

# Evesov teorem o projektivnim invarijantama

---

Garić, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:374495>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-08**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivana Garić

**EVESOV TEOREM O PROJEKTIVNIM  
INVARIJANTAMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na stručnoj i svesrdnoj pomoći. Posebno mu hvala na velikoj količini vremena koje je nesebično potrošio na nas studente, pa tako i na ovaj moj diplomski rad.*

*Veliko, veliko hvala na svemu mojoj heroini, najboljoj ženi na svijetu, mojoj mami, mojoj Ljubičici. Hvala puno i svim ostalim članovima moje obitelji na podršci i ljubavi koju su mi pružali svih ovih godina.*

*Neizmjereno hvala i mom anđelu s Neba, mom tati, koji me zagovara kod našega Oca i koji me bodri Odozgor već dugi niz godina.*

*Hvala i svim mojim prijateljicama, cimericama, kolegicama i svima koji su bili uz mene i svojom prisutnošću činili moj studentski život i ljepšim i boljim, ali i nezaboravnim.*

*Hvala svima koji su me se spominjali u svojim molitvama i bodrili na ovom putu do titule magistre edukacije matematike. Hvala i svim svecima i sveticama Božjim na svim njihovim zagovorima ovih godina. Od svih njih najviše su bile angažirane moje dvije najvjernije zagovarateljice, Gospa i sv. Rita, i zato njima dvjema posebno hvala.*

*I na kraju, najveća hvala i slava mom dragom Bogu što me stvorio i što me beskrajno voli. Sve što imam dobila sam po Njegovoj milosti i zato Njemu posvećujem ovaj svoj diplomski rad, ali i sebe samu. Hvala Mu na svemu!*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Neki poznati primjeri h-izraza u euklidskoj geometriji</b>	<b>2</b>
1.1 Cevin teorem . . . . .	3
1.2 Menelajev teorem . . . . .	5
<b>2 Rješenje problema brzine pri sudaru</b>	<b>8</b>
<b>3 O projektivnoj geometriji</b>	<b>14</b>
<b>4 Evesov teorem i neke njegove primjene</b>	<b>24</b>
4.1 Evesov teorem o invarijantnosti h-izraza . . . . .	24
4.2 Još neke praktične primjene Evesovog teorema . . . . .	30
<b>5 Invarijante izomorfizma za projektivne konfiguracije</b>	<b>35</b>
5.1 Nehringovi nizovi . . . . .	38
5.2 Osnovni teorem o invarijantama Nehringovih nizova . . . . .	39
<b>6 Primjeri invarijanti izomorfizma</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>50</b>

# Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat ćemo teorem poznat kao *Evesov teorem o projektivnim invarijantama*. Howard Whitley Eves je rođen 10. siječnja 1911., a umro je 6. lipnja 2004. godine. Eves je bio američki matematičar, poznat po svom radu u geometriji i povijesti matematike. Mnogo godina je radio kao profesor na Sveučilištu u Maineu i bio je urednik odjeljka Elementarni problemi u časopisu *American Mathematical Monthly*. U svojoj knjizi *A Survey of Geometry*, Eves je objavio jednostavan i lako razumljiv, ali moćan teorem, koji ima mnoge primjene. Upravo je o tom teoremu i njegovoj primjeni riječ u ovome radu.

U afinoj geometriji je važna invarijanta djelišni omjer tri kolinearne točke  $(AB, C) = AC : BC$ , a u projektivnoj geometriji, kao poopćenje djelišnog omjera, to je dvoomjer za 4 kolinearne točke,  $R(AB, CD) = (AB, C) : (AB, D) = (AC : BC) : (AD : BD)$ . Invarijantnost znači da se ova vrijednost ne mijenja primjenom afinih, odnosno projektivnih preslikavanja. Ta svojstva su važna i teorijski i praktično. Eves je uveo poopćenje ovakvih izraza, uvođenjem tzv. h-izraza. Spomenuti Evesov teorem o projektivnim invarijantama tvrdi da je vrijednost h-izraza invarijantna pod djelovanjem bilo kojeg projektiviteta.

Rad ćemo započeti s nekim poznatim primjerima h-izraza u euklidskoj geometriji, a to su Cevin i Menelajev teorem. Nakon toga ćemo prikazati rješenje problema brzine pri sudaru dva automobila pri čemu smo koristili Evesov teorem o projektivnim invarijantama. Potom slijedi kratki uvod u projektivnu geometriju, potreban za razumijevanje daljnjih pojmova i rezultata. Nakon toga prelazimo na glavni dio ovog diplomskog rada. U tom dijelu ćemo precizno definirati h-izraz te iskazati i dokazati Evesov teorem o projektivnim invarijantama uz još neke praktične primjene tog teorema. U završnim poglavljima izložit ćemo jednu vrstu invarijanti izomorfizma za projektivne konfiguracije koja se također zasniva na obliku h-izraza.

Za spomenuti Evesov teorem se kaže da je on u projektivnoj geometriji nešto kao švicarski nož budući da se može primijeniti u raznim situacijama. Cijenjeni geometričar G. C. Shephard je o ovome teoremu napisao sljedeće:

*”Smatramo da Evesov teorem nikada nije dobio priznanje kakvo zaslužuje, a trebao bi biti promatran kao jedan od osnovnih rezultata projektivne geometrije.”*

# Poglavlje 1

## Neki poznati primjeri h-izraza u euklidskoj geometriji

Ključni pojam u ovom radu će biti tzv. h-izraz. Taj pojam je uveo H. W. Eves koji je dokazao da je h-izraz projektivna invarijanta (vidi [4]). Prije nego što definiramo h-izraz, navest ćemo neke dobro poznate teoreme iz planimetrije u kojima se pojavljuju izrazi takvog oblika. Izložiti ćemo i dokaze tih teorema uobičajnim metodama, a kasnije ćemo vidjeti kako se ovi i mnogi drugi važni teoremi mogu izvesti primjenom Evesovog teorema o invarijantnosti h-izraza pod djelovanjem projektiviteta.

Za točke  $A$  i  $B$  označavat ćemo s  $\overline{AB}$  pripadnu dužinu (segment). Posebno ćemo naglasiti ako se promatraju orijentirane dužine. S  $|AB|$  ćemo označavati duljinu dužine  $\overline{AB}$ , odnosno modul vektora  $\overrightarrow{AB}$ .

Pri dokazivanju Cevinog i Menelajevog teorema se pozivamo na jednu lemu koju ćemo odmah ispod iskazati i dokazati, a zatim ćemo to isto učiniti i za Cevin i Menelajev teorem.

**Lema 1.0.1.** *Ako su  $X$  i  $Y$  točke na dužini  $\overline{AB}$  sa svojstvom  $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$ , tada se točke  $X$  i  $Y$  podudaraju.*

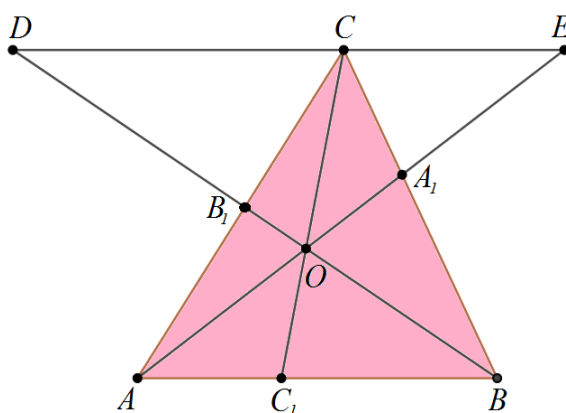
*Dokaz.*  $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$  slijedi  $\frac{|AB| - |BX|}{|BX|} = \frac{|AB| - |BY|}{|BY|}$  pa je  $\frac{|AB|}{|BX|} = \frac{|AB|}{|BY|}$ . Dakle,  $|BX| = |BY|$ , pa se  $X$  i  $Y$  podudaraju.  $\square$

## 1.1 Cevin teorem

**Teorem 1.1.1. (Cevin teorem)** Neka su  $A_1, B_1, C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Pravci  $AA_1, BB_1, CC_1$  prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

*Dokaz.*  $\Rightarrow$ : Neka se pravci  $AA_1, BB_1, CC_1$  sijeku u točki  $O$ .



Slika 1.1: Cevin teorem

Vrhom  $C$  povučemo paralelu s  $AB$ . Neka je  $D$  sjecište te paralele s  $BB_1$ , a  $E$  njeno sjecište s  $AA_1$ .

Prema K-K-K teoremu je

$$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1, \text{ pa je } \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CD|}{|AB|},$$

$$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1, \text{ pa je } \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CE|},$$

$$\triangle OAC_1 \sim \triangle OEC, \text{ pa je } \frac{|AC_1|}{|CE|} = \frac{|C_1O|}{|CO|},$$

$$\triangle CDO \sim \triangle C_1BO, \text{ pa je } \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CO|}{|C_1O|}.$$

Slijedi

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1O|}{|CO|} \cdot \frac{|CO|}{|C_1O|}$$

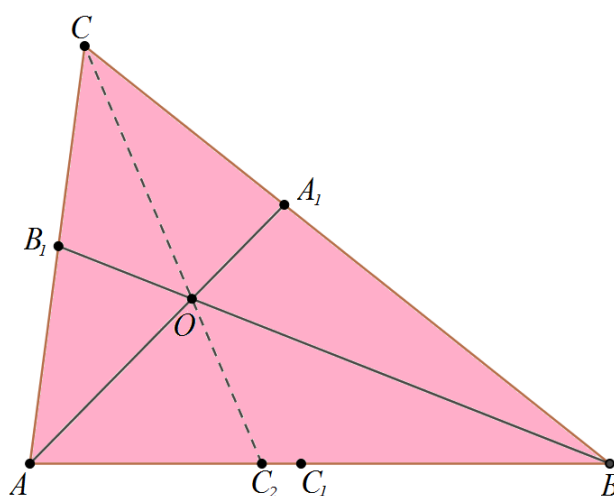


i nakon kraćenja konačno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

$\Leftrightarrow$ : Obratno, neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.2: Obrat Cevinog teorema

Neka je s  $O$  označen presjek pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$ , a sa  $C_2$  presjek pravaca  $CO$  i  $AB$ . Prema već dokazanom, vrijedi

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

pa je

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}.$$

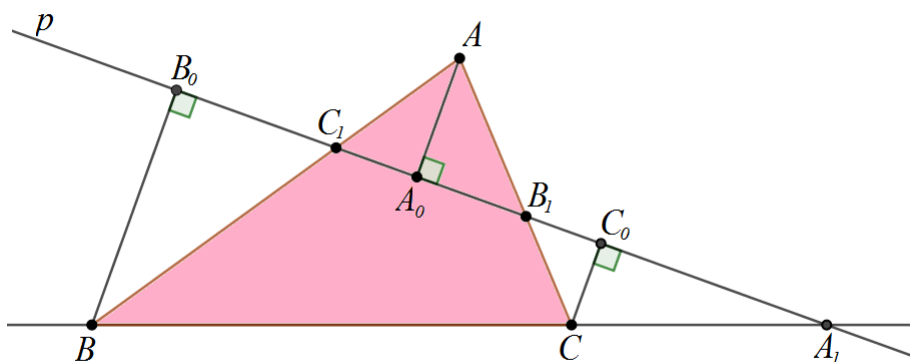
Kako točke  $C_1$  i  $C_2$  leže na dužini  $\overline{AB}$ , lema 1.0.1. povlači da se one podudaraju. Stoga i pravac  $CC_1$  prolazi točkom  $O$ .  $\square$

## 1.2 Menelajev teorem

**Teorem 1.2.1. (Menelajev teorem)** Neka su točke  $B_1$  i  $C_1$  na stranicama  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ , a točka  $A_1$  na produžetku stranice  $\overline{BC}$ , trokuta  $ABC$ . Točke  $A_1, B_1, C_1$  su kolinearne ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

*Dokaz.*  $\Rightarrow$ : Neka su točke  $A_1, B_1, C_1$  kolinearne te neka je  $p$  pravac na kojem leže. Neka su  $A_0, B_0, C_0$  točke na pravcu  $p$  sa svojstvom da su pravci  $AA_0, BB_0, CC_0$  okomiti na  $p$ .



Slika 1.3: Menelajev teorem.

Prema K-K-K teoremu,

$$\triangle AC_1A_0 \sim \triangle BC_1B_0, \text{ pa je } \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AA_0|}{|BB_0|},$$

$$\triangle CC_0B_1 \sim \triangle AA_0B_1, \text{ pa je } \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CC_0|}{|AA_0|},$$

$$\triangle BA_1B_0 \sim \triangle CA_1C_0, \text{ pa je } \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BB_0|}{|CC_0|}.$$

Odavde slijedi

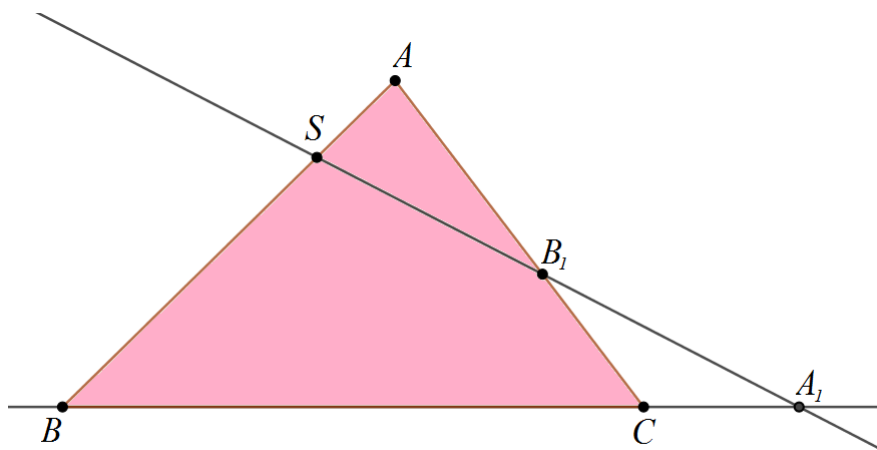
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AA_0|}{|BB_0|} \cdot \frac{|CC_0|}{|AA_0|} \cdot \frac{|BB_0|}{|CC_0|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1.$$

$\Leftrightarrow$ : Neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.4: Obrat Menelajevog teorema

Sa S označimo točku presjeka pravaca  $A_1B_1$  i  $AB$ . Prema već dokazanom je

$$\frac{|AS|}{|SB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AS|}{|SB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

pa je

$$\frac{|AS|}{|SB|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}.$$

Kako su  $C_1$  i  $S$  točke na dužini  $\overline{AB}$ , iz leme 1.0.1. slijedi  $C_1 = S$ , dakle točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  su kolinearne.  $\square$

Uočimo da se u iskazima Cevinog i Menelajevog teorema pojavljuje izraz,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

koji predstavlja umnožak tri djelišna omjera, a mogao bi se napisati i u obliku:

$$\frac{|AC_1| \cdot |BA_1| \cdot |CB_1|}{|C_1B| \cdot |A_1C| \cdot |B_1A|}$$

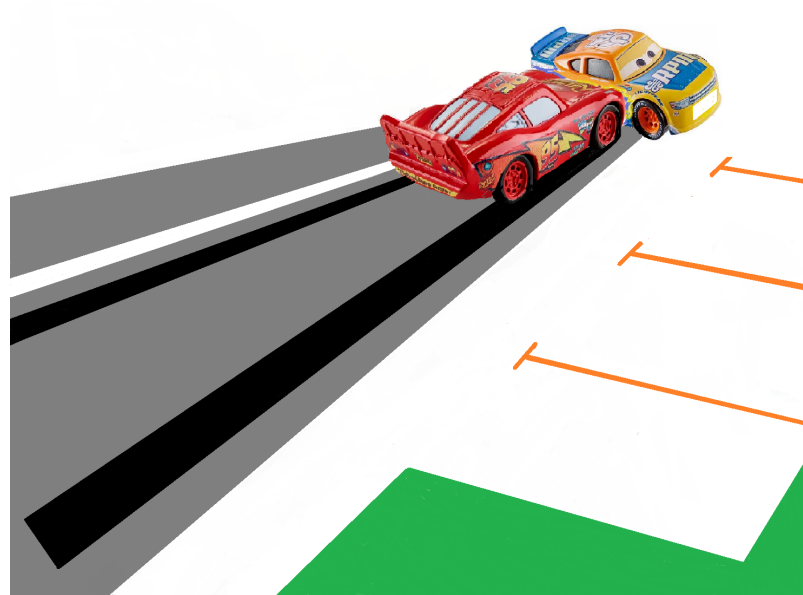
kao omjer dva umnoška duljina od po tri dužine. Ovaj izraz ima sljedeća svojstva:

1. Svaka točka se pojavljuje jednako mnogo puta u brojniku i nazivniku.
2. Svaki pravac koji sadrži neku od dužina u ovom izrazu se pojavljuje jednako mnogo puta u brojniku i u nazivniku.

Ova dva svojstva su karakteristična za Evesovu definiciju h-izraza. U sljedećim poglavljima ćemo se detaljno baviti tim pojmom i njegovim primjenama.

