)$. $V = 0$ zato što je $\mathrm{K}(\Omega) \cap \mathrm{CG} = 0$ i time je završen dokaz Teorema 3.1.2. □

Teorem 3.1.3. *Dodatak Teoremu 3.1.2.* $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = 0$ *vrijedi u* Ω' *ako i samo ako* $V \in \mathrm{K}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$.

Ovaj uvjet je ekvivalentan tome da je V okomit na potprostor CG u $\mathrm{VF}(\Omega)$.

Dokaz. Znamo iz svojstva (7) da ako V leži u $\mathrm{K}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK}$, onda $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = 0$ u Ω'. Vidjet ćemo u dokazu Teorema 3.1.5 da ako $V \in \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$, onda $\mathrm{BS}(V) = 0$ širom 3-prostora, pa je onda sigurno i $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = 0$ u Ω'. Time je dokazano pola ovog teorema.

Ostaje nam pokazati da ako je V u CG, onda $\nabla \times \mathrm{BS}(V)$ ne može biti nula u Ω', osim ako $V = 0$ u Ω. Dokaz ovoga se bazira na Maxwellovoj jednadžbi kao i u dokazu Teorema 3.1.2. Sve se na isti način dokazuje, osim što je u ovom slučaju riječ o Ω', a ne o Ω pa ćemo taj dokaz izostaviti. □

Korolar 3.1.4. *Vektorski potencijal A(V) ima divergenciju jednaku nula ako i samo ako je divergencija od V nula i V tangenta na rub od* Ω.

Dokaz. Iz svojstva (5) znamo da ako je divergencija od V nula i ako je V tangenta na $\partial\Omega$, tada vektorski potencijal $A(V)$ ima divergenciju nula. Podsjetimo se s te liste svojstava

(3) $\Delta\mathrm{A}(V) = -V$ *u* Ω *i* $\Delta\mathrm{A}(V) = 0$ *u* Ω' *;*

(4) $\nabla \times \mathrm{A}(V) = \mathrm{BS}(V)$ *za* $\forall V \in \mathrm{VF}(\Omega)$

Sada primjenimo pravilo produkta

$$\nabla \times (\nabla \times W) = \nabla(\nabla \cdot W) - \Delta W$$

za bilo koje vektorsko polje W, i zapišimo tu formulu s $\mathrm{A}(V)$ umjesto W

$$\nabla \times (\nabla \times \mathrm{A}(V)) = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{A}(V)) - \Delta \mathrm{A}(V)$$

Koristeći svojstva (3) i (4), supstituiramo BS*(V)* za $\nabla \times \mathrm{A}(V) = \mathrm{BS}(V)$ s lijeve strane, i V za $-\Delta \mathrm{A}(V)$ te dobijemo

$$\nabla \times \mathrm{BS}(V) = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{A}(V)) + V$$

Ako je divergencija od $\mathrm{A}(V)$ nula, tada dobijemo

$$\nabla \times \mathrm{BS}(V) = V \textit{ unutar } \Omega$$

što po Teoremu 3.1.2 povlači da je $\mathrm{V} \in \mathrm{K}(\Omega)$. Zaključujemo da je divergencija od $\mathrm{A}(V)$ nula ako i samo ako je $V \in \mathrm{K}(\Omega)$, što je i tvrdnja korolara. □

Teorem 3.1.5. *Jezgra Biot-Savartovog operatora je prostor gradijenata vektorskih polja koji su okomiti na rub od* Ω*.*

Dokaz. (*Lakši dokaz*) Pretpostavimo da je V jednak gradijentu vektorskog polja koji je okomit na $\partial\Omega$, odnosno $V \in \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$. Potrebno je pokazati da $\mathrm{BS}(V) = 0$ širom 3-prostora, a ne samo u Ω. Započinjemo s lemom koja je iskazana bez dokaza na str. 56 u [1].

Lema 3.1.6. *Neka je V glatko vektorsko polje na domeni* Ω*, i neka je n jedinično normalno vektorsko polje na* $\partial\Omega$*. Tada*

$$\int_\Omega \nabla \times V \, d\tau = -\int_{\partial\Omega} V \times n \, d\sigma$$

Dokaz. Krenimo od Gaussovog teorema o divergenciji

$$\int_\Omega \nabla \cdot V \, d\tau = \int_{\partial\Omega} V \cdot n \, d\sigma$$

Zamjenimo V sa $V \times C$, pri čemu je C bilo koji konstantni vektor

$$\int_\Omega \nabla \cdot (V \times C) \, d\tau = \int_{\partial\Omega} (V \times C) \cdot n \, d\sigma$$

Zapisujući da je $\nabla \cdot (V \times C) = (\nabla \times V) \cdot C$ i pomičući C izvan integrala, lijeva strana jednakosti postane

$$C \int_\Omega \nabla \times V \, d\tau$$

Zapisujući da je $(V \times C) \cdot n = -(V \times n) \cdot C$ i ponovno pomičući C izvan integrala, desna strana jednakosti postane

$$-C \int_{\partial\Omega} V \times n \, d\sigma$$

Jer su lijeva i desna strana jednakosti jednake za svaki C, slijedi

$$\int_\Omega \nabla \times V \, d\tau = -\int_{\partial\Omega} V \times n \, d\sigma$$

i time je dokazana lema. □

Pretpostavimo sada da je $V = \nabla\varphi$, odnosno da je V jednak gradijentu vektorskog polja na Ω koje je okomito na $\partial\Omega$, što znači da je φ konstantno na svakoj komponenti $\partial\Omega_i$ od $\partial\Omega$. Moramo pokazati da je $\mathrm{BS}(V) = 0$. Započnimo s formulom Biot-Savartovog operatora

$$\mathrm{BS}\,(V)\,(y) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega V(x) \times \frac{y - x}{|y - x|^3} d\,(\tau_x)$$

Fiksirajmo y, i zapišimo da je $W = (y - x)/|y - x|^3$. Tada

$$\mathrm{BS}\,(V) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega (\nabla\varphi) \times W \, d\tau$$

Sada promotrimo vektorsko polje φW na Ω i primijenimo rotaciju

$$\nabla \times (\varphi W) = (\nabla\varphi) \times W + \varphi(\nabla \times W) = (\nabla\varphi) \times W$$

Prema tome

$$\mathrm{BS}\,(V) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \nabla \times (\varphi W) \, d\tau$$

Željeli bismo iskoristiti prošlu lemu da zamjenimo desnu stranu jednakosti sa ovim izrazom

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} (\varphi W) \times n \, d\sigma$$

Međutim, vektorsko polje φW ne odgovara sasvim hipotezi leme jer ima izoliranu singularnost u točki y (za koju možemo pretpostaviti da se nalazi u unutrašnjosti od Ω). Ako tu singularnost okružimo malom sferom, vektorsko polje φW će biti okomito na sferu i zbog toga će integral $\int(\varphi W) \times n \, d\sigma$ po toj maloj sferi biti nula. Zaključujemo da se lema ovdje može primjeniti, bez obzira na singularnost. To i činimo, pa nastavljamo

$$\begin{aligned} \mathrm{BS}(V) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} (\nabla\varphi) \times W \, d\sigma \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_i \varphi_i \int_{\partial\Omega_i} W \times n \, d\sigma \end{aligned}$$

gdje je φ_i konstantna vrijednost od φ na Ω_i. Sada tvrdimo da je za svaki i

$$\int_{\partial\Omega_i} W \times n \, d\sigma = 0$$

Kako bi to mogli uočiti, neka je Ω_i kompaktna domena u 3-prostoru ograničena s $\partial\Omega_i$. Tada koristeći lemu još jedanput

$$\int_{\partial\Omega_i} W \times n \, d\sigma = \pm \int_{\Omega_i} \nabla \times W \, d\tau$$

sa znakom $\pm$ ovisno o tome je li n u smjeru prema van ili prema unutra od Ω_i. U svakom slučaju, $\nabla \times W = 0$, stoga integral isčezava. Zaključujemo, $\mathrm{BS}(V) = 0$ širom 3-prostora. □

Dokaz. (*Teži dokaz*)

Propozicija 3.1.7. *Neka je Ω kompaktna domena s glatkim rubom u 3-prostoru i neka je V glatko vektorsko polje definirano na Ω čija je divergencija jednaka nuli. Neka je E'_σ elektrostatsko polje koje se javlja zbog raspodjele naboja $\sigma(x) = V(x) \cdot n(x)$ duž $\partial\Omega$. Tada*

$$\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 d\tau \leq \int_\Omega |V|^2 \, d\tau$$

(Energija elektrostatskog polja E'_σ širom 3-prostora je ograničena odozgo s energijom početnog polja V u Ω.)

Dokaz. S obzirom na dano vektorsko polje V čija je divergencija nula, možemo oduzeti od V njegovu ortogonalnu projekciju u prostor $\mathrm{K}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK}$. To će ostaviti elektrostatsko polje E'_σ nepromjenjenim, a najgore što se može dogoditi jest smanjivanje energije od V. Prema tome, prilikom dokazivanja ove propozicije nema gubitaka pretpostavljajući da je

V već okomit na taj potprostor, te da je jednak gradijentu vektorskog polja i da mu je divergencija nula. Dakle, možemo pisati

$$V = \nabla\varphi, \ sa\ \Delta\varphi = 0$$

Na isti način

$$E'_\sigma(y) = -\nabla_y \psi(y)$$

gdje

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{V(x) \cdot n(x)}{|x - y|} \, d(\sigma_x)$$

Lema 3.1.8.

$$\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 d\tau = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma$$

Dokaz. Jer je površinska raspodjela naboja σ duž $\partial\Omega$ dana sa

$$\sigma(x) = V(x) \cdot n(x) = (\nabla\varphi(x)) \cdot n(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)(x)$$

možemo zapisati jednadžbu kao

$$\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 d\tau = \int_{\partial\Omega} \psi\sigma \, d\sigma$$

Ovakav zapis jasnije prikazuje povezanost podintegralne funkcije s desne strane ($\psi\sigma$) sa poljem E'_σ. Funkcija σ je površinska raspodjela naboja duž $\partial\Omega$, a funkcija ψ je elektrostatski potencijal za E'_σ, tj. $E'_\sigma = -\nabla\psi$.

