Parsevalovi bazni okviri Hilbertovih prostora

Grbac, Matko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matko Grbac

PARSEVALOVI BAZNI OKVIRI HILBERTOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Pojam baznog okvira prvi su u svom radu uveli matematičari R.J. Duffin i A.C. Schaeffer 1952. godine, no treba naglasiti kako se taj pojam i ranije implicitno pojavljivao u literaturi. Rast u popularnosti baznih okvira nastao je pedesetak godina nakon rada Duffina i Schaeffera, uglavnom zahvaljujući I. Daubechies, A. Grossmannu i I. Meyeru. Danas su bazni okviri nezaobilazni, kako u matematici tako i u inženjerstvu. Neki od najčešćih područja rada u kojem se mogu pronaći primjene su teorija operatora, teorija uzorkovanja, kodiranje, rekonstrukcija signala, otklanjanje šumova i prijenosu podataka otpornom na smetnje.

Za sam početak rada izložit ćemo osnovni materijal o normiranim prostorima i pojmovima vezanima za iste kojima ćemo se koristiti u nastavku. Za detaljniji pregled osnova čitatelja upućujemo na [1]. Sljedeća dva dijela posvećena su izlaganju osnovnih svojstvava Besselovih nizova i baznih okvira, te dodatno, Parsevalovih baznih okvira.

U poglavjima 4 i 5 promatramo dualne bazne okvire i viškove baznih okvira, da bi u nastavku bili u mogućnosti opisati bazni okviri koji posjeduju Parsevalov dual te Besselovi nizovi koji dopuštaju konačno proširenje do Parsevalovog baznog okvira.

Za sam kraj, dokazujemo i analiziramo funamentalnu jednakost za Parsevalove bazne okvire.

Poglavlje 1

Osnovno o normiranim prostorima

Proučavat ćemo isključivo realne i kompleksne vektorske prostore. $\mathbb{F}$ će biti zajednička oznaka za $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ kad god ne bude potrebno specificirati o kojem se polju radi. Ne postavljamo ograničenja na dimenziju prostora.

Definicija 1.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $||x|| \geq 0, \forall x \in X,$
2. $||x|| = 0 \iff x = 0,$
3. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X,$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X.$

Uređen par $(X, ||\cdot||)$ naziva se normiran prostor.

Definicija 1.2. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X,$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0,$
3. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X,$
4. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in X.$

Uređen par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ naziva se unitaran prostor.

Napomena 1.3. *U svakom unitarnom prostoru vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.*

Definicija 1.4. *Neka su X i Y normirani prostori i $f : X \to Y$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tako da } ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon.$$

Funkcija je neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$. Kažemo da je f uniformno neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako vrijedi

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tako da } x, y \in S, ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon.$$

Definicija 1.5. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*
Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ako

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq n \Rightarrow ||x_n - x|| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \Rightarrow ||x_m - x_n|| < \epsilon.$$

Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)_n$ konvergira k vektoru $x \in X$ ako je $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, gdje je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma; $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira apsoultno ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$.

Definicija 1.6. *Usmjeren skup je uređen par $(A, \leq)$ koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije $\leq$ definirane na A za koju vrijedi:*

(a) $\alpha \leq \alpha, \forall \alpha \in A$,

(b) $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$,

(c) Za sve $\alpha, \beta \in A$ postoji $\gamma \in A$ sa svojstvom $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$.

Definicija 1.7. *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup. Svako preslikavanje $x : A \to X$ se naziva hiperniz u X. Običaj je, kao i kod nizova, da umjesto $x(\alpha)$ pišemo x_α i da hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ako je X normiran prostor kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ u X konvergira ako postoji $x_0 \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow ||x_0 - x_\alpha|| < \epsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x_0 = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.
Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ je Cauchyjev ako vrijedi

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow ||x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}|| < \epsilon.$$

Za svaku danu familiju vektora x_j, $j \in J$, u normiranom prostoru X promatrat ćemo familiju $\mathcal{F}$ svih konačnih podskupova od J usmjerenu inkluzijom: za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ pisat ćemo $F_1 \leq F_2$ ako vrijedi $F_1 \subseteq F_2$. Za tako usmjeren skup $(\mathcal{F}, \leq)$ prirodno je sada gledati hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$, gdje je $s_F = \sum_{j \in F} x_j$.

Definicija 1.8. *Neka je dana funkcija $x : J \Rightarrow X$ pri čemu je J proizvoljan beskonačan skup, a X normiran prostor. Kažemo da je familija $\{x(j) = x_j : j \in J\}$ sumabilna te da je njezina suma vektor $x_0 \in X$ ako je x_0 limes hiperniza $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$. U tom slučaju pišemo $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.*

Definicija 1.9. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno u X ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira (obično) u X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Definicija 1.10. *Neka je X normiran prostor. Otvorena kugla s centrom u točki $x_0 \in X$ i radijusom $r > 0$ je skup $K(x_0, r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$. Kažemo da je skup $S \subseteq X$ otvoren ako je S unija neke familije otvorenih kugala. Dodatno, po definiciji uzimamo da je $\emptyset$ otvoren. Nadalje, za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako je $X \setminus F$ otvoren. Zatvarač skupa $A \subseteq X$ definira se kao najmanji zatvoren skup u X koji sadrži A.*

Napomena 1.11. *Često je korisna sljedeća karakterizacija zatvorenih skupova: Skup $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova svojih članova.*

Definicija 1.12. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Kažemo da je skup S kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S. Za S kažemo da je relativno kompaktan ako je $\overline{S}$ kompaktan.*

Napomena 1.13. *Kompaktan podskup normiranog prostora je zatvoren i ograničen (prisjetimo se kako je u konačnodimenzionalnim prostorima vrijedio i obrat).*

Definicija 1.14. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Definicija 1.15. *Kažemo da je normiran prostor separabilan ako postoji prebrojiv skup S takav da vrijedi $\overline{S} = X$.*

Definicija 1.16. *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $||Ax|| \leq M||x||, \forall x \in X$. Norma ograničenog operatora A defiinira se kao $||A|| = \sup\{||Ax|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$. Skup svih ograničenih linearnih operatora označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$. Za $X = Y$ pišemo $\mathbb{B}(X)$.*

Definicija 1.17. *Neka su H i K Hilbertovi prostor. Za linearan operator* $T \in \mathbb{B}(H, K)$ *kažemo da je odozdo ograničen ako postoji* $m > 0$ *za koji vrijedi* $||Tx|| \geq m||x||, \forall x \in X$.