## Poglavlje 2

### Rješenje problema brzine pri sudaru



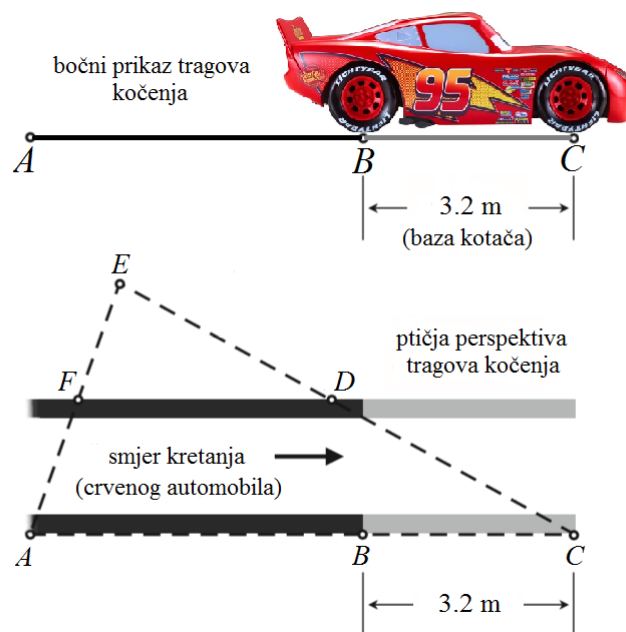
Slika 2.1: Sudar crvenog i žutog automobila

Kao motivacijski primjer iz svakodnevnog života za proučavanje  $h$ -izraza prikazat ćemo rješenje slučaja sudara dvaju automobila. Izložiti ćemo priču koja ide uz sliku 2.1. Zanima nas koliko je brzo vozio crveni automobil prije sudara, a pritom ćemo iskoristiti i nešto osnovne fizike. Crveni i žuti automobil su vozili u suprotnim trakama jedan prema drugome, a potom je žuti automobil skrenuo ulijevo ispred crvenog automobila jer se namjeravao parkirati na obližnje parkiralište. Kada je vozač crvenog automobila vidio da žuti automobil skreće na parkiralište, odmah je stisnuo kočnice blokiravši kotače i pokušavajući održati

automobil u istom smjeru prilikom klizanja. Crveni automobil se nije uspio u potpunosti zaustaviti prije nego je udario u žuti automobil s bočne strane pa se dogodio sudar. Ubrzo nakon toga, svjedok je fotografirao sliku 2.1 iz dovoljne udaljenosti tako da je uhvatio cijele tragove kočenja. Cesta je nekoliko dana kasnije obnovljena pa je slika 2.1 ostala jedini dokaz tragova kočenja.

Budući da su vozači završili na parnici ta im je slika bila jako važna. Vozač žutog automobila je tvrdio da je vozač crvenog automobila vozio iznad dopuštene brzine od 60 km/h, što je vozač crvenog automobila zanijekao. Istražitelj nesreće je provjerio oštećene automobile i procijenio je da je brzina crvenog automobila u trenutku sudara iznosila 44 km/h. To su bile dobre vijesti za vozača crvenog automobila, a mi ćemo sada izložiti analizu koja uz razumne aproksimacije postavlja gornju granicu od 57 km/h kao brzinu crvenog automobila u trenutku kada su započeli tragovi kočenja. Opisat ćemo jednu metodu određivanja brzine – iako metode variraju u praksi. Najveći naglasak ćemo staviti na to kako Evesov teorem može odrediti duljinu tragova kočenja što je od primarnog značaja u ovakvoj vrsti analize.

Analizu ćemo započeti na temelju principa rješavanja problema koji se općenito koriste kada je poznata duljina barem jednog traga kočenja, a nakon toga ćemo primijeniti manje poznatu metodu kojom ćemo odrediti duljinu tragova kočenja s fotografije.



Slika 2.2: Bočni prikaz i prikaz iz ptičje perspektive tragova kočenja

Na slici 2.2 u gornjem dijelu se nalazi bočni prikaz crvenog automobila zajedno s njegovim tragovima kočenja i specifikacijom razmaka osovina kotača u iznosu od 3.2 m. Donji dio slike 2.2 prikazuje ptičju perspektivu tragova kočenja, zajedno s isprekidanom trokutom  $ACE$  čija će se svrha objasniti kasnije. Trag kočenja prednjeg desnog kotača crvenog automobila završava u točki  $C$ , ali njegova početna točka biva nejasna zbog tragova kočenja zadnjeg desnog kotača. Trag kočenja zadnjeg desnog kotača počinje u točki  $A$  i završava u točki  $B$ . Udaljenost  $|BC|$  je prema tome jednaka razmaku osovina kotača, tj. jednaka je 3.2 m. Trag kočenja zadnjeg desnog kotača ima duljinu  $|AB|$ . To je jedini potpuno vidljiv trag kočenja na fotografiji svjedoka.

Iako ne znamo duljine ostalih tragova kočenja, razumno je pretpostaviti da je duljina svih tragova također  $|AB|$ . Neka auto ima masu  $m$ , neka  $v_A$  označava brzinu automobila u trenutku kada je desni zadnji kotač bio u točki  $A$ , i neka  $v_B$  označava brzinu automobila kada je zadnji desni kotač bio u točki  $B$ . Iz prethodnih informacija imamo procjenu brzine u trenutku sudara od 44 km/h. Pretpostavljamo da je cesta ravna i da je tijekom kočenja jedina horizontalna sila koja je djelovala na automobil bila stalna sila deceleracije  $\mu mg$ , gdje je  $\mu$  veće ili jednako nuli, a označava bezdimenzionalni koeficijent kliznog trenja između ceste i kotača, dok  $g$  (približno  $9.81 \text{ m/s}^2$ ) označava akceleraciju gravitacije. Pristup kojim se koristimo idealizira automobil kao točku mase  $m$  u pravocrtном jednoliko ubrzanom gibanju. Naime, vrijedi sljedeće;

$$v - v_0 = at$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

gdje su  $x$  i  $v$  pozicija i brzina u trenutku  $t$  od čestice koja se kreće po osi  $x$  s konstantnom akceleracijom  $a$ , te gdje su  $x_0$  i  $v_0$  pozicija i brzina u početnom trenutku  $t = 0$ . Eliminacijom  $t$  u obje jednakosti, dobivamo

$$v_0^2 = v^2 - 2a(x - x_0). \quad (2.1)$$

Ovo je također osnovna jednakost u teoriji pravocrtного gibanja. Da bismo izrazili jednakost (2.1) pomoću naših varijabli, neka se os  $x$  podudara s pravcem  $AB$  na slici 2.2, s početnom točkom fiksiranom bilo gdje i pozitivnim smjerom kretanja prema desno. Označimo koordinate točaka  $A$  i  $B$  s  $x_A$  i  $x_B$ . Modeliramo automobil kao točku mase  $m$  koja se kreće od točke  $x_A$  u trenutku  $t = 0$  do  $x_B$  u trenutku  $t$ , pod stalnom akceleracijom  $-\mu g$ . Pozivajući se na jednakost (2.1), neka je  $x_0 = x_A$ ,  $x = x_B$ ,  $v_0 = v_A$ ,  $v = v_B$  i  $a = -\mu g$ . Jednakost (2.1) tada postaje

$$v_A^2 = v_B^2 + 2\mu g(x_B - x_A),$$

ili, ekvivalentno,

$$v_A^2 = v_B^2 + 2\mu g|AB|. \quad (2.2)$$

Za potrebe računanja, uobičajeno je izraziti jednakost (2.2) u hibridnom obliku, gdje su brzine  $v_A$  i  $v_B$  izražene svojim vrijednostima  $\widehat{v}_A$  i  $\widehat{v}_B$  u jedinici km/h, dok je  $|AB|$  izražena u metrima. Kako bismo dobili jednakost s  $\widehat{v}_A$  i  $\widehat{v}_B$ , koristimo faktor konverzije  $k = \frac{3600}{1000} = 3.6$ . Pomnožimo jednakost (2.2) s  $k^2$  pa dobivamo

$$\widehat{v}_A^2 = \widehat{v}_B^2 + 2k^2\mu g|AB|. \quad (2.3)$$

Sada trebamo procjenu vrijednosti za  $2k^2\mu g$ . S obzirom da smo zainteresirani za vrijednost gornje granice od  $\widehat{v}_A$ , uzimamo da je  $\mu = 1$ , kao opće prihvaćenu gornju granicu za ovu primjenu. Računamo

$$2k^2\mu g \leq 2 \cdot 3.6^2 \cdot 1 \cdot 9.81 \approx 254.2752$$

koje zaokružujemo na 255, ponovno u interesu da dobijemo gornju granicu. Ako uvrstimo 255 za  $2k^2\mu g$  u jednakost (2.3) i iz obje strane izvučemo drugi korijen, dobijemo

$$\widehat{v}_A < \sqrt{\widehat{v}_B^2 + 255|AB|}.$$

Koristeći istražiteljevu procjenu brzine  $\widehat{v}_B \approx 44$  km/h, ovo poprima oblik

$$\widehat{v}_A < \sqrt{1936 + 255|AB|}, \quad (2.4)$$

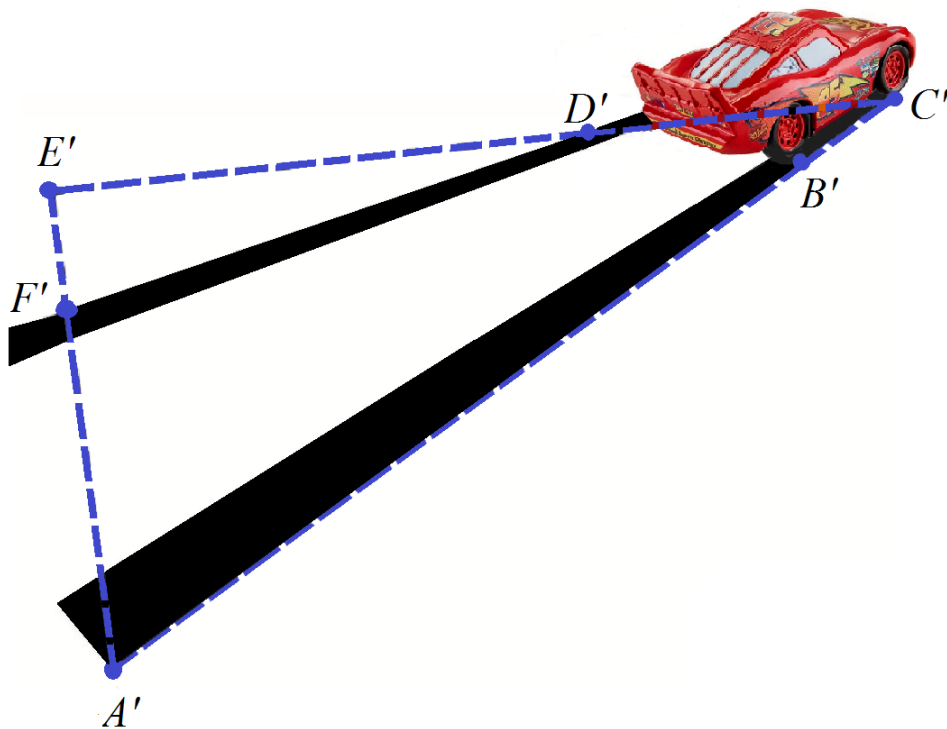
gdje je ponovno  $\widehat{v}_A$  izražena u mjernoj jedinici kilometar na sat, a  $|AB|$  u metrima. Nejednakost (2.4) daje gornju granicu  $\widehat{v}_A$  brzine crvenog automobila kada počinju tragovi kočenja na temelju duljine  $|AB|$ , tj. traga kočenja vidljivog na fotografiji. Sve ovisi o duljini tog traga kočenja.

Sad ćemo konačno reći više o Evesovom teoremu. U nastavku želimo naglasiti koliko je lako pronaći duljinu traga kočenja  $|AB|$  i, prema tome, brzinu automobila. Na slici 2.2 se nalazi iscrtkani trokut  $ACE$ , gdje su  $A$  i  $C$  onakve kako su opisane ranije, a  $E$  je proizvoljna točka na suprotnoj strani tragova kočenja od  $AC$ . Stranica  $AC$  sadrži točku  $B$  kako je opisano ranije, a  $D$  i  $F$  su točke gdje pravci  $CE$  i  $EA$  sijeku vanjski rub lijevog traga kočenja. S obzirom da su tragovi kočenja paralelni, imamo  $|CD|/|DE| = |FA|/|EF|$ , stoga

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = \frac{|AB|}{3.2} \cdot 1 = \frac{|AB|}{3.2}. \quad (2.5)$$



Izraz na lijevoj strani od (2.5) je primjer h-izraza. Naime, na lijevoj strani imamo omjer umnožaka duljina segmenata, pri čemu se svaka krajnja točka nekog segmenta pojavljuje jednako mnogo puta u brojniku i u nazivniku i, također, svaki pravac koji sadrži neku od dužina u ovom izrazu se pojavljuje jednako mnogo puta u brojniku i u nazivniku. Eves-ov teorem tvrdi da su h-izrazi projektivne invarijante, što znači da ako su točke  $A, B, C, \dots$  prikazane svojim projektivnim slikama kao  $A', B', C', \dots$  (primjerice kao na fotografiji), tada odgovarajući h-izraz ima jednaku vrijednost. Točnije, na slici 2.3, lociramo odgovarajuće točke  $A', B', C', \dots$  onako kako bi se pojavile na fotografiji. Ne trebamo brinuti o savršenom lociranju točke  $E'$  zato što ona mora odgovarati nekoj točki  $E$  kao na slici 2.2.



Slika 2.3: Odgovarajuća slika trokuta sa slike 2.2.

Na slici 2.3 je odgovarajuća slika trokuta sa slike 2.2, tj. na njoj je trokut onakav kakav bi bio na slici nesreće. Zbog jasnoće prikazana je cijela stranica  $\overline{C'E'}$ . Sada koristimo ravnalo kako bismo na slici 2.3 izravno izmjerili i procijenili brojčanu vrijednost odgovarajućeg h-izraza. Koristeći jednakost (2.5) i nepromjenjivost h-izraza,

imamo

$$\frac{|AB|}{3.2} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|C'D'|}{|D'E'|} \cdot \frac{|E'F'|}{|F'A'|} < 1.5.$$

Prema tome, ako zaokružimo ponovno rezultat dobivamo

$$|AB| < (3.2)(1.5) < 5 \text{ m.}$$

Konačno, uvrstimo ovaj rezultat u (2.4) i ponovno zaokružujemo kako bismo procijenili brzinu crvenog automobila  $\widehat{v}_A$  na početku kočenja:

$$\widehat{v}_A < \sqrt{1936 + 255 \cdot 5} < 57 \text{ km/h.}$$

Iz toga zaključujemo da crveni automobil vjerojatno nije prekoračio dopuštenu brzinu od 60 km/h u trenutku kada je počeo kočiti.

Ako bismo, nasuprot tome, radili u korist vozača žutog automobila, procijenili bismo nižu granicu za  $v_A$ , nadajući se da bi bila značajno veća od 60 km/h. Ovo nije toliko jednostavno; na primjer, tada bismo htjeli procijeniti donju među za koeficijent trenja. Ukoliko bismo izabrali vrijednost 0 to ne bi bilo uvjerljivo pa moramo biti realni u ovom slučaju. Realna procjena koeficijenta trenja ovisi o stanju na površini ceste, vremenu, marki kotača, stanju kotača i ostalim faktorima. Zbog toga što je naš naglasak bio na određivanju duljine tragova kočenja s fotografije – što je ključni faktor u svakom slučaju – izabrali smo jednostavniji problem određivanja gornje granice za  $v_A$ . Znanost dobivanja 3D informacija iz 2D slika na fotografijama zove se fotogrametrija. Mnoge tvrtke koje rade rekonstrukcije nesreće koriste posebno napravljene fotogrametrijske software-e kako bi odredile duljinu tragova kočenja iz fotografija. U prethodnom problemu Evesov teorem nam je omogućio odrediti duljinu traga kočenja i procijeniti brzinu automobila pomoću jednostavnog crtanja trokuta na slici tragova kočenja i mjerenja između određenih označenih točaka.

Ako znamo osnovne stvari iz projektivne geometrije uočiti ćemo da smo mi zapravo ovaj slučaj o sudaru automobila riješili pomoću h-izraza i projektiviteta (centralna projekcija).

Uloga projektivne invarijante je uvelike olakšala rješavanje ovog slučaja.

Projektivitet, perspektivitet, centralna projekcija i ostali važni pojmovi iz projektivne geometrije bit će predmet sljedećeg poglavlja.

## Poglavlje 3

# O projektivnoj geometriji

Prije no što prijedemo na sam Evesov teorem o projektivnim invarijantama, potrebno je objasniti terminologiju. U ovom poglavlju će stoga biti riječ o osnovama projektivne geometrije. Sažeto ćemo izložiti, ne navodeći uvijek formalne definicije i dokaze, bitne karakteristike projektivne geometrije, kakva je razlika između projektivne i euklidske geometrije te što su to projektivna ravnina i projektivni prostor. Nakon toga navest ćemo definiciju dvozmjera i još nekih važnih pojmova te neke od osnovnih teorema projektivne geometrije.

Projektivna geometrija se razvijala postupno, počevši s proširivanjem euklidske ravnine "neizmjerne dalekim" točkama i jednim "neizmjerne dalekim" pravcem. Ako je riječ o trodimenzionalnom euklidskom prostoru onda se u proširenju pojavljuje i "neizmjerne daleka" ravnina, koja obuhvaća neizmjerne daleke pravce svih proširenih ravnina u tom prostoru.

U projektivnoj geometriji nema metrike, odnosno nema udaljenosti, kuteva, ali ni paralelnosti. Bitna je razlika između euklidske i projektivne ravnine u tome što se u projektivnoj ravnini svaka dva različita pravca sijeku (tj. incidentni su s jednom zajedničkom točkom), a to se u proširenju euklidske ravnine postiže time što se "nove" točke uvode kao klase paralelnih pravaca, dakle smjerovi. Definira se da je svaki pravac incidentan sa svojim smjerom i na taj način paralelni pravci euklidske ravnine se proširuju zajedničkom novom točkom, svojim smjerom. ( U proširenom euklidskom prostoru postoje mimoilazni pravci, ali nema paralelnih ravnina nego se sve paralelne ravnine euklidskog prostora proširuju zajedničkim "neizmjerne dalekim" pravcem).

Budući da se u projektivnoj geometriji kao osnovna relacija uzima samo incidencija između točaka i pravaca, odnosno točaka i ravnina, promatraju se preslikavanja za koja je bitan uvjet da čuvaju incidenciju. U uobičajenoj geometrijskoj terminologiji to znači da se promatraju preslikavanja sa svojstvom da neka točka  $A$  pripada pravcu  $l$  ako i samo ako slika te točke  $A'$  pripada slici  $l'$  tog pravca. Osnovna preslikavanja s takvim svojstvom su centralne

ili perspektivne projekcije.

