Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Vukašinović, Petra

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:887528

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Vukašinović

PLOHE KONSTANTNE SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Za mog djeda

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Diferencijalna geometrija i kompleksna analiza **3**
1.1 Temeljni pojmovi iz diferencijalne geometrije 3
1.2 Temeljni pojmovi iz kompleksne analize 14

2 Plohe konstantne srednje zakrivljenosti **17**
2.1 Primjeri minimalnih ploha 18
2.2 Weierstrass-Enneperova reprezentacija 28
2.3 Rotacijske plohe konstantne srednje zakrivljenosti 37

Bibliografija **49**

Uvod

Prvi zapisi u kojima se počinje razvijati teorija ploha konstantne srednje zakrivljenosti pojavljuju se u 18. stoljeću. Euler je tada pokazao da je katenoid minimalna ploha, a 1761. godine je Lagrange izveo jednadžbu koja mora biti zadovoljena da bi ploha oblika $z = f(x, y)$ bila minimalna. Osim što je 1776. godine ponovio otkriće katenoida kao minimalne plohe te dokazao da je helikoid minimalna ploha, Meusnier je prvi koji je i formalno definirao notaciju srednje zakrivljenosti. Godine 1841. Delaunay je okarakterizirao klasu ploha u Euklidskom prostoru koje je opisao isključivo kao rotacijske plohe ruleta konika. Te plohe su katenoid, unduloid, nodoid i uspravni kružni cilindar. Danas su te plohe poznate pod imenom *Delaunayeve plohe* i prvi su netrivijalni primjer ploha konstantne srednje zakrivljenosti pri čemu je sfera njihov trivijalni slučaj. Do otkrića tih ploha je također došao i belgijski fizičar i matematičar Joseph Plateau eksperimentirajući sa smjesom sapunice i glicerina. Naime, on je umakao žice oblika prostornih krivulja u sapunicu i tako otkrio minimalne plohe čija je važnost u fizici ta što imaju najmanju potencijalnu površinsku energiju. Problem određivanja minimalnih ploha omeđenih zadanom krivuljom je dobio ime po njemu te se danas naziva *Plateauov problem*.

U prvom poglavlju ćemo se osvrnuti na sve najvažnije teoreme, definicije i primjere iz područja diferencijalne geometrije i kompleksne analize koje ćemo koristiti u istraživanju svojstava ploha konstantne srednje zakrivljenosti.

U drugom poglavlju ćemo definirati plohe konstantne srednje zakrivljenosti, promatrat ćemo redom slučajeve kada je srednja zakrivljenost tih ploha jednaka i različita od nule. Dat ćemo primjere i Weierstrass-Enneperovu reprezentaciju minimlanih ploha. Za plohe konstantne srednje zakrivljenosti čija je zakrivljenost različita od nule dat ćemo Kenmotsuovo moderno rješenje i na kraju ćemo se fokusirati na rulete nekih konika čijom se rotacijom dobivaju tzv. *Delaunayeve plohe*.

Poglavlje 1

Diferencijalna geometrija i kompleksna analiza

S obzirom da je za proučavanje ploha konstantne srednje zakrivljenosti potrebno poznavanje osnova diferencijalne geometrije i kompleksne analize, u ovom ćemo poglavlju izdvojiti sve bitne definicije i teoreme koji će nam pomoći u daljnjem radu.

1.1 Temeljni pojmovi iz diferencijalne geometrije

Definicija 1.1.1. *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ je* ***ploha*** *ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \in \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \in \mathbb{R}^3$ koje je:*

1. *homeomorfizam otvorenih skupova*
2. *glatko preslikavanje.*

Preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ nazivamo ***kartom*** *ili* ***parametrizacijom plohe****. Pišemo*

$$\mathbf{x} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Ako je i diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ injektivan, za plohu kažemo da je regularna (tj. da je $\mathbf{x}$ regularno).

Diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ *je linearni operator* $D\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *u paru kanonskih baza dan Jacobijevom matricom:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Diferencijal je ***injektivan*** *ako i samo ako je njegova jezgra trivijalna, tj. ako i samo ako je njegova slika dvodimenzionalna. Slika od* $D\mathbf{x}$ *razapeta je stupcima Jacobijeve matrice, stoga slijedi da je diferencijal injektivan ako i samo ako su vektori*

$$\mathbf{x}_u := \frac{\partial x}{\partial u}, \ \mathbf{x}_v := \frac{\partial x}{\partial v}$$

linearno nezavisni, tj. ako i samo ako je

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 0.$$

Krivulja na plohi

Definicija 1.1.2. *Svako glatko preslikavanje* $c : I \to S$, $I \subset \mathbb{R}$ *nazivamo* ***krivuljom na plohi****. Pritom, za preslikavanje* $c : I \to S$ *kažemo da je glatko preslikavanje ako je* $\mathbf{x}^{-1} \circ c : I \to U$ *glatko, za neku kartu* $\mathbf{x} : U \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$.

Propozicija 1.1.3. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *krivulja takva da je* $\mathbf{x} : U \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$. *Tada postoje jedinstvene glake funkcije* $u = u(t), v = v(t) : I \to \mathbb{R}$ *takve da je*

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

Tangencijalni vektor

Definicija 1.1.4. *Neka je* S *regularna ploha,* $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ *karta i* $p \in \mathbf{x}(U)$. ***Tangencijalni vektor*** *karte* $\mathbf{x}$ *u točki* $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ *je vektor* $v_p \in \mathbb{R}^3_p$ *za koji postoji krivulja* $c : I \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ *takva da je*

$$c(0) = p, \ c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u p označavamo s T_pS.

Prva fundamenatalna forma

Definicija 1.1.5. ***Prva fundamentalna forma*** *plohe S u točki $p \in S$ je simetričan, bilinearan funkcional $I : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p = v \cdot w.$$

Pridruženu kvadratnu formu $I : T_pS \to \mathbb{R}$

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p$$

također nazivamo prvom fundamentalnom formom.

Zapišimo prvu fundamentalnu formu u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$. Neka je $v_p \in T_pS$. Tada postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$.
Neka je $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Krivulju c prikazujemo u karti

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

te vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Dakle,

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Definicija 1.1.6. *Definiramo funkcije E, F, $G : U \to \mathbb{R}$*

$$E = \mathbf{x}_u^2,\ F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v,\ G = \mathbf{x}_v^2. \tag{1.1}$$

Funkcije E, F, G nazivamo ***fundamentalnim veličinama prvog reda*** plohe S u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$.

Definicija prve fundamentalne forme se preko fundamentalnih veličina prvog reda može zapisati kraće kao:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{1.2}$$

Površina dijela plohe definirana je kao

$$P = \int_U \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Operator oblika plohe i Gaussovo preslikavanje

Neka je S regularna ploha i $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ karta koja pokriva područje $\mathbf{x}(U)$ plohe S. Pokazali smo da je tangencijalna ravnina T_pS plohe S u točki p ravnina razapeta vektorima $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$. Prema tome, jedinični vektor normale te ravnine je vektor

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Definicija 1.1.7. *Neka je S regularna ploha parametrizirana s $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$. Preslikavanje $n : U \to S^2$,*

$$n(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

*nazivamo **Gaussovim preslikavanjem**.*

Definicija 1.1.8. *Neka je $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, glatka funkcija. Neka su $p, v \in \mathbf{R}^3$. **Usmjerena derivacija** funkcije f u smjeru vektora v u točki p je realan broj*

$$D_v f(p) = (\frac{d}{dt} f(p + tv))(0).$$

Definicija 1.1.9. *Preslikavanje $S_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ definirano s*

$$S_p(v_p) = -Dv_p n(p)$$

*nazivamo **operatorom oblika plohe** S u točki p (ili Weingartenovim preslikavanjem).*

Gaussova i srednja zakrivljenost

Neka je S ploha i neka je $S_p : T_pS \to T_pS$ operator oblika plohe od S.

Definicija 1.1.10. ***Gaussova zakrivljenost** plohe S u točki p je funkcija $K : S \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$K(p) = \det S_p.$$

Definicija 1.1.11. ***Srednja zakrivljenost** plohe S u točki p je funkcija $H : S \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p.$$

Kako je S_p simetričan operator, postoji ortonormirana baza od T_pS u kojoj je njegov matrični prikaz dijagonalna matrica

$$S_p = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti $k_1(p)$, $k_2(p)$ operatora S_p nazivamo ***glavnim zakrivljenostima*** plohe S u točki p. Sada je

$$K(p) = k_1(p)k_2(p),\ H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

Definicija 1.1.12. *Za plohu S kažemo da je ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako je $H(p) = const.$ za svaku točku p plohe.*

Posebno, za plohu kažemo da je minimalna ako je $H(p) = 0$ za svaku točku p plohe.

Minimalne plohe su specijalan slučaj ploha konstantne srednje zakrivljenosti koje ćemo zasebno promatrati u ovom radu.

Primjeri

S obzirom da ćemo se u ovom radu fokusirati na klasu ploha koje imaju konstantnu srednju zakrivljenost, izračunajmo srednju zakrivljenost dviju jednostavnih ploha koje spadaju u tu klasu.

Primjer 1.1.1. Kružni cilindar
Kružni cilindar nastaje gibanjem pravca po kružnici ili obrnuto i spada u klasu translacijskih (kliznih) ploha koje nastaju gibanjem jedne kruvulje po drugoj.
Prije nego izračunamo srednju zakrivljenost kružnog cilindra, definirajmo točno translacijske plohe.