Navodimo i korisnu karakterizaciju ograničenih linearnih operatora.

Propozicija 1.18. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori i* $A : X \to Y$ *linearan operator. Ekvivalentno je:*

(a) A *je neprekidan u nekoj točki* x_0,

(b) A *je neprekidan na* X,

(c) A *je uniformno neprekidan na* X,

(d) A *je ograničen.*

Napomena 1.19. *Na konačnodimenzionalnom prostoru svi su linearni operatori ograničeni.*

Definicija 1.20. *Niz* $(x_n)_n$ *u normiranom prostoru* X *naziva se fundamentalnim ako vrijedi* $\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$.

Definicija 1.21. *Niz* $(b_n)_n$ *u normiranom prostoru* X *naziva se topološka baza (ili samo baza) za* X *ako za svaki* $x \in X$ *postoji jedinstven niz skalara* $(\lambda_n)_n$ *takav da vrijedi* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$ *(pri čemu se ovdje podrazumijeva obična konvergencija navedenog reda u normi prostora* X*).*

Definicija 1.22. *Ortonormiran niz* $(e_n)_n$ *u unitarnom prostoru* X *je ortonormirana baza (ONB) za* X *ako svaki vektor* $x \in X$ *dopušta prikaz oblika* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ *(obična konvergencija u normi prostora* X*).*

Napomena 1.23. *Uočimo da zbog ortonormiranosti niza* $(e_n)_n$ *i neprekidnost skalarnog produkta iz* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ *odmah slijedi* $\lambda_n = \langle x, e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Dakle, prikaz vektora* x *u ONB je jedinstven, stoga je ova definicija kompatibilna s prethodnom u općenitom normiranom prostoru. Izraz* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *se zove Fourierov red vektora* x*, a skalari* $\langle x, e_n \rangle$ *Fourierovi koeficijenti vektora* x *s obzirom na ONB* $(e_n)_n$.

Napomena 1.24. *(a) Svaki normiran prostor s topološkom bazom je separabilan.*

(b) Prostor $\ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ *je separabilan prostor s ONB* $(e_n)_n$*, gdje je* e_n *niz koji ima* 0 *na svim mjestima osim na n-tom, gdje se nalazi* 1.

Teorem 1.25. *Neka je* X *unitaran prostor i* $(e_n)_n$ *ortonormiran niz u* X*. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

(a) $(e_n)_n$ *je ONB za* X,

(b) $(e_n)_n$ *je fundamentalan niz u* X,

(c) $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$, $\forall x \in X$ *(Parsevalova jednakost),*

(d) $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$, $\forall x, y \in X$.

Dodatno, ako je X *Hilbertov, gornji uvjeti su ekvivalentni s*

(e) $(e_n)_n$ *je maksimalan niz u* X*, tj. ima svojstvo* $x \perp e_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.

Prije iskaza sljedećeg rezultata prisjetimo se kako za linearan operator $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ kažemo da je izometrija ako vrijedi $||Ax|| = ||x||, \forall x \in X$.

Teorem 1.26. *Svaki separabilan unitaran prostor ima ONB. Ako je* X *unitaran, separabilan i beskonačnodimenzionalan, onda je* X *izometrički izomorfan nekom gustom podskupu od* ℓ^2*. Posebno, svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor je izometrički izomorfan s* ℓ^2.

Teorem 1.27. *Neka je* H *Hilbertov prostor i* $M \leq H$ *zatvoren potprostor. Svaki vektor* $x \in H$ *dopušta jedinstven prikaz u obliku* $x = a + b$*, pri čemu je* $a \in M$ *i* $b \in M^{\perp}$*. Ako je* $M \neq \{0\}$*, preslikavanje* $P : H \to H$ *definirano s* $Px = a$ *je ograničen linearan operator za kojeg vrijedi* $P^2 = P$ *i* $||P|| = 1$ *(dok za* $M = \{0\}$ *očito imamo* $P = 0$*). Vektor* $Px = a$ *naziva se ortogonalna projekcija vektora* x *na potprostor* M*, a operator* P *se zove ortogonalni projektor na* M.

Definicija 1.28. *Neka su* H *i* K *Hilbertovi prostori te* $A \in \mathbb{B}(H, K)$*. Spektar operatora* A *definira se kao skup* $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : A - \lambda I \text{ nije regularan}\}$.

Definicija 1.29. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori, te neka je* $A : X \to Y$ *linearan operator. Kažemo da je* A *kompaktan operator ako je skup* $A(\overline{K}(0, 1))$ *relativno kompaktan skup. Skup svih kompaktnih operatora s* X *u* Y *označavamo s* $\mathbb{K}(X, Y)$*. Ako je* $X = Y$*, pišemo* $\mathbb{K}(X)$.

Napomena 1.30. *Jer relativna kompaktnost povlači ograničenost, jasno je da je svaki kompaktan operator ograničen. Čim je prostor* X *beskonačnodimenzionalan inkluzija je striktna jer je tada* $I \notin \mathbb{K}(X)$.

Poglavlje 2

Besselovi nizovi

U ovom ćemo dijelu rada dati definiciju Besselovog niza te proučiti neka njegova osnovna svojstva koja će nam koristiti kasnije kada ćemo proučavati bazne okvire Hilbertovog prostora.