U projektivnoj ravnini centralnom projekcijom se preslikava jedan pravac na drugi, a u projektivnom prostoru jedna ravnina na drugu. U projektivnoj geometriji su ta preslikavanja bijektivna, što u euklidskoj geometriji nije ispunjeno.

Način na koji se u ljudskom oku stvara slika prostora i različitih prostornih objekata odgovara centralnoj projekciji (perspektivitetu), a slično vrijedi i za fotografiranje i neke druge načine prikazivanja trodimenzionalnog prostora slikom u ravnini.

Na primjer, ako gledamo u smjeru željezničkih tračnica, čini nam se da se tračnice sijeku u nekoj točki (koju bismo mogli odrediti produljivanjem tračnica do sjecišta), a svjesni smo da su tračnice u stvarnosti paralelne. Sjecište njihovih slika nije slika neke točke u realnom svijetu.



Slika 3.1: Željezničke tračnice.

Na slici 3.2 prikazana je *Posljednja večera* Leonarda da Vinci, jedna od najpoznatijih slika na svijetu. Kad ju promatramo uočavamo da slike pravokutnika na desnom i lijevom zidu te slike pravokutnika na stropu kod Leonarda na platnu nisu pravokutnici nego trapezi jer se stranice i kutevi tih pravokutnika izobličuju te se dobiva dojam da se pravci na kojima su krakovi tih trapeza sijeku u nekoj vrlo dalekoj točki. Sjecište slika tih pravaca doista postoji, u ravnini slike, ali ono nije slika nijedne točke u stvarnosti.



Slika 3.2: Posljednja večera Leonarda da Vincija.

**Definicija 3.0.1.** *Projektivna ravnina se definira kao incidencijska struktura  $\mathcal{P} = (\mathcal{T}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  pri čemu su  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{L}$  neprazni disjunktni skupovi čije elemente nazivamo točkama odnosno pravcima, a  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{L}$  je relacija koja se naziva relacijom incidencije, pri čemu su ispunjena tri aksioma:*

- (P1) *za svake dvije točke  $P$  i  $Q$  postoji točno jedan pravac  $b$  iz  $\mathcal{L}$  tako da vrijedi  $P \mathcal{I} b$  i  $Q \mathcal{I} b$ ;*
- (P2) *za svaka dva različita pravca  $b, c$  iz  $\mathcal{L}$  postoji točka  $P$  tako da vrijedi  $P \mathcal{I} b$  i  $P \mathcal{I} c$ ;*
- (P3) *postoje četiri različite točke takve da nikoje tri od njih nisu kolinearne, tj. da nisu sve tri incidentne s nekim pravcem.*

Nama je potreban samo klasični model projektivne ravnine, odnosno prostora, dobiven prethodno naznačenim postupkom proširivanja euklidske ravnine, odnosno euklidskog prostora. Nije teško dokazati da su aksiomi projektivne ravnine ispunjeni za proširenu euklidsku ravninu. Treba samo razlikovati euklidske točke od smjerova ("neizmjerljivo dalekih" točaka) i euklidske pravce od jednog "novog" pravca ("neizmjerljivo dalekog") koji je po definiciji incidentan samo s "neizmjerljivo dalekim" točkama. Primjerice, euklidska točka  $A$  i smjer zadan pravcem  $l$  incidentni su s euklidskim pravcem koji prolazi kroz  $A$  i ima jednak smjer kao  $l$ , to jest, paralelan je s njim. Dva euklidska pravca ili se sijeku u euklidskoj točki ako nisu paralelni ili, ako jesu, imaju jednaki smjer pa time i (jedinствenu) zajedničku točku u proširenoj euklidskoj ravnini.

Primijetimo da aksiomi projektivne ravnine omogućuju dvije osnovne "operacije" s točkama i pravcima, a to su spajanje točaka (aksiom (P1)) i presijecanje pravaca (aksiom (P2)). Zato se u projektivnoj ravnini konstrukcije mogu izvoditi samo pomoću ravnala (bez mjernih oznaka). Ovdje je riječ o projektivnoj ravnini dobivenoj proširivanjem euklidske.

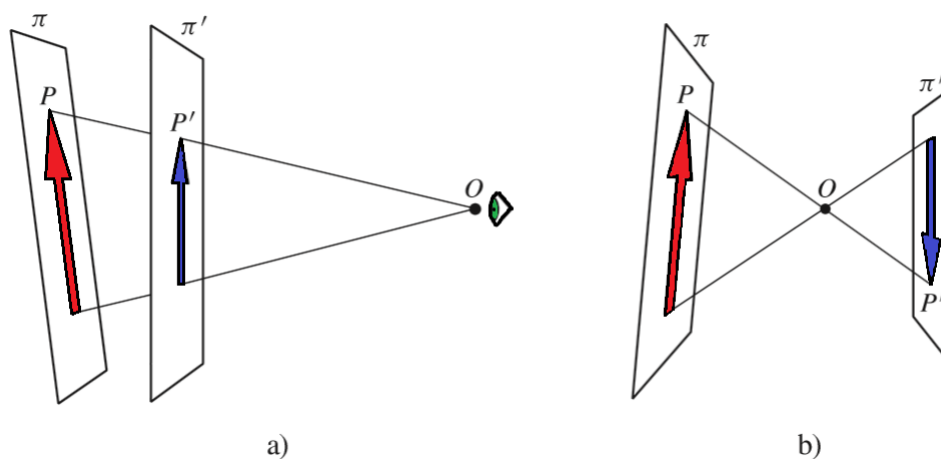
Aksiomatskim zasnivanjem trodimenzionalnog projektivnog prostora se nećemo ovdje detaljno baviti. Dostatan nam je projektivni prostor dobiven proširivanjem euklidskog prostora  $E^3$  po uzoru na proširivanje euklidske ravnine.

Nadalje, definirat ćemo perspektivitet u projektivnoj ravnini i u projektivnom prostoru.

**Definicija 3.0.2.** Neka su  $b$  i  $c$  različiti pravci projektivne ravnine  $\mathcal{P}$ , a  $O$  točka koja ne leži ni na jednom od tih pravaca. Centralno projiciranje (perspektivitet) pravca  $b$  na pravac  $c$  je preslikavanje koje točki  $X$  iz  $b$  pridružuje točku  $X'$  iz  $c$  kao sjecište pravca  $OX$  s pravcem  $c$ . Točka  $O$  je pritom centar projiciranja (perspektiviteta).

**Definicija 3.0.3.** Neka su  $\pi$  i  $\pi'$  dvije ravnine u projektivnom prostoru i neka je  $O$  točka koja nije ni na jednoj od tih ravnina. Preslikavanje koje svakoj točki  $P \in \pi$  pridružuje točku  $P' \in \pi'$  tako da su  $O$ ,  $P$  i  $P'$  kolinearne točke naziva se centralna projekcija (perspektivitet) ravnine  $\pi$  na ravninu  $\pi'$ .

Za perspektivitet uvodimo oznake  $p \xrightarrow{\bar{\bar{O}}} p'$  odnosno  $\pi \xrightarrow{\bar{\bar{O}}} \pi'$ .



Slika 3.3: Perspektivitet oblikuje perspektivni crtež (pod a)) i fotografiju (pod b)).

Na slici 3.3 prikazan je model crtanja slike u perspektivitetu (pod a)), te pojednostavljeni model fotografskog postupka (pod b)). Na slici 3.3 a), strelice u ravninama  $\pi$  i  $\pi'$  povezane su pomoću perspektiviteta sa središtem u  $O$  koje leži na suprotnoj strani od  $\pi'$  od strelice u  $\pi$ . Zamišljamo svjetlosnu zraku koja izlazi iz svake točke  $P$  strelice u  $\pi$  i koja putuje do promatračevog oka  $O$ , i na svom putu probada ravninu  $\pi'$  u odgovarajućoj točki  $P'$  kao da prolazi kroz prozor i ostavlja obojanu točkicu na staklu. Strelica u ravnini  $\pi'$  je perspektivna slika strelice u ravnini  $\pi$ . Ovo je model perspektivnog crtanja i slikanja razvijen u doba renesanse. Ideja je da ako strelica na ravnini  $\pi$  odjednom nestane, promatrač u  $O$  ne bi bio toga svjestan zato što bi svjetlosne zrake iz obojenih točkica na ravnini  $\pi'$  i dalje prodirale iz istog smjera kao i prije. Prema tome (barem teoretski), obojena slika na ravnini  $\pi'$  je savršeno realistična dok god promatračevo oko ostaje u točki promatranja  $O$ .

Slika 3.3 b) je pojednostavljen model fotografskog postupka. Ovdje  $O$  leži između svakog para odgovarajućih točaka  $P, P'$  uzrokujući da perspektivna slika na ravnini  $\pi'$  bude izokrenuta. U ovom modelu, zamišljamo  $O$  kao otvor kamere, a pravac  $PP'$  kao svjetlosnu zraku koja prolazi kroz taj otvor. Strelica na ravnini  $\pi$  je objekt u stvarnom svijetu, a okrenuta slika na ravnini  $\pi'$  (ekran kamere) je njegova fotografska slika. Iako je struktura i funkcija leća kamere mnogo kompleksnija, krajnji rezultat je u biti isti – okrenuta perspektivna slika danog objekta. Stoga, za naše potrebe možemo oblikovati i perspektivnu sliku i fotografiju likova u ravnini prikladnim perspektivitetima. Kompozicija perspektiviteta – na primjer, fotografija fotografije – naziva se projektivitet. Navedimo preciznu definiciju projektiviteta.

**Definicija 3.0.4.** *Neka su  $p$  i  $p'$  pravci u projektivnoj ravnini, ne nužno različiti. Bijekcija skupa točaka pravca  $p$  na skup točaka pravca  $p'$  zadana kao kompozicija nekoliko perspektiviteta naziva se projektivitet.*

*Projektivitet možemo zapisati kao kompoziciju perspektiviteta, npr. ovako*

$$p \xrightarrow{\overline{O}_1} p_1 \xrightarrow{\overline{O}_2} p_2 \dots \xrightarrow{\overline{O}_n} p_n = p',$$

*pri čemu su  $O_1, O_2, \dots, O_n$  i  $p_1, p_2, \dots, p_n$  neke točke i pravci projektivne ravnine.*

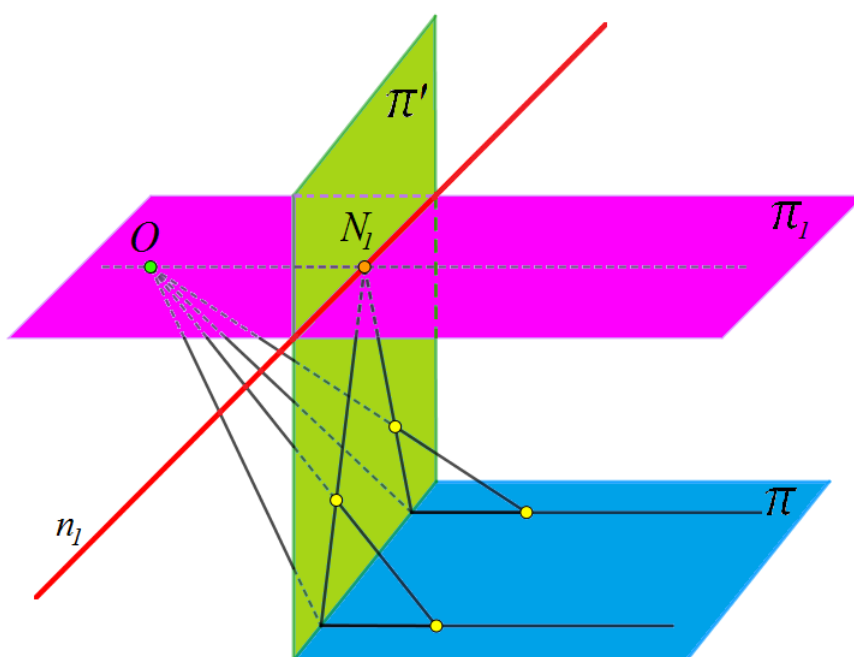
*Analogno se definira projektivitet s ravnine  $\pi$  na ravninu  $\pi'$  (ne nužno različite) u projektivnom prostoru:*

$$\pi \xrightarrow{\overline{O}_1} \pi_1 \xrightarrow{\overline{O}_2} \pi_2 \dots \xrightarrow{\overline{O}_n} \pi_n = \pi'.$$

Napomenimo da će u perspektivitetu između paralelnih (euklidskih) ravnina, što na ilustraciji 3.3 odgovara slučaju paralelnih ravnina  $\pi$  i  $\pi'$ , svaki lik u ravnini  $\pi$  biti sličan svojoj perspektivnoj slici u  $\pi'$ . Naime, kutevi se neće promijeniti pa će oblik, ako već ne i veličina, oba lika biti jednak. Ovo je također slučaj prikaza tragova kočenja na slici 2.2. Tada imamo afino preslikavanje, koje čuva paralelnost, time i kuteve, a također i djelišni omjer.

Međutim, općenito, perspektivna slika nije slična stvarnom liku pa je rekonstrukcija originala znatno zahtjevniji zadatak. Pritom su od velike pomoći invarijante perspektiviteta, posebno numeričke vrijednosti koje ostaju nepromijenjene kao primjerice h-izraz povezan s trokutima na slikama 2.2 i 2.3.

Promotrimo sada sliku 3.4 kao ilustraciju činjenice da je svaki perspektivitet bijekcija među odgovarajućim skupom točaka odnosno pravaca u projektivnoj ravnini ili prostoru, što u euklidskoj ravnini odnosno prostoru nije ispunjeno.



Slika 3.4: Centralna projekcija (perspektivitet).

Ovdje smo uzeli primjer kad su (euklidske) ravnine  $\pi$  i  $\pi'$  međusobno okomite, a (euklidska) ravnina  $\pi_1$  paralelna je s  $\pi$  i prolazi točkom  $O$  kao centrom perspektiviteta. Neka je  $\varphi$  perspektivitet  $\pi \bar{\bar{\lambda}}^O \pi'$ , a  $\varphi^{-1}$  perspektivitet  $\pi' \bar{\bar{\lambda}}^O \pi$ . Za  $\varphi$ , naznačeni euklidski pravci u  $\pi$  se preslikavaju u pravce kroz točku  $N_1$ , ali bez te točke jer ne postoji točka  $N$  u  $\pi$  takva da je  $\varphi(N) = N_1$  (jer je pravac  $ON_1$  paralelan s  $\pi$ , a  $O, N$  i  $N_1$  su kolinearne točke).

Slično vrijedi za bilo koju točku pravca  $n_1 = \pi' \cap \pi_1$ . Dakle, takva točka nije  $\varphi$ -slika neke točke (euklidske) ravnine  $\pi$  pa ne postoji ni  $\varphi^{-1}$ -slika takve točke u ravnini  $\pi$ .

Međutim,  $\varphi$  i  $\varphi^{-1}$  su bijekcije cijele proširene (projektivne) ravnine  $\pi$  na  $\pi'$ , odnosno obrnuto. Te bijekcije uzajamno preslikavaju neizmjereno daleki pravac ravnine  $\pi$  i (euklidski) pravac  $n_1$  u ravnini  $\pi'$ .



Sad ćemo iskazati definiciju dvoomjera budući da je i taj pojam jako važan u projektivnoj geometriji kao numerička invarijanta projektiviteta. Prisjetimo se najprije definicije djelišnog omjera u euklidskoj ravnini.

**Definicija 3.0.5.** Za tri različite kolinearne točke  $A, B$  i  $C$  djelišni omjer, u oznaci  $(AB, C)$  je kvocijent

$$(AB, C) = \frac{|AC|}{|BC|}$$

gdje su  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  orijentirane dužine.

Uočimo, na primjer, da ako je  $C$  polovište dužine  $\overline{AB}$ , onda je  $(AB, C) = -1$ . Primijetimo još i da djelišni omjer nije invarijanta perspektiviteta jer npr. polovište  $C$  dužine  $\overline{AB}$  se neće uvijek preslikati u polovište perspektivne slike dužine  $\overline{AB}$ .

**Definicija 3.0.6.** Za četiri kolinearne točke  $A, B, C$  i  $D$  definira se dvoomjer  $(AB, CD)$  kao realni broj

$$(AB, CD) = \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}$$

tj. kao omjer djelišnih omjera  $(AB, C)$  i  $(AB, D)$ .

Ova definicija očito ima smisla ako su  $A, B, C$  i  $D$  točke pravca u euklidskoj ravnini. Važno je naglasiti da vrijednost dvoomjera ne ovisi samo o položaju četiriju točaka, već i o redosljedu oznaka  $A, B, C, D$ . No, željeli bismo definiciju proširiti i na točke u projektivnoj ravnini, dakle da se među kolinearnim točkama  $A, B, C, D$  može pojaviti i "neizmerno daleka" točka pravca. To će biti vrlo korisno jer se dvoomjer neće promijeniti kad se, projektivitetom, neka od četiri točke pravca  $p$  preslika u "neizmerno daleku" točku pravca  $p'$ .

Nama će biti dostatno uočiti da se u dvoomjeru uvijek mogu "skratiti" one dvije dužine u kojima se pojavljuje "neizmerno daleka" točka. Ako je, primjerice,  $D$  ta točka, a na brojevnom pravcu ostale tri točke imaju koordinate  $a, b$  i  $c$  onda je

$$(AB, CX) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{x-b}{x-a}$$

za bilo koju točku  $X$  različitu od  $A, B, C$ .

Shvatimo li  $(AB, CD)$  kao  $\lim_{x \rightarrow \infty} (AB, CX)$ , dobijemo da je

$$(AB, CD) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-b}{x-a} = \frac{c-a}{c-b}.$$

Analogno bismo postupili za svaku od točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

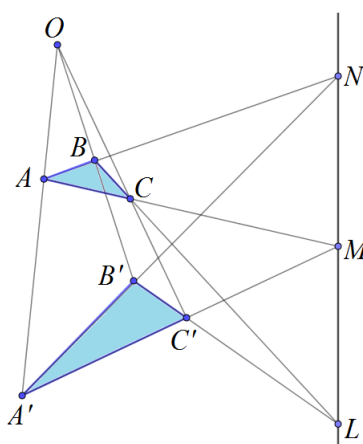
Dvoomjer je osnovna numerička invarijanta projektiviteta, ali to nećemo dokazati ovdje nego u sljedećem poglavlju, u okviru invarijantnosti  $h$ -izraza, budući da je dvoomjer poseban slučaj  $h$ -izraza.