Definicija 1.1.13. *Neka su $c_1(u)$ i $c_2(v)$ dvije regularne krivulje. Jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju*

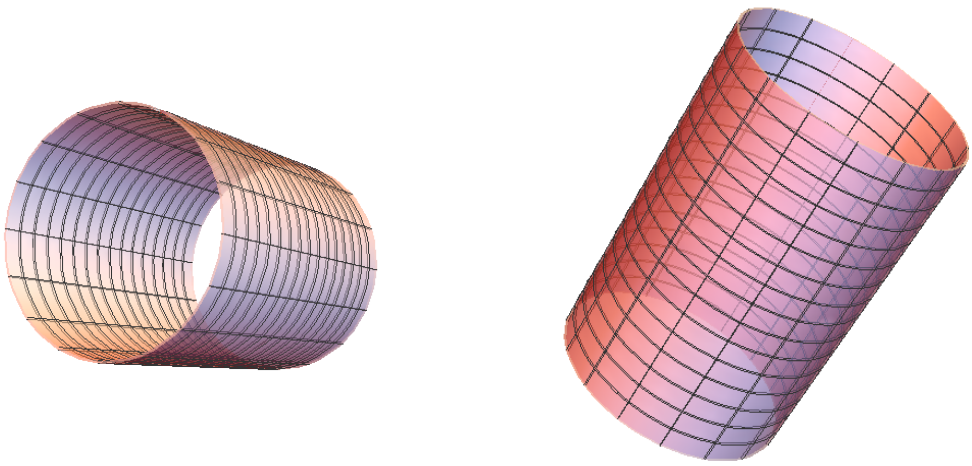
$$\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$$

*naziva se **translacijska ploha**. Krivulje $c_1(u)$ i $c_2(v)$ nazivamo generatrisama plohe.*

Da bi skup točaka definiran tom parametrizacijom bio regularna ploha, nužno je

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \dot{c}_1(u) \times \dot{c}_2(v) \neq 0,$$

odnosno, tangencijalni vektori krivulja generatrisa ne smiju biti kolinearni.



Slika 1.1: Kružni cilindar

Izračunajmo sada srednju zakrivljenost kružnog cilindra.

Neka je S kružni cilindar, $x^2 + y^2 = r^2$. Tada je

$$n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|},$$

gdje je $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. Dakle, $n(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$.
Uočimo dva tangencijalna vektora $e_1 = (-y, x, 0)$ i $e_2 = (0, 0, 1)$. Tada je

$$\begin{aligned} S_p(e_1) &= -D_{e_1} n = -\left(\nabla\left(\frac{x}{r}\right) \cdot e_1, \nabla\left(\frac{y}{r}\right) \cdot e_1, 0\right) = \\ &= -\left(\left(\frac{1}{r}, 0, 0\right) \cdot e_1, \left(0, \frac{1}{r}, 0\right) \cdot e_1, 0\right) = -\frac{1}{r}(-y, x, 0) = -\frac{1}{r} e_1, \end{aligned}$$

$$S_p(e_2) = (0, 0, 0) = 0 \cdot e_2.$$

Matrica od S_p u bazi e_1, e_2 od T_pS dana je s

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je srednja zakrivljenost H kružnog cilindra

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{r} = \frac{-1}{2r}.$$

Vidimo da kružni cilindar zaista spada u plohe konstantne srednje zakrivljenosti.

Primjer 1.1.2. Sfera
Kao što smo naveli u uvodu, sfera je trivijalan slučaj ploha konstantne srednje zakrivljenosti. Svima koji znaju kako sfera izgleda intuitivno je jasno da bi mogla pripadati klasi ploha konstantne srednje zakrivljenosti, ali to se da i vrlo lako matematički pokazati.
Dakle, neka je S sfera, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Jedinično normalno polje (prema van orijentirano) je

$$n(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z).$$

Neka je $v \in T_pS$ po volji odabran tangencijalni vektor. Tada je

$$S_p(v) = -\left(\nabla\left(\frac{x}{r}\right) \cdot v, \nabla\left(\frac{y}{r}\right) \cdot v, \nabla\left(\frac{z}{r}\right) \cdot v\right) = -\frac{1}{r}(v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{r}v.$$

Dakle, operator oblika sfere je tzv. skalarni operator $S_p = -\frac{1}{r}I$, gdje je I jedinični operator. Matrica operatora dana je s

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}.$$

Tada je srednja zakrivljenost H sfere jednaka

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{r} = -\frac{1}{r}.$$

Slika 1.2: Sfera

Druga fundamentalna forma

Definicija 1.1.14. ***Druga fundamentalna forma plohe*** *S u točki $p \in S$ je simetričan, bilinearan funkcional $II : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p.$$

Pridružena kvadratna forma $II : T_pS \to \mathbb{R}$

$$II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

također se naziva drugom fundamentalnom formom.

Drugu fundamentalnu formu možemo zapisati u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$. Neka je $v_p \in T_pS$. Tada postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$. Neka je $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Krivulju c prikazujemo u karti

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

te vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = {} & S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 + S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \\ & + \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

Definicija 1.1.15. *Definiramo funkcije L, M, $N : U \to \mathbb{R}$*

$$L = S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0),$$

$$M = S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)),$$

$$N = S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

Funkcije L, M, N nazivamo ***fundamentalnim veličinama drugog reda*** plohe S u karti $\mathbf{x}$. Definicija druge fundamentalne forme se preko fundamentalnih veličina drugog reda može zapisati kraće kao:

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \tag{1.3}$$

Propozicija 1.1.16. *Neka je $\mathbf{x} : U \to S$ karta. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} L &= n \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\ M &= n \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\ N &= n \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \end{aligned} \tag{1.4}$$

gdje je n standardno jedinično normalno polje od S, $n = \dfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||}$.

Izraz

$$W^2 := EG - F^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{vmatrix}$$

nazivamo ***Weingartenova funkcija***.
Iz uvjeta regularnosti slijedi da je W u svakoj točki plohe različito od nule, štoviše $W^2 > 0$.

Propozicija 1.1.17. *Neka je* $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ *karta za plohu* S*, a* E*,* F*,* G*,* L*,* M*,* N *fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu* $\mathbf{x}$*. Tada su operator plohe* S_p *te Gaussova i srednja zakrivljenost dani formulama*

$$S_p = \frac{1}{EG - F^2}\begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \det S_p$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_p. \tag{1.5}$$

Rotacijske plohe

Definicija 1.1.18. *Skup točaka koji nastaje rotacijom neke ravninske krivulje oko pravca u toj ravnini (koji ne siječe krivulju) nazivamo rotacijskom plohom. Krivulju koja rotira nazivamo generatrisom plohe, a pravac oko kojeg krivulja rotira osi rotacije.*

Odredimo sada implicitnu jednadžbu i parametrizaciju rotacijske plohe.
Neka je, npr., u yz-ravnini zadana krivulja $f(y, z) = c$, $c \in \mathbb{R}$, i neka ona rotira oko z-osi. Neka je $T = (x, y, z)$ bilo koja točka rotacijske plohe. Ona je dobivena rotacijom točke $\overline{T}$ krivulje f oko z-osi.
Odredimo koordinate točke $\overline{T}$. Označimo na z-osi točku S koja je središte kružnice koju opisuje točka $\overline{T}$ pri rotaciji. Tada je

$$|ST| = |S\overline{T}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Koordinate točke $\overline{T}$ su $(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$. U yz-sustavu točka $\overline{T}$ ima koordinate

$$\overline{T} = (\sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Kako je $\overline{T}$ točka rotirane krivulje, to je

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = c.$$

Prethodna jednadžba je **implicitna jednadžba** rotacijske plohe.

Parametriziramo li profilnu krivulju s $c(u) = (0, f(u), g(u))$, tada je **parametrizacija rotacijske plohe** dana s

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u)\sin v, f(u)\cos v, g(u)),\ u \in I \subset \mathbb{R},\ v \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Najpoznatiji primjer rotacijske plohe koja pripada klasi ploha konstantne srednje zakrivljenosti je katenoid. Katenoid nastaje rotacijom lančanice $y = a\mathrm{ch}x$ i njegova srednja zakrivljenost jednaka je nuli što ćemo pokazati u poglavlju u kojem se obrađuju minimalne plohe.

Pravčaste plohe

Uz translacijske i rotacijske plohe imamo još i pravčaste plohe.

Definicija 1.1.19. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}$ regularna krivulja, $e = e(u)$ jedinično polje duž c. Jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju*

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u),\ u \in I,\ v \in \mathbb{R},$$

naziva se pravčastom plohom.

Da bi skup točaka definiran tom parametrizacijom bio regularna ploha, nužno je

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0.$$

Najpoznatiji primjer pravčaste plohe koja pripada klasi ploha konstantne srednje zakrivljenosti je helikoid. Helikoid nastaje istovremenom rotacijom i translacijom pravca oko fiksnog pravca na kojeg je okomit, pri čemu je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije i njegova srednja zakrivljenost jednaka je nuli što ćemo pokazati u poglavlju u kojem se obrađuju minimalne plohe.

1.2 Temeljni pojmovi iz kompleksne analize

Teorem 1.2.1. ***(Cauchy-Riemannov teorem)***
Kompleksna funkcija $f = u + \mathrm{i}v : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna je u točki $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ako i samo ako su funkcije u i v, kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i zadovoljavaju ove Cauchy-Riemannove uvjete:

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Propozicija 1.2.2. *Ako je funkcija $f = u + \mathrm{i}v : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna, a realne funkcije u i v su diferencijabilne klase C^2, onda su u i v harmonijske funkcije, tj. obje zadovoljavaju Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu*

$$\Delta x := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Definicija 1.2.3. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je **holomorfna** ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju kažemo da je holomorfna u točki z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna.*

Definicija 1.2.4. *Za funkciju kažemo da je **meromorfna** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u Ω i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.*

Definicija 1.2.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka $z_0 \in \operatorname{Int} \overline{\Omega} = \Omega \setminus \partial\overline{\Omega}$ **singularitet funkcije** f ili da funkcija f ima u točki z_0 singularitet, ako u točki z_0 funkcija f nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.*

U matematici je ponekad korisno prebaciti se iz standardnih koordinata u i v u $\mathbb{R}^2$ preko kojih se prikazuju koordinate z i $\bar{z}$. Algebarske formule koje povezuju oba tipa koordinata su jednostavne:

$$\begin{aligned} z &= u + \mathrm{i}v \\ \bar{z} &= u - \mathrm{i}v \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{z+\overline{z}}{2} \\ v &= \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vrlo je zbunjujuće, u početku, raditi sa z i $\overline{z}$, pogotovo jer smo ih definirali pomoću u i v 1.6. Međutim, promatramo li z i $\overline{z}$ kao apstraktne koordinate za $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ možemo definirati u i v kao 1.7 pa nas takav pogled dovodi do jednostavnijih formula.