Dokaz je malo laši za prikazati ako zamjenimo površinsku raspodjelu naboja σ s volumnom raspodjelom naboja ρ u maloj okolini $N(\partial\Omega)$ od $\partial\Omega$ i da je $E'_\rho = -\nabla\psi$ rezultirajuće elektrostatsko polje, jer tada možemo zapisati $\nabla \cdot E_\rho = \rho$.

Sada moramo pokazati da je

$$\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 d\tau = \int_{N(\partial\Omega)} \psi\rho \, d\tau$$

Zapišimo desnu stranu jednakosti kao

$$\int_{N(\partial\Omega)} \psi \, (\nabla \cdot E'_\rho) \, d\tau$$

Slijedi

$$\nabla \cdot (\psi E'_\rho) = (\nabla\psi) \cdot E'_\rho + \psi \, (\nabla \cdot E'_\rho) = - \left|E'_\sigma\right|^2 + \psi \, (\nabla \cdot E'_\rho)$$

Prema tome

$$\begin{aligned} \int_{N(\partial\Omega)} \psi\rho \, d\tau &= \int_{N(\partial\Omega)} \psi \, (\nabla \cdot E'_\rho) \, d\tau \\ &= \int_{N(\partial\Omega)} \nabla \cdot (\psi E'_\rho) \, d\tau + \int_{N(\partial\Omega)} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau \end{aligned}$$

Ako u integralu s lijeve strane jednakosti zamjenimo $N(\partial\Omega)$ sa bilo kojom većom domenom, nazovimo ju Ω^*, vrijednost integrala se neće promjeniti jer $\rho = 0$ izvan $N(\partial\Omega)$. Prema tome, jednadžba iznad i dalje vrijedi ako $N(\partial\Omega)$ zamjenimo s Ω^* u svakom od tri integrala

$$\int_{\Omega^*} \psi\rho \, d\tau = \int_{\Omega^*} \nabla \cdot (\psi E'_\rho) \, d\tau + \int_{\Omega^*} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau$$

Primjenimo Gaussov teorem o divergenciji na prvi integral s desne strane jednakosti, pa imamo

$$\int_{\Omega^*} \psi\rho \, d\tau = \int_{\partial\Omega^*} (\psi E'_\rho) \cdot n \, d\sigma + \int_{\Omega^*} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau$$

Zamislimo domenu Ω^* i njezin rub kako se povećavaju u beskonačnost. Tada ψ trne zbog člana $1/r$, dok E'_σ trne zbog člana $1/r^2$, a površina od $\partial\Omega^*$ raste zbog r^2. Prema tome, vrijednost prvog integrala s desne strane jednakosti se smanjuje jer ima član $1/r$, stoga teži u nulu. Zapišimo

$$\int_{N(\partial\Omega)} \psi\rho \, d\tau = \int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau$$

i to je traženi rezultat za volumnu raspodjelu naboja.

Ako sažmemo $N(\partial\Omega)$ prema površini $\partial\Omega$, gornji rezultat za volumnu raspodjelu naboja će težiti rezultatu kojeg smo dobili za površinsku raspodjelu naboja

$$\int_{\partial\Omega} \psi\sigma \, d\sigma = \int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau$$

i s time smo dokazali lemu. □

Završetak dokaza Propozicije 3.1.7.

Sada se prisjetimo Greenovog prvog identiteta. Neka je $A = \psi\nabla\rho$. Tada

$$\nabla \cdot A = \nabla \cdot (\psi\nabla\rho) = \nabla\psi \cdot \nabla\rho + \psi\Delta\rho = \nabla\psi \cdot \nabla\rho$$

jer je $\Delta\rho = 0$. Stoga

$$\begin{aligned}\int_\Omega -E'_\sigma \cdot V \, d\tau &= \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\rho \, d\tau = \int_\Omega \nabla \cdot A \, d\tau = \int_{\partial\Omega} A \cdot n \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \psi\nabla\rho \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \psi\frac{\partial\rho}{\partial n} \, d\sigma = \int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau\end{aligned}$$

Nadalje

$$\begin{aligned}\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau &= \int_\Omega -E'_\sigma \cdot V \, d\tau \\ &\leq \left(\int_\Omega \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |V|^2 \, d\tau\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |V|^2 \, d\tau\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Dakle

$$\int_{3-prostor} \left|E'_\sigma\right|^2 \, d\tau \leq \int_\Omega |V|^2 \, d\tau$$

kako smo i tvrdili, te je s time završen dokaz Propozicije 3.1.7. □

Završetak dokaza Teorema 3.1.5.

Pokazali smo da $\mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$, tj. prostor gradijenata vektorskih polja okomitih na rub od Ω, leži unutar jezgre Biot-Savartovog operatora $\mathrm{BS} : \mathrm{VF}(\Omega) \to \mathrm{VF}(\Omega)$.

Sada moramo pokazati da se ništa drugo ne nalazi u jezgri. To ćemo učiniti pretpostavljajući da je V okomit na GG (ekvivalentno, da mu divergencija isčezava) i da je $\mathrm{BS}(V) = 0$ te ćemo pokazati da V mora ležati u HG. Prvo uočavamo, zbog tih pretpostavki, da V mora biti jednak gradijentu vektorskog polja. Kako bi to vidjeli, uzmimo u obzir Maxwellovu jednadžbu u Ω,

$$\nabla_y \times \mathrm{BS}\,(V)\,(y) = V(y) - \frac{1}{4\pi}\nabla_y \int_{x\in\partial\Omega} \frac{V(x) \cdot n(x)}{|x-y|} \, d(\sigma_x) \tag{3.8}$$

zapisanu u obliku prikladnom za bilo koje vektorsko polje V čija je divergencija nula.

Ako V ima komponentu različitu od nule u potprostoru $\mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK}$, onda bi ta komponenta "preživjela" kada bi računali $\nabla \times \mathrm{BS}(V)$, jer Maxwellova jednadžba kaže da se $\nabla \times \mathrm{BS}(V)$ razlikuje od V za gradijent vektorskog polja. Iz čega slijedi da ne postoji takav V koji bi mogao biti u jezgri od BS.

Dakle, možemo pretpostaviti da je V jednak gradijentu vektorskog polja i zapisati $V = \nabla\varphi$. Budući da je V okomit na GG, funkcija φ mora biti harmonijska. Kako bi pokazali da V leži u HG, moramo pokazati da je funkcija φ konstantna na svakoj komponenti od $\partial\Omega$.

Uočimo najprije da je drugi član s desne strane jednakosti Maxwellove jednadžbe (3.7) upravo elektrostatsko polje $E'_\sigma(y)$. Stoga

$$\nabla \times \mathrm{BS} = V + E'_\sigma \tag{3.9}$$

Sada, ako je $\mathrm{BS}(V) = 0$, onda je $E'_\sigma = -V$ u Ω. Proizlazi da E'_σ mora biti nula izvan Ω, jer po Propoziciji 3.1.7. jednostavno nema više energije. To zauzvrat podrazumijeva kako elektrostatska potencijalna funkcija ψ za polje E'_σ mora biti konstantna na svakoj komponenti od $\partial\Omega$.

Tri jednadžbe

$$E'_\sigma = -\nabla\psi \ (svuda)$$

$$V = \nabla\rho \ (unutar\ \Omega)$$

$$E'_\sigma = V \ (unutar\ \Omega)$$

kažu nam

$$\nabla\rho = \nabla\psi \ (unutar\ \Omega)$$

Prema tome

$$\rho = \psi + \text{ neka konstanta}$$

na svakoj komponenti od Ω, gdje konstanta može ovisiti o komponenti.

Prema tome, ρ nasljeđuje od ψ svojstvo konstantnosti na svakoj komponenti od $\partial\Omega$ i zato $V = \nabla\rho$ mora ležati u HG, što je i traženi zaključak. S time završava dokaz Teorema 3.1.5. Međutim, dokazali smo i nešto više. □

Teorem 3.1.9. *Jezgra od* $\nabla \times \mathrm{BS}$ *je isto prostor gradijenata vektorskih polja koji su okomiti na rub od* Ω*.*

Ovo slijedi iz prethodnog dokaza, jer jedini način na koji smo mogli iskoristiti hipotezu da je $\mathrm{BS}(V) = 0$ je da postavimo $\nabla \times \mathrm{BS}(V) = 0$ na lijevoj strani Maxwellove jednadžbe (3.8).

Teorem 3.1.10. *Slika Biot-Savartovog operatora je pravi potprostor slike rotacije, čija je ortogonalna projekcija u potprostor* FK *(fluidnih čvorova) injektivna.*

Dokaz. Prisjetimo se Hodgeovog teorema dekompozicije

$$\mathrm{VF}(\Omega) = \mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$$

Iz Teorema 3.1.5. znamo da je jezgra BS-operatora potprostor $\mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$ od $\mathrm{VF}(\Omega)$. Znamo iz teorema 3.1.11. da je taj operator hermitski. Slijedi da slika od BS leži u ortogonalnom komplementu jezgre, tj. unutar potprostora $\mathrm{FK} \oplus \mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG}$, što je upravo slika rotacije.

S druge strane, formula $\nabla \times \mathrm{A}(V) = \mathrm{BS}(V)$, koja se pojavljuje kao svojstvo (4), nam kaže da slika od BS leži u slici rotacije. Sada proizlazi iz Teorema 3.1.5. i 3.1.9. da je

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{BS}) \cap \ker(curl) = 0 \tag{3.10}$$

i prema Hodgeovom teoremu dekompozicije jezgra rotacije je $\mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$. Ortogonalna projekcija slike od BS u FK mora biti injektivna. Iz toga proizlazi da je slika od BS pravi potprostor slike rotacije i s time završavamo dokaz Teorema 3.1.10. □

Nemoguća magnetska polja

Tražimo glatka vektorska polja U na kompaktnoj, glatko ograničenoj domeni Ω u 3-prostoru za koje je nemoguće pronaći glatko vektorsko polje V na Ω koje zadovoljava jednadžbu $U = \mathrm{BS}(V)$. Takvo polje U nazvat ćemo nemogućim magnetskim poljem.