Definicija 2.1. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H naziva se Besselovim nizom ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H. \tag{2.1}$$

Lema 2.2. *Ako je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H, preslikavanje $U : H \to \ell^2$ definirano s $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_n$ je ograničen linearan operator. Posebno, postoji konstanta $B > 0$ takva da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B||x||^2, \forall x \in H. \tag{2.2}$$

Dokaz. Iz (2.1) je jasno da je U dobro definiran. Također je jasno da je U linearan operator. Dokaz će se bazirati na teoremu o zatvorenom grafu (vidi [1], teorem 6.1.7)

Neka je $(y_k)_k$ niz u H takav da $y_k \to y \in H$ te neka je $(c_n)_n \in \ell^2$ takav da $Uy_k \to (c_n)_n$. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$ imamo:

$$|c_m - \langle y_k, x_m\rangle|^2 \leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_k, x_n\rangle|^2 = ||(c_n)_n - Uy_k||^2 \to 0, \text{ kada } k \to \infty.$$

Dakle, $c_m = \lim_{k\to\infty}\langle y_k, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$, za svaki m. Stoga je $(c_n)_n = (\langle y, x_n\rangle)_n$, što znači da U ima zatvoren graf, pa je on prema teoremu o zatvorenom grafu ograničen. □

Definicija 2.3. *Operator U iz Leme 2.2 naziva se operatorom analize pridružen $(x_n)_n$. Njemu adjungirani operator $U^* \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ naziva se operator sinteze.*

Konstanta B iz (2.2) naziva se Besselova ograda niza $(x_n)_n$.

Napomena 2.4. *Uočimo kako Besselova ograda nije jedinstvena te kako je optimalna (odnosno minimalna) Besselova ograda jednaka* $||U||^2$.

Propozicija 2.5. *Neka je* $(x_n)_n$ *Besselov niz u Hilbertovom prostoru* H *te* U *pridruženi operator analize. Tada za svaki niz* $(c_n)_n \in \ell^2$ *red* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira bezuvjetno i operator sinteze* U^* *je dan s* $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. *Posebno, ako je* $(e_n)_n$ *kanonska baza za* ℓ^2, *imamo* $U^* e_n = x_n$, *te posljedično,* $||x_n|| \leq ||U||, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je B Besselova ograda za $(x_n)_n$,te neka je $(c_n)_n \in \ell^2$ proizvoljan. Prema [1], teorem 3.2.6, bezuvjetna konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ ekvivalentna je sumabilnosti familije $\{c_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$,pa je dovoljno pokazati da konvergira hiperniz $(\sum_{n \in F} c_n x_n)_{F \in \mathcal{F}}$, odnosno da je $(\sum_{n \in F} c_n x_n)_{F \in \mathcal{F}}$ Cauchyjev ([1], propozicija 3.1.5).

Neka je F proizvoljan konačan podskup od $\mathbb{N}$. Stavimo $card(F) = N$. U sljedećem računu koristit ćemo se standardnim trikom baziranom na Rieszovom teoremu o reprezentaciji ograničenih funkcionala na Hilbertovim prostorima ([1], teorem 2.2.7) : norma vektora jednaka je normi ograničenog funkcionala induciranim danim vektorom. Računamo:

$$\begin{aligned}
||\sum_{n \in F} c_n x_n||^2 &= \sup\{|\langle \sum_{n \in F} c_n x_n, y \rangle|^2 : ||y|| = 1\} \\
&= \sup\{|\sum_{n \in F} c_n \langle x_n, y \rangle|^2 : ||y|| = 1\} \text{ (C-S-B u } \mathbb{F}^N) \\
&\leq \sup\{(\sum_{n \in F} |c_n|^2)(\sum_{n \in F} |\langle x_n, y \rangle|^2) : ||y|| = 1\} \\
&\leq \sup\{B||y||^2 \sum_{n \in F} |c_n|^2 : ||y|| = 1\} \\
&= B \sum_{n \in F} |c_n|^2.
\end{aligned}$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergira apsolutno i bezuvjetno, slijedi da je hiperniz $(\sum_{n \in F} |c_n|^2)_{F \in \mathcal{F}}$ Cauchyjev. Iz gornjeg računa tada vidimo da je i $(\sum_{n \in F} c_n x_n)_{F \in \mathcal{F}}$ Cauchyjev.

Sada smo u stanju izvesti izraz za djelovanje U^*: za sve $x \in H$ i $(c_n)_n \in \ell^2$ imamo:

$$\langle x, U^*(c_n)_n \rangle = \langle Ux, (c_n)_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{c}_n = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \rangle,$$

odnosno

$$U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

□

Sljedeći rezultat je povezan s prethodnom propozicijom, a daje nam dovoljne uvjete da bi niz u Hilbertovom prostoru posjedovao Besselovo svojstvo.

Propozicija 2.6. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Hilbertovom prostoru* H *takav da red* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira za svaki* $(c_n)_n \in \ell^2$*. Tada je* $(x_n)_n$ *Besselov niz.*

Dokaz. Definirajmo preslikavanje $T : \ell^2 \to H$ s $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Očito je T linearan operator. Označimo s $T_N \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ operator definiran s $T_N(c_n)_n = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Tada je $T = \lim_{N\to\infty} T_N$ (po točkama). Prema principu uniformne ograničenosti ([1], teorem 5.3.2) slijedi da je T ograničen operator. Stavimo $||T|| = \sqrt{B}$. Posebno je i T^* ograničen te je $||T^*|| = \sqrt{B}([1] teorem 2.2.11)$. Označimo s $(e_n)_n$ kanonsku ONB za ℓ^2. Imamo:

$$\langle T^* x, e_n \rangle = \langle x, Te_n \rangle = \langle x, x_n \rangle, \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga iščitavamo:

$$T^* x = (\langle x, x_n \rangle)_n, \forall x \in H,$$

te je za sve $x \in H$ je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B||x||^2 < \infty$. □

Korolar 2.7. *Niz* $(x_n)_n$ *u Hilbertovom prostoru* H *je Besselov ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor* L*, ONB* $(f_n)_n$ *za* L *i* $T \in \mathbb{B}(L, H)$ *takav da je* $Tf_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$*. U tom slučaju, pridruženi operator analize* U *se podudara s* T^**.*

Dokaz. U jednom smjeru to je tvrdnja propozicije 2.5 (uz $L = \ell^2$).