Uvedimo nove diferencijalne operatore:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v})$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v})$$

Točno te operatore uvodimo iz razloga što oni zadovoljavaju jednadžbe:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\overline{z}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{z}) = 1.$$

Poglavlje 2

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Definicija 2.0.1. *Plohu M u $\mathbb{R}^3$ nazivamo* ***plohom konstantne srednje zakrivljenosti*** *ili* ***CMC*** [1] *plohom ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$H = c.$$

Plohe za koje je $c = 0$, odnosno $H = 0$, nazivamo minimalnim plohama.
Plohe konstanstne srednje zakrivljenosti nazivamo i *soap bubbles* ili mjehurići od sapunice s obzirom da tanak tekući sloj[2] okružen zrakom koji nastaje prilikom spajanja dva mjehurića ima konstantnu srednju zakrivljenost.
Također, te se plohe mogu okarakterizirati i činjenicom da je njihovo Gaussovo preslikavanje harmonijsko.
U ovom poglavlju ćemo dati primjere poznatih minimalnih ploha i dat ćemo *Weierstrass–Enneperovu* reprezentaciju takvih ploha. Zatim ćemo dati *Kenmotsuovo* rješenje za rotacijske plohe koje imaju konstantnu srednju zakrivljenost. S obzirom da se matematičari još uvijek bave egzistencijom ploha konstantne srednje zakrivljenosti, mnogi su već došli do važnih rezultata koje ćemo navesti.

Teorem 2.0.2. ***(Dini-Beltrami)***
Svaka vitopera ($K \neq 0$) pravčasta Weingartenova ploha u euklidskom prostoru $\mathbb{E}^3$ je dio helikoidne pravčaste plohe, definirane kao orbita pravca pod djelovanjem 1-parametarske grupe helikoidnih gibanja. Posebno, Gaussova zakrivljenost će svugdje biti različita od nule ako je različita od nule u nekoj točki. Jedina minimalna pravčasta ploha je klasični uspravni helikoid.

[1] *engl. constant mean curvature*
[2] *engl. soap film*

Weingartenove plohe su one plohe za koje postoji funkcijska ovisnost između K i H. Dakle, te plohe obuhvaćaju plohe konstantne srednje zakrivljenosti i plohe za koje je $K = const.$.

Teorem 2.0.3. ***(Catalan)***
Bilo koja pravčasta minimalna ploha u $\mathbb{R}^3$ je dio ravnine ili helikoida.

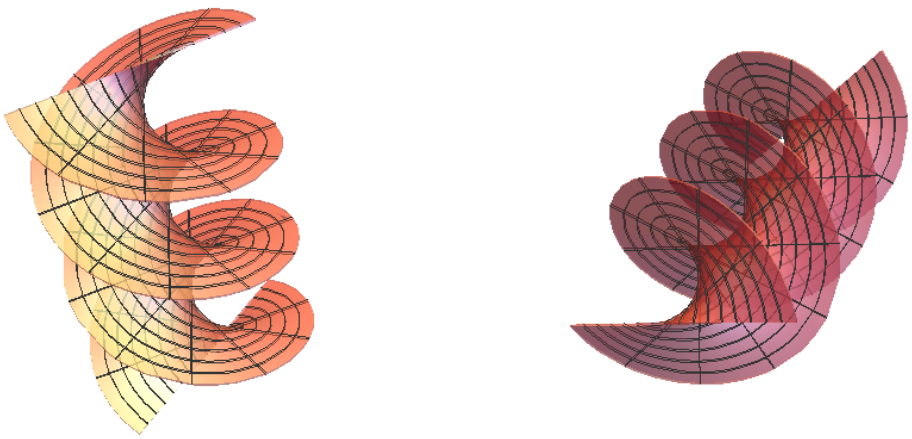
Teorem 2.0.4. *Minimalna rotacijska ploha M je sadržana u ravnini ili katenoidu.*

Teorem 2.0.5. ***(Aleksandrov)***
Ako je M kompaktna smještena ploha konstantne srednje zakrivljenosti, tada je M standardna sfera.

2.1 Primjeri minimalnih ploha

Primjer 2.1.1. Helikoid

Helikoid nastaje istovremenom rotacijom i translacijom pravca oko fiksnog pravca na kojeg je okomit, pri čemu je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije.
Catalan je 1842. godine dokazao da je helikoid, uz ravninu, jedina pravčasta minimalna ploha.



Slika 2.1: Helikoid

Izračunajmo srednju zakrivljenost helikoida pomoću prve i druge fundamentalne forme. Kako bi mogli izračunati srednju zakrivljenost, potrebna nam je parametrizacija helikoida koja glasi:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \ b \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\
\mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 0) \\
\mathbf{x}_{uv}(u, v) &= (-\sin v, \cos v, 0) \\
\mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (-u \cos v, -u \sin v, 0)
\end{aligned}$$

Iz 1.1 imamo:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2 \\
&= (\cos v, \sin v, 0)(\cos v, \sin v, 0) \\
&= \cos^2 v + \sin^2 v \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (\cos v, \sin v, 0)(-u \sin v, u \cos v, b) \\
&= -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v^2 \\
&= (-u \sin v, u \cos v, b)(-u \sin v, u \cos v, b) \\
&= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + b^2 \\
&= u^2 + b^2.
\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati

$$W^2 = EG - F^2 = u^2 + b^2 - 0 = u^2 + b^2.$$

Iz 1.4 možemo izračunati veličine druge fundamentalne forme

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(-b\sin^2 v - b\cos^2 v) \\
&= \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\begin{vmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(-ub\sin v\cos v + bu\cos v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

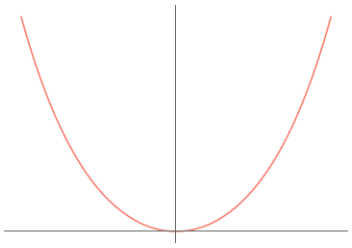
Sada je prema 1.5 srednja zakrivljenost helikoida jednaka

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}} + (u^2+b^2)\cdot 0}{2(1\cdot(u^2+b^2) - 0^2)} = 0$$

čime smo pokazali da je helikoid minimalna ploha.

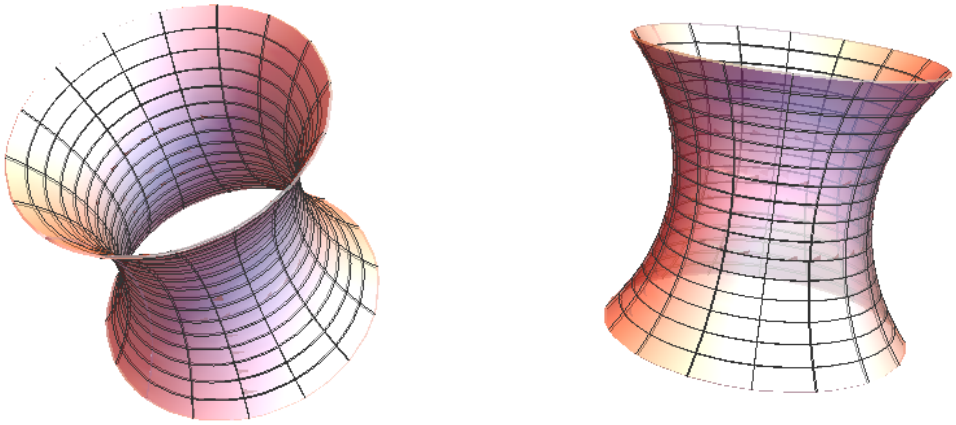
Primjer 2.1.2. Katenoid

Katenoid nastaje rotacijom lančanice čija je parametrizacija $\alpha(t) = (t, a\,\mathrm{ch}(\frac{t}{a}))$. Sve do 1669. godine kada je Jungius dokazao suprotno, smatralo se da je lančanica zapravo parabola.



Slika 2.2: Lančanica

Euler je 1774. godine pokazao da rotacijom lančanice nastaje katenoid.



Slika 2.3: Katenoid

Izračunajmo srednju zakrivljenost katenoida pomoću prve i druge fundamentalne forme. Kako bi mogli izračunati srednju zakrivljenost, potrebna nam je parametrizacija katenoida koja glasi:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(c\cos u\,\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right), c\sin u\,\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right), v\right).$$

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \left(-c\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, c\cos u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, 0\right)$$
$$\mathbf{x}_v(u,v) = \left(\cos u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, \sin u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, 1\right)$$

$$\mathbf{x}_{uu}(u,v) = \left(-c\cos u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, -c\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, 0\right)$$
$$\mathbf{x}_{uv}(u,v) = \left(-\sin u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, \cos u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, 0\right)$$
$$\mathbf{x}_{vv}(u,v) = \left(\frac{1}{c}\cos u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, \frac{1}{c}\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, 0\right)$$

Iz 1.1 imamo:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2 \\
&= \left(-c\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, c\cos u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, 0\right)^2 \\
&= c^2\sin^2 u \operatorname{ch}^2\frac{v}{c} + c^2\cos^2 u \operatorname{ch}^2\frac{v}{c} \\
&= c^2 \operatorname{ch}^2\frac{v}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= \left(-c\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, c\cos u \operatorname{ch}\frac{v}{c}, 0\right)\left(\cos u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, \sin u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, 1\right) \\
&= -c\sin u\cos u \operatorname{sh}\frac{v}{c}\operatorname{ch}\frac{v}{c} + c\cos u\sin u \operatorname{ch}\frac{v}{c}\operatorname{sh}\frac{v}{c} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v^2 \\
&= \left(\cos u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, \sin u \operatorname{sh}\frac{v}{c}, 1\right)^2 \\
&= \cos^2 u \operatorname{sh}^2\frac{v}{c} + \sin^2 u \operatorname{sh}^2\frac{v}{c} + 1 \\
&= \operatorname{sh}^2 u\frac{v}{c} + 1 \\
&= \operatorname{ch}^2\frac{v}{c}
\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati:

$$W^2 = EG - F^2 = c^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} - 0^2 = c^2 \operatorname{ch}^4 \frac{v}{c}$$

pa slijedi da je $W = c \operatorname{ch}^2 \left(\frac{v}{c}\right)$.