Nadalje, navest ćemo sada definiciju u kojoj je riječ o posebnom položaju dva trovrha u projektivnoj geometriji, koja će nam pomoći razumijeti Desarguesov teorem koji nakon nje slijedi.

**Definicija 3.0.7.** *Neka su  $ABC$  i  $A'B'C'$  dva trovrha u projektivnoj ravnini. Kažemo da su ti trovrha centralno perspektivni ako spojnice odgovarajućih vrhova -  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  - prolaze jednom točkom, označimo je s  $O$ , koja se tada naziva centrom perspektiviteta naznačenih trovrha. Dualno, kažemo da su  $ABC$  i  $A'B'C'$  osno perspektivni ako su sjecišta odgovarajućih stranica -  $AB$  i  $A'B'$ ,  $BC$  i  $B'C'$  te  $CA$  i  $C'A'$  - kolinearne točke. Pravac koji prolazi tim točkama, označimo ga s  $l$ , naziva se tada os perspektiviteta naznačenih trovrha.*

Desarguesov teorem je jako važan u projektivnoj geometriji. Projektivne ravnine se mogu razvrstati na dezargovske i nedezargovske. Projektivna ravnina se naziva Desarguesovom (dezargovskom) ako u njoj vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 3.0.8. (Desarguesov teorem)** *Dva trovrha su centralno perspektivni ako i samo ako su osno perspektivni.*



Slika 3.5: Dva perspektivna trovrha.

Nije teško dokazati da u proširenoj euklidskoj ravnini vrijedi Desarguesov teorem (vidi [2]). Primijetimo da u proširenoj euklidskoj ravnini neke točke i neki pravci iz Desarguesovog teorema mogu biti "neizmjerne daleki". Primjerice, ako su trokuti  $ABC$  i  $A'B'C'$  homotetični (tj. ako su im odgovarajuće stranice paralelne), os perspektiviteta bit će "neizmjerne daleki" pravac.

Na kraju ovog poglavlja ćemo iskazati još dva teorema koji imaju veliku važnost u projektivnoj geometriji pa se često nazivaju temeljnim teoremima projektivne geometrije, prvi od njih je za projektivitete pravaca u ravnini, a drugi za projektivitete ravnina u prostoru. Pritom podrazumijevamo da je riječ o projektivnoj geometriji dobivenoj proširivanjem euklidske, na prethodno opisani način, što je za našu svrhu dostatno.

**Teorem 3.0.9. Temeljni teorem projektivne geometrije**

- a) *Neka su  $p$  i  $p'$  dva pravca u projektivnoj ravnini, ne nužno različiti. Tada postoji točno jedan projektivitet koji tri po volji odabrane različite točke  $A, B$  i  $C$  pravca  $p$  preslikava redom u tri po volji odabrane različite točke  $A', B'$  i  $C'$  pravca  $p'$ .*
- b) *Neka su  $\pi$  i  $\pi'$  dvije ravnine u projektivnom prostoru, ne nužno različite. Tada postoji barem jedan projektivitet ravnina  $\pi$  i  $\pi'$  koji preslikava četiri dane točke  $A, B, C, D$  ravnine  $\pi$  od kojih po tri nisu kolinearne redom u četiri dane točke  $A', B', C', D'$  ravnine  $\pi'$  od kojih po tri nisu kolinearne.*

Dokazi ovih teorema se mogu naći u [2].

Na kraju napominjemo da ovdje nismo niti u glavnim crtama izložili pa stoga ni koristili standardnu koordinatizaciju proširene euklidske ravnine pomoću homogenih koordinata. U tom pristupu nema određenih nespretnosti kakve smo vidjeli u slučaju izračunavanja dvoomjera kad se među točkama pojavi i neka "neizmjerne daleka".

Homogene koordinate uvode se na temelju toga što se točke odnosno pravci mogu interpretirati kao 1-dimenzionalni odnosno 2-dimenzionalni potprostori vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$ , a relacija incidencije jednostavno je relacija inkluzije (ozn.  $\subseteq$ ) to jest relacija "biti potprostor" (ozn.  $\leq$ ). Na taj način, primjerice, točki  $(x, y)$  euklidskog prostora u izabranom koordinatnom sustavu pripadaju homogene koordinate  $\lambda(x, y, 1)$ ,  $\lambda \neq 0$ , odnosno u drukčijem zapisu koordinate  $(x_1 : x_2 : x_3)$  pri čemu je  $x_3 \neq 0$ . Kod homogenih koordinata bitni su omjeri  $x_1 : x_3$  i  $x_2 : x_3$ , jer se ti omjeri ne mijenjaju izborom faktora  $\lambda$ .

"Neizmjerne dalekim" točkama pridružene su tada koordinate  $(x_1 : x_2 : 0)$ , pri čemu  $x_1$  i  $x_2$  nisu oba jednaka 0. Primjerice, klasi paralelnih euklidskih pravaca s koeficijentom smjera  $k$  pridružena je točka  $(1 : k : 0)$ , što je sasvim u skladu s opisom proširenja euklidske ravnine do projektivne. Točka  $(0 : 1 : 0)$  odgovara "vertikalnom" smjeru (smjeru osi  $y$ , tj. pravca  $x = 0$  u euklidskoj ravnini).

Na jednom pravcu projektivne ravnine uvode se homogene koordinate  $(x_1 : x_2)$  tako da

je za euklidske točke  $x_2 \neq 0$  pa  $x_1/x_2$  odgovara realnoj točki  $x$ , dok "neizmjerne daleka" točka pravca dobiva koordinate  $(1 : 0)$ .

Za točke  $A(a_1 : a_2)$ ,  $B(b_1 : b_2)$ ,  $C(c_1 : c_2)$  i  $D(d_1 : d_2)$  dvoomjer se definira kao

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Lako se vidi da se ova definicija dvoomjera podudara s izrazom navedenim na str. 20, kad točku  $A$  na realnom pravcu shvatimo kao  $(a_1 : a_2) = (a_1/a_2 : 1)$ . Ovdje ne smeta ako se pojavi jedna neizmjerne daleka točka jer npr. za  $D(1 : 0)$  je  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2$ , što je različito od 0 budući da  $A$  nije "neizmjerne daleka".

Također, prikazani račun s limesom daje isti rezultat kao što u homogenim koordinatama daje  $(1 : 0)$  za neizmjerne daleku točku pravca.

Homogenim koordinatama nismo se služili jer smo slijedili izvorni Evesov pristup i dokaze, a također u većini praktičnih primjera dostatna je formulacija i razumljiviji račun unutar euklidske ravnine.

## Poglavlje 4

# Evesov teorem i neke njegove primjene

### 4.1 Evesov teorem o invarijantnosti h-izraza

Nakon što smo kroz primjere poznatih teorema i rješavanja nekih praktičnih zadataka stekli barem približan dojam o sadržaju i primjeni Evesovog teorema, u ovom poglavlju ćemo izložiti precizan iskaz teorema, njegov dokaz te još neke tipične primjene. Najprije ćemo definirati h-izraz.

**Definicija 4.1.1.** *Neka je zadan konačan skup  $S$  usmjerenih dužina u euklidskoj ravnini i neka su  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  dva podskupa od  $S$ . Pretpostavimo da su ispunjena sljedeća svojstva:*

(H1) *Svaka točka se pojavljuje jednako mnogo puta kao krajnja točka neke dužine iz  $\mathcal{A}$  i neke dužine iz  $\mathcal{B}$ ;*

(H2) *Svaki pravac sadrži jednako mnogo dužina iz  $\mathcal{A}$  i dužina iz  $\mathcal{B}$ .*

*Tada se omjer umnoška duljina svih usmjerenih dužina iz  $\mathcal{A}$  i umnoška duljina svih usmjerenih dužina iz  $\mathcal{B}$  naziva h-izraz.*

Uz ovu definiciju ćemo navesti nekoliko napomena i primjera.

Duljine usmjerenih dužina uzimaju se s predznakom  $+$  ili  $-$ , ovisno o izabranoj orijentaciji na pravcu na kojem se nalaze te dužine. Dakle, na primjer,  $|BA| = -|AB|$ . Izvorna Evesova definicija govori o h-izrazu kao omjeru umnoška nekih usmjerenih dužina i umnoška nekih drugih usmjerenih dužina, sa svojstvima da se, gledajući formalno algebarski, "skraćuju" sve pojave pojedinih točaka (krajeva dužina) u brojniku i nazivniku tog omjera, a da se također "skraćuju" pojave pravaca određenih tim dužinama u brojniku i u nazivniku.

Strukturu h-izraza je lako shvatiti u konkretnim primjerima, kao onima u iskazu Cevinog i Menelajevog teorema.

Također, dvoomjer četiri kolinearne točke:

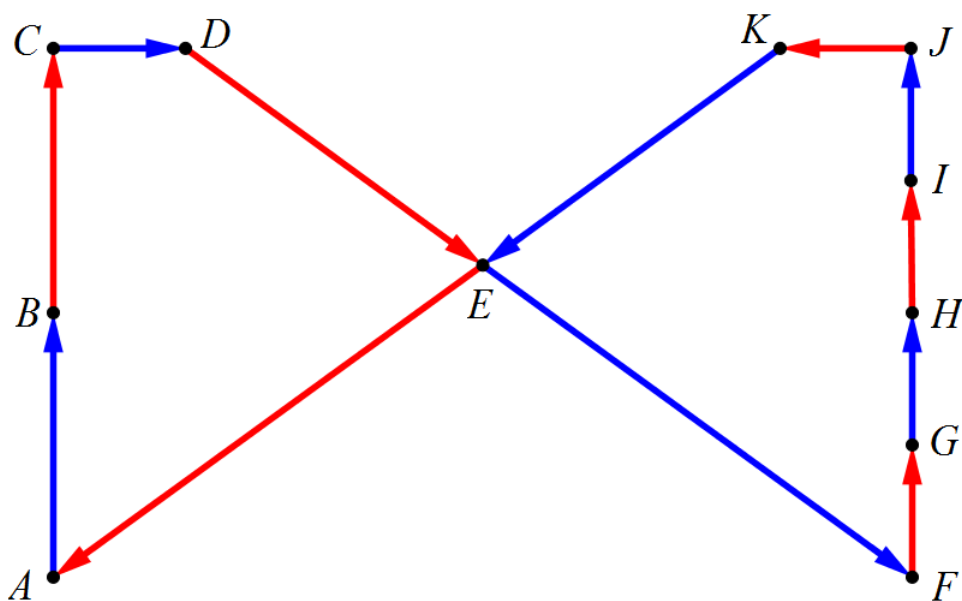
$$(AB, CD) = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC| \cdot |DB|}{|CB| \cdot |AD|}$$

je očito h-izraz.

Uočimo da, primjerice, djelišni omjer  $(AB, C) = \frac{|AC|}{|BC|}$  nije h-izraz.

Evesov teorem o projektivnim invarijantama je generalizacija (poopćenje) dvaju osnovnih geometrijskih rezultata: Cevinog teorema za trokute u euklidskoj ravnini i projektivna invarijanta dvoomjera u projektivnoj geometriji. Sad ćemo navesti još jedan primjer, koji nije povezan s nekim dosad spomenutim teoremima i pojmovima. U njemu ćemo prikazati generalizaciju Evesovog teorema o projektivnim invarijantama.

**Primjer 4.1.2.** Na slici 4.1 ilustriran je primjer na kojem se nalazi pet pravaca u euklidskoj ravnini. Na tim pravcima imamo jedanaest označenih točaka, a te točke određuju dvanaest usmjerenih dužina.



Slika 4.1: Konfiguracija od 11 točki, 5 pravaca i 12 usmjerenih dužina u euklidskoj ravnini.

Eves naziva h-izrazom sljedeći omjer:

$$\frac{|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| \cdot |GH| \cdot |IJ| \cdot |KE|}{|BC| \cdot |DE| \cdot |FG| \cdot |HI| \cdot |JK| \cdot |EA|}$$

Uočimo da se točke  $A, \dots, K$  pojavljuju jednako mnogo puta u brojniku i u nazivniku (na primjer, točka  $E$  se pojavljuje dva puta u brojniku i dva puta u nazivniku), i svaki pravac sadrži jednako mnogo usmjerenih dužina iz brojnika i usmjerenih dužina iz nazivnika. Dakle, ovaj izraz je uistinu h-izraz.

Neki autori definiraju h-izraz u posebnom obliku, kao umnožak omjera od po dviju usmjerenih dužina određenih s po tri kolinearne točke, kao na primjer u Menelajevom teoremu:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|}.$$

Međutim, prethodni primjer (Primjer 4.1.2.) prikazuje da je pojam h-izraza (u izvornom smislu Evesa) širi, jer se ne može uvijek napisati kao umnožak razlomaka oblika  $\frac{|XY|}{|YZ|}$ .

U tom primjeru vidimo da pravac određen dužinom  $\overline{CD}$  sadrži još samo dužinu  $\overline{JK}$ , a omjer  $\frac{|CD|}{|JK|}$  nema spomenuti oblik.

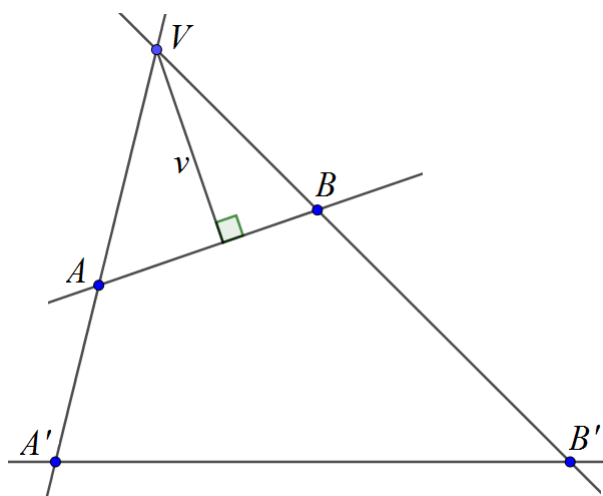
Evesov teorem o projektivnim invarijantama nije ograničen na spomenutu posebnu klasu h-izraza, iako se u primjerima baš takvi najčešće pojavljuju.

Posebno je važna primjedba da se h-izrazi mogu promatrati i u proširenoj euklidskoj ravnini, dakle u projektivnoj ravnini, tako što neke od točaka mogu biti "neizmjerne daleke". To je osobito korisno u primjenama, a formalno se može opravdati detaljnim razmatranjem h-izraza u kojima se pojavljuju "neizmjerne daleke" točke. Ovdje to nećemo provesti, no uvjeti "skraćivanja" rješavaju i te posebne slučajeve.

Sad možemo iskazati glavni rezultat o h-izrazu.

**Teorem 4.1.3. (Evesov teorem o projektivnim invarijantama)** Vrijednost  $h$ -izraza invarijantna je pod djelovanjem bilo kojeg projektiviteta.

*Dokaz.* Dovoljno je provjeriti za jedan perspektivitet (centralnu projekciju) jer projektivitet je, podsjetimo, kompozicija nekoliko perspektiviteta. Neka je  $V$  centar perspektiviteta, a  $\overline{AB}$  neki od segmenata u  $h$ -izrazu.



Označimo  $v = d(V, AB)$ . Vrijedi da je  $P(\triangle ABV) = \frac{|AB| \cdot v}{2}$ , a možemo ju izračunati i pomoću formule  $P(\triangle ABV) = \frac{|VA| \cdot |VB| \cdot \sin \angle AVB}{2}$ . Kada izjednačimo te dvije formule dobijemo sljedeće:

$$v \cdot |AB| = |VA| \cdot |VB| \cdot \sin \angle AVB,$$

a iz toga slijedi da je

$$|AB| = \frac{|VA| \cdot |VB| \cdot \sin \angle AVB}{v}. \quad (4.1)$$

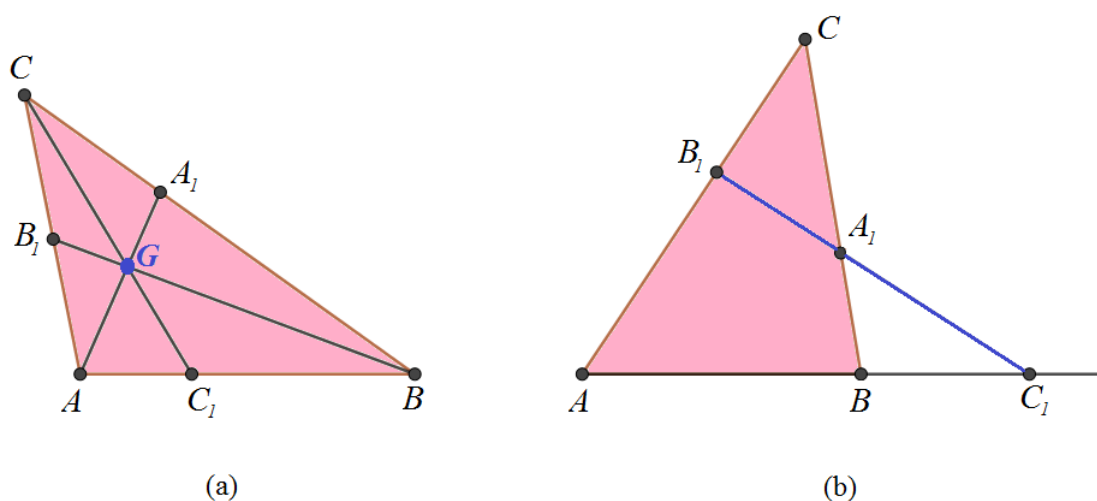
Supstituiramo  $|AB|$  desnom stranom izraza (4.1) u  $h$ -izrazu. Zbog prvog svojstva  $h$ -izraza skratit će se svi  $|VA|$ ,  $|VB|$ , itd. Zbog drugog svojstva će se i svaki  $v$  skratiti. Nakon skraćivanja nam ostaje samo izraz sa sinusima kutova. No, imamo da je  $\angle AVB = \angle A'VB'$ , itd. pa vrijedi ista relacija za sinuse jednih i drugih kutova, tj. dobijemo da se umnošci sinusa kutova podudaraju u oba  $h$ -izraza.  $\square$

Lako se vidi da analogno vrijedi i ako je npr. slika točke  $B$  neizmjereno daleka točka, jer i tada  $\angle AVB = \angle A'VB'$ , a  $|VB'|$  će se "skratiti" po definiciji  $h$ -izraza.