Obrat slijedi iz činjenice da je svaki separabilan Hilbertov prostor izometrički izomorfan s ℓ^2 te prethodne propozicije. □

Poglavlje 3

Osnovna teorija baznih okvira

Otprije nam je poznato da svaki separabilan Hilbertov prostor posjeduje bazu (štoviše, znamo da posjeduje i ortonormiranu bazu). Međutim, uvjeti na bazu su prejaki, stoga je često nemoguće konstruirati bazu s nekim unaprijed zadanim svojstvima. Također, najmanja modifikacija može uzrokovati gubitak baznog svojstva.

S druge strane, postoje reprodukcijski sustavi u Hilbertovim prostorima, općenitiji od baza, koji su otporniji na modifikacije. Štoviše, takvih je sustava mnogo i pojavljuju se na prirodan način. Primjera radi, uzmimo ONB $(e_n)_n$ za Hilbertov prostor H. Tada je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, za sve x iz H. Neka je sada M zatvoren potprostor od H i P ortogonalni projektor na M. Tada je $Px = x$ za sve x iz M, pa prethodna jednakost primijenjena na elemente iz M postaje

$$x = Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Px, e_n \rangle Pe_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Pe_n \rangle Pe_n, \ \forall x \in M.$$

Vidimo da niz $(Pe_n)_n$ može poslužiti u reprodukcijske svrhe za Hilbertov prostor M, štoviše, gornja formula je analogna Fourierovom razvoju u ONB, iako $(Pe_n)_n$ ne mora nužno biti nezavisan niz. Kasnije ćemo vidjeti da je niz $(Pe_n)_n$ primjer zapravo Parsevalovog baznog okvira.

Od sad nadalje, podrazumijevat ćemo da je H separabilan Hilbertov prostor.

Definicija 3.1. *Niz $(x_n)_n$ u H se naziva bazni okvir (frame) prostora H ako postoje konstante $A,B > 0$ takve da vrijedi*

$$A||x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B||x||^2, \forall x \in H. \tag{3.1}$$

Optimalne konstante A i B s ovim svojstvom nazivaju se granice baznog okvira.

Ako je $A = B$ kažemo da je bazni okvir napet, a ako je $A = B = 1$, tj. ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = ||x||^2, \forall x \in H.$$

kažemo da je bazni okvir Parsevalov.

Konačno, kažemo da je bazni okvir egzaktan ako niz dobiven izostavljanjem bilo kojeg njegovog člana više nije bazni okvir za H.

Napomena 3.2. *(a) Uočimo kako bazni okvir nije skup, već niz. Stoga se pojedini elementi mogu ponavljati.*

(b) Granice baznih okvira nisu jedinstvene. Najveći A i najmanji B nazivaju se optimalne granice baznih okvira i označavat ćemo ih s A_{opt} i B_{opt}.

(c) Ako je niz $(x_n)_n$ bazni okvir, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ konvergira apsolutno, pa onda i bezuvjetno ([1], teorem 3.2.2). Stoga je svaka permutacija baznog okvira ponovno bazni okvir.

Primjer 3.3. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za H. Tada je niz:*

(a) $(e_1, e_2, e_3, ...)$ bazni okvir za H, Parsevalov i egzaktan,

(b) $(e_1, 0, e_2, 0, e_3, ...)$ bazni okvir za H, Parsevalov, neegzaktan,

(c) $(e_1, e_1, e_2, e_2, ...)$ bazni okvir za H, napet ($A = B = 2$), neegzaktan,

(d) $(2e_1, e_2, e_3, e_4, ...)$ bazni okvir za H, nije napet ($A = 1, B = 2$), egzaktan,

(e) $(e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...)$ bazni okvir za H, Parsevalov, neegzaktan,

(f) $(e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, ...)$ ortogonalan i fundamentalan, ali nije bazni okvir za H.

Propozicija 3.4. *Svaki bazni okvir $(x_n)_n$ u H je fundamentalan niz u H.*

Dokaz. S obzirom da se nalazimo u Hilbertovom prostoru, dovoljno je dokazati da je niz $(x_n)_n$ maksimalan. Uzmimo zato da je $x \in H$, $x \perp x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Iz prve nejednakosti u (3.1) odmah slijedi $A||x||^2 \leq 0$, dakle, $x = 0$. □

Uočimo jednostavnu posljedicu prethodne propozicije: skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata baznog okvira s racionalnim koeficijentima je gust u H. To je razlog zbog kojeg smo se u početku ograničili na separabilne prostore.

Ako je $\dim H = \infty$, prethodna propozicija pokazuje da svaki bazni okvir za H mora imati beskonačno različitih elemenata. Posebno, niti jedan konačan niz ne može biti bazni okvir beskonačnodimenzionalnog prostora. Iako se u ovom radu nećemo baviti slučajem konačnodimenzionalnih prostora, navedimo sljedeću osnovnu činjenicu.

Propozicija 3.5. *Neka je $(x_1, x_2, ..., x_m)$ uređena m-torka vektora iz $\mathbb{F}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je $(x_1, x_2, ..., x_m)$ bazni okvir za $\mathbb{F}^n$ ako i samo ako vektori $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ čine sustav izvodnica za $\mathbb{F}^n$.*

Dokaz. U jednom smjeru dokaz je točno isti kao dokaz prethodne propozicije (pokaže se maksimalnost skupa $\{x_1, ..., x_m\}$).