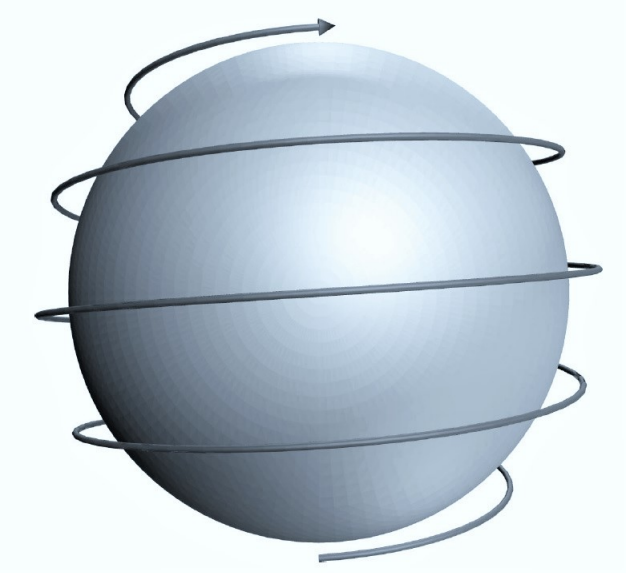
Naravno, jednadžba 3.10 kaže da je bilo koje vektorsko polje $U \neq 0$ u $\mathrm{HK} \oplus \mathrm{CG} \oplus \mathrm{HG} \oplus \mathrm{GG}$ upravo nemoguće magnetsko polje.

Promotrimo sljedeći primjer vektorskog polja brzine U "metka koji se ubrzano giba" kao na Slici 3.3. Vizualizirajmo jediničnu kuglu Ω u 3-prostoru kao olovni metak koji biva ispucan iz vatrenog oružja. Zbog užljebljivanja cijevi, metak prolaskom kroz cijev rotira. U cilindričnim koordinatama r, φ, z, vektorsko polje brzine U je dano sa

$$U = r\hat{\varphi} + \hat{z}$$

Uočimo da prvi pribrojnik $r\hat{\varphi}$ leži u FK, dok drugi pribrojnik $\hat{z}$ leži u CG. Sada pogledajmo Primjer 3.1.1. Tamo smo započeli sa vektorskim poljem $V = \hat{z}$ na jediničnoj kugli i izračunali njegovo magnetsko polje unutar kugle

$$\begin{aligned} \mathrm{BS}(V) &= (1/3)\, r \sin\theta\, \hat{\varphi} \quad \textit{(sferne koordinate)} \\ \mathrm{BS}(V) &= (1/3)\, r\, \hat{\varphi} \quad \textit{(cilindrične koordinate).} \end{aligned}$$



Slika 3.3: Nemoguće magnetsko polje na jediničnoj kugli Ω

Pišući u cilindričnim koordinatama slijedi

$$\mathrm{BS}(3V) = \; r\, \hat{\varphi}.$$

Uočimo kako U i $\mathrm{BS}(3V)$ imaju istu ortogonalnu projekciju u potprostor FK, pa prema teoremu 3.1.10. vektorsko polje U ne može biti Biot-Savartova tranformacija bilo kojeg vektorskog polja na Ω.

Sljedeći teorem podijelit ćemo u tri dijela.

Teorem 3.1.11. *(1) Biot-Savartov operator* $\mathrm{BS}\colon \mathrm{VF}(\Omega) \to \mathrm{VF}(\Omega)$ *je ograničen, i stoga se proširuje na ograničen operator u prostoru* L^2

$$\mathrm{BS} : \overline{\mathrm{VF}}(\Omega) \to \overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$$

(2) Operator $\mathrm{BS} : \overline{\mathrm{VF}}(\Omega) \to \overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ *je kompaktan.*
(3) Operator $\mathrm{BS} : \overline{\mathrm{VF}}(\Omega) \to \overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ *je hermitski s definiranim* L^2 *skupom kvadratno integrabilnih funkcija, tj.* $\langle V_1, \mathrm{BS}(V_2)\rangle = \langle \mathrm{BS}(V_1), V_2\rangle$ *za sva vektorska polja* V_1 *i* V_2 *u* $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$.

Dokaz da je BS-operator ograničen zahtjeva sljedeću lemu.

Lema 3.1.12. *Neka je* ϕ *skalarna funkcija sa svojstvom da*

$$N_\Omega(\phi) = max_y \int_\Omega |\phi(y-x)|\ d(\tau_x)$$

je konačna, a računamo ju uzimajući maksimalnu vrijednosti $y \in R^3$. *Tada je operator* $T_\phi : \mathrm{VF}(\Omega) \to \mathrm{VF}(\Omega)$ *definiran kao*

$$T_\phi(V)(y) = \int_\Omega V(x) \times \phi(y-x)\, \frac{y-x}{|y-x|}\, d(\tau_x)$$

ograničen i vrijedi

$$\left|T_\phi(V)\right| \le N_\Omega(\phi)\,|V|$$

Dokaz. Fiksirajmo $y \in \Omega$. Tada koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost

$$\begin{aligned}
\left|T_\phi(V)(y)\right| &\le \int_\Omega |V(x)|\,|\phi(y-x)|\ d(\tau_x) \\
&= \int_\Omega \left|V(x)\{\phi(y-x)\}^{1/2}\right| \left|\{\phi(y-x)\}^{1/2}\right|\ d(\tau_x) \\
&\le \left(\int_\Omega |V(x)|^2\,|\phi(y-x)|\ d(\tau_x)\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\phi(y-x)|\ d(\tau_x)\right)^{1/2} \\
&\le \left(N_\Omega(\phi)\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |V(x)|^2\,|\phi(y-x)|\ d(\tau_x)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Kvadriramo obje strane, integriramo i iskoristimo Fubinijev teorem da bi dobili

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|T_\phi(V)(y)\right|\ d(\tau_y) &\le N_\Omega(\phi) \int_\Omega \int_\Omega |V(x)|^2\,|\phi(y-x)|\ d(\tau_x)\, d(\tau_y) \\
&= N_\Omega(\phi) \int_\Omega |V(x)|^2 \left(\int_\Omega |\phi(y-x)|\ d(\tau_y)\right) d(\tau_x) \\
&\le N_\Omega(\phi)^2 \int_\Omega |V(x)|^2\ d(\tau_x)
\end{aligned}$$

Korijenujemo i dobijemo

$$\left|T_\phi(V)\right| \leq N_\Omega(\phi)\,|V|$$

Zaključujemo da je T_ϕ ograničen operator, kao što smo i tvrdili. □

Dokaz dijela (1) iz Teorema 3.1.11.

Dokaz. Definirajmo optičku mjeru od Ω, u zapisu $\mathrm{OS}(\Omega)$ i neka je to broj

$$\mathrm{OS}(\Omega) = max_y \int_\Omega \frac{1}{|(y-x)|^2}\, d(\tau_x)$$

Integral iznad zapisan može se shvatiti kao mjera napora potrebnog da optički skeniramo domenu Ω iz točke y. Optička mjera od Ω je maksimalan napor potreban da skeniramo Ω iz bilo koje točke, tj. lokacije. Tada, koristeći se lemom 3.1.12.

$$\begin{aligned}\mathrm{BS}\,(V)\,(y) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega V(x) \times \frac{y-x}{|y-x|^3} d\,(\tau_x) \\ &= \left|T_{\phi_0}(V)(y)\right|\end{aligned}$$

gdje

$$\phi_0\,(y-x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-x|^2}\right)$$

Lema nam odmah daje za $V \in \mathrm{VF}(\Omega)$

$$|\mathrm{BS}(V)| \leq \frac{1}{4\pi}\mathrm{OS}(\Omega)\,|V|$$

Zaključujemo da je BS: $\mathrm{VF}(\Omega) \to \mathrm{VF}(\Omega)$ ograničeni operator.

Sada, neka $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ označava L^2 skup prostora $\mathrm{VF}(\Omega)$. Odnositi ćemo se prema elementima iz $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ kao L^2 vektorskim poljima. Tada možemo proširiti Biot-Savartov operator na ograničeni operator

$$\mathrm{BS} : \overline{\mathrm{VF}}(\Omega) \to \overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$$

sa istim rubom kao i iznad. S tim završavamo dokaz dijela (1). □

Dokaz dijela (2) iz Teorema 3.1.11.

Dokaz. Kako bi dokazali da je BS-operator kompaktan, koristimo dvije standardne tvrdnje iz funkcijske analize. Prva je tvrdnja da za svaku kompaktnu domenu Ω, ako je $\phi(x)$ neprekidna na R^3, tada integralni operator

$$(T_\phi f)(y) = \int_\Omega \phi\,(y-x)\, f(x)\, d(\tau_x)$$

definira kompaktni operator $T_\phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ (Teorem 3.1.5, str. 53 u [15]).