Projektivna nepromjenjivost dvoomjera je samo poseban slučaj Evesovog teorema o projektivnim invarijantama. Dokaz da je dvoomjer invarijantan pod projektivitetima je isti kao i dokaz Evesovog teorema.

H. W. Eves bio je svjestan mogućnosti različitih primjena svog teorema o projektivnim invarijantama. Na primjer, on je pokazao kako primijeniti teorem na dokaz klasičnih teorema – Cevinog i Menelajevog. Sad ćemo dužine u izrazima promatrati kao usmjerene dužine.



Slika 4.2: Dijagrami za Cevin (a) i Menelajev (b) teorem.

Kao što smo već na početku rada naveli, Cevin teorem kaže da ako točke  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pripadaju redom stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  kao na slici, tada se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  sijeku u točki  $G$  ako i samo ako odgovarajući h-izraz zadovoljava sljedeće:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

tj.

$$\frac{|AC_1| \cdot |BA_1| \cdot |CB_1|}{|C_1B| \cdot |A_1C| \cdot |B_1A|} = 1. \quad (4.2)$$

Lijeva strana izraza (4.2) je h-izraz. Da bi pružio primjer primjene Evesovog teorema, Eves je dokazao da, uz konfiguraciju kao što je na slici 4.2(a), tu postoji projektivitet koji preslikava točke  $A$ ,  $B$ , ... u točke  $A'$ ,  $B'$ , ... tako da je  $G'$  težište trokuta  $A'B'C'$ . Naime, na trokute  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$  može se primijeniti Desarguesov teorem budući da su centralno

perspektivni s obzirom na točku  $G$ . Dakle, trokuti su i osno perspektivni, što znači da se sjecišta pravaca  $AB$  i  $A_1B_1$ ,  $BC$  i  $B_1C_1$  te  $CA$  i  $C_1A_1$  nalaze na jednom pravcu  $l$ , osi perspektiviteta. Sad izaberimo projektivitet koji pravac  $l$  preslikava u neizmjereno daleki pravac. (Mogućnost takvog izbora lako je vidljiva npr. iz slike 3.4 pri čemu se trokut  $ABC$  nalazi u ravnini  $\pi_1$ .)

Budući da za projektivnu sliku vrijedi da su paralelni pravci  $A'B'$  i  $A_1B_1$ ,  $B'C'$  i  $B_1C_1$  te  $C'A'$  i  $C_1A_1$ , lako se vidi da su dužine  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  i  $C_1A_1$  srednjice trokuta  $A'B'C'$  pa je točka  $G'$  stoga težište trokuta  $A'B'C'$ . (Npr. iz činjenice da su  $C_1B'A_1B_1$  i  $C_1A_1C'B_1$  paralelogrami sa zajedničkom stranicom  $B_1C_1$  vidimo da je  $|B'A_1| = |A_1C'|$ .)

Sada vrijedi

$$\frac{|A'C_1|}{|C_1B'|} = \frac{|B'A_1|}{|A_1C'|} = \frac{|C'B_1|}{|B_1A'|} = 1$$

pa je i njihov umnožak jednak 1.

Zbog invarijantnosti h-izraza, vidimo da je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

Time je dokazan jedan smjer Cevinovog teorema, da je umnožak navedenih omjera jednak 1 ako se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u jednoj točki.

Lako se dokaže i obrat jer ako se  $AA_1$  i  $BB_1$  sijeku u točki  $G$ , a pritom za neku točku  $C_2$  na pravcu  $AB$  vrijedi

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

onda  $C_2$  mora biti sjecište  $CG$  i  $AB$ , jer po dokazanom smjeru imamo da je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$$

pa je stoga  $C_1 = C_2$ .

Za dokaz Menelajevog teorema primijeni se projektivitet koji pravac  $A_1B_1$  preslika u "neizmjereno daleki" pravac pa se dobije da je:

$$\frac{|A'C_1|}{|C_1B'|} = \frac{|B'A_1|}{|A_1C'|} = \frac{|C'B_1|}{|B_1A'|} = -1,$$

pa je

$$\frac{|A'C'_1| \cdot |B'A'_1| \cdot |C'B'_1|}{|C'_1B'_1| \cdot |A'_1C'_1| \cdot |B'_1A'_1|} = -1.$$

Daljnje zaključivanje je analogno.

Uočimo da se u ovom primjeru vrijednost h-izraza izračunavala tako da su se promatrane figure u ravnini projektivno preslikale u neku drugu, posebno izabranu tako da se vrijednost h-izraza lako izračuna. Zatim se primijeni projektivna invarijantnost h-izraza po Evesovom teoremu.

Primijetimo još da je važan i predznak koji predstavlja izbor orijentiranih dužina, za razliku od uzimanja samo apsolutnih vrijednosti. Naime, ako je vrijednost h-izraza jednaka  $x$  onda je vrijednost  $|x|$  invarijantna. Međutim, obrat ne vrijedi općenito.

Uočimo da smo za vrijednost h-izraza u Menelajevom teoremu ovdje dobili  $-1$ , dok smo u prvom poglavlju za odgovarajući umnožak dobili vrijednost  $1$  (Teorem 1.2.1.). Razlog je u tome što smo sada uzimali orijentirane dužine pa je predznak bio važan, dok smo za Teorem 1.2.1. uzimali samo apsolutne vrijednosti. Naravno, ako je vrijednost h-izraza invarijantna pod djelovanjem bilo kojeg projektiviteta, onda je i njezina apsolutna vrijednost invarijantna. Međutim, treba biti oprezan npr. kod dvoomjera. Općenito vrijedi da za kolinearne točke  $A, B, C$  i realni broj  $r \neq 0, 1$  postoji točka  $D$  takva da je  $(AB, CD) = r$ . (To se lako vidi iz računa na 20. stranici.)

No, uzmemo li  $|r|$ , postojat će dvije različite točke  $D_1$  i  $D_2$  s jednakim dvoomjerom

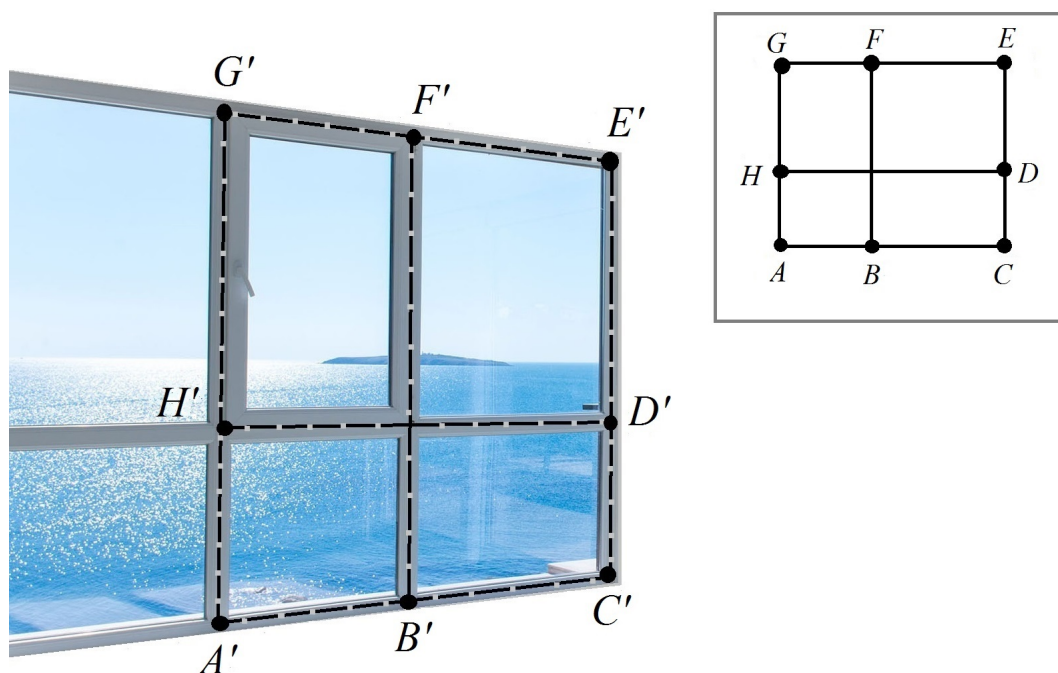
$$(AB, CD_1) = (AB, CD_2) = |r|,$$

pri čemu neće postojati projektivitet koji  $A, B, C, D_1$  preslikava redom u točke  $A, B, C, D_2$ .

## 4.2 Još neke praktične primjene Evesovog teorema

Mogućnosti primjene Evesovog teorema mogu se uočiti na mnogim fotografijama koje svakodnevno vidamo u časopisima, novinama i na internetu. Tome je tako jer možemo povezati h-izraz s mnogim objektima kao što su popločeni podovi, zidovi od cigle, prozori, oznake na parkiralištima, atletski tereni i mnogi drugi. Cilj takvog eksperimentiranja jest vidjeti vrijede li predviđene vrijednosti u slučaju pažljivog mjerenja na danoj fotografiji. Sve što nam je potrebno jest fotografija takvog objekta snimljena iz prikladno odabranog kuta, ravnalo s oznakama koje sadržavaju finu gradaciju u milimetrima, te malo matematičke znatiželje.

Kao jednostavan primjer, slika 4.3 prikazuje fotografiju prozora kuće koja ima s tog prozora pogled na ocean. Dodatak na slici je kvalitativni pogled sprijeda na prozor; dužine  $\overline{HD}$  i  $\overline{BF}$ , koje dijele prozorska okna, paralelne su stranicama  $\overline{AC}$  i  $\overline{CE}$ .



Slika 4.3: Fotografija prozora i pogled sprijeda (dodatak).

Očito je

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FG|} \cdot \frac{|GH|}{|HA|} = \frac{|AB|}{|FG|} \cdot \frac{|CD|}{|HA|} \cdot \frac{|EF|}{|BC|} \cdot \frac{|GH|}{|DE|} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1.$$

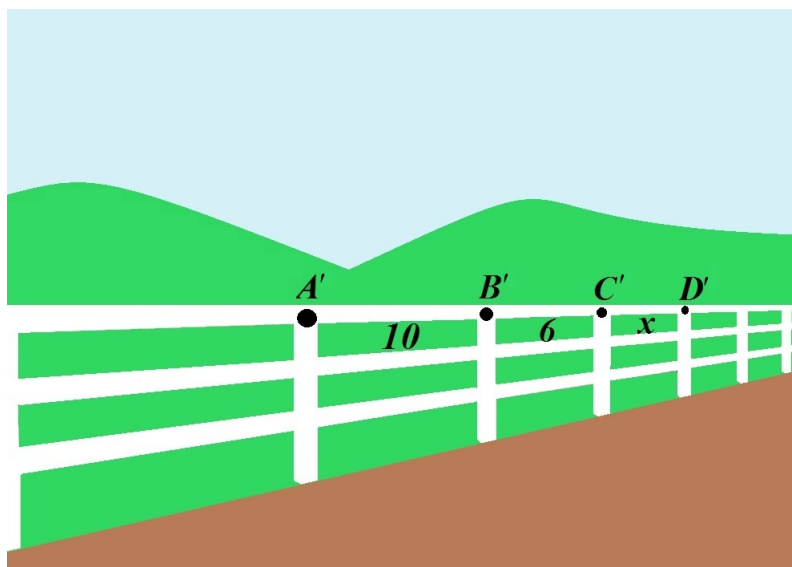
Na fotografiji, perspektivne slike točaka označene su kao  $A', B', C', D', E', F', G', H'$ . Prema Evesovom teoremu trebamo dobiti kako slijedi

$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} \cdot \frac{|C'D'|}{|D'E'|} \cdot \frac{|E'F'|}{|F'G'|} \cdot \frac{|G'H'|}{|H'A'|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FG|} \cdot \frac{|GH|}{|HA|} = 1.$$

Rubove prozorskog okvira koji dijele prozorska okna pojednostavili smo pravcima koje smo prikazali iscrtkanim linijama. Ako pažljivo izmjerimo naznačene dužine uzduž iscrtnih pravaca s ravnalom koje ima označene milimetre te ako mjerenje bude dovoljno pažljivo izvršeno, rezultat bi trebao biti blizu 1.

U sljedećem primjeru ćemo primjeniti dvoomjer.

**Primjer 4.2.1.** *Primijenimo dvoomjer na fotografiji ograde iz perspektive na slici 4.4. Pretpostavimo da su, u nekim dijelovima dužine, udaljenosti između vrhova stupova ograde naznačeni kao na slici:  $|A'B'| = 10$  i  $|B'C'| = 6$ . Ako pritom pretpostavimo da su stupovi ograde postavljeni u jednakim razmacima i ako označimo da je  $x = |C'D'|$ , kolika je vrijednost od  $x$ ?*



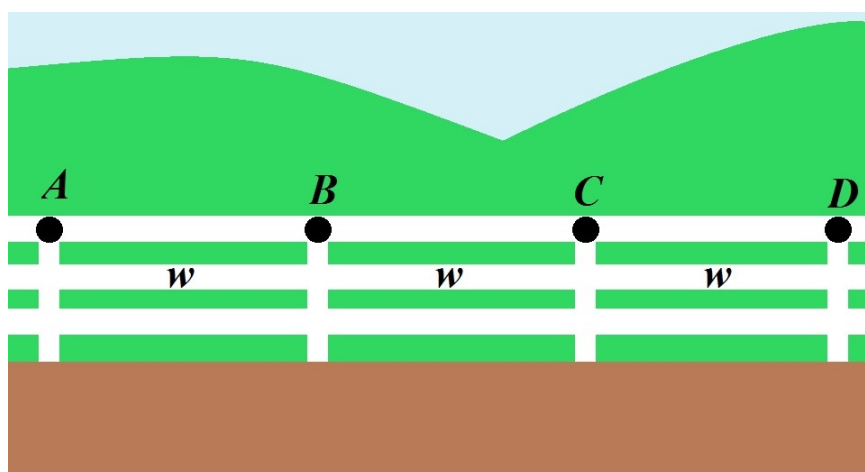
Slika 4.4: Ograda.

Da bismo odgovorili na to pitanje, neka pozitivan smjer ide od  $A'$  prema  $B'$  (na slici 4.4), i koristimo jednakost za dvoomjer četiri kolinearne točke da bismo izračunali

$$(A'B', C'D') = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} \cdot \frac{|B'D'|}{|D'A'|} = \frac{16}{-6} \cdot \frac{x+6}{-(x+16)} = \frac{8x+48}{3x+48}. \quad (4.3)$$

Nadalje, razmotrimo frontalni pogled na ogradu (slika 4.5). Označit ćemo vrhove stupova ograde sa  $A, B, C, D$  tako da zamislimo da su točke  $A', B', C', D'$  na slici 4.4 njihove perspektivne slike.

Pretpostavljamo da su stupovi ograde jednako udaljeni (kao što i piše u zadatku) pa na slici 4.5 označavamo da je  $|AB| = |BC| = |CD| = w$  za neki pozitivan broj  $w$ .



Slika 4.5: Frontalni pogled na ogradu.

Ponovno neka pozitivan smjer ide od  $A$  prema  $B$ , slijedi

$$(AB, CD) = \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{2w}{-w} \cdot \frac{2w}{-3w} = \frac{4}{3}. \quad (4.4)$$

Projektivna nepromjenjivost dvoomjera implicira da su vrijednosti izraza u (4.3) i (4.4) jednaki, pa stoga

$$\frac{8x + 48}{3x + 48} = \frac{4}{3}$$

Rješavanjem prethodnog za  $x$ , dobijemo da je  $x = 4$ . (Da su nacrtana samo prva tri stupa ograde na slici 4.4, mogli bismo locirati i nacrtati ostatak pomoću rekurzivne primjene ove metode na posljednje dvije poznate udaljenosti između njihovih vrhova.)

Ovo poglavlje završimo jednom općenitom napomenom o Evesovom teoremu.

Premda je po mišljenju više matematičara Evesov teorem ostao relativno nezapažen kad je objavljen u knjizi [4], u posljednjih dvadesetak godina pojačano je zanimanje za proučavanje dosega tog teorema i za njegova poopćenja.

U uvodu jednog od novijih takvih radova A. Coffman [1] napisao je i sljedeće:

Tvrdnja Evesovog teorema glasi da je vrijednost  $h$ -izraza invarijanta pod projektivnim transformacijama ravnine. Srodni identiteti za umnoške udaljenosti poznati su u projektivnoj geometriji barem još iz vremena Ponceleta (klasična knjiga iz 1822. godine), ali navedenu formulaciju primjereno je pripisati Evesu.

Evesov teorem, kad se iskaže na čisto projektivan način (pomoću homogenih koordinata, a ne euklidskih udaljenosti), također je poseban slučaj familije invarijantnih omjera umnožaka determinanti homogenih koordinata u projektivnom prostoru nad poljem  $K$ . Ti omjeri bili su dobro poznati u teoriji invarijanti u 19. stoljeću, ali su u posljednje vrijeme korišteni (i katkad iznova otkrivani) u projektivnoj geometriji primijenjenoj u računarskim metodama, primjerice u računalnom vidu i fotogrametriji ili za automatizirane dokaze.