Iz 1.4 možemo izračunati veličine druge fundamentalne forme

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} \begin{vmatrix} -c \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & -c \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & 0 \\ -c \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & c \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & 0 \\ \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & \sin u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} (-c^2 \cos^2 u \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} - c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}) \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} (-c^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}) \\
&= -c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} \begin{vmatrix} -\sin u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & 0 \\ -c \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & c \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & 0 \\ \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & \sin u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} (-c \sin u \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} \operatorname{ch} \frac{v}{c} + c \sin u \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} \operatorname{ch} \frac{v}{c}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} \begin{vmatrix} \frac{1}{c} \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & \frac{1}{c} \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & 0 \\ -c \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & c \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{c} & 0 \\ \cos u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & \sin u \operatorname{sh} \frac{v}{c} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}} (\cos^2 u \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} + \sin^2 u \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c}) \\
&= \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

Sada je prema 1.5 srednja zakrivljenost katenoida jednaka

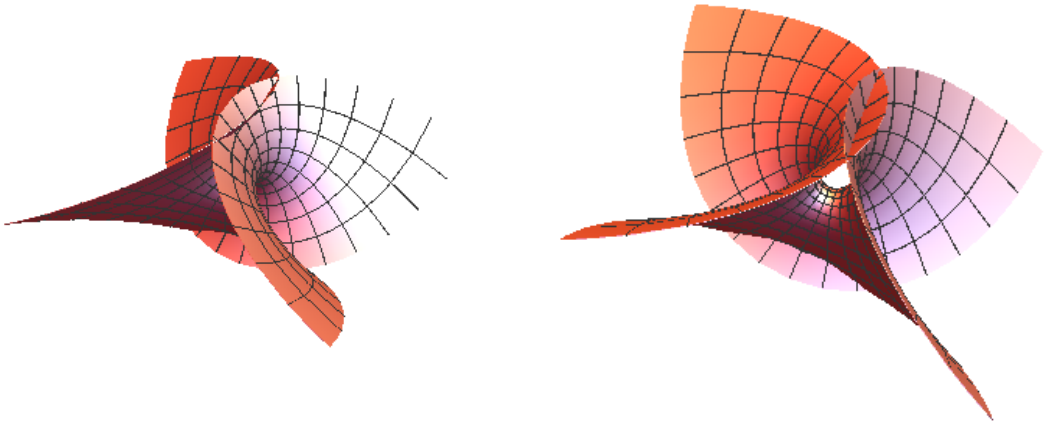
$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{c^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{c} - 2 \cdot 0 \cdot 0 + \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} \cdot (-c)}{2(c^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{v}{c} - 0^2)} = 0$$

čime smo pokazali da je katenoid minimalna ploha.

Pokazat ćemo primjere još nekih poznatih minimalnih ploha te dati njihove parametrizacije.

Primjer 2.1.3. Enneperova minimalna ploha

Enneperova minimalna ploha je dobila ime po njemačkom matematičaru Alfredu Enneperu koji ju je pronašao 1864. godine.



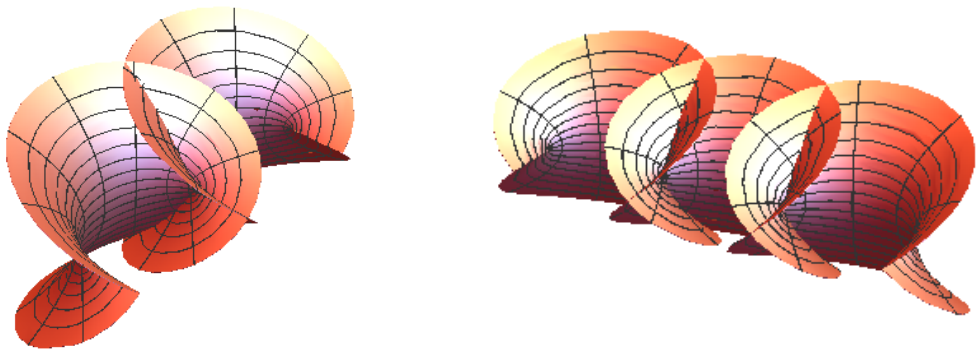
Slika 2.4: Enneperova minimalna ploha

Njena parametrizacija je

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2).$$

Primjer 2.1.4. Catalanova minimalna ploha

Catalanova minimalna ploha je dobila ime po belgijskom matematičaru Eugènu Charlesu Catalanu koji ju je proučavao 1885. godine.



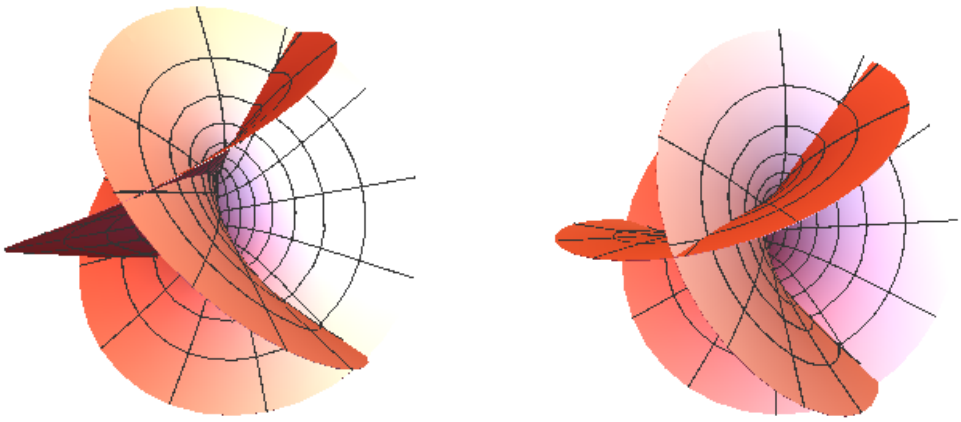
Slika 2.5: Catalanova minimalna ploha

Njena parametrizacija je

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - \sin u \operatorname{ch} v, 1 - \cos u \operatorname{ch} v, -4 \sin \frac{u}{2} \operatorname{sh} \frac{u}{2}).$$

Primjer 2.1.5. Hennebergova minimalna ploha

Hennebergova minimalna ploha je dobila ime po njemačkom matematičaru Ernstu Lebrechtu Hennebergu.



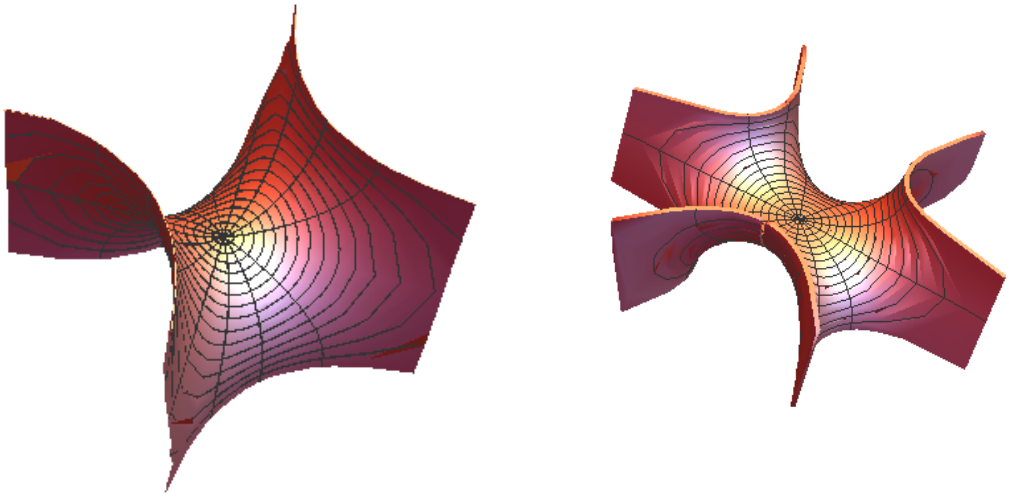
Slika 2.6: Hennebergova minimalna ploha

Njena parametrizacija je

$$\mathbf{x}(u,v) = (2\,\mathrm{sh}\,u\cos v - \frac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,3u\cos 3v, 2\,\mathrm{sh}\,u\sin v + \frac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,3u\sin 3v, 2\,\mathrm{ch}\,2u\cos 2v).$$

Primjer 2.1.6. Scherkova minimalna ploha

Scherkova ploha je dobila ime po njemačkom matematičaru Heinrichu Ferdinandu Scherku koji ju je otkrio 1834. godine. On je tada opisao dvije minimalne plohe što je zapravo bilo veliko otkriće s obzirom da od Meusniera koji je 1776. otkrio katenoid i helikoid nije bilo nikakvih novih otkrića u tom području.



Slika 2.7: Scherkova minimalna ploha

Parametrizacija Scherkove prve minimalne plohe je

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{a} \ln\left(\frac{\cos au}{\cos av}\right)\right).$$

2.2 Weierstrass-Enneperova reprezentacija

Alfred Enneper i Karl Weierstrass su proučavali minimalne plohe još 1863. godine. Weierstrass-Enneperova reprezentacija je odlična poveznica nekoliko grana matematike. Pruža način proučavanja ploha koristeći i diferencijalnu geometriju i kompleksnu analizu. Weierstrass-Enneperova reprezentacija minimalnih ploha kaže da se bilo koja minimalna ploha može prikazati pomoću kompleksne holomorfne funkcije.

Kako bi mogli proučavati tu reprezentaciju, prvo moramo uvesti izotermnu parametrizaciju.

Izotermna parametrizacija

Definicija 2.2.1. *Ako je* $\mathbf{x}(u, v) : \Omega \to M$ *karta takva da vrijedi*

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G \text{ i } F = 0,$$

tada se $\mathbf{x}$ *naziva* ***izotermna parametrizacija****.*

Ako je parametrizacija izotermna tada je srednja zakrivljenost jednaka

$$H = \frac{EN + EL}{2E^2} = \frac{N + L}{2E}$$

Teorem 2.2.2. *Izotermne koordinate postoje na svakoj minimalnoj plohi* $M \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ako minimalnu plohu parametriziramo izotermnom parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v)$, tada postoji veza između Laplaceovog operatora i srednje zakrivljenosti.

Teorem 2.2.3. *Ako je parametrizacija* $\mathbf{x}$ *izotermna, tada je*

$$\Delta x = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)n. \tag{2.1}$$

Korolar 2.2.4. *Ploha* M *sa izotermnom parametrizacijom*

$$\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$$

je minimalna ako i samo ako su x^1, x^2 *i* x^3 *harmonijske funkcije.*

Dokaz. Ako je M minimalna ploha, tada je $H = 0$ i prema teoremu 2.1 vrijedi

$$\Delta x = (2EH)n = 0$$

pa su x^1, x^2 i x^3 harmonijske funkcije.