Druga je tvrdnja da je granična norma kompaktnih operatora kompaktna (Lema 3.1.3, str. 52 u [15]). Sada neka je

$$\phi_N(x) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{N^2}{4\pi}\text{ , ako } |x| \le \dfrac{1}{N} \\ \dfrac{1}{4\pi|x|^2}\text{ , ako } |x| \ge \dfrac{1}{N} \end{array} \right\}$$

Uočimo da je ϕ_N neprekidna funkcija i da je

$$\begin{aligned} N_\Omega(\phi_0 - \phi_N) &= max_y \int_\Omega |\phi_0\,(y-x) - \phi_N\,(y-x)|\; d(\tau_x) \\ &\le \frac{1}{4\pi} \int_{|x|\le 1/N} \left(\left(\frac{1}{|x|^2} \right) - N^2 \right) d(\tau_x) \\ &\le \frac{1}{4\pi} \int_{|x|\le 1/N} \left(\frac{1}{|x|^2} \right) d(\tau_x) = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Po prvoj tvrdnji iz funkcionalne analize T_{ϕ_N} je kompaktan operator iz $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ u $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$. Po lemi vidimo kako $\left|T_{\phi_N} - T_{\phi_0}\right| \to 0$, kada $N \to \infty$. Po drugoj tvrdnji zaključujemo kako je T_{ϕ_0} kompaktan. Već smo napisali da je $\mathrm{BS}\,(V) = \left|T_{\phi_0}(V)\right|$ pa koristeći drugu tvrdnju funkcionalne analize zaključujemo da je $\mathrm{BS} : \overline{\mathrm{VF}}(\Omega) \to \overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ kompaktan operator. □

Dokaz dijela (3) iz Teorema 3.1.11.

Dokaz. Lako je pokazati zašto je BS-operator hermitski. Pretpostavimo da su V_1 i V_2 glatka vektorska polja u Ω. Tada

$$\begin{aligned}
\langle V_1, \mathrm{BS}(V_2)\rangle &= \int_\Omega V_1(y)\cdot \mathrm{BS}(V_2)(y)\, d(vol_y)\\
&= \int_\Omega V_1(y)\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega V_2(x)\times\frac{y-x}{|y-x|^3}\, d(\tau_x)\right) d(\tau_y)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega\times\Omega} V_1(y)\times V_2(x)\cdot\left(\frac{y-x}{|y-x|^3}\right) d(\tau_x)\ d(\tau_y)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega\times\Omega} V_2(y)\times V_1(x)\cdot\left(\frac{y-x}{|y-x|^3}\right) d(\tau_x)\ d(\tau_y)\\
&= \langle V_2, \mathrm{BS}(V_1)\rangle
\end{aligned}$$

Prema tome, $\mathrm{BS} : \mathrm{VF}(\Omega) \to \mathrm{VF}(\Omega)$ je hermitski operator i ostaje hermitski kada se proširi na L^2 skup $\overline{\mathrm{VF}}(\Omega)$ od $\mathrm{VF}(\Omega)$ i time je Teorem 3.1.11. dokazan. □

Poglavlje 4

Primjena Biot-Savartovog operatora

U ovom poglavlju prikazati ćemo kratki povijesni pregled interesantan za ovu tematiku te dati detaljniji pregled jednog područja. Povijesni pregled počet ćemo teorijom potencijala, nastaviti preko funkcionalne analize, dinamike fluida, elektrodinamike i topologije pa sve do Hodgeovog teorema dekompozicije. Kao što je moguće primijetiti po ovim granama, matematičke zakonitosti usko su povezane s objašnjavanjem fizikalnih pa i bioloških pojava. Započinjemo s postojanjem i jedinstvenosti rješenja Dirichletovog problema za Laplaceovu jednadžbu koji se pojavljuje i u dokazu Hodgeovog teorema dekompozicije prilikom karakterizacije potprostora harmonijskih gradijenata.

Godine 1777. Joseph Louis Lagrange uvodi funkciju $\psi(x, y, z)$ pridruženu masama za koju je Pierre Simon Laplace 1782. godine pokazao da zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1}$$

u svim točkama u kojima nema mase. Siméon Denis Poisson je, na osnovu Coulombovog zakona, uveo sličnu funkciju $\Phi(x, y, z)$ kojoj doprinose svi naboji jednog električnog sustava obrnuto proporcionalno s udaljenošću. Zatim je, kao što je to učinio Lagrange u slučaju gravitacijskih privlačnih sila, dokazao da parcijalne derivacije $-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, daju komponente električne sile u točki (x, y, z). Petnaest godina kasnije George Green daje funkciji Φ univerzalno ime potencijal. Sljedeći značajan doprinos Poissona, zabilježen 1813. godine, proširenje je Laplaceove jednadžbe 4.1 tako da uključi točke zauzete materijalom

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 4\pi\rho \tag{4.2}$$

gdje je ρ volumna gustoća mase. Jednadžba 4.2 nazvana je Poissonovom, a njena valjanost je opća pa je stoga primjenljiva i u elektrostatici o čemu je Poisson pisao u svojim knjigama.

Primjene matematičke analize na elektricitet i magnetizam, koje je 1828. godine Green opisao u svojem radu, bile su zanemarene sve dok njihovu važnost nije uočio William Thomson. U svojim spisima, Green je opisao danas poznatu *Greenovu funkciju* čija je postojanost ekvivalentna rješivosti Dirichletovog problema za Laplaceovu jednadžbu. Premda Green nije dao kompletni dokaz, on je prvi ustanovio karakterizaciju Dirichletovog problema: "Pretpostavimo da Laplaceova jednadžba vrijedi u određenom prostoru, a rješenje jednadžbe je definirano na rubu tog prostora. Tako postavljen problem naziva se Dirichletov problem ili rubni problem prve vrste." Nadalje, dokazivanjem Dirichletovog problema bavili su se Karl Weierstrass i njegovi učenici, a u konačnici je David Hilbert ustanovio valjanost Dirichletovog problema za Laplaceovu jednadžbu. Paralelno se razvija funkcionalna analiza i Hilbert opisuje prostor kvadratno integrabilnih funkcija.

U području dinamike fluida, Herman von Helmholtz proučavao je gibanje idealnih fluida (nestlačivi i nemaju unutarnjeg (viskoznog) trenja) te se suočio s problemom pronalaženja vektorskog polja V ako poznajemo njegovu rotaciju. Rezultat je bila poznata Helmholtzova dekompozicija prema kojoj bilo koje vektorsko polje V može biti jedinstveno raščlanjeno na solenoidalni dio i bezvrtložni dio koji je prikazan preko gradijenta skalarnog polja. Helmholtz je proširio Riemannovu ideju o površinama te prvi opisao značenje jednostruko povezanog područja Ω u R^2. To je područje koje ima svojstvo da se svaka zatvorena krivulja u Ω može bez prekidanja stegnuti na točku ne izlazeći iz Ω. Nadalje, opisao je i pojam višestrukog povezanog područja Ω u oznakama maksimalnog broja poprečnih presjeka $(\Sigma, \partial\Sigma) \subset (\Omega, \partial\Omega)$ koji se mogu bez njihovog presijecanja izdvojiti iz Ω. Ove topološke ideje razvio je Thomson u okviru homologija topoloških prostora i razmotrio J. C. Maxwell u području dinamike fluida i elektrodinamike.

Helmholtzove matematičke pretpostavke o vrtlozima, njihovim vibracijama i o njihovoj stabilnosti činile su poticaj Thomsonovog razmišljanja kako zatvoreni vrtlozi mogu predstavljati stabilne dinamičke konfiguracije u medijima. Thomson je u svojem radu *On vortex motion* postavio ideju atoma kao vrtloga koji se nalaze u eteru. Primjena Biot-Savartovog zakona u aerodinamici također zadire u područje teorije vrtloga. U aerodinamici inducirane struje zraka stvaraju prstene oko vrtložne osi koja je analogna gustoći struje, a struje zraka u aerodinamici analogne su magnetskom polju B u magnetizmu.

Kao što je rečeno, dokazivanje svojstava Biot-Savartovog operatora uključuje korištenje Hodgeovog teorema dekompozicije. Veličine koje su usko povezane sa Biot-Savartovim operatorom jesu *broj prijevoja* krivulje koja se pokazala bitnom u molekularnoj biologiji pri proučavanju fenomena superzavijanja DNA i enzima koji utječu na nju te *helicitet* vektorskog polja koja igra važnu ulogu u fizici plazme i dinamici fluida.

4.1 Helicitet i broj prijevoja

Helicitet $\mathrm{H}(V)$ glatkog vektorskog polja V na domeni Ω u 3-prostoru definiran formulom

$$\mathrm{H}(V) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega\times\Omega} V(x) \times V(y) \cdot (x-y)/\left|x-y\right|^3 d(\tau_x)\, d(\tau_y)$$

je standardna mjera uvijanja linija polja oko linija drugog polja. Predstavio ju je Woltjer 1958. godine, a dao naziv Moffatt 1969. godine.

Broj prijevoja $\mathrm{Wr}(K)$ glatke krivulje K u 3-prostoru parametrizirane duljinom luka definiran formulom

$$\mathrm{Wr}(K) = \frac{1}{4\pi} \int_{K\times K} (dx/ds \times dx/dt) \cdot (x-y)/\left|x-y\right|^3 ds\, dt$$

je standardna mjera uvijanja krivulje same oko sebe, a predstavio ju je Călugăreanu 1959.-1961. i dao naziv Fuller 1971. godine. Primjena heliciteta se očituje u fizici plazme, teoriji čvorova, magnetohidrodinamici i u problemima minimizacije energija vektorskih polja.

Možemo uočiti kako je helicitet za vektorska polja analogan broju uvoja za čvorove. Obje formule iznad su varijante formule za vezni broj dvaju razdvojenih, zatvorenih, prostornih krivulja [Gauss, 1833].

Helicitet od V je usko povezan sa Biot-Savartovim operatorom,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(V) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega\times\Omega} V(x) \times V(y) \cdot (x-y)/\left|x-y\right|^3 d(\tau_x)\, d(\tau_y) \\
&= \int_\Omega V(y) \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \int_\Omega V(x) \times (x-y)/\left|x-y\right|^3 d(\tau_x) \right] d(\tau_y) \\
&= \int_\Omega V(y) \cdot \mathrm{BS}(V)(y)\, d(\tau_y) \\
&= \int_\Omega V \cdot \mathrm{BS}(V)\, d\tau,
\end{aligned}$$

pa je helicitet od V jednak L^2 prostoru kvadratno integrabilnih funkcija V i $\mathrm{BS}(V)$,

$$\mathrm{H}(V) = \langle V, \mathrm{BS}(V) \rangle$$

Upravo zbog te formule Biot-Savartov operator,

$$\mathrm{BS} : \mathrm{VF}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{VF}(\Omega)$$

ima važnu ulogu u proučavanju prijevoja čvorova i heliciteta vektorskih polja.