## Poglavlje 5

# Invarijante izomorfizma za projektivne konfiguracije

U ovom poglavlju prikazat ćemo jedan tip invarijante koji je oblikom i svojstvima blizak Evesovom  $h$ -izrazu, ali se ipak razlikuje u nekim bitnim karakteristikama. Ovdje će se razmatrati izomorfizmi projektivnih konfiguracija, dakle preslikavanja među stanovitim podskupovima točaka i pravaca u projektivnoj ravnini koja čuvaju incidenciju, ali nije nužno da djeluju na cijeloj projektivnoj ravnini. Za takva preslikavanja također postoje vrlo korisne invarijante, premda su ograničene samo na pojedine konfiguracije.

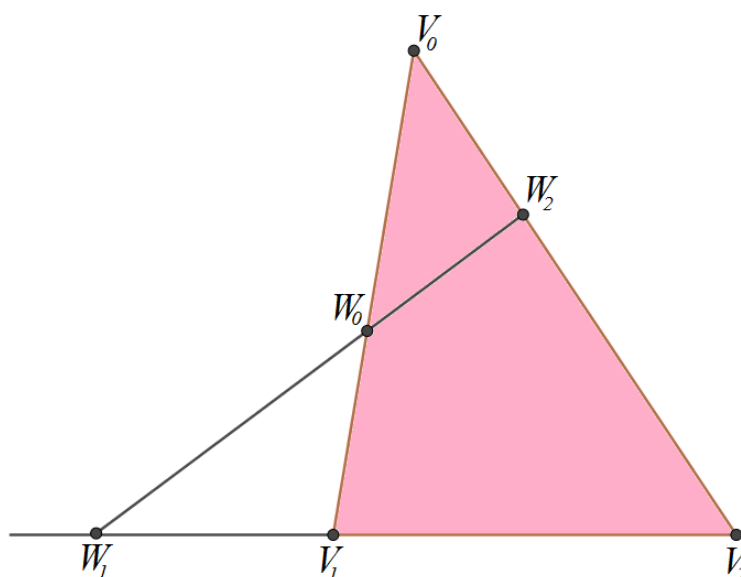
Naime, ako promatramo projektivitet projektivne ravnine na samu sebe ili na neku drugu ravninu u projektivnom prostoru, svaki će se, primjerice, potpuni četverovrh (skup od četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne i šest pravaca koji ih spajaju) preslikati također u potpuni četverovrh. Štoviše, po Temeljnem teoremu postoji točno jedan projektivitet koji će zadani četverovrh  $ABCD$  preslikati u drugi zadani četverovrh  $A'B'C'D'$  pa će se i pravci  $AB, AC, AD, \dots$  preslikati redom u pravce  $A'B', A'C', A'D', \dots$ .

No, ako promatramo, primjerice, dvije Desarguesove konfiguracije, a to su skupovi od po deset točaka i deset pravaca zadanih parom centralno (a onda i osno) perspektivnih trovrha, ne postoji uvijek projektivitet cijele ravnine koji preslikava jednu od tih konfiguracija na drugu.

Međutim, svakako postoji bijekcija koja preslikava jednu konfiguraciju na drugu, čuvajući pritom incidenciju.

Osvrnimo se sad ponovno na Menelajev teorem, odnosno na konfiguraciju na koju se on odnosi.





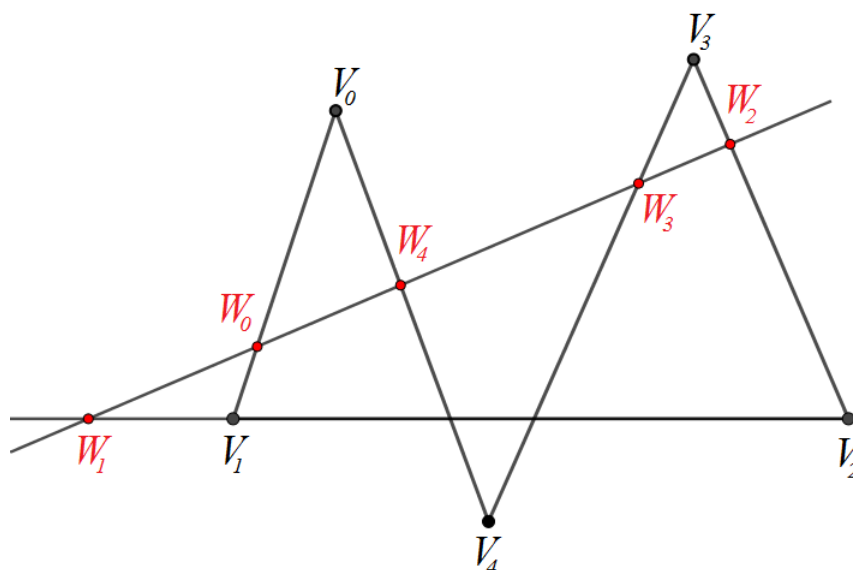
Slika 5.1: Dijagram za Menelajev teorem.

Klasični oblik teorema (slika 5.1) podrazumijeva trokut \$(V\_0, V\_1, V\_2)\$ i transverzalu, pri tome mislimo na bilo koji pravac koji ne prolazi iz vrhovima, a koji siječe stranicu \$V\_iV\_{i+1}\$ u točki \$W\_i\$. Ovdje su svi indeksi reducirani po modulu 3. Menelajev teorem kaže da

$$\frac{\|V_0W_0\|}{\|W_0V_1\|} \cdot \frac{\|V_1W_1\|}{\|W_1V_2\|} \cdot \frac{\|V_2W_2\|}{\|W_2V_0\|} = -1. \quad (5.1)$$

Dvostruke okomite crte označavaju usmjerene dužine označenih segmenata. Također, postoji oblik ovog teorema i za \$n\$-terokut; npr. za \$n = 5\$ je prikazan na slici 5.2. Uz odgovarajući zapis (indeksi su reducirani po modulu 5),

$$\prod_{i=0}^4 \frac{\|V_iW_i\|}{\|W_iV_{i+1}\|} = -1. \quad (5.2)$$



Slika 5.2: Dijagram za Menelajev teorem za peterokut.

Na prvi pogled se može činiti da je oblik teorema za  $n$ -terokut samo izravna generalizacija klasičnog teorema, ali zapravo je to svojstvo potpuno drugačije naravi. S obzirom da postoji nesingularni projektivitet koji preslikava bilo koji trokut i transverzalu u bilo koji drugi trokut i transverzalu, jednakost (5.1) povlači da je njezina lijeva strana projektivna invarijanta – činjenica koja je posljedica i Evesovog teorema u što ćemo se uskoro i uvjeriti. Ipak, općenito, dva peterokuta s transverzalama nisu projektivno ekvivalentni (ne postoji uvijek projektivitet koji preslikava jedan peterokut i transverzalu u drugi peterokut i transverzalu), pa lijeva strana jednakosti (5.2) očito ima mnogo jače svojstvo invarijantnosti (nepromjenjivosti). Kaže se da su dvije konfiguracije (likovi) u projektivnoj ravnini izomorfne ako postoji bijekcija koja preslikava elemente (točke i pravce) jedne na drugu, i usklađena je s relacijom incidencije („čuva incidenciju“). Bilo koja brojčana vrijednost definirana za projektivnu konfiguraciju naziva se invarijantom izomorfizma ako poprima istu vrijednost za sve izomorfne konfiguracije. Na primjer, lijeva strana jednakosti (5.2) jest invarijanta izomorfizma obzirom da poprima istu vrijednost za svaki peterokut s transverzalom. Naravno, budući da su projektivno ekvivalentne konfiguracije izomorfne, onda su sve projektivne invarijante izomorfne invarijante, ali ne i obratno. Invarijante izomorfizma mogu biti konstruirane upotrebom Menelajevog i Cevinog teorema za  $n$ -terokute, no ako je  $n > 3$ , općenito, neće se raditi o projektivnim invarijantama. Mnogo snažnija metoda jest ona pomoću Nehringovih nizova. Pored Nehringovih nizova objasniti ćemo još i Glavni teorem koji se koristi pri tvorbi invarijanti.

## 5.1 Nehringovi nizovi

Neka su  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  nekih  $n$  pravaca i  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  neka je  $n$  točaka u projektivnoj ravnini tako da za svaki  $i$  točka  $P_i$  ne leži ni na jednom pravcu  $b_i, b_{i+1}$ . Ovdje, i kroz cijelo poglavlje, svi indeksi  $j$  su reducirani po modulu  $n$  kako bi se zadovoljilo  $0 \leq j < n$ . Promotrimo niz od  $2n$  članova u kojem se pravci i točke izmjenjuju:

$$(b_0, P_0, b_1, P_1, b_2, \dots, b_{n-1}, P_{n-1}) \quad (5.3)$$

Izaberemo bilo koju točku  $R_0$  na pravcu  $b_0$  i konstruiramo točke  $R_1, R_2, \dots, R_n$  kako slijedi: pravac  $R_0P_0$  siječe  $b_1$  u točki  $R_1$ , pravac  $R_1P_1$  siječe  $b_2$  u točki  $R_2$ , itd. Pravac  $R_{n-2}P_{n-2}$  siječe  $b_{n-1}$  u  $R_{n-1}$  i, konačno,  $R_{n-1}P_{n-1}$  siječe  $b_0$  u  $R_n$ . Tada, ako se  $R_0$  i  $R_n$  uvijek poklapaju, bez obzira na točku  $R_0$  na  $b_0$  od koje smo započeli konstrukciju, niz oblika (5.3) se naziva Nehringov niz duljine  $n$ .

Na prvi pogled može se činiti da je uvjet pod kojim niz točaka i pravaca tvori Nehringov niz neobičan i neprirodan. No to nije tako; iako nisu prepoznati kao takvi, oni se često pojavljuju u ravninskoj projektivnoj geometriji. Opisat ćemo nekoliko primjera općih metoda konstruiranja Nehringovih nizova.

Konstruiranje niza točaka  $R_1, R_2, \dots, R_n$  koji počinje od proizvoljne početne točke  $R_0$  na  $b_0$ , kao što je opisano iznad, bit će upotrijebljeno mnogo puta u ovom radu, pa ćemo se, u svrhu izbjegavanja ponavljanja, pozvati na nju kao na *osnovnu konstrukciju*. Također, kada god imamo alternirajući (naizmjeničan) niz pravaca i točaka koji je ili Nehringov niz ili bi takav mogao biti, trebamo prešutno pretpostaviti da niti jedna od točaka ne leži niti na jednom od dva pravca koji su susjedni u tom nizu ( $P_{n-1}$  ne leži niti na  $b_{n-1}$  niti na  $b_0$ ).

S obzirom da je Nehringov niz definiran isključivo pomoću točaka i pravaca, možemo primijeniti načelo dualnosti. Jednostavno se može provjeriti da je dual Nehringova niza također Nehringov niz.

Naime, vidimo da ako pojedina točka ne pripada nijednom od susjednih pravaca u nizu, onda niti jedan pravac ne prolazi bilo kojom od susjednih točaka.

Drugi način na koji se može izraziti uvjet da je niz Nehringov niz jest pomoću perspektiviteta. Očito je da je niz (5.3) Nehringov niz ako i samo ako kompozicija niza perspektiviteta

$$b_0 \bar{\wedge}^{P_0} b_1 \bar{\wedge}^{P_1} \dots \bar{\wedge}^{P_{n-1}} b_0 \quad (5.4)$$

ima kao rezultat (kompoziciju)  $\pi : b_0 \bar{\wedge} b_0$  koji je identiteta. Ova formulacija omogućuje da se perspektiviteti i projektiviteti koriste u istraživanju svojstava Nehringovih nizova. Na primjer, ako možemo dokazati da je  $R_0 = R_n$  za tri različita položaja  $R_0$  na  $b_0$ , tada projektivitet  $\pi$  ima tri točke koje se podudaraju sa svojom slikom i zato mora biti  $R_0 = R_n$

za sve točke  $R_0$  na  $b_0$ .

Kao sljedeći primjer, interpretacija u terminima perspektiviteta odmah vodi do sljedećih (dualnih) rezultata;

- (i) Neka su  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  bilo koji konkurentni pravci (ima ih  $n$ ), a  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  bilo koje točke (ima ih  $n - 1$ ). Tada je moguće pronaći točku  $P_0$  tako da niz (5.3) bude Nehringov niz.
- (ii) Neka su  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  bilo koje kolinearne točke (ima ih  $n$ ), a  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  bilo koji pravci (ima ih  $n - 1$ ). Tada je moguće pronaći pravac  $p_0$  tako da je  $(p_0, B_0, p_1, B_1, \dots, p_{n-2}, B_{n-2}, p_{n-1}, B_{n-1})$  Nehringov niz.

U Nehringovom nizu (5.3) točke  $P_i$  treba smatrati čvrstima i pravce  $R_0P_0R_1, R_1P_1R_2, \dots$  kao 'pokretnima' dok  $R_0$  varira na  $b_0$ , i, u skladu s time, promatrati ih kao zrake i točke  $P_i$  promatrati kao pivote / čvrste točke. Pravci u nizu će se zvati osnovni pravci, ili jednostavno baze. U dijagramima, pivoti i osnovni pravci će biti označeni podebljanim točkama i pravcima; ostali pravci će biti svjetliji, a zrake će biti označene isprekidanom crtom. Uz to, na slikama i u tekstu, točke će biti prikazane velikim tiskanim slovima, a pravci malim tiskanim slovima, s ili bez indeksa. Općenito, koristit ćemo  $P_0, P_1, \dots$  za pivote i  $b_0, b_1, \dots$  za baze.

U svakom od primjera u sljedećem poglavlju dajemo tri parametra  $n, p$  i  $b$ . Prvi od navedenih je  $n$ , duljina Nehringovog niza, odnosno, ukupni broj točaka i ukupni broj pravaca u njemu. Slova  $p$  i  $b$  će predstavljati broj pivota i broj osnovnih pravaca. Jasno je da je  $p \leq n$  i da je  $b \leq n$ , te će se pojaviti stroge nejednakosti ako se neki od pivota ili baza ponavljaju. Određivanje svih triju komponenti trojki  $(n, p$  i  $b)$  koje odgovaraju Nehringovim nizovima je otvoren problem. Na primjer, ako je  $p = b = 2$ , tada je lako primijetiti da  $n$  mora biti paran i najmanje 4.

## 5.2 Osnovni teorem o invarijantama Nehringovih nizova

**Teorem 5.2.1.** *Neka je  $(b_0, P_0, b_1, P_1, \dots, b_{n-1}, P_{n-1})$  Nehringov niz. Počevši od točke  $R_0$  na  $b_0$  primijenimo osnovnu konstrukciju kako bismo odredili  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ . Tada, dok  $R_0$  varira na  $b_0$ ,*

$$\frac{\|R_0P_0\|}{\|P_0R_1\|} \cdot \frac{\|R_1P_1\|}{\|P_1R_2\|} \cdot \dots \cdot \frac{\|R_{n-2}P_{n-2}\|}{\|P_{n-2}R_{n-1}\|} \cdot \frac{\|R_{n-1}P_{n-1}\|}{\|P_{n-1}R_0\|} = \text{konstanta}, \quad (5.5)$$

*odnosno, vrijednost lijeve strane je neovisna o izboru  $R_0$  na  $b_0$  dokle god je lijeva strana određena (niti jedan od nazivnika ne poprima vrijednost nula). Štoviše, vrijednost konstante na desnoj strani iznosi  $(-1)^n$  ako su pravci  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  konkurentni (prolaze istom točkom) ili su pivoti  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  kolinearni.*

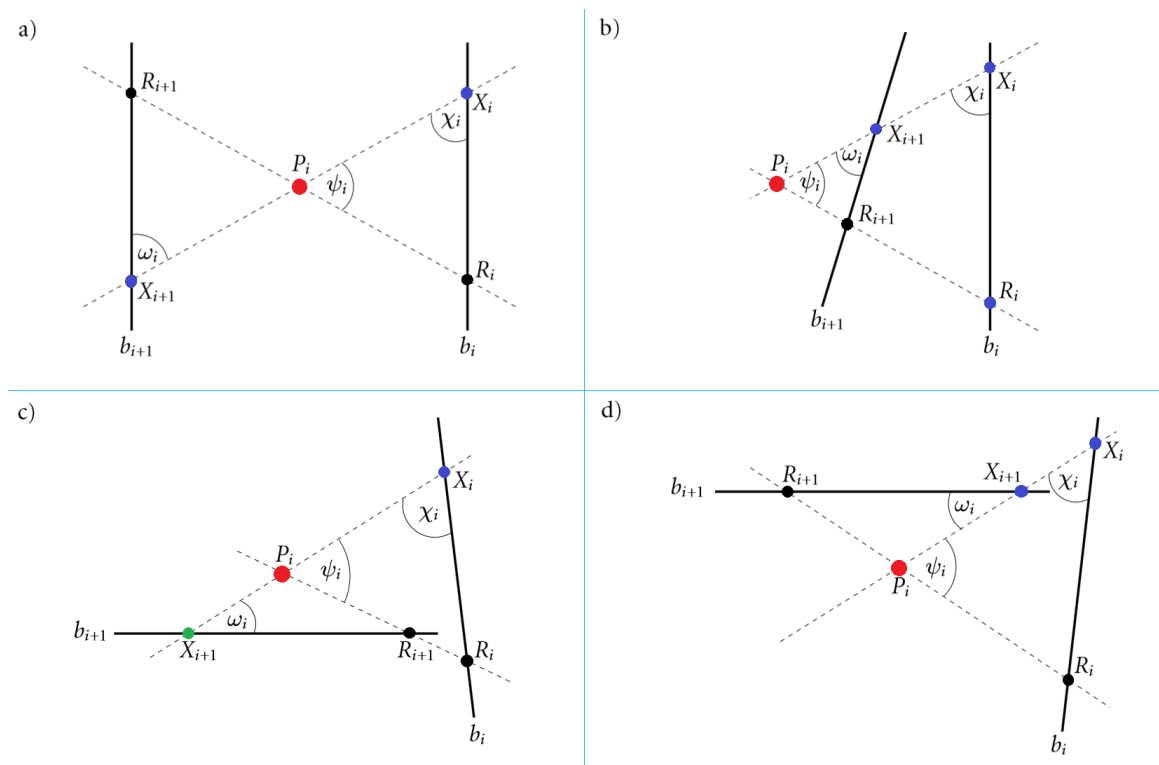
Prije no što dokažemo teorem, potrebna su neka pojašnjenja. Na prvi pogled bi se moglo činiti da jednakost (5.5) nema smisla s obzirom da koristi usmjerene dužine kao što je  $\|AB\|$ , a očito je da one nisu određene u projektivnoj ravnini. Ipak, ako su  $A, B$  i  $C$  različite kolinearne točke, tada je  $\|AB\|/\|BC\|$  invarijanta pod afinim transformacijama te je ovaj količnik definiran u afinoj ravnini. Nadalje, lijeva strana jednakosti (5.5) jest ono što Eves naziva  $h$ -izrazom, a rekli smo već da je to umnožak razlomaka koji zadovoljava sljedeća dva uvjeta

- (H1) Slova koja se pojave u svakom omjeru (npr.  $R_0, P_0, R_1$  u prvom omjeru) označavaju kolinearne točke,
- (H2) ako se svaki član kao što je  $\|AB\|$  zamijeni simboličnim umnoškom  $ab$ , tada dolazi do potpunog skraćivanja (tj. svako slovo se pojavi jednako mnogo puta u brojnicima i nazivnicima).