Obratno, pretpostavimo da $x_1, ..., x_m$ čine sustav izvodnica za $\mathbb{F}^n$. Uočimo da tada vrijedi: $x \in \mathbb{F}^n, x \perp x_i, i = 1, .., m \Rightarrow x = 0$. Definirajmo operator $U : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ formulom $Ux = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, ..., \langle x, x_m\rangle)$. Očito je U linearan, a zbog prethodne primjedbe i injektivan. Zato je $U_0 : \mathbb{F}^n \to \operatorname{Im} U, U_0x = Ux$, bijekcija pa postoji inverzni operator $V : \operatorname{Im} U \to \mathbb{F}^n$, a taj je nužno ograničen zbog konačnodimenzionalnosti kodomene.

Dakle, postoji konstanta $M > 0$ za koju vrijedi $||V(U_0x)||^2 \leq M||U_0x||^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$, tj. $\frac{1}{M}||x||^2 \leq ||U_0x||^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$. Za $A = \frac{1}{M}$ zato imamo $A||x||^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |\langle x, x_i\rangle|^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$.

S druge strane, imamo $\sum_{i=1}^{m} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} ||x||^2||x_i||^2 \leq B||x||^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$, ako stavimo $B = \sum_{i=1}^{m} ||x_i||^2$. □

Iz same definicije baznog okvira jasno je da je svaki bazni okvir Besselov niz. Stoga, ako je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, dobro je definiran i ograničen njemu pridružen operator analize $U : H \to \ell^2$. Prema propoziciji 2.5, operator sinteze U^* dan je s $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_nx_n$, gdje ovaj red konvergira bezuvjetno za sve $(c_n)_n$ iz ℓ^2. Dodatno, iz definicije baznog okvira je jasno da je U ograničen odozdo.

Izvedimo prije nastavka nekoliko rezultata vezanih za ograničene operatore Hilbertovih prostora.

Lema 3.6. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Ako je operator $T \in \mathbb{B}(H, K)$ odozdo ograničen, onda je $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor od K.*

Dokaz. Neka je $(Tx_n)_n$ proizvoljan niz u $\operatorname{Im} T$ takav da vrijedi $Tx_n \to y$, te neka je $m > 0$ takav da vrijedi $||Tx|| \geq m||x||, \forall x \in H$. Kako niz $(Tx_n)_n$ konvergira, to je on posebno i Cauchyjev. No zbog $||x_n - x_k|| \leq \frac{1}{m}||Tx_n - Tx_k||, k, n \in \mathbb{N}$ je i niz $(x_n)_n$ Cauchyjev. Zbog potpunosti od H, niz $(x_n)_n$ konvergira prema nekom $x \in H$. Zbog neprekidnosti operatora T je tada $Tx = y$, odnosno $y \in \operatorname{Im} T$. □

Lema 3.7. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Ako je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjekcija , tada je T^* odozdo ograničen.*

Dokaz. Pretpostavimo da je T surjekcija, te promotrimo skup $S = \{y \in K : ||T^*y|| = 1\}$. Primijetimo najprije da je S slabo ograničen. Zaista, za svaki z iz K prvo nađemo x u H takav da je $Tx = z$. Tada za svaki y iz S imamo,

$$|\langle y, z\rangle| = |\langle y, Tx\rangle| = |\langle T^*y, x\rangle| \leq ||T^*y|| \cdot ||x|| = ||x||.$$

Prema principu uniformne ograničenosti, S je ograničen. Dakle, postoji $C > 0$ takva da je $||y|| \leq C$ za sve y iz S.

Sada iz jednakosti $K = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \operatorname{Ker} T^*$ ([1], propozicija 2.2.13) i surjektivnosti od T slijedi da je T^* injekcija, tj. $T^*v \neq 0$, za sve $v \neq 0$. Stoga je za $v \neq 0$ $\frac{v}{||T^*v||}$ dobro definiran vektor u S. Iz zaključka prvog dijela dokaza dobivamo $\left|\left|\frac{v}{||T^*v||}\right|\right| \leq C$, tj. $||T^*v|| \geq \frac{1}{C}||v||$. □

Propozicija 3.8. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$.*

(a) $\operatorname{Im} T$ je zatvoren potprostor ako i samo ako je $\operatorname{Im} T^*$ zatvoren potprostor.

(b) T je surjekcija ako i samo ako T^* ograničen odozdo.

(c) Ako je $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor, tada je TT^* regularan na $\operatorname{Im} T$.

Dokaz. Neka je $\operatorname{Im} T = K_0$ zatvoren potprostor prostora K. Označimo s $T_0 : H \to K_0, T_0 x = Tx$. Uočimo da je T_0 surjektivan ograničen operator Hilbertovih prostora. Prema lemi 3.7, $\operatorname{Im}(T_0)^*$ je zatvorena. Preostaje pokazati da vrijedi $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im}(T_0)^*$. Jednakost $T^*|_{K_0} = (T_0)^*$ daje $\operatorname{Im}(T_0)^* \subseteq \operatorname{Im} T^*$, dok obrat slijedi iz $\operatorname{Im} T^* \subseteq (\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Ker} T_0)^\perp = \operatorname{Im}(T_0)^*$. Ovime smo dokazali da je $\operatorname{Im} T^*$ zatvorena kad god je $\operatorname{Im} T$ zatvorena. Obrat slijedi primjenom na T^*.

Dokažimo (b). U jednom smjeru, ovo je tvrdnja prethodne leme. Obratno, neka je T^* ograničen odozdo. Tada je $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$ i $\operatorname{Im}(T^*)$ je zatvoren potprostor. Prema (a) znamo da je tada i $\operatorname{Im} T$ zatvorena. Dakle, $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^\perp = K$, tj. T je surjekcija.