1833. godine C. F. Gauss je predstavio važnu fundamentalnu veličinu, vezni broj (linking number) dvaju zatvorenih krivulja K_1, K_2 u R^3

$$L(K_1, K_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_1 \times K_2} \frac{dx}{ds} \times \frac{dy}{dt} \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^3} ds\, dt$$

Manipulacijom integrala uočavamo kako se Biot-Savartov operator manifestira u ovoj Gaussovoj formuli (Biot-Savartova podintegralna funkcija integrira se po krivulji K_1)

$$L(K_1, K_2) = \int_{K_1} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{K_2} \frac{dx}{ds} \times \frac{(x-y)}{|x-y|^3} ds \right] \cdot \frac{dy}{dt}\, dt$$

$$L(K_1, K_2) = \int_{K_1} BS\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{dy}{dt}\, dt$$

Călugăreanu je dokazao relaciju koja povezuje vezni broj i broj prijevoja

$$\textit{vezni broj (linking number) = broj uvoja (twist) + broj prijevoja (writhe),} \tag{4.3}$$

a kombiniranim naporima Fullera i Vinograda ova relacija prevela se u obliku bioloških pojmova i prepoznala njezina fundamentalna važnost za proučavanje DNA.

1984. godine Berger i Field [9] dokazali su formulu koja povezuje helicitet vektorskog polja i broj prijevoja krivulje. Neka je Ω_K cjevasta okolina glatke krivulje K i neka je V_K glatko vektorsko polje na Ω_K koje je paralelno krivulji K i ovisi samo o udaljenosti od K. Takvo vektorsko polje nužno ima divergenciju jednaku nuli. Tada

$$\mathrm{H}(V) = Flux\,(V)^2\, \mathrm{Wr}(K)$$

pri čemu $Flux\,(V)$ predstavlja tok od V_K kroz bilo koji poprečni presjek od Ω_K.

4.2 Gornje granice za helicitet i broj prijevoja

Cantarella, DeTurck i Gluck ustanovili su gornje granice za helicitet.[10] Neka je V glatko vektorsko polje na $\Omega \in R^3$ i neka je R polumjer kugle koja ima isti volumen kao Ω. Tada

$$|H(V)| \leq R\langle V, V\rangle$$

gdje $\langle V, V\rangle$ nazivamo energijom od V i označavamo sa $E(V)$. Ova gornja granica nije oštra, ali je dobrog reda veličine. Naprimjer, model za magnetsko polje u Crab Nebuli je vektorsko polje V u kugli Ω sa helicitetom većim od gornje zapisane granice za jednu petinu. Određivanjem oštre granice upotrebom spektralne metode bavili su se Cantarella, DeTurck i Gluck u [11].

Za jedinično vektorsko polje pokazali su da je

$$|H(U)| \leq \frac{1}{2} vol\,(\Omega)^{4/3}$$

Također su dokazali granicu za broj prijevoja korištenjem rezultata Bergera i Fielda. Neka je K glatka krivulja u R^3 dužine L. Neka je Ω_K cjevasta okolina krivulje K polumjera R. Tada

$$|Wr(K)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{L}{R}\right)^{4/3}$$

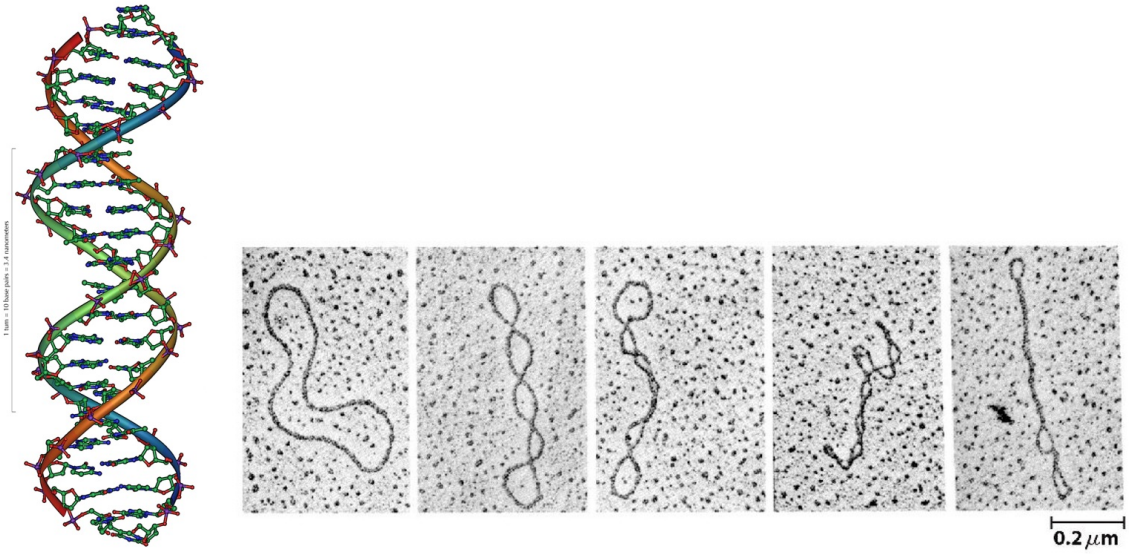
Proučavanje pojma heliciteta dovelo je do tri različita problema minimizacije energije koji se pojavljuju u magnetohidrodinamici. U svakom od tih problema, minimizacija se izvodi po vektorskim poljima sa određenom vrijednosti heliciteta. Riječ je o Woltjerovom, Taylorovom problemu (usko vezani za fiziku plazme) i problemu optimalne domene koji su Cantarella, DeTurck, and Gluck dokazali u [10]: *Duž svih kompaktnih poddomena $\Omega \in R^3$ s danim volumenom i duž svih solenoidalnih vektorskih polja koje su tangente na $\partial\Omega$ i imaju određeni helicitet, potrebno je pronaći vektorsko polje s minimalnom energijom i domenu koja ga zadrži.* Pronalazak rješenja svakog od ova tri problema zahtjevalo je uporabu Biot-Savartovog operatora.

4.3 Primjena u molekularnoj biologiji

DNA, deoksiribonukleinska kiselina, osnovna je molekula nasljeđivanja i odgovorna je za prenošenje nasljednog materijala i osobina, naprimjer od boje kose do sklonosti prema nekim bolestima.

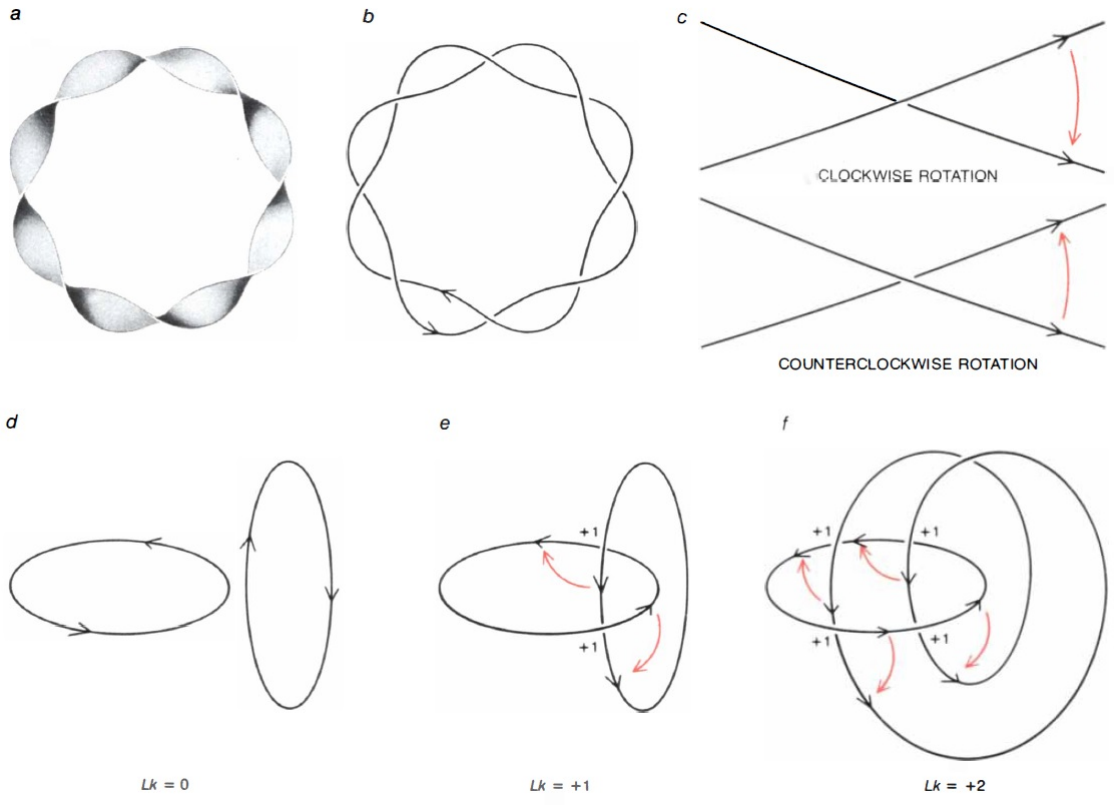
Godine 1953. Francis Crick i James Watson konstruirali su i opisali model dvostruke uzvojnice lanca DNA, a njihova konstrukcija potekla je od rendgenskih difrakcijskih uzoraka koje su snimili Rosalind Franklin i Raymond Gosling u svibnju 1952. godine. DNA se sastoji od dva lanca molekula koji su međusobno uvijeni jedan oko drugog u obliku dvostruke zavojnice (Slika 4.1). Kemijski se lanac DNA sastoji od niza nukleotida, a svaki se nukleotid sastoji od deoksiriboze, fosfata i dušičnih baza. Prema tome, DNA je polimer jer se sastoji od određenih podjedinica tj. nukleotida.