Ako su x^1, x^2 i x^3 harmonijske funkcije, tada je

$$\Delta x = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$$

pa je prema teoremu 2.1

$$(2EH)n = 0.$$

Kako je n normalni jedinični vektor i $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \neq 0$, tada mora vrijediti da je $H = 0$ pa je M minimalna ploha. □

Prethodni korolar nam daje vezu između kompleksne analize i diferencijalne geometrije minimalnih ploha što će nam uvelike pomoći kod konstrukcije minimalnih ploha. Također, zanima nas ako se minimalna ploha može reprezentirati izotermnom kartom, može li se reprezentirati i holomorfnom funkcijom?

Weierstrass-Enneperova reprezentacija

Sa svim poznatim informacijama o minimalnim plohama, izotermnim kartama, harmonijskim funkcijama te holomorfnim i meromorfnim funkcijama može se izvesti Weierstrass-Enneperova reprezentacija minimalnih ploha.

Neka je M minimalna ploha parametrizirana izotermnom parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v)$. Neka $z = u + iv$ označava odgovarajuće kompleksne koordinate i sjetimo se:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}).$$

Kako je

$$u = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$v = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

možemo pisati

$$\mathbf{x}(z, \overline{z}) = (x^1(z, \overline{z}), x^2(z, \overline{z}), x^3(z, \overline{z})).$$

Na $x^j(z, \overline{z})$ gledamo kao na funkciju s kompleksnim varijablama koja poprima realne vrijednosti.
Prema definiciji $\dfrac{\partial}{\partial z}$ derivacija j-te komponente funkcije x^j glasi:

$$\frac{\partial x^j}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u^j - i x_v^j).$$

Definiramo

$$\phi = \frac{\partial x}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2, x_z^3),$$

$$\phi^2 = (x_z^1)^2 + (x_z^2)^2 + (x_z^3)^2,$$

$$|\phi|^2 = |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2,$$

gdje je $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$ modul od z.

Uočimo da je

$$\begin{aligned}(\phi^j)^2 &= (x_z^j)^2 \\ &= (\frac{1}{2}(x_u^j - i x_v^j)^2 \\ &= \frac{1}{4}((x_u^j)^2 - (x_v^j)^2 - 2i x_u^j x_v^j),\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\phi^2 &= \frac{1}{4}(\sum_{j=1}^{3}(x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^{3}(x_v^j)^2 - 2i\sum_{j=1}^{3} x_u^j x_v^j) \\ &= \frac{1}{4}(|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 - 2i\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\ &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF).\end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{x}(u, v)$ izotermna,

$$\phi^2 = \frac{1}{4}(E - E) = 0.$$

Usporedimo li realne i imaginarne dijelove vidimo da vrijedi i obrat. Ako je $\phi^2 = 0$, tada parametrizacija $\mathbf{x}(u, v)$ mora biti izotermna.

Pokazat ćemo i da je $|\phi|^2 = \dfrac{E}{2}$:

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{3}(x_u^j)^2 + \sum_{j=1}^{3}(x_v^j)^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}(|\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_u|^2) \\
&= \frac{1}{4}(E + G) \\
&= \frac{E}{2}.
\end{aligned}$$

Lema 2.2.5. $\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right) = \dfrac{1}{4}\Delta\mathbf{x}.$

Kako je $\mathbf{x}$ izotermna i minimalna ploha tada je

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}\Delta\mathbf{x} = 0$$

pa je zato svaka od funkcija $\phi^j = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}$ holomorfna.
Također, ako su ϕ^j holomorfne, tada je svaka od funkcija x^j harmonijska i stoga je M minimalna ploha.
Ove činjenice i prethodno navedenu lemu koristimo u dokazu idućeg teorema koji povezuje minimalne plohe i holomorfne funkcije.

Teorem 2.2.6. *Pretpostavimo da je M ploha s parametrizacijom $\mathbf{x}$. Neka je $\phi = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}$ i pretpostavimo da je $\phi^2 = 0$. Tada je M minimalna ploha ako i samo ako je svaka ϕ^j holomorfna funkcija.*

Ako su ϕ^j holomorfne tada kažemo da je i ϕ holomorfna. Sada se svaka minimalna ploha može opisati holomorfnom funkcijom (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) uz uvjet da je $\phi^2 = 0$.

Zanima nas, ako imamo zadanu funkciju ϕ, kako se može konstruirati izotermna parametrizacija $\mathbf{x}$ plohe M? odgovor na to pitanje daje idući korolar.

Korolar 2.2.7. $x^j(z,\overline{z}) = c_j + 2\mathrm{Re}\int \phi^j dz$.

Dokaz. Znamo da je $z = u + iv$ pa slijedi da je $dz = du + idv$.

$$\phi^j dz = \frac{1}{2}(x_u^j - ix_v^j)(du + idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du + x_v^j dv) + i(x_u^j du - x_v^j dv))$$

$$\overline{\phi}^j d\overline{z} = \frac{1}{2}(x_u^j + ix_v^j)(du - idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du + x_v^j dv) - i(x_u^j du - x_v^j dv)).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} dx^j &= \frac{\partial x^j}{\partial z}dz + \frac{\partial x^j}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \\ &= \phi^j dz + \overline{\phi}^j d\overline{z} \\ &= \frac{1}{2}(x_u^j du + x_v^j dv) + \frac{1}{2}(x_u^j du + x_v^j dv) \\ &= x_u^j du + x_v^j dv \\ &= 2\mathrm{Re}(\phi^j dz). \end{aligned}$$

Nakon integriranja dobijemo

$$x^j = x^j(z,\overline{z}) = c_j + 2\mathrm{Re}\int \phi^j dz.$$

□

Definicija 2.2.8. *Neka su f holomorfna funkcija i g meromorfna funkcija takve da je fg^2 holomorfna funkcija. Neka su:*

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2) \\ \phi^3 &= fg. \end{aligned}$$

Tada su ϕ^1, ϕ^2 i ϕ^3 holomorfne i vrijedi

$$\phi^2 = \frac{1}{4}f^2(1-g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1+g^2)^2 + f^2g^2 = 0.$$

Teorem 2.2.9. ***(Weierstrass-Enneperova reprezentacija)*** *Ako je f holomorfna na domeni D, g meromorfna na D i fg^2 holomorfna na D, onda je minimalna ploha definirana parametrizacijom*

$$\mathbf{x}(z,\overline{z}) = (x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z}))$$

gdje je

$$x^1(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int f(1-g^2)dz,$$
$$x^2(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int if(1+g^2)dz,$$
$$x^3(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int 2fgdz.$$

Postoji još jedan način na koji možemo zapisati Weierstrass-Enneperovu reprezentaciju koristeći samo jednu holomorfnu funkciju kao kompoziciju funkcija. Pretpostavimo da je funkcija g holomorfna i ima inverz g^{-1} koja je također holomorfna funkcija. Tada na g gledamo kao na novu kompleksnu varijablu $\tau = g$ gdje je $d\tau = g'dz$. Definiramo $F(\tau) = \frac{f}{g'}$, pa vrijedi $F(\tau)d\tau = fdz$. Dakle, zamijenimo li g s τ i fdz s $F(\tau)d\tau$ dobivamo idući teorem.

Teorem 2.2.10. *Za bilo koju holomorfnu funkciju $F(\tau)$, minimalna ploha je definirana parametrizacijom*

$$\mathbf{x}(z,\overline{z}) = (x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})),$$

gdje je

$$x^1(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int (1-\tau^2)F(\tau)dz,$$
$$x^2(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int i(1+\tau^2)F(\tau)dz,$$
$$x^3(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int 2\tau F(\tau)dz.$$

Primjer 2.2.1. Helikoid
Neka je $F(\tau) = \dfrac{i}{2\tau^2}$ gdje je $\tau = e^z$. Minimalna ploha dobivena Weierstrass-Enneperovom reprezentacijom će biti helikoid.
Raspišimo:

$$\begin{aligned}
x^1 &= \mathrm{Re}\int (1-\tau^2)F(\tau)d\tau = \mathrm{Re}\int (1-\tau^2)\frac{i}{2\tau^2}d\tau = \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2\tau} - \frac{i}{2}\tau\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\tau\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2}\left(e^{-z}+e^{z}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2}\left(e^{-(u+iv)}+e^{u+iv}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2}(e^{-u}(\cos(-v)+i\sin(-v)) + e^{u}(\cos(v)+i\sin(v)))\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2}e^{-u}\cos(-v) + \frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) - \frac{i}{2}e^{u}\cos(v) + \frac{1}{2}e^{u}\sin(v)\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) + \frac{1}{2}e^{u}\sin(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \mathrm{Re}\int i(1+\tau^2)F(\tau)d\tau = \mathrm{Re}\int i(1+\tau^2)\frac{i}{2\tau^2}d\tau\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2}\tau\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-z}-e^{z})\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-(u+iv)}+e^{u+iv})\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-u}(\cos(-v)+i\sin(-v)) + e^{u}(\cos(v)+i\sin(v)))\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-u}\cos(-v) + \frac{i}{2}e^{-u}\sin(-v) - \frac{1}{2}e^{u}\cos(v) + \frac{i}{2}e^{u}\sin(v)\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) - \frac{1}{2}e^{u}\sin(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= \mathrm{Re}\int 2\tau F(\tau)d\tau = \mathrm{Re}\int 2\tau\frac{i}{2\tau^2}d\tau = \mathrm{Re}\int \frac{i}{\tau}d\tau\\
&= \mathrm{Re}(i\ln|\tau|) = \mathrm{Re}(i\ln|e^z|)\\
&= \mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(i(u+iv)) = \mathrm{Re}(iu-v)\\
&= -v.
\end{aligned}$$

Dakle, izotermna parametrizacija helikoida glasi

$$\mathbf{x}(u,v) = (\frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) + \frac{1}{2}e^{u}\sin(v), \frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) - \frac{1}{2}e^{u}\sin(v), -v).$$

Weierstrass-Enneperova reprezentacija nekih poznatih minimalnih ploha:

	$f(z)$	$g(z)$
Enneperova minimalna ploha	1	$\sqrt{z}$
Hennebergova minimalna ploha	$2(1-z^{-4})$	z
Scherkova druga minimalna ploha	$\dfrac{4}{1-z^4}$	iz

Deformacija katenoida u helikoid

Deformacija katenoida u helikoid je klasičan rezultat u diferencijalnoj geometriji i svakako ga se isplati spomenuti u ovom poglavlju gdje govorimo o minimalnim plohama. Prije nego što objasnimo tu deformaciju, trebamo sljedeću definiciju [11].