Sada možemo objasniti što se mislilo pod jednakošću (5.5). Najprije smjestimo afinu ravninu u projektivnu ravninu tako da neizmjereno daleki pravac ne pripada promatranoj konfiguraciji i ne sadrži nijednu točku te konfiguracije. Tada se izraz na lijevoj strani može izračunati u afinoj ravnini, a po Evesovom teoremu njegova vrijednost ne ovisi o načinu smještanja affine ravnine u projektivnu pa je stoga definirana u projektivnoj ravnini.

Iz Evesovog teorema također slijedi da se vrijednost izraza na lijevoj strani neće promijeniti ako se na promatranu konfiguraciju primijeni bilo koji projektivitet. No, Teorem 5.2.1 govori i mnogo više od toga, naime on govori da se vrijednost tog izraza ne mijenja dok točka  $R_0$  varira na pravcu  $b_0$ . Prvenstveno su nam od interesa situacije kad variranje točke  $R_0$  ne odgovara projektivnoj transformaciji.

*Dokaz.* S obzirom na zadani Nehringov niz  $(b_0, P_0, b_1, P_1, \dots, b_{n-1}, P_{n-1})$ , izaberemo  $X_0$  kao bilo koju točku na  $b_0$ , i pomoću osnovne konstrukcije odredimo  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ , tako da  $X_0 = b_0 \cap P_{n-1}X_{n-1}$ . Za  $R_0$  izaberemo bilo koju točku na  $b_0$ , a da je različita od  $X_0$ , i pomoću osnovne konstrukcije odredimo  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ , tako da  $R_0 = b_0 \cap P_{n-1}R_{n-1}$ . Za svaki  $i = 0, \dots, n - 1$  razmotrimo zrake  $X_iP_iX_{i+1}$  i  $R_iP_iR_{i+1}$ . Na slici 5.3 su prikazana četiri slučaja koja nastaju ovisno o tome je li  $P_i$  razdvaja ili ne razdvaja  $X_i$  i  $X_{i+1}$ , te razdvaja li ili ne razdvaja  $R_i$  i  $R_{i+1}$ .



Slika 5.3: Četiri slučaja.

Za početak, uzmimo da su sve duljine pravca pozitivne, odnosno, bez predznaka. Tada, ako  $\angle R_i P_i X_i = \psi_i$ ,  $\angle P_i X_i R_i = \chi_i$  i  $\angle P_i X_{i+1} R_{i+1} = \omega_i$ , vidimo, iz elementarne geometrije,  $|R_i P_i| / \sin \chi_i = |R_i X_i| / \sin \psi_i$  i  $|P_i R_{i+1}| / \sin \omega_i = |R_{i+1} X_{i+1}| / \sin \psi_i$ . Odatle, eliminacijom  $\sin \psi_i$ ,

$$\frac{|R_i P_i|}{|P_i R_{i+1}|} = \frac{|R_i X_i| \sin \chi_i}{|R_{i+1} X_{i+1}| \sin \omega_i}. \quad (5.6)$$

Htjeli bismo pretvoriti ovu relaciju u relaciju između orijentiranih dužina. Da bismo to napravili, potrebno je dodijeliti pravcu  $b_i$  pozitivan smjer  $\overrightarrow{R_i X_i}$ ; tada

$$\frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|} = \pm \frac{\sin \chi_i \|R_i X_i\|}{\sin \omega_i \|R_{i+1} X_{i+1}\|} \quad (5.7)$$

gdje je znak pozitivan ako  $P_i$  razdvaja  $R_i$  i  $R_{i+1}$  (slika 5.3 a) i d)), a negativan ako ne razdvaja (slika 5.3 b) i c)). Stoga

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|} = \pm K \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|R_i X_i\|}{\|R_{i+1} X_{i+1}\|}. \quad (5.8)$$

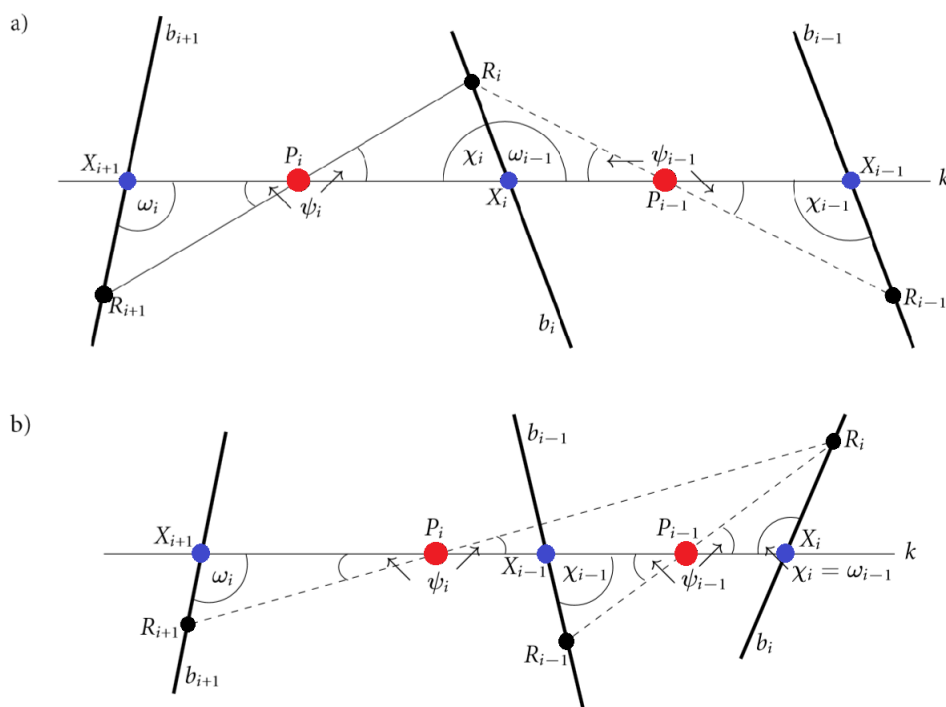
Umnožak desne strane je očito jednak 1, gdje je  $K$  omjer sinusa kutova  $\chi_i$  i  $\omega_i$ . Ti kutovi su konstantni kada  $R_i$  varira na  $b_i$ ; prema tome  $K$  je konstantan. Ovo je dokaz prvog dijela Teorema 5.2.1., osim u dijelu neodređenog predznaka. Jasno je da će predznak biti nepromijenjen dok god razdvajanje ili nerazdvajanje svakog para  $R_i, R_{i+1}$  pomoću  $P_i$  ostaje isto u afina ravnini. Ovo se u projektivnoj ravnini može promijeniti samo ako ono, dok točka  $R_i$  varira na  $b_i$ , siječe pravac u beskonačnosti (u tom slučaju će se ili raspored na slici 5.3 a) i c) ili raspored na slici 5.3 b) i d) izmijeniti). Točno će se dvije promjene dogoditi; razdvajanje  $R_i$  i  $R_{i+1}$  pomoću  $P_i$  te  $R_i$  i  $R_{i-1}$  pomoću  $P_{i-1}$ . Zaključujemo da neodređen predznak u (5.8) ostaje isti, pa

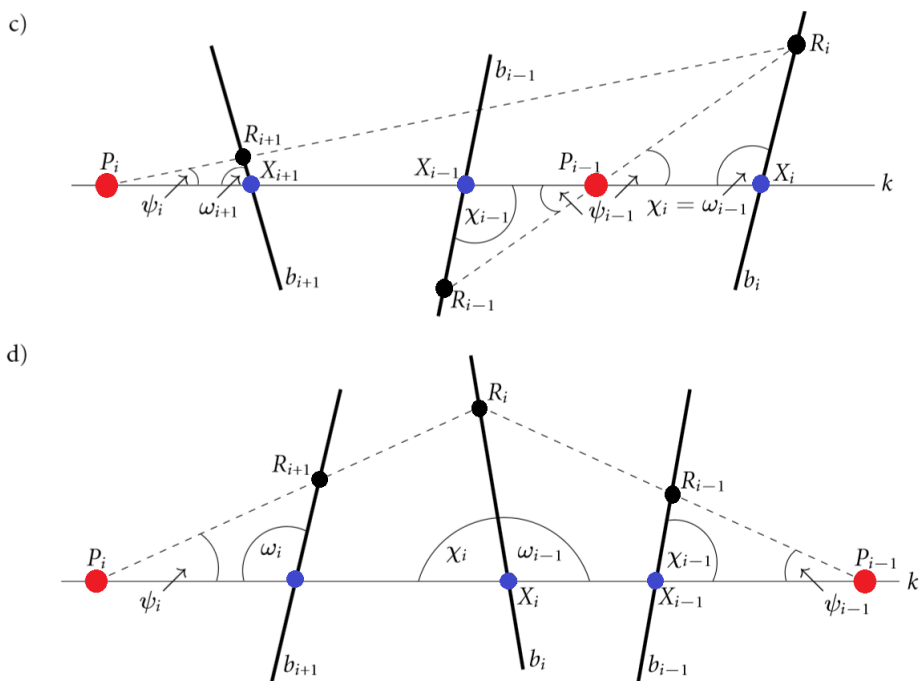
$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|} = \text{konstanta}$$

te je prva tvrdnja teorema dokazana.

Glede posljednje tvrdnje, opažamo da kada se osnovni pravci sijeku u točki  $O$ , jedina moguća pozicija za točke  $R_i$  jest ona u kojoj se podudaraju s  $O$ . Tada je svaki omjer na lijevoj strani jednakosti (5.5) jednak  $-1$ , a vrijednost konstante iznosi  $(-1)^n$ .

Kada su pivoti kolinearni na pravcu  $k$ , tada možemo uzeti da su sve točke  $X_i$  sadržane na pravcu  $k$ . Sad ćemo prikazati na slikama četiri primjera situacija koje se mogu dogoditi.





U jednakosti (5.8), konstanta  $K$  je određena kao  $K = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\sin \chi_i}{\sin \omega_i}$ , ali kada je  $\sin \omega_{i-1} = \sin \chi_i$  ona poprima vrijednost 1 pa je  $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|} = \pm 1$ . Da bismo odredili neodređeni predznak uočavamo da je  $\frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|}$  pozitivno ako  $R_i$  i  $R_{i+1}$  leže na suprotnim stranama od  $k$ , a negativno ako leže na istoj strani od  $k$ . S obzirom da je  $R_0$  na istoj strani od  $k$  kao što je  $R_n$  može se zaključiti da je  $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|R_i P_i\|}{\|P_i R_{i+1}\|} = (-1)^n$ .  $\square$

Posljednja dva dijela Teorema 5.2.1. impliciraju, i ekvivalentni su, Cevinom i Menelajevom teoremu za  $n$ -terokute. U skladu s time, Teorem 5.2.1. bi se mogao shvatiti kao općeniti prikaz rezultata oba teorema. Primjeri u sljedećem odjeljku ilustriraju blisku vezu između konfiguracija i Nehringova niza. To ne iznenađuje ako se uzme u obzir činjenica da postojanje mnogih konfiguracija ovisi o dokazivanju da su tri točke kolinearne, a upravo to je potrebno da se dokaže da je niz zapravo Nehringov niz (dokazujući da su točke  $R_{n-1}, P_{n-1}, R_0$  kolinearne u svim pozicijama  $R_0$  na  $b_0$ ). Neke projektivne konfiguracije mogu dovesti do nekoliko Nehringovih nizova prema kojima su točke izabrane kao pivoti, a pravci kao osnovice / baze.



## Poglavlje 6

### Primjeri invarijanti izomorfizma

Svaki primjer ćemo započeti opisom konfiguracije u projektivnoj ravnini. Kada se dokaz postojanja konfiguracije pokaže nužnim dajemo uputu ili naznaku ideje kako izvesti dokaz. Ovo je (osim prvog dijela drugog primjera gdje je korišten Menelajev teorem za šesterokut), popraćeno objašnjenjem o tome kako konfiguracija generira Nehringov niz, a potom završavamo eksplicitnom tvrdnjom invarijante izomorfizma koja proizlazi iz primjene Teorema 5.2.1.

#### Primjer 1. (Potpuni četverokut)

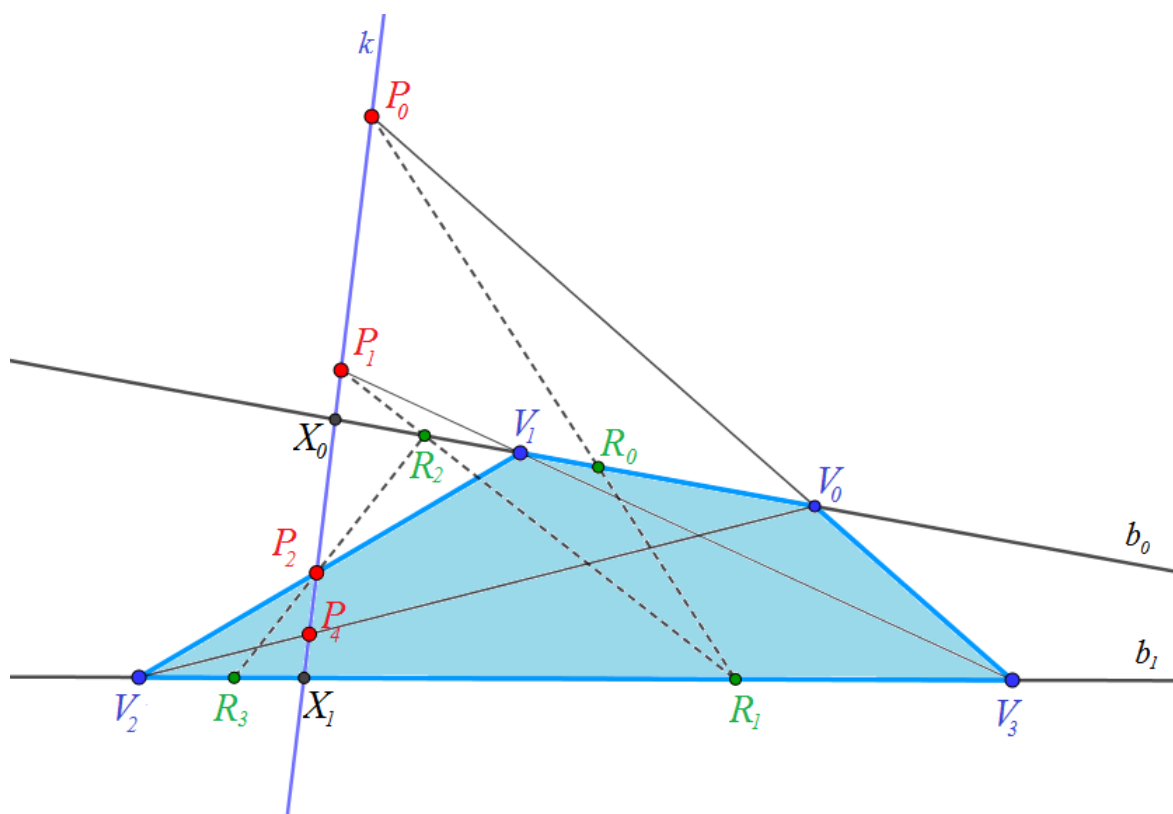
Neka je  $Q = [V_0, V_1, V_2, V_3]$  četverokut i neka je  $k$  bilo koji pravac koji ne prolazi ni kroz jedan vrh ili dijagonalnu točku od  $Q$ . Četverokut  $Q$  ima tri para suprotnih strana. Uzmimo jedan par kao bazu  $b_0, b_1$ ; neka drugi par siječe  $k$  u  $P_0, P_2$ ; a treći par neka siječe  $k$  u  $P_1, P_3$ . Tada je

$$(b_0, P_0, b_1, P_1, b_0, P_2, b_1, P_3) \quad (6.1)$$

Nehringov niz gdje je  $n = p = 4$  i  $b = 2$ . Budući da možemo zamijeniti  $P_0$  i  $P_2$ ;  $P_1$  i  $P_3$ ;  $b_0$  i  $b_1$ ; i par  $P_0, P_2$  s  $P_1, P_3$ , niz (6.1) predstavlja nekoliko Nehringovih nizova, iako se, zapravo, samo dva od njih razlikuju. Tvrdnja da je niz (6.1) Nehringov niz proistječe neposredno iz svojstava od  $Q$ . Primijetimo da ako  $X_0 = k \cap b_0$  i  $X_1 = k \cap b_1$  tada tri para  $X_0, X_1$ ;  $P_0, P_2$ ;  $P_1, P_3$  pripadaju involuciji na  $k$ . Zapravo, tvrdnja da je niz (6.1) Nehringov niz jednaka je činjenici da gornja tri para pripadaju involuciji. Izvodimo iz Teorema 5.2.1.:

$$\frac{\|R_0P_0\|}{\|P_0R_1\|} \cdot \frac{\|R_1P_1\|}{\|P_1R_2\|} \cdot \frac{\|R_2P_2\|}{\|P_2R_3\|} \cdot \frac{\|R_3P_3\|}{\|P_3R_0\|} = 1.$$

Konstanta je  $(-1)^4 = 1$  s obzirom da su baze (trivijalno) paralelne. Prema tome, lijeva strana ove jednakosti jest invarijanta izomorfizma.