Desetljeće nakon što je otkrivena spiralna struktura DNA, Vinograd je otkrio još jednu strukturnu osobinu DNA. Os DNA se također može namatati u prostoru, što dovodi do pojma superzavijene DNA. Kao u slučaju ljudske genomne DNA, os DNA je često linearna, ali nekad je os i cirkularna (kružna) i takva se najčešće promatra u biokemijskim laboratorijima.



Slika 4.1: a) Dio molekule DNA; b) Prijelaz relaksirane cirkularne DNA u superzavijenu cirkularnu DNA

Kao što smo već rekli, dupla zavojnica DNA može se uvijati u prostoru i na taj način se stvara nova zavojnica višeg reda za koju kažemo da je superzavijena. Kako bi superzavijanje DNA mogli matematički proučiti, najprikladnije je konstruirati model u kojem je struktura DNA opisana uskom, uvrnutom vrpcom infinitezimalne debljine. Ovaj model vrpce slijedi os duple zavojnice DNA i uvija se kao što se i dva lanca molekula uvijaju oko te osi. Kada su krajevi vrpce spojeni, svaki rub opisuje zatvorenu krivulju u 3-prostoru (Slika 4.2.a). Nadalje, kada model vrpce predstavlja zatvorenu, cirkularnu molekulu DNA, dvije krivulje koje opisuju rubove vrpce su matematički povezane, tj. nemoguće ih je odvojiti, a da ne „presječemo“ jednu od njih bez obzira koliko ih deformirali. Stoga je korisno dodijeliti im brojčanu vrijednost koja opisuje način na koji je petlja koja formira jedan rub vrpce povezana petljom koju formira drugi rub vrpce. Dakle, definira se *vezni broj* takav da iznosi 0 za par odvojenih zatvorenih krivulja, 1 za krivulju čija petlja prolazi kroz petlju druge krivulje, 2 za krivulju čija petlja prolazi dvaput kroz petlju druge krivulje itd. (Slika 4.2.d,e,f)



Slika 4.2: Zatvorena cirkularna DNA. Slika preuzeta iz [13].

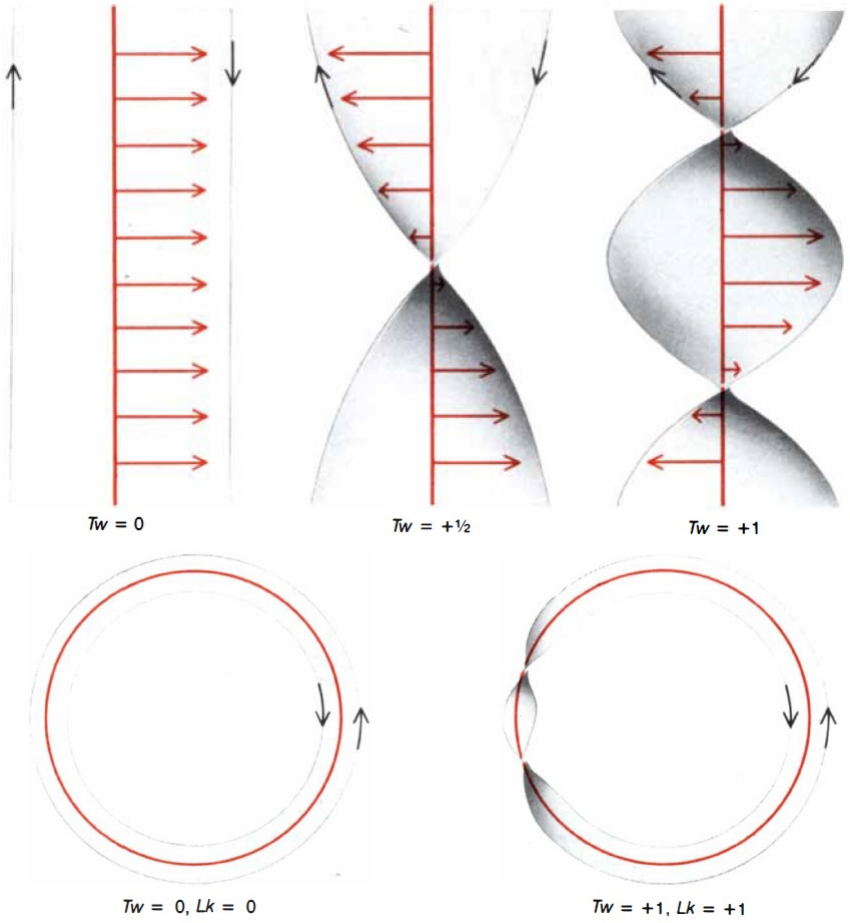
Ako rubovima, odnosno krivuljama dodijelimo orijentaciju (Slika 4.2b), moguće je osmisliti korisniju definiciju veznog broja čijem se broju dodjeljuje pozitivan ili negativan predznak ovisno o orijentaciji krivulja. Jedan način određivanja veznog broja jest proučavanjem projekcije, odnosno dvodimenzionalne reprezentacije dvaju krivulja. Svakoj točki gdje jedna krivulja presijeca drugu (ne promatramo kada krivulja presijeca samu sebe) dodjeljujemo pozitivan ili negativan predznak, ovisno kakva je rotacija (u smjeru kazaljke na satu ili obrnuto od kazaljke na satu) potrebna da gornji dio krivulje „padne“ na donji dio krivulje (Slika 4.2.e). Dodajući taj predznak i dijeljenjem sa dva (broj vezanih krivulja) daje vezni broj. Vezni broj definiramo kao cijeli broj koji opisuje svojstvo dvaju zatvorenih krivulja u prostoru.

Kako bi razdvojili par krivulja, a da ih ih ne presječemo, vezni broj mora biti nula (iako obrnuta tvrdnja često ne vrijedi). Ako su krivulje rubovi zatvorene vrpce s N okreta oko osi, tada je njihov vezni broj jednak $+N$ ili $-N$ ovisno o smjeru okretanja. Štoviše, dokle god su krajevi vrpce spojeni, vezni broj će ostati nepromijenjen deformacijom vrpce. Prema tome, za molekulu relaksirane zatvorene cirkularne DNA koja ima 5000 parova baza, sa 10 parova baza za svaki okret zavojnice, vezni broj će biti +500. Broj je pozitivan jer je dupla zavojnica DNA desno-orijentirana. (Zatvorena cirkularna molekula DNA je *relaksirana* ako njezina os u potpunosti leži u ravnini.)

Sada smo analizirali model vrpce DNA promatrajući način zakretanja vrpce. Međutim, analizirati model vrpce DNA možemo i na drugi način - promatrajući način zakretanja vrpce. Za vrpcu čija os prati ravnu liniju, ideja brojčane vrijednosti koja opisuje uvijanje vrpce je intuitivno jasna. Dogovorom je određeno da desno orijentiranom uvijanju vrpce od 360 stupnjeva dodjeljujemo vrijednost +1, a lijevo orijentiranom vrijednost -1. Definicija *broja uvoja* je manje uočljiva za vrpcu čija os nije ravna. Vjerojatno najbolji način za razumijevanje ovog koncepta jest zamišljanje malih strjelica smještenih okomito na os vrpce koje imaju smjer prema jednom od dva ruba vrpce (Slika 4.3). Kako se strjelica giba po uvijenoj vrpci ona rotira oko osi i broj uvoja vrpce definiramo kao integral kutne brzine rotacije strjelice uzimajući u obzir duljinu luka osi krivulje.

U posebnom slučaju kada os vrpce leži u ravnini vrijednost broja uvoja može se izračunati kao broj rotacija koje strjelica izvrši oko osi dok se giba uzduž vrpce. Primjerice, kada vrpca predstavlja model za relaksirani zatvoreni cirkularni komadić DNA sa 5000 parova baza, strjelica jednom zarotira za svaki okret duple zavojnice, tako da je ukupan broj uvoja jednak +500, a predznak je pozitivan jer je sporazumno ustanovljeno da je dupla zavojnica desno-orijentirana. Dakle, uočavamo da su vezni broj i broj uvoja jednaki i iznose +500 za relaksirani zatvoreni cirkularni komadić DNA. Međutim, bitno je naglasiti kako su ove dvije veličine različite. Vezni broj je topološko svojstvo vrpce, dok je broj uvoja

geometrijsko. Ako vrpcu deformiramo, možemo joj promijeniti broj uvoja, ali ne i vezni broj. Štoviše, da bi izračunali vezni broj (koji je uvijek cijeli broj) vrpca mora biti cijela. S druge strane, broj uvoja može se promatrati lokalno i vrijednosti broja uvoja individualnih dijelova mogu se zbrojiti i dati ukupan broj uvoja vrpce. Važno je naglasiti kako model vrpce ne objašnjava detaljna mehanička svojstva DNA, ponajviše jer se zanemaruju brojne lokalne deformacije. Model vrpce osmišljen je kako bi se istaknuo vezni broj DNA na koji ne utječu takve male deformacije.