Definicija 2.2.11. *Minimalna ploha opisana Weierstrass-Enneperovom reprezentacijom* (f, g) *ili* $F(\tau)$ *ima pridruženu familiju minimalnih ploha danu redom s* $(e^{it}f, g)$ *ili* $e^{it}F(\tau)$.

Katenoid ima Weierstrass-Enneperovu reprezentaciju

$$(f, g) = \left(-\frac{e^{-z}}{2}, -e^{z}\right).$$

Prema tome, pridružena familija ploha katenoida ima Weierstrass-Enneperovu reprezentaciju

$$(f, g) = \left(-\frac{e^{-z}}{2}e^{it}, -e^{z}\right),$$

koja odgovara idućoj standardnoj parametrizaciji.

$$\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)),$$

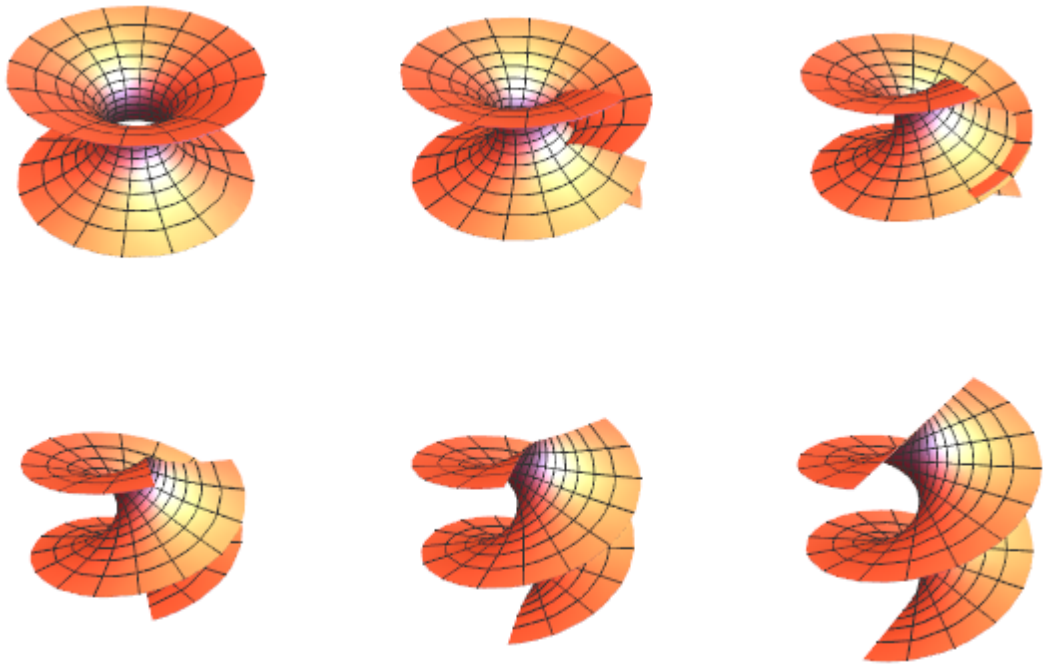
za bilo koji fiksan t, gdje su

$$x^1(u, v) = \cos(t)\cos(v)\operatorname{ch}(u) + \sin(t)\sin(v)\operatorname{sh}(u)$$

$$x^2(u, v) = \cos(t)\operatorname{ch}(u)\sin(v) - \cos(v)\sin(t)\operatorname{sh}(u)$$

$$x^3(u, v) = u\cos(t) + v\sin(t).$$

To je vrlo lijep rezultat u teoriji minimalnih ploha. Katenoid se može neprekidno deformirati u helikoid transformacijom danom gore, gdje $t = 0$ predstavlja katenoid, a $t = \frac{\pi}{2}$ predstavlja helikoid. Treba napomenuti da gornja parametrizacija predstavlja minimalnu plohu za bilo koji t. Odnosno, bilo koja ploha u pridruženoj familiji minimalnih ploha je također minimalna.



Slika 2.8: Deformacija iz katenoida u helikoid

2.3 Rotacijske plohe konstantne srednje zakrivljenosti

U ovom ćemo poglavlju dati Kenmotsuovo moderno rješenje problema pronalaska rotacijskih ploha konstantne srednje zakrivljenosti [4] te opisati rulete konika koje će generirati Delaunayeve plohe.

Kenmotsuovo rješenje

Neka je $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dana s $\varphi(s) = (x(s), y(s))$ parametrizacija neke regularne ravninske C^2 krivulje. Pretpostavimo da je φ parametrizacija duljine luka i da je 0 sadržana u intervalu I. Neka je M rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3$ definirana s

$$(s, \theta) \mapsto (x(s), y(s)\cos\theta, y(s)\sin\theta), \;\; s \in I, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tada su prva i druga fundamentalna forma dane s

$$\begin{aligned} I_p &= ds^2 + y^2 d\theta^2, \\ II_p &= (x''y' - x'y'')ds^2 + x'y d\theta^2. \end{aligned}$$

Pretpostavimo li da je $y(s) > 0$ za $s \in I$, po definiciji za H, imamo

$$2Hy - x' - x''yy' + x'yy'' = 0, \; s \in I.$$

Pomnožimo li redom s x' i y' te pojednostavimo koristeći činjenicu da je

$$(x')^2 + (y')^2 = 1$$

i

$$x'x'' + y'y'' = 0$$

za $s \in I$, dobivamo

$$2Hyx' + (yy')' - 1 = 0$$

i

$$2Hyy' - (yx')' = 0.$$

Stavimo li da je $Z(s) = y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)$ te kombiniramo li prethodne jednadžbe dobit ćemo iduću kompleksnu linearnu jednadžbu prvog reda:

$$Z' - 2iHZ - 1 = 0, \;\; s \in I. \tag{2.2}$$

Gledamo li na H kao konstantu razmotrit ćemo dva slučaja:

1) Ako je $H = 0$, tada je rješenje dano s

$$Z(s) = s + C = s + c_1 + ic_2$$

za neki $C = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$. To nam daje

$$\begin{aligned} y(s) &= |Z(s)| = \sqrt{(s + c_1)^2 + c_2^2} \\ x'(s) &= \frac{\mathrm{Im}Z}{y} = \frac{c_2}{\sqrt{(s + c_1)^2 + c_2^2}}. \end{aligned}$$

Integriramo li x, dobit ćemo

$$x = c_2 \mathrm{arcsinh}\left(\frac{s + c_1}{c_2}\right)$$

odnosno,

$$s + c_1 = \sinh\left(\frac{f}{c_2}\right) \cdot c_2.$$

Uvrstimo li taj izraz u jednadžbu za y, dobit ćemo

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(s + c_1)^2 + c_2^2} \\ &= \sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{c_2}\right) \cdot c_2^2 + c_2^2} \\ &= c_2 \cosh\left(\frac{x}{c_2}\right). \end{aligned}$$

Jasno je da je to parametrizacija lančanice.

2) Ako je $H \neq 0$, tada je

$$Z(s) = \left(\frac{1}{2iH}(1 - e^{-2iHs}) + C\right)e^{2iHs}$$

$$= \frac{1}{2iH}((1 + 2iHC) - e^{-2iHs}e^{2iHs}$$

$$= \frac{Be^{i(2Hs+\theta)-1}}{2iH}$$

gdje je $Be^{i\theta} = 1 + 2iHC$ za neki $B, \theta \in \mathbb{R}$ i $C \in \mathbb{C}$ je proizvoljna konstanta. Koristeći činjenicu da je $y(s) > 0$ imamo da je translacijom parametra duljine luka i promatrajući kada je $H > 0$

$$y(s) = |Z| = \frac{1}{2H}\sqrt{1 + B + 2B\sin 2Hs}$$

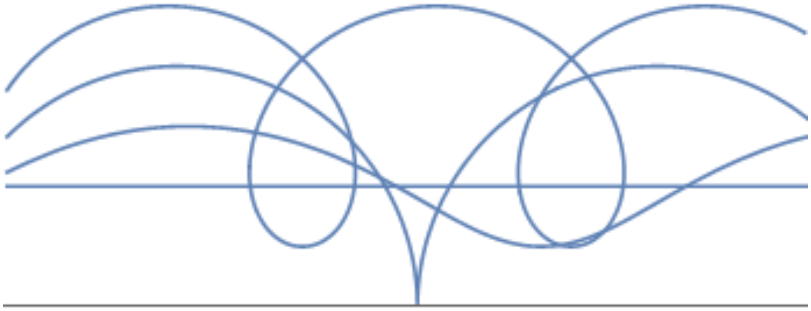
$$x'(u) = \frac{\mathrm{Im}Z}{y} = \frac{1 + B\sin 2Hs}{\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin 2Hs}}.$$

Tako je rješenje jednadžbe 2.2 jednoparametarska familija rotacijskih ploha konstantne srednje zakrivljenosti H dana s [4]

$$\varphi(s; H, B) = \left(\int_0^s \frac{1 + B\sin 2Ht}{\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin 2Ht}}dt, \frac{1}{2H}\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin 2Hs}\right) \tag{2.3}$$

za bilo koji $B \in \mathbb{R}$ i $H > 0$.

Promatrajući φ za različite B vidimo da $\varphi(s; H, 0)$ generira krivulju za uspravni kružni cilindar i $\varphi(s; H, 1)$ generira krivulju za niz polukružnica centriranih na osi x. Za $0 < B < 1$ funkcija $x(s)$ raste monotono dok u slučaju kada je $B > 1$ ne.



Slika 2.9: Rješenje za $H = 0.5$ i $B = 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5$

Delaunay-eve plohe

1841. Charles Eugéne Delaunay je uveo način konstruiranja simetričnih ploha konstantne srednje zakrivljenosti u $\mathbb{R}^3$ dokazavši da je rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3$ ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako i samo ako je njena profilna krivulja ruleta konike. Rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3$ je generirana rotacijom dane profilne krivulje oko pravca u ravnini u je ta dana krivulja sadržana [1].