Konačno, za dokaz (c), pretpostavimo da je $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor od K. Neka je $y \in \operatorname{Im} T$ takav da je $TT^*y = 0$. Kako je $\operatorname{Ker} TT^* = \operatorname{Ker} T^*$ (vrijedi i za općenite operatore), to je $y \in \operatorname{Ker} T^* \cap \operatorname{Im} T$, što daje $y = 0$. Dakle, TT^* je injekcija na $\operatorname{Im} T$. S druge strane, prema (a) je $\operatorname{Im} T^*$ također zatvoren potprostor. Stoga je $H = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im}(T^*)$. Dakle, svaki se x iz H može na jedinstven način zapisati u obliku $x = y + T^*v$, za neki $y \in \operatorname{Ker} T$ i $v \in K$. Djelovanjem s T dobivamo $Tx = TT^*v$ iz čega zaključujemo da je $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Im} TT^*$. Kako je druga inkluzija jasna, to imamo $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} TT^*$. Konačno, imamo

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} TT^* = TT^*(K) = TT^*(\operatorname{Ker}(T^*) \oplus \operatorname{Im} T) = TT^*(\operatorname{Im} T),$$

što pokazuje da je TT^* surjekcija na $\operatorname{Im} T$. □

Teorem 3.9. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada je njegov operator analize U ograničen i odozdo ograničen, a operator sinteze U^* je surjekcija. Obratno, ako je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija, tada je niz $(x_n)_n$, $x_n = Te_n$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2, bazni okvir za H čiji se operator analize podudara s T^*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bazni okvir. Otprije znamo da je tada U ograničen i odozdo ograničen. Prethodna propozicija nam pokazuje da je U^* surjektivan.

Pretpostavimo sada da imamo surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$. Iz prethodne propozicije slijedi da je T^* ograničen odozdo. Dakle, postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi

$$A||x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B||x||^2, \forall x \in H.$$

S druge strane, za svaki $x \in H$ imamo

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n,$$

odnosno,

$$T^*x = (\langle x, x_n \rangle) \text{ i } ||T^*x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

□

Korolar 3.10. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je bazni okvir za H ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor L, surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(L, H)$ i ONB $(f_n)_n$ za L takvi da je $x_n = Tf_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. U jednom smjeru ovo je prva tvrdnja prethodnog teorema i propozicije 2.5.

Obrat slijedi iz druge tvrdnje prethodnog teorema te činjenice da je svaki separabilan Hilbertov prostor izometrički izomorfan s ℓ^2. □

Navedimo još jednu korisnu neposrednu posljedicu prethodnog korolara:

Korolar 3.11. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan operator s H na Hilbertov prostor K, te neka je $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(y_n)_n$ bazni okvir za K.*

Za kraj, promotrimo zadnje rezultate u slučaju Parsevalovih baznih okvira. Ograničen operator $U \in \mathbb{B}(H, K)$, gdje su H i K Hilbertovi prostori, zove se ko-izometrija ako je U^* izometrija. Uočimo da je $U \in \mathbb{B}(H, K)$ ko-izometrija ako i samo ako je surjektivna parcijalna izometrija. Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo poznatu tvrdnju za izometrične operatore: operator $U \in \mathbb{B}(H, K)$ je izometrija ako i samo ako je $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$, za sve $x, y \in H$.

Neka je U ko-izometrija. Kako je U^* izometrija, to je on posebno odozdo ograničen te je prema 3.8 (b) U surjekcija. Neka je sada $x \in \operatorname{Ker} U^{\perp} = \overline{\operatorname{Im}(U^*)} = \operatorname{Im}(U^*)$. Nađimo $y \in H$ takav da je $y = U^*y$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
||Ux||^2 &= ||UU^*y||^2 \\
&= \langle UU^*y, UU^*y\rangle \\
&= \langle U^*y, U^*UU^*y\rangle \\
&= \langle y, UU^*y\rangle \\
&= \langle U^*y, U^*y\rangle. \\
&= ||U^*y||^2 \\
&= ||x||^2
\end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da je U surjektivna parcijalna izometrija. Uzmimo $y \in K, y \neq 0$ te neka je $x \in (\mathrm{Ker}\, U)^\perp$ takav da je $y = Ux$. Na potpuno isti način kao maloprije, koristeći pretpostavku da je U izometrija na $(\mathrm{Ker}\, U)^\perp$, dobivamo da je i U^* izometrija.

Korolar 3.12. *Niz $(x_n)_n$ u H je Parsevalov bazni okvir ako i samo ako postoji ko-izometrija $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ sa svojstvom $Te_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ standardna ONB u ℓ^2.*

Dokaz. Kako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H, imamo $||x||^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2, \forall x \in H$. Međutim, to upravo znači da je pridruženi operator analize izometričan, tj. da je U^* ko-izometrija, a još iz propozicije 2.5 znamo da je $U^*e_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obratno, uzmimo ko-izometriju $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ i stavimo $x_n = Te_n, n \in \mathbb{N}$. Jer je T^* izometrija, imamo $||T^*x||^2 = ||x||^2, \forall x \in H$. S druge strane, je $||T^*x||^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle T^*x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2, \forall x \in H$. Dakle, $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H. □

Prije nastavka, prisjetimo se kako za hermitski operator $A \in \mathbb{B}(H)$ Hilbertovog prostora H kažemo da je pozitivno semidifinitan ako vrijedi

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in H.$$

Za hermitske operatore $A, B \in \mathbb{B}(H)$ definiran je uređaj na sljedeći način:

$$A \leq B \iff B - A \geq 0.$$

Također, za hermitski operator $A \in \mathbb{B}(H)$ postoji jedinstven operator $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $B \geq 0$ i $B^2 = A$ ([1] teorem 5.5.3). Operator B se naziva drugi korijen operatora A te ćemo ga često označavati s $A^{\frac{1}{2}}$.