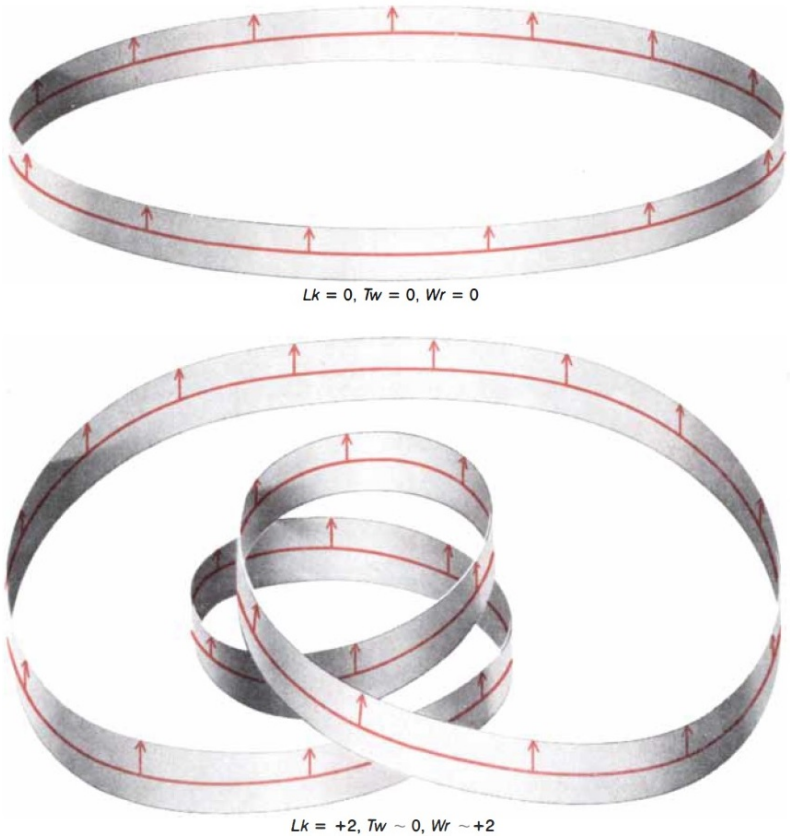


Slika 4.3: Broj uvoja vrpce. Slika preuzeta iz [13].

U vremenu kada su biokemičari proučavali cirkularnu DNA, matematičari su promatrali vezanje i uvijanje vrpci. 1968. matematičar White dokazao je da se vezni broj vrpce i njezin ukupni broj uvoja razlikuju za veličinu koja ovisi isključivo o krivulji koja opisuje os vrpce. Drugim riječima, pretpostavimo da osi dvaju zatvorenih vrpci prate istu krivulju u 3-prostoru, tada, iako se vrpce uvijaju na potpuno različite načine, njihove vrijednosti

veznog broja i ukupnog broja uvoja razlikovat će se za točno istu vrijednost kojoj je Fuller dao slikovito ime; *broj prijevoja*. Prema tome, za zatvorenu vrpcu u 3-prostoru broj prijevoja Wr jednak je razlici između veznog broja Lk i ukupnog broja uvoja Tw

$$\textit{vezni broj (linking number)} = \textit{broj uvoja (twist)} + \textit{broj prijevoja (writhe)} \tag{4.4}$$

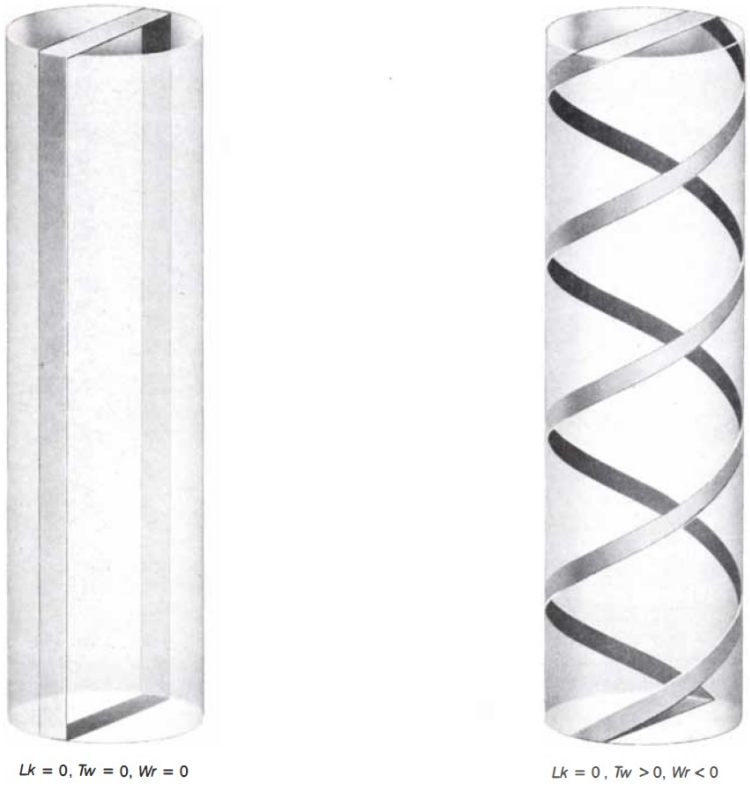


Slika 4.4: Slika preuzeta iz [13].

Dakle, možemo uočiti kako se je relacija 4.3 pronašla svoju primjenu u molekularnoj biologiji. Broj prijevoja je veličina čija se vrijednost općenito mijenja, ako se os vrpce deformira u prostoru. Prema tome, kao i broj uvoja, broj prijevoja nije topološko svojstvo vrpce, nego geometrijsko. Broj prijevoja se može izračunati iz Gaussovog integrala, ali ga je općenito puno jednostavnije izračunati oduzimanjem broja uvoja zavojnice od veznog broja. Jedino u posebnim slučajevima je prikladnije računati broj prijevoja direktno. Na primjer, ako os vrpce u potpunosti leži u ravnini ili na površini sfere, tada se može pokazati da je broj prijevoja nula (Slika 4.4). Uvrštavajući tu vrijednost u jednadžbu daje $Lk = Tw$,

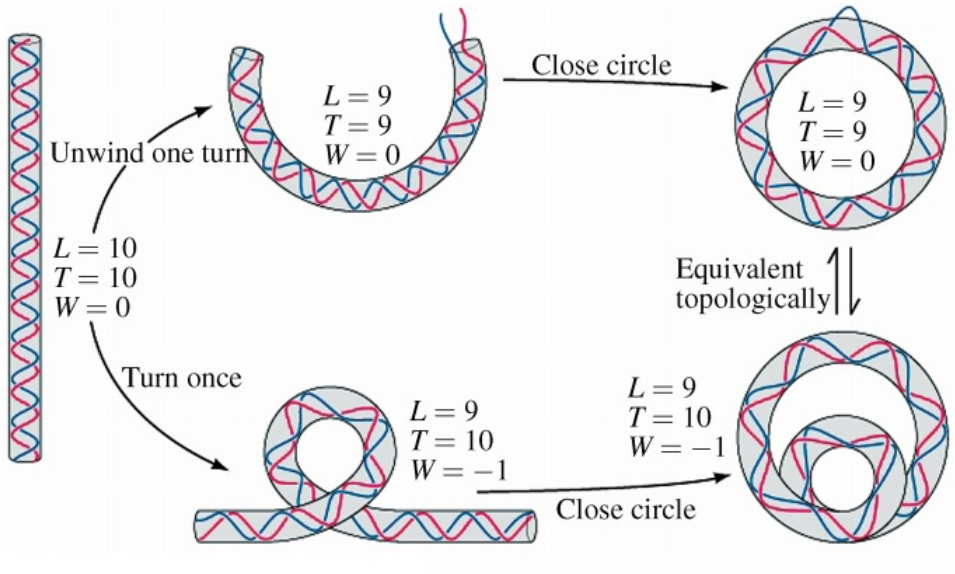
što objašnjava zašto su u slučaju relaksirane zatvorene cirkularne molekule DNA vezni broj i broj uvoja jednaki i iznose +500. Sada promotrimo što se dogodi kada se os molekule DNA uvija tako da broj prijevoja više nije nula. (Ne postoji intuitivni načina određivanja broja prijevoja krivulje. Vrpca koja se uvija može u konačnici imati broj prijevoja nula.) Kada se broj prijevoja molekule mijenja, mijenja se broj uvoja, a vezni broj ostaje isti jer se on jedino može mijenjati ako se slomi jedna od osovina duple zavojnice koje čine baze. Molekule DNA koje se međusobno razlikuju u veznom broju nazivaju se topoizomerima, a enzimi koji utječu na promjenu veznog broja, topoizomerazama.

Iako jednadžba 4.4 prikazuje kako su vezni broj i broj uvoja matematički različite veličine, fizikalnu razliku možemo uočiti ako promotrimo što se događa kad se vrpca uvija oko valjka tako da je njezina površina uvijek priljubljena uz valjak (Slika 4.5). Kut nagiba zavojnice koja je opisana ovom vrpcom ćemo označiti sa α. Drugim riječima, α je kut između zavojnice i horizontale. Dakle, kada je kut α mali, zavojnica je plitka, a kada je α velik, zavojnica je razvučena.



Slika 4.5: Rotacija vrha valjka obrnuto od kazaljke na satu oko središnje osi za dva puna okreta stvara desno-orijentiranu helikoidalnu vrpcu. Slika preuzeta iz [13].