Slika 6.1: Potpuni četverokut.

## Primjer 2. (Pappusova konfiguracija)

Neka su  $X_0, Y_0, Z_0; X_1, Y_1, Z_1$  dva skupa od tri kolinearne točke (slika 6.2 a)). U tom slučaju Pappusov teorem tvrdi da su tri točke ("unakrsno pridružene")  $T_0 = X_0Y_1 \cap X_1Y_0$ ,  $T_1 = Y_0Z_1 \cap Y_1Z_0$ ,  $T_2 = Z_0X_1 \cap Z_1X_0$  kolinearne na nekom pravcu  $k$ . Menelajev teorem za šesterokut  $[X_0, Y_1, Z_0, X_1, Y_0, Z_1]$  s transversalom  $k$  daje

$$\frac{\|X_0T_0\|}{\|T_0Y_1\|} \cdot \frac{\|Y_1T_1\|}{\|T_1Z_0\|} \cdot \frac{\|Z_0T_2\|}{\|T_2X_1\|} \cdot \frac{\|X_1T_0\|}{\|T_0Y_0\|} \cdot \frac{\|Y_0T_1\|}{\|T_1Z_1\|} \cdot \frac{\|Z_1T_2\|}{\|T_2X_0\|} = (-1)^6 = 1,$$

pa lijeva strana predstavlja invarijantu izomorfizma. Koristeći Nehringov niz, Pappusov teorem dovodi do još jedne invarijante izomorfizma (vidi sliku 6.2 b)). Neka su  $P_0, P_1, P_2$  bilo koje tri različite točke i neka su  $b_0, b_1, b_2$  tri pravca tako da svaka od tih točaka pripada samo jednom pravcu od ta tri pravca; odnosno  $P_0, P_1, P_2$  pripadaju redom pravcima  $b_2, b_0, b_1$ . Tada je  $(b_0, P_0, b_1, P_1, b_2, P_2, b_0, P_0, b_1, P_1, b_2, P_2)$  Nehringov niz gdje je  $n = 6$ ,  $p = b = 3$ . Kažemo da je ovaj niz perioda 2 s obzirom da se sastoji od podniza ponovljenog dva puta. Alternativni dokaz je dan u nastavku.

Izaberimo bilo koji točku  $R_0$  na  $b_0$  i odredimo  $R_1, R_2, \dots, R_5, R_6$  pomoću osnovne konstrukcije. Iz činjenice da se  $R_0$  podudara s  $R_6$  slijedi to da možemo pokazati da se zrake  $P_0R_1$  i  $P_2R_5$  sijeku u točki na pravcu  $b_0$ . Ovo je iz Pappusovog teorema neposredno primijenjeno na trojke kolinearnih točaka  $P_0, R_5, R_2$  i  $P_2, R_1, R_4$ .

Teorem 5.2.1. povlači da, dok  $R_0$  varira na  $b_0$ ,

$$\frac{\|R_0P_0\|}{\|P_0R_1\|} \cdot \frac{\|R_1P_1\|}{\|P_1R_2\|} \cdot \frac{\|R_2P_2\|}{\|P_2R_3\|} \cdot \frac{\|R_3P_0\|}{\|P_0R_4\|} \cdot \frac{\|R_4P_1\|}{\|P_1R_5\|} \cdot \frac{\|R_5P_2\|}{\|P_2R_0\|} = K. \quad (6.2)$$

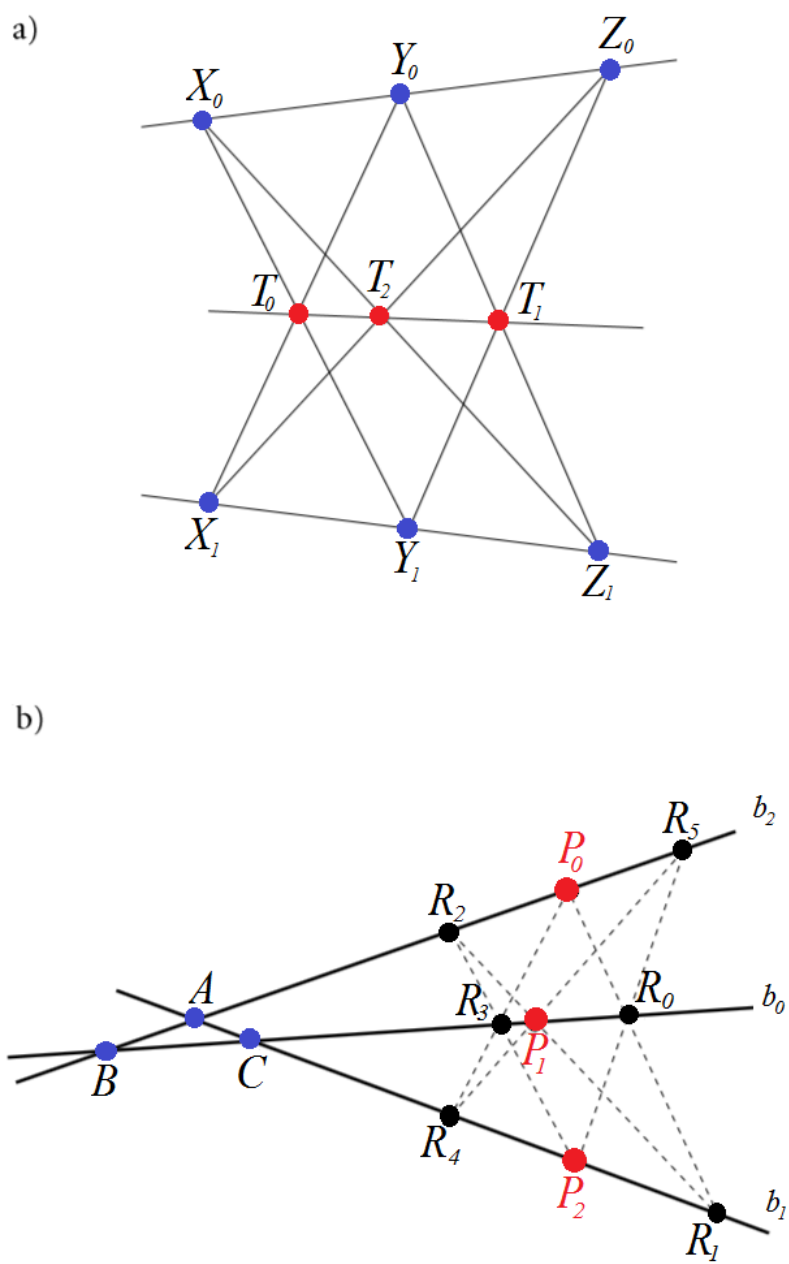
S obzirom da vrijednost konstante  $K$  ovisi o početnom izboru točaka  $P_0, P_1, P_2$  i pravaca  $b_0, b_1, b_2$ , lijeva strana jednakosti (6.2) nije invarijanta izomorfizma. Ali, može se napraviti da to postane na sljedeći način. Uzmimo u obzir poseban slučaj u kojem se  $R_0$  podudara s  $B = b_0 \cap b_2$ . Tada  $R_1 = R_2 = A = b_1 \cap b_2$ ,  $R_3 = R_4 = C = b_1 \cap b_2$  i  $R_5 = B$ , pa je stoga

$$\frac{\|BP_0\|}{\|P_0A\|} \cdot \frac{\|AP_1\|}{\|P_1A\|} \cdot \frac{\|AP_2\|}{\|P_2C\|} \cdot \frac{\|CP_0\|}{\|P_0C\|} \cdot \frac{\|CP_1\|}{\|P_1A\|} \cdot \frac{\|AP_2\|}{\|P_2A\|} = -\frac{\|BP_0\|}{\|P_0A\|} \cdot \frac{\|AP_2\|}{\|P_2C\|} \cdot \frac{\|CP_1\|}{\|P_1B\|} = K,$$

s obzirom da su drugi, četvrti i šesti omjer s lijeve strane svaki jednak  $-1$ . Prema tome,

$$\frac{\|R_0P_0\|}{\|P_0R_1\|} \cdot \frac{\|R_1P_1\|}{\|P_1R_2\|} \cdot \frac{\|R_2P_2\|}{\|P_2R_3\|} \cdot \frac{\|R_3P_0\|}{\|P_0R_4\|} \cdot \frac{\|R_4P_1\|}{\|P_1R_5\|} \cdot \frac{\|R_5P_2\|}{\|P_2R_0\|} \cdot \frac{\|AP_0\|}{\|P_0B\|} \cdot \frac{\|BP_1\|}{\|P_1C\|} \cdot \frac{\|CP_2\|}{\|P_2A\|} = -1,$$

pa lijeva strana ove jednakosti predstavlja invarijantu izomorfizma.



Slika 6.2: Pappusova konfiguracija.

### Primjer 3. (Pascalova konfiguracija)

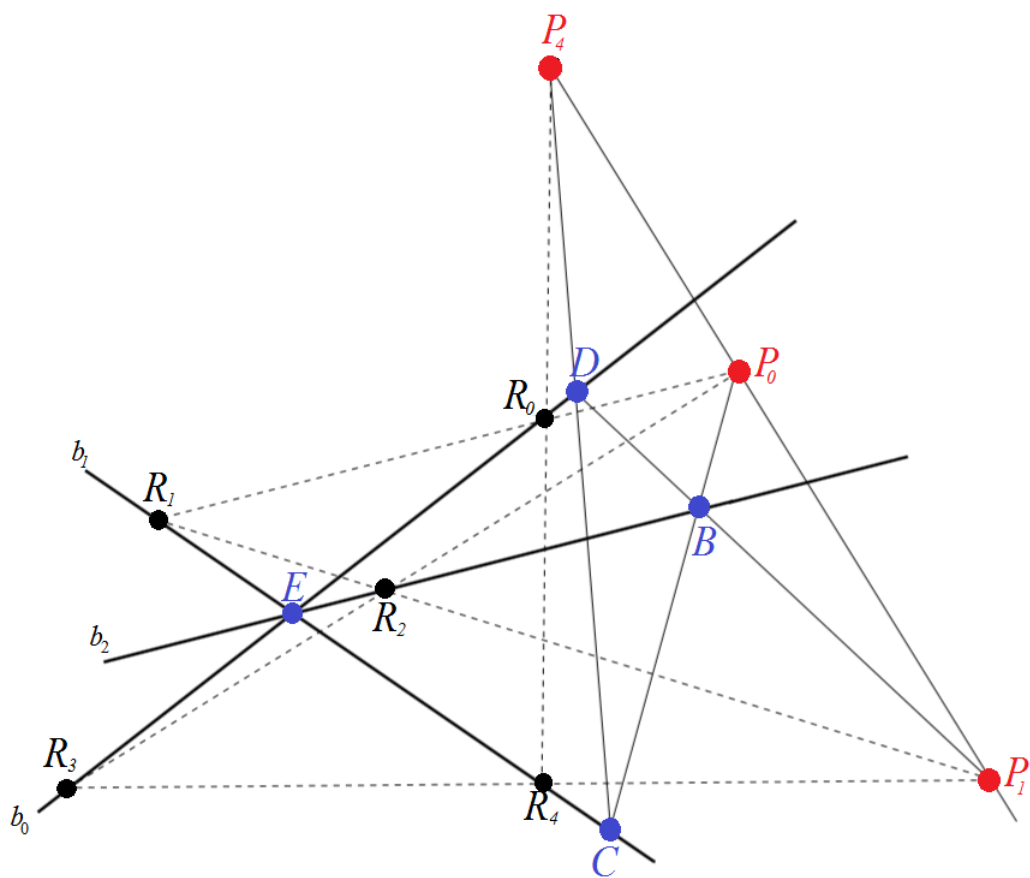
Izaberimo tri točke  $P_0, P_1, B$  koje nisu kolinearne i dva pravca  $b_0, b_1$  koji ne prolaze izabranim točkama. Definiramo  $P_0B \cap b_1 = C, P_1B \cap b_0 = D, P_0P_1 \cap CD = P_4, b_0 \cap b_1 = E$  i  $b_2 = BE$ . Tada je  $(b_0, P_0, b_1, P_1, b_2, P_0, b_0, P_1, b_1, P_4)$  Nehringov niz uz to da je  $n = 5$  i  $p = b = 3$ .

Da bismo ovo dokazali, neka je  $R_0$  bilo koja točka na  $b_0$  i odredimo  $R_1, R_2, R_3, R_4$  pomoću osnovne konstrukcije. Tvrdnja će biti dokazana ako pokažemo da su točke  $P_4, R_0$  i  $R_4$  kolinearne. Da bismo to napravili, prvo moramo uočiti da su  $R_1C \cap R_3D = E, P_0C \cap P_1D = B$  i  $P_1R_1 \cap P_0R_3 = R_2$  kolinearne jer ove tri točke leže na  $b_2$ . One su "unakrsno pridružene" točke od dvije trojke  $R_1, D, P_0$  i  $R_3, C, P_1$ . Stoga, po obratu Pascalovog teorema, ovih šest točaka leži na konici. Premještanjem vidimo da trojke  $R_1, D, P_1$  i  $R_3, P_0, C$  leže na konici pa su njihove unakrsno pridružene točke  $R_1P_0 \cap R_3D = R_0, R_1C \cap R_3P_1 = R_4$  i  $DC \cap P_0P_1 = P_4$  kolinearne, kao što i trebaju biti.

Teorem 5.2.1. povlači da je za bilo koju točku  $R_0$  na  $b_0$ , s obzirom da su osnovice paralelne,

$$\frac{\|R_0P_0\|}{\|P_0R_1\|} \cdot \frac{\|R_1P_1\|}{\|P_1R_2\|} \cdot \frac{\|R_2P_0\|}{\|P_0R_3\|} \cdot \frac{\|R_3P_1\|}{\|P_1R_4\|} \cdot \frac{\|R_4P_4\|}{\|P_4R_0\|} = (-1)^5 = -1$$

pa je u skladu s prethodnim lijeva strana invarijanta izomorfizma.



Slika 6.3: Pascalova konfiguracija.

# Bibliografija

- [1] A. Coffman: *Weighted Projective Spaces and a Generalization of Eves' Theorem*, 2018., dostupno na: [arxiv.org/pdf/1204.1686.pdf](https://arxiv.org/pdf/1204.1686.pdf), pristupano: kolovoz, 2018.
- [2] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [3] G. C. Shephard: *Isomorphism Invariants for Projective Configurations*, Canadian J. Math. 51(1999), 1277-1299., dostupno na <https://cms.math.ca/10.4153/CJM-1999-058-8>, pristupano: travanj, 2018.
- [4] H.W.Eves, *A Survey of Geometry*, Revised ed., Allyn & Bacon, Boston, 1972. MR 0322653 (48 # 1015).
- [5] Ilišević, D., Bombardelli, M. (2007.), *Elementarna geometrija* (skripta, verzija 1.0)
- [6] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, PMF-Matematički odsjek, 2013.
- [7] M. Frantz, *A Car Crash Solved with a Swiss Army Knife*, Math. Magazine 84(5)(2011), 327-338.

# Sažetak

Pojam h-izraza uveo je Howard Eves kao poopćenje različitih umnožaka omjera usmjerenih dužina kakvi se pojavljuju u važnim rezultatima euklidske geometrije poput Cevinog i Menelajevog teorema. S druge strane, h-izraz je poopćenje dvoomjera, kao osnovne numeričke invarijante projektivne geometrije. Središnja tema ovog rada je Evesov teorem koji govori da je h-izraz projektivna invarijanta. Taj teorem pruža mogućnost raznovrsnih primjena, kako u dokazivanju geometrijskih teorema tako i u praktičnim primjerima, poput fotogrametrije gdje se mjerenjima na dvodimenzionalnoj slici rekonstruiraju odnosi veličina u trodimenzionalnom originalu.

Nadalje, prikazana su osnovna svojstva i primjene jedne geometrijske invarijante koja je po obliku bliska Evesovom h-izrazu, ali se odnosi samo na izomorfizme projektivnih konfiguracija, dakle nisu nužno inducirane projektivnim transformacijama ravnine. Ključnu ulogu ovdje imaju tzv. Nehringovi nizovi točaka i pravaca. Oni se mogu pridružiti različitim konfiguracijama, a varijacijama izbora početne točke pripadni h-izraz ostaje konstantan te je stoga invarijanta izomorfizma.



# Summary

The concept of the h-expression was introduced by Howard Eves as a generalization of various products of ratios of directed lengths that appear in important results of Euclidean geometry like Ceva's and Menelaus's theorems. On the other hand, h-expression is a generalization of the cross-ratio as a basic numeric invariant of projective geometry. The central topic of this paper is Eves's theorem which states that h-expression is a projective invariant. This theorem provides the possibility of a variety of applications, both in proving geometric theorems as well as in practical examples, such as a photogrammetry where the measurements in a two-dimensional image are used to reconstruct the relationships between sizes in the three-dimensional original.

Furthermore, the basic properties and applications of another geometric invariant are presented. This geometric invariant is closely related to Eves's h-expression, but it refers only to the isomorphisms of projective configurations. Therefore, they are not necessarily induced by projective plane transformations. Nehring's sequences of points and lines are crucial in this approach. They can be associated with different configurations, and the corresponding h-expression remains constant with regard to variation of the choice of the starting point. Hence, it is an isomorphism invariant.

# Životopis

Zovem se Ivana Garić. Rođena sam 02.03.1993. godine u Travniku kao treće dijete roditelja Ljubice i Vinka. Osnovnu školu "Vitez" sam pohađala u Vitezu, a nakon toga sam upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi "Vitez" u Vitezu. Godine 2011. sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički, na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Titulu prvostupnice edukacije matematike sam stekla 2016. godine, a zatim sam iste te godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.