Propozicija 3.13. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H i U pridruženi operator analize. Tada je operator U^*U regularan i optimalne granice baznog okvira dane su s*

$$A_{opt} = \frac{1}{||(U^*U)^{-1}||} = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\},\ B_{opt} = ||U^*U|| = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\}.$$

Dokaz. Primjenom propozicije 3.8 na operator U^* slijedi da je U^*U regularan operator na $\mathrm{Im}(T^*) = H$. Koristeći se propozicijom 2.5 dobivamo

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H. \tag{3.2}$$

Množeći skalarno s x dobivamo

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \forall x \in H. \tag{3.3}$$

Iz ovog zaključujemo

$$A_{opt} I \leq U^*U \leq B_{opt} I \tag{3.4}$$

iz čega odmah slijedi

$$B_{opt} = ||U^*U|| = ||U||^2.$$

S druge strane, imamo

$$A_{opt} \leq U^*U \iff (U^*U)^{-1} \leq \frac{1}{A_{opt}} I. \tag{3.5}$$

Tvrdimo sada da je

$$\frac{1}{A_{opt}} = ||(U^*U)^{-1}||.$$

Zaista, (3.5) nam daje $||(U^*U)^{-1}|| \leq \frac{1}{A_{opt}}$. Pretpostavimo da vrijedi stroga nejednakost, tj. da je $||(U^*U)^{-1}|| = C < \frac{1}{A_{opt}}$. Tada je $(U^*U)^{-1} \leq C \cdot I$, odnosno $\frac{1}{C} I \leq U^*U$. Ali ovo je kontradikcija s činjenicom da je A_{opt} maksimalna donja granica baznog okvira. □

Korolar 3.14. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Pretpostavimo da je niz $(x_n)_n$ bazni okvir za H te da je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjekcija. Stavimo $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(y_n)_n$ bazni okvir za K. Ako su A i B granice baznog okvira $(x_n)_n$, onda su $\frac{A}{||(TT^*)^{-1}||}$ i $B||T||^2$ granice baznog okvira $(y_n)_n$.*

Dokaz. Da je $(y_n)_n$ bazni okvir slijedi odmah iz korolara 3.10.

Za dokaz druge tvrdnje, označimo s U operator analize pridružen $(x_n)_n$. Lako se provjeri da je operator analize pridružen $(y_n)_n$ tada dan s $V = UT^*$. Kako je $A \leq A_{opt}$ i $B_{opt} \leq B$, iz (3.4) zaključujemo

$$AI \leq U^*U \leq BI. \tag{3.6}$$

Kako je T surjektivan, TT^* je regularan prema propoziciji 3.8. Stoga je

$$(TT^*)^{-1} \leq ||(TT^*)^{-1}|| \cdot I,$$

odnosno,

$$TT^* \geq \frac{1}{||(TT^*)^{-1}||} I. \tag{3.7}$$

Sada imamo

$$V^*V = (TU^*)(UT^*) = T(U^*U)T^* \overset{(3.6)}{\leq} B \cdot TT^* \leq B||TT^*||I = B||T||^2 I$$

te

$$V^*V = T(U^*U)T^* \overset{(3.6)}{\geq} A \cdot TT^* \overset{(3.7)}{\geq} \tfrac{A}{||(TT^*)^{-1}||} I.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\tfrac{A}{||(TT^*)^{-1}||} I \leq V^*V \leq B||T||^2 I.$$

što je upravo ono što smo trebali dokazati. □

Promotrimo sada proizvoljni bazni okvir $(x_n)_n$ s pridruženim operatorom analize U. Vratimo se natrag na jednakost (3.2) koja opisuje djelovanje operatora U^*U:

$$U^*Ux = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Djelovanjem s $(U^*U)^{-1}$ dobivamo:

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle (U^*U)^{-1} x_n, \ \forall x \in H.$$

Stavljanjem $y_n = (U^*U)^{-1} x_n$ prethodna jednakost postaje

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n, \forall x \in H. \tag{3.8}$$

Nadalje, korolar 3.14 nam kaže da je $(y_n)_n$ također bazni okvir za H. Označimo njegov operator analize s V. Tada (3.8) možemo zapisati u obliku

$$V^*U = I \tag{3.9}$$

Adjungiranjem dobivamo

$$U^*V = I \tag{3.10}$$

što je ekvivalentno

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \forall x \in H. \tag{3.11}$$

Iz prethodnih razmatranja također vidimo da su (3.8) i (3.11) ekvivalentni.

Definicija 3.15. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir te U pridruženi operator analize. Bazni okvir $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, naziva se kanonski dual baznog okvira $(x_n)_n$.*

Primijetimo da je operator analize pridružen kanonskom dualu dan s $U(U^*U)^{-1}$. Također, ukoliko se radi o Parsevalovom baznom okviru, kanonski dual se podudara s polaznim baznim okvirom. Štoviše, Parsevalovi bazni okviri su jedini koji imaju to svojstvo. To je posljedica činjenice da je operator U izometrija ako i samo ako je $U^*U = I$. Zaista,

$$\begin{aligned} ||Ux||^2 = ||x||^2, \forall x \in H &\iff \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \in H \\ &\iff \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \in H \\ &\iff \langle (U^*U - I)x, x \rangle, \forall x \in H \\ &\iff U^*U = I, \end{aligned}$$

gdje zadnja ekvivalencija proizlazi iz [1], propozicija 2.2.14.

U sljedećem teoremu dajemo kratak rezime prethodnih razmatranja:

Teorem 3.16. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te U pridruženi operator analize. Tada je $(U^*U)^{-1}$ regularan operator na H i niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, je također bazni okvir za H koji zadovoljava*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \forall x \in H. \tag{3.12}$$

Posebno, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov frame, (3.12) *prelazi u*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H. \tag{3.13}$$

Jednakosti (3.12) i (3.13) često se nazivaju rekonstrukcijskim svojstvom baznih okvira. Kako su općenito bazni okviri linearno zavisni sustavi, čini se prirodno da kanonski dual nije jedini niz koji se može upotrijebiti za sintetiziranje vektora u smislu jednakosti (3.12). Dualnim baznim okvirima bavit ćemo se više u sljedećem dijelu.

Za kraj ovog dijela dat ćemo nekoliko rezultata vezanih za Parsevalove bazne okvire.