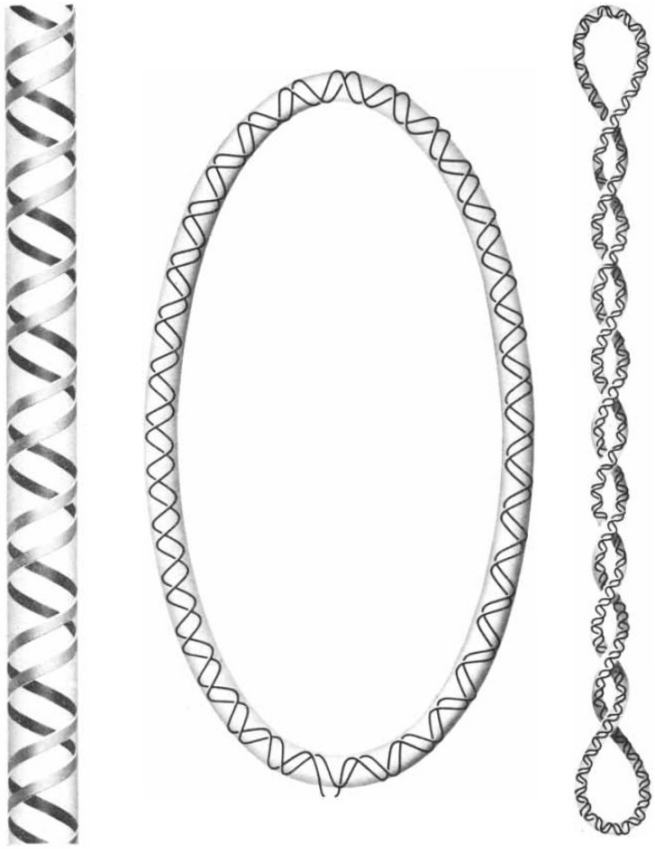
Sada pretpostavimo da je vrpca omotana oko valjka N puta prije no što su njezini krajevi spojeni. Tada uočavamo kako je vezni broj vrpce jednak N, dok je ukupan broj uvoja jednak $N \sin \alpha$. Prema tome, kada zavojnicu istežemo tako da joj se kut nagiba α povećava, broj okreta i prema tome vezni broj ostaju isti, ali broj uvoja se povećava i tako se uočava razlika između veznog broja i broja uvoja. Štoviše, jer je broj zavoja vrpce definiran kao razlika između veznog broja i broja uvoja, vrijednost broja prijevoja za ovu vrpcu iznosi $N - N \sin \alpha$, ili $N(1 - \sin \alpha)$. Dakle, kada je kut α mali i broj uvoja je mali, tada je broj prijevoja velik i obrnuto. Relacija se lako može uočiti promatramo li namotanu telefonsku žicu: kada je takva žica opuštena, tada ima veliki broj prijevoja, a minimalan broj uvoja. Međutim, ako ju razvučemo poveća se broj uvoja, a smanji broj prijevoja. Na slici 4.6 uočavamo na koji način se mogu promijeniti broj uvoja i broj prijevoja te kako u konačnici utječu na vezni broj.



Slika 4.6: Vezni broj, broj uvoja i broj prijevoja. Slika 4.6 preuzeta iz [14].

Promotrimo kako se ti rezultati primjenjuju na realnu DNA. DNA polyoma virusa može se rastaviti sedimentacijom na tri komponente: I i II koje su cirkularne, i III koja je linearna. Eksperimentalno je moguće odrediti kako srednji vezni broj za populaciju relaksiranih cirkularnih molekula ove DNA iznosi oko +500. S druge strane, za populaciju zatvorenih cirkularnih molekula (superzavijene molekule koje stvaraju komponentu I) srednji vezni broj iznosi oko +475. Kao što je Vinograd i predvidio, zatvorene cirkularne molekule DNA polyoma virusa imaju deficit veznog broja za oko 25. Ovi pronalasci predlažu način definiranja superzavijanja. Mjera superzavijanja molekule DNA je jednaka ΔLk, odnosno

razlici između veznog broja molekule u prirodnom zatvorenom kružnom stanju i veznog broja iste molekule u relaksiranom zatvorenom kružnom stanju (kada je energija deformacije minimalna i broj prijevoja jednak nuli).



Slika 4.7: Osnovne konfiguracije duple zavojnice DNA. Slika preuzeta iz [13].

Osnovne konfiguracije duple zavojnice DNA uključuju linearni oblik, cirkularni oblik koji nije u potpunosti povezan i zato relaksiran te cirkularni oblik koji je povezan i zato superzavijen. Ako presječemo jednu nit relaksirane cirkularne DNA, promijenimo broj okreta dodavanjem ili uklanjanjem okreta, DNA više neće biti relaksirana (broj prijevoja više nije nula). Ona će biti pod torzijskim naprezanjem i apsorbirat će naprezanje tako da se dupla zavojnica namota oko same sebe. Drugim riječima, os DNA presijeca samu sebe i više ne leži u ravnini. Za DNA molekulu koja ima manje okreta nego u relaksiranom stanju kažemo da je negativno superzavijena ($\Delta Lk < 0$). Analogno, DNA molekulu koja ima više okreta nego u relaksiranom stanju nazivamo pozitivno superzavijenom ($\Delta Lk > 0$).

Topološke karakteristike DNA, a posebice superzavijanje DNA utječu na sve bitne DNA transakcije u živim stanicama. Cijela klasa virusa tumora, uključujući polyoma virus i humani papiloma virus, sadrže superzavijenu DNA, pa i mitohondrijska DNA kod ljudi i nekih životinjskih stanica su superzavijene. Posebice je upečatljivo da i većina poznatih malih genoma (setova gena) spadaju u tu kategoriju, uključujući genetičke faktore za plodnost i otpornost na lijekove. Štoviše, fenomen integracije, kada se mali komadić DNA unosi u veću molekulu DNA, također zahtjeva supezavijenost integriranog komadića DNA. Stoga, možemo zaključiti kako je fenomen superzavijene DNA široko rasprostranjen, a njegovo razumijevanje zahtijevalo je kombinaciju doprinosa matematičara i biologa.

Bibliografija

[1] D. J. Griffits, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, New Jersey, 3rd ed., 1999.

[2] D. DeTurck, H. Gluck, J. Cantarella, *The Biot-Savart operator for application to knot theory, fluid dynamics, and plasma physics*, Journal of Mathematical Physics Vol. 42, 2(2001), str. 876-905.

[3] D. DeTurck, H. Gluck, J. Cantarella, *Vector calculus and the topology of domains in 3-space*, Am. Math. Monthly Vol. 109, 2(2002), str. 409-442.

[4] V. Paar i V. Šips, *Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[5] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, *Ispitni katalog državne mature*, `http://dokumenti.ncvvo.hr/Ispitni_katalozi_14-15/Hrvatski/IK-fiz.pdf/`, 28.9.2015.

[6] V. Paar , *Fizika 8, udžbenik za 8. razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[7] B. Milotić, B. Mikuličić, S. Prelovšek-Peroš, *Otkrivamo Fiziku 8*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.

[8] R. Fuchs, D. Vican i I. Milanović Litre, *Nacionalni okvirni kurikulum: za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa RH, 2011.

[9] M. Berger and G. Field, *The topological properties of magnetic helicity*, J. Fluid. Mech. Vol. 147, 1984, str.133–148.

[10] D. DeTurck, H. Gluck, J. Cantarella, M. Teytel, *Isoperimetric problems for the helicity of vector fields and the Biot-Savart and curl operators*, Journal of Mathematical Physics Vol. 41(8), 2000, str. 5615–5641.

[11] J. Cantarella, D. DeTurck, H. Gluck, M. Teytel, *Influence of geometry and topology on helicity*, https://www.math.upenn.edu/~deturck/papers/deturck.pdf, 28.9.2015.

[12] A. Vologodskii, *Biophysics of DNA*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2015.

[13] W. R. Bauer, F. H. C. Crick, J. H. White, *Supercoiled DNA*, Scientific American, Inc., 1980, str. 119-133.

[14] B. Bartholomew, *Supercoiling of DNA*, http://www.siumed.edu/~bbartholomew/-lectures/Supercoiling%2007.pdf, 30.9.2015.

[15] R. J. Zimmer, *Essential Results of functional analysis*, The University of Chicago Press, Chicago, 1990.

Sažetak

U ovom radu definiran je Biot-Savartov operator (BS) i opisano nekoliko njegovih svojstava. Definicija Biot-Savartovog operatora uvjetuje poznavanje temeljnog zakona magnetostatike, Biot-Savartovog zakona, čija se primjena izučava kroz nastavu fizike. Nadalje, kako bi se dokazala svojstva Biot-Savartovog operatora, neizostavan je Hodgeov teorem dekompozicije koji je također opisan te dani primjeri vektorskih polja koji se javljaju u tom teoremu. Između ostalog, dokazano je da je Biot-Savartov operator hermitski, ograničeni operator te je opisana njegova slika i pronađena jezgra ovog operatora.

U zadnjem poglavlju dan je kratki povijesni pregled i opisana široka primjena Biot-Savartovog operatora u fizici plazme, magnetohidrodinamici, molekularnoj biologiji i u drugim granama prirodnih znanosti. Definirane su veličine poput heliciteta i broja prijevoja, povezane s Biot-Savartovim operatorom te opisane njihove gornje granice. Na kraju rada, promatran je fenomen superzavijanja DNA, a radi njegovog razumijevanja zorno su opisane tri veličine: vezni broj, broj prijevoja i broj uvoja te njihova međusobna povezanost.

Summary

This thesis defines the Biot-Savart operator (BS) and describes several of its properties. The definition of the Biot-Savart operator requires basic understanding of the laws of magnetostatics, as well as the Biot-Savart law, whose application is in electrodynamics course. Furthermore, the Hodge decomposition theorem is an integral part of understanding the Biot-Savart operator, therefore it has been defined, along with the examples of vector fields which are discussed in that theorem. Amongst other things, in this thesis we show that the Biot-Savart operator is an adjoint, bounded operator, and we describe its image and how one can find the kernel of this operator.

The last chapter presents a short historical overview, as well as a description of a wide-range application of the Biot-Savart operator in plasma physics, magnetohydrodynamics, molecular biology and other branches of natural sciences. We also define several variables, such as helicity and writhing number, along with their connection with the Biot-Savart operator and a description of their upper bounds. Finally, at the end of the thesis, we present in detail the DNA supercoiling phenomenon, with a description of its three qualities: linking number, writhing number and twist, in addition to the description of their mutual relationships.

Životopis

Rođena sam 13. veljače 1992. godine u Göttingenu u Njemačkoj. Odrasla sam u Nuštru, selu između Vinkovaca i Vukovara. Nakon završene osnovne škole Zrinskih, 2006. godine upisujem srednju školu, Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića, u Vinkovcima. Tijekom srednje škole moje zanimanje za matematiku i fiziku je poraslo zahvaljujući izvrsnim profesorima zbog kojih sam na županijskim natjecanjima iz fizike bila među prvim mjestima. Maturirala sam 2010. godine te, na temelju rezultata postignutih na državnoj maturi iste godine, upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, integrirani preddiplomski i diplomski studij matematike i fizike, nastavnički smjer. Uz brojne obaveze za vrijeme studija, nalazila sam vremena i za druženja s obitelji i prijateljima, putovanja te sviranja gitare i klavira.