Promotrimo rotacijsku plohu danu parametrizacijom

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v).$$

Deriviramo li tu parametrizaciju po komponentama u i v dobit ćemo:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v),$$
$$\mathbf{x}_v(u, v) = (0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v).$$

Koristeći definicije 1.2 i 1.3 te izraze za odgovarajuće veličine 1.1 i 1.4 prve i druge fundamentalne forme dobivamo:

$$E = 1 + f'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = f(u)^2,$$

$$L = \frac{-f''}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

pri čemu je jedinični vektor normale plohe

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}(f', -\cos v, -\sin v).$$

Sada, uz pomoć gornjih veličina možemo izračunati srednju zakrivljenost H koristeći relaciju

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - f^2)}.$$

Dobivamo da je

$$H = \frac{-ff'' + 1 + f'^2}{2f\sqrt{(1 + f'^2)^3}}.$$

Pretpostavimo da je $H = \frac{c}{2}$ konstanta. Tada imamo diferencijalnu jednadžbu

$$1 + f'^2 - ff'' = cf(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Uočimo da za minimalnu rotacijsku plohu dobivamo

$$1 + f'^2 - ff'' = 0.$$

Pretpostavimo da je $c = \pm\frac{1}{a}$, gdje je $a > 0$. Tada dobivamo

$$f^2 \pm \frac{2af}{\sqrt{1 + f^2}} = \pm b^2,$$

pri čemu je b konstanta.
Ovime dolazimo do iskaza jednog dobro poznatog teorema koji kaže:

Teorem 2.3.1. *Rotacijska ploha M parametrizirana s*

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$$

ima konstantnu srednju zakrivljenost ako i samo ako funkcija $f(u)$ zadovoljava

$$f^2 \pm \frac{2af}{\sqrt{1 + f^2}} = \pm b^2,$$

gdje su a i b pozitivne konstante.

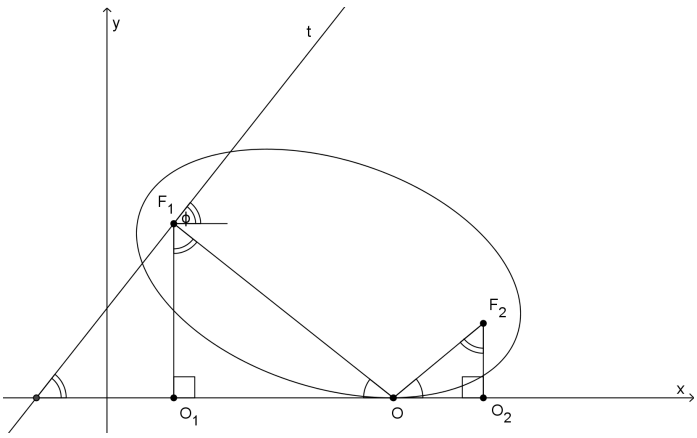
Delaunay je otkrio da gornja diferencijalna jednadžba nastaje geometrijski. Odnosno, da postoji geometrijska konstrukcija čiji je rezultat ta diferencijalna jednadžba i da iz nje proizlaze sve rotacijske plohe konstantne srednje zakrivljenosti.
Rekli smo da je dokazao da je rotacijska ploha u $\mathbb{R}^{\#}$ ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako i samo ako je njena profilna krivulja ruleta konike.

Ruletama nazivamo krivulje koje nastaju kotrljanjem neke druge krivulje po pravcu ili nekoj drugoj krivulji, ako promatramo neku fiksnu točku i pratimo njezin trag.

Najpoznatiji primjeri rotacijskih ploha ruleta konika su katenoid, unduloid i nodoid. Pokazat ćemo da je ruleta parabole profilna krivulja katenoida, a ruleta elipse profilna krivulja unduloida te spomenuti da je ruleta hiperbole profilna krivulja nodoida [1, 5, 4].

Primjer 2.3.1. Ruleta elipse

Neka je zadana elipsa i neka je $a > b$, gdje su a i b redom duljine velike i male poluosi. Zamislimo da se elipsa giba, odnosno "kotrlja", po x-osi. Neka je lokus fokusa F_1 pri gibanju elipse po pravcu krivulja l i neka je O dodirna točka pravca i elipse. Presjek okomica kroz fokuse F_1 i F_2 na x-os s x-osi nazovimo, redom, O_1 i O_2. Neka su koordinate fokusa F_1 i F_2 redom (x, y) i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ te neka je ϕ kut između tangete na krivulju l kroz fokus F_1.



Slika 2.10

Promotrimo li već poznata svojstva elipse, znamo da je zbroj udaljenosti od fokusa do dane točke na elipsi konstantan i iznosi $2a$, odnosno

$$|F_1O| + |F_2O| = 2a. \tag{2.4}$$

Također, iz nožišne jednadžbe elipse slijedi da je produkt udaljenosti fokusa elipse do neke njene tangente konstantan i jednak kvadratu duljine male poluosi, odnosno

$$|F_1O_1| \cdot |F_2O_2| = y \cdot \tilde{y} = b^2. \tag{2.5}$$

Elipsa isto tako ima jedno jako lijepo svojstvo refleksije koje kaže da se bilo koja zraka koja prolazi kroz jedan fokus reflektira od elipse u drugi fokus (zrcalno svojstvo elipse). Kako su kutovi incidencije i refleksije jednaki vrijedi da je $\angle F_1OO_1 \cong \angle F_2OO_2$. Trokuti F_1OO_1 i F_2OO_2 su slični prema poučku KK i vrijedi $\angle O_1F_1O \cong \angle O_2F_2O$.
Uočimo da je mjera kuta ϕ, odnosno mjera kuta između tangete na krivulju l kroz fokus F_1, jednaka mjeri $\angle O_1F_1O$.

Iz svih promatranih svojstva slijedi da je

$$y + \frac{b^2}{y} = 2a\cos\phi. \tag{2.6}$$

Pretpostavimo da je krivulja l parametrizirana duljinom luka s. Tada je

$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi. \tag{2.7}$$

Iz definicije duljine luka s slijedi

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{2.8}$$

Uvrstimo li 2.7 i 2.8 u 2.6 dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu

$$y^2 - \frac{2ay}{\sqrt{1 + y'^2}} + b^2 = 0, \tag{2.9}$$

koja odgovara unduloidnoj (valnoj) krivulji, odnosno ruleti elipse.
Uočimo da je ova jednadžba poseban slučaj diferencijalne jednadžbe dane u 2.3.1 što pokazuje da unduloidna (valna) krivulja[3], kao ruleta elipse, generira plohu konstantne srednje zakrivljenosti pri rotaciji oko fiksnog pravca. Ta ploha se zove unduloid.

[3]poznata kao i eliptična lančanica

Promatramo li slučaj kada je $a \leq b$ dobivamo iduće slučajeve (redom kada je kut tupi i šiljast)

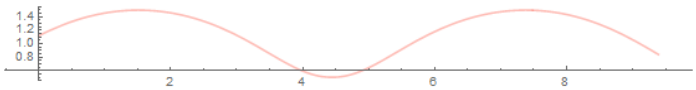
$$y^2 \pm \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} + b^2 = 0.$$

Za $H = \dfrac{1}{2a}$ i $B = \pm\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4H^2}}$ parametarska jednadžba unduloidne krivulje glasi

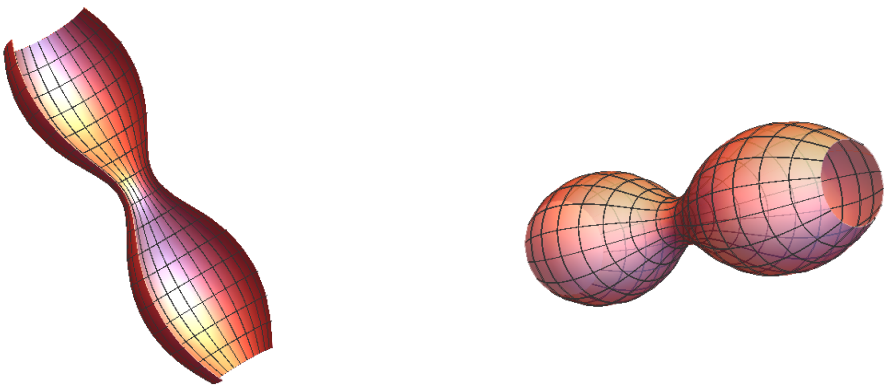
$$x(s) = \int_0^u \frac{1 + B\sin 2Ht}{\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin 2Ht}}dt,$$

$$y(s) = \frac{1}{2H}\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin 2Hs}$$

koju povezujemo s Kenmotsuovim rješenjem 2.3.



Slika 2.11: Unduloidna (valna) krivulja



Slika 2.12: Unduloid

Primjer 2.3.2. Ruleta parabole

Neka je zadana parabola l dana s $l : t \to (t, at^2)$ za neki pozitivan a. Neka je F fokus, a A vrh parabole. Neka je K neka točka na paraboli te neka je P točka presjeka tangente na parabolu kroz K i x-osi. S obzirom da se K nalazi na paraboli, njene koordinate su $K = (t, at^2)$. Koordinate točke presjeka tangente kroz K i x-osi su $P = (\frac{t}{2}, 0)$. Pokažimo to.

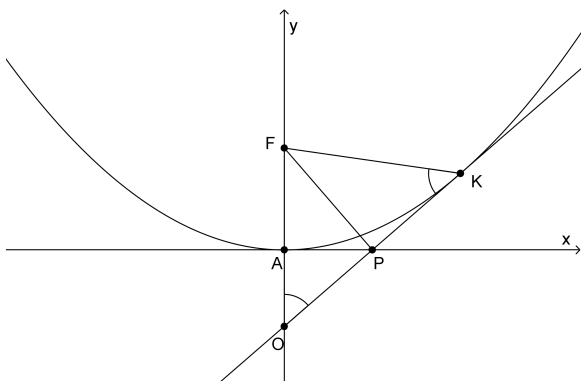
Jednadžba tangente na parabolu kroz K glasi

$$y = 2axt - at^2. \tag{2.10}$$

Presiječemo li tu jednadžbu s $y = 0$ dobit ćemo

$$x = \frac{t}{2}. \tag{2.11}$$

Odnosno, koordinate te točke su $P = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$.



Slika 2.13

Nadalje, neka je točka O točka presjeka tangente na parabolu K i pravca AF. Njene koordinate su $O = (0, -at^2)$. Vrijedi da je $|PK| = |OP|$ što se vrlo polako pokaže primjenom formule za udaljenost točaka u ravnini. Zbog zrcalnog svojstva elipse vrijedi da je $\angle FOP = \angle PKF$ i imamo da je $\angle OPF = \angle KPF = \frac{\pi}{2}$. Koristeći se trigonometrijom prvokutnog trokuta slijedi

$$|FA| = |FP| \cos \angle AFP = |FP| \cos \angle PFK.$$

Zamislimo da se parabola l giba, odnosno "kotrlja", po pravcu PK te razmatrajmo sada taj pravac kao x-os. Tada je ordinata od F u ovom sustavuu koordinata dana s $|PF|$. Označimo

tu udaljenost s y.
Imamo

$$\cos \angle PFK = \frac{dx}{ds},$$

gdje je s duljina luka lokusa od F pri "kotrljanju" parabole po pravcu PK. To je ekvivalentno s

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \tag{2.12}$$

gdje α označava kut između tangente na lokus od F pri "kotrljanju" parabole po pravcu PK i x-osi. Tada dolazimo do

$$c = y\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

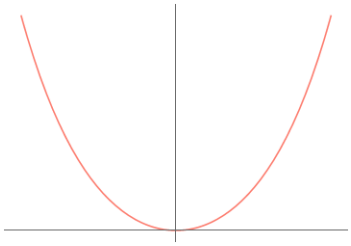
ili, ekvivalentno,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{c^2}}. \tag{2.13}$$

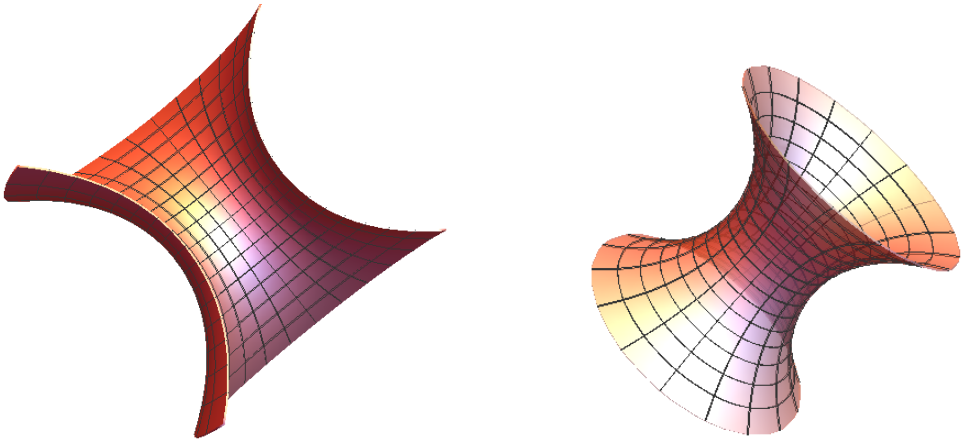
Rješenje te diferencijalne jednadžbe je dano s

$$y = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{\frac{-x}{c}}) = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right)$$

što je jednadžba lančanice. Odnosno, lančanica je ruleta parabole koja nastaje kao lokus fokusa parabole pri "kotrljanju" parabole po pravcu. Znamo već da rotacijom lančanice nastaje rotacijska ploha koju nazivamo katenoid.

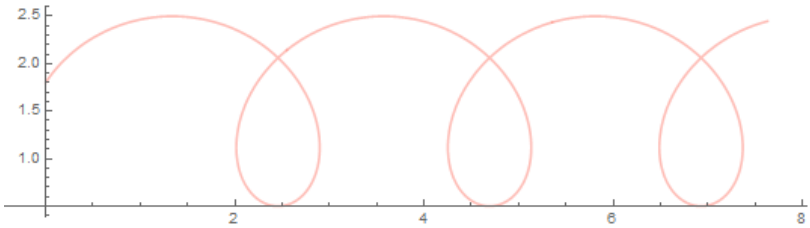


Slika 2.14: Lančanica



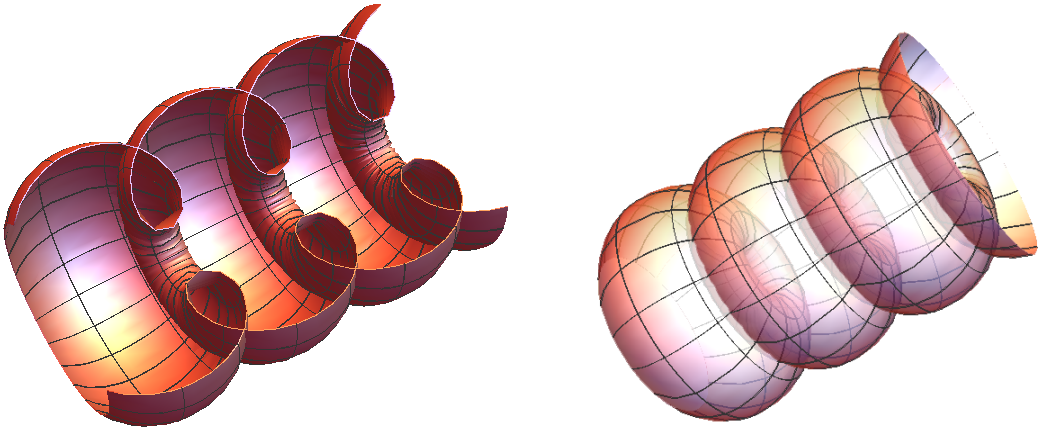
Slika 2.15: Katenoid

Spomenut ćemo još da je ruleta hiperbole nodoidna (čvorna) krivulja[4] i ona je profilna krivulja plohe konstantne srednje zakrivljenosti koju nazivamo nodoid.



Slika 2.16: Nodoidna (čvorna) krivulja

[4]poznata kao i hiperbolična lančanica



Slika 2.17: Nodoid

Bibliografija

[1] B. Athukorallage, T. Paragoda, M. Toda, *Roulettes of conics, Delaunay surfaces and applications*, 2014.,
dostupno na: https://www.researchgate.net/publication

[2] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[3] W. Kühnel, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition*, AMS, 2000.

[4] C. J. Lejdfors, *Surfaces of Constant Mean Curvature*, Lund University, 2003.,
dostupno na: http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/students/Karl-Johan-Lejdfors-MSc.pdf

[5] J. Oprea, *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Association of America (Incorporated), 2007.

[6] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, Volume 10, AMS, 2000.

[7] A.A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, 1979.

[8] Ž. M. Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*,
dostupno na: http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/skripta-stipe-v2.pdf

[9] A.Švec, *Global Differential Geometry of Surfaces*, D. Reidel Publishing Company, 2001.

[10] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, 2009.,
dostupno na: http://web.math.pmf.unizg.hr/˜ungar/kompleksna.pdf

[11] Deformacija katenoida u helikoid,
dostupno na: https://rkneufeld.wordpress.com/2010/11/29/associated-family-of-surfaces-of-the-catenoid/

[12] Enneperova minimalna ploha,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/EnnepersMinimalSurface.html

[13] Helikoid,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/Helicoid.html

[14] Hennebergova minimalna ploha,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/HennebergsMinimalSurface.html

[15] Katenoid,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/Catenoid.html

[16] Minimalne plohe,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/MinimalSurface.html

[17] Plohe konstantne srednje zakrivljenosti,
dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Constant-mean-curvature_surface

[18] Scherkova minimalna ploha,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/ScherksMinimalSurfaces.html

[19] Weierstrass-Enneperova parametrizacija,
dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/Enneper-WeierstrassParameterization.html

Sažetak

Teorija ploha konstantne srednje zakrivljenosti je veoma komplicirano područje matematike koje zahtijeva poznavanje diferencijalne geometrije i kompleksne analize te smo stoga jedno cijelo poglavlje posvetili upravo osnovama istih koje bi čitatelj ovog rada trebao razumjeti.

U drugom smo se poglavlju fokusirali na temu ovog rada i dali definiciju ploha konstantne srednje zakrivljenosti kao plohe čija je srednja zakrivljenost jednaka nekoj konstanti. Kako ta konstanta može biti i nula, posebno smo razmatrali minimalne plohe, odnosno plohe čija je srednja zakrivljenost jednaka nuli i plohe čija je srednja zakrivljenost različita od nule. Za minimalne plohe smo dali primjere, Weierstrass-Enneperovu reprezentaciju te pokazali kako se katenoid može deformirati u helikoid pri čemu su sve plohe deformacije također minimalne.

Na kraju smo izveli Kenmotsuovo rješenje, odnosno uvjete koji moraju biti ispunjeni da bi neka rotacijska ploha bila konstantne srednje zakrivljenosti te smo razmatrali Delaunayev zaključak da je neka ploha rotacijska ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako i samo ako je njena profilna krivulja ruleta konike.

Summary

The theory of surfaces of constant mean curvature is a very complex area of mathematics, which requires understanding of differential geometry and complex analysis. Therefore, we dedicate an entire chapter to the basics of these mathematical branches, which need to be understood by the reader.

The second chapter focuses on the subject of this dissertation. We define surfaces of constant mean curvature as surfaces whose mean curvatures equal a constant. Seeing as this constant may also be zero, we separately approach minimal surfaces, defined as those surfaces that have a mean curvature value of zero, and surfaces with a non-zero value of mean curvature. We provide examples and a Weierstrass-Enneper representation of minimal surfaces, and we show how a catenoid may be deformed into a helicoid, where all the surfaces in the associated family of a catenoid are also minimal.

Finally, we derive Kenmotsu's solution, that is to say we define the conditions which need to be met for a surface of revolution to have a constant mean curvature. We also discuss Delaunay's conclusion that a surface of revolution is a surface of constant mean curvature if and only if its profile curve is a roulette of a conic.

Životopis

Zovem se Petra Vukašinović i rođena sam 18.04.1989. godine u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole upisujem se u Gimnaziju Lucijana Vranjanina. Nakon mature, 2007. godine, upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Akademski naziv univ. bacc. educ. math. stječem 2013. godine te iste upisujem diplomski studij, nastavnički smjer. Na trećoj godini preddiplomskog studija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisujem slobodni studij japanologije na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.