Propozicija 3.17. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H te U pridruženi operator analize. Stavimo $u_n = (U^*U)^{-\frac{1}{2}}x_n, n \in \mathbb{N}$. Tada je $(u_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H.*

Dokaz. Kako je $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$ regularan, iz korolara 3.14 slijedi da je $(u_n)_n$ bazni okvir s pridruženim operatorom analize $U(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$. Kako je $(U(U^*U)^{-\frac{1}{2}})^*U(U^*U)^{-\frac{1}{2}} = I$, ovaj je bazni okvir Parsevalov. □

Propozicija 3.18. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. Tada je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir ako i samo ako je*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H. \tag{3.14}$$

Posebno, ako je $(f_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H te M zatvoren potporstor od H, tada je niz $(Pf_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M, gdje je s P označena ortogonalna projekcija na M.

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Tada (3.14) slijedi iz 3.16. Obratno, pretpostavimo da vrijedi (3.14). Skalarnim množenjem s x dobivamo $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Za dokaz druge tvrdnje primijetimo kako se jednakost $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n$ za $x \in M$ može zapisati u obliku

$$x = Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Px, f_n \rangle Pf_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Pf_n \rangle Pf_n.$$

□

Propozicija 3.19. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada postoje Hilbertov prostor H_0 takav da je H zatvoren potprostor od H_0 te ONB $(f_n)_n$ za H_0 takvi da je $x_n = Pf_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, gdje je s $P \in \mathbb{B}(H_0)$ označena ortogonalna projekcija na H.*

Dokaz. Označimo s U operator analize pridružen $(x_n)_n$. Znamo otprije da je U izometrija te da je $M = \operatorname{Im} U$ zatvoren potprostor od ℓ^2. Označimo s $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalnu projekciju na M, te stavimo $H_0 = H \oplus M^{\perp}$. H ćemo na prirodan način identificirati s $H \oplus \{0\} \leq H_0$. Označimo s $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalnu projekciju na

$H \oplus \{0\}$.
Promotrimo niz $(f_n)_n$ u H_0 definiran s $f_n = (x_n, (I - Q)e_n), n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Očigledno je $Pf_n = (x_n, 0)$ za sve n. Tvrdimo nadalje da je $(f_n)_n$ ONB za H_0. To ćemo pokazati tako što ćemo konstruirati unitaran operator $W : \ell^2 \to H_0$ takav da je $We_n = f_n$, za sve n.

U tu svrhu prvo primijetimo da je operator $U^*\big|_M : M \to H$ unitaran. Također, kako je $\ell^2 = M \oplus \mathrm{Ker}(U^*$, imamo $x_n = U^* e_n = U^* Q e_n = (U^*\big|_M) Q e_n$, za sve n.

Stavimo $W = U^*\big|_M \oplus I_{M^\perp} : \ell^2 \to H_0$, gdje je $I_{M^\perp}$ identiteta na $M^\perp$. Tada je W unitaran operator te vrijedi

$$We_n = (U^*\big|_M \oplus I_{M^\perp})(Qe_n + (I - Q)e_n) = (x_n, (I - Q)e_n) = f_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Poglavlje 4

Dualni bazni okviri

Prisjetimo se kako je za proizvoljan bazni okvir $(x_n)_n$ za H s pridruženim operatorom analize U kanonski dual od $(x_n)_n$ bio bazni okvir za H definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, te je on prema teoremu 3.16 zadovoljavao

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \forall x \in H.$$

Kao što je bilo najavljeno u prošlom dijelu, bavit ćemo se nizovima koji će imati gornje rekonstrukcijsko svojstvo.

Definicija 4.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Svaki niz $(z_n)_n$ u H sa svojstvom*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n, \forall x \in H,$$

naziva se dual baznog okvira $(x_n)_n$.

Navedena formulacija definicije duala baznog okvira sugerira da takav niz ne mora nužno biti jedinstven. Zaista, pogledajmo ONB $(e_n)_n$ u H i napeti bazni okvir $(e_1, e_1, e_2, e_2, ...)$. Očito je da ovdje imamo $A = B = 2$, $(U^*U)^{-1} = 2I$, pa je $(U^*U)^{-1} = \frac{1}{2}I$ i kanonski dualni bazni okvir je niz $(\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, ...)$. Međutim, i nizovi $(e_1, 0, e_2, 0, ...)$ i $(0, e_1, 0, e_2, ...)$ su duali za naš bazni okvir $(x_n)_n$.

Štoviše, situacija može biti još zamršenija: dualni niz baznog okvira ne mora i sam biti bazni okvir. Promotrimo Parsevalov bazni okvir $e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...$ Jedan njegov dual je niz $e_1, \sqrt{2}e_2, 0, \sqrt{3}e_3, 0, 0, ...$ koji je neograničen, pa stoga ne može biti bazni okvir.

Uzevši u obzir prethodna razmatranja, korisna je sljedeća propozicija:

Propozicija 4.2. *Pretpostavimo da su* $(v_n)_n$ *i* $(w_n)_n$ *Besselovi nizovi u Hilbertovom prostoru* H *takvi da vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle w_n, \forall x \in H.$$

Tada su $(v_n)_n$ *i* $(w_n)_n$ *bazni okviri za* H *te su oni dualni jedan drugome. Posebno, ako je Besselov niz dualan nekom baznom okviru , tada je i on sam bazni okvir za* H*.*

Dokaz. Označimo redom s V i W odgovarajuće operatore analize baznih okvira $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$. Tada pretpostavku propozcije možemo zapisati u obliku $W^*V = I$. Iz ovoga zaključujemo da je W^* surjekcija, pa je prema korolaru 3.10 $(w_n)_n$ bazni okvir. Kako $W^*V = I$ povlači $V^*W = I$, na isti način zaključujemo da je i $(v_n)_n$ bazni okvir. □

Sada ćemo navesti dva specifična svojstva kanonskog duala baznog okvira.

Propozicija 4.3. *Neka je* $(x_n)_n$ *bazni okvir Hilbertovog prostora* H *te* U *pridruženi operator analize, te neka je* $(y_n)_n$ *njegov kanonski dual.*

(a) Ako, za neki $x \in H$*, niz skalara* $(c_n)_n$ *zadovoljava* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$*, onda je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle x, y_n \rangle|^2.$$

(Drugim riječima, niz $(\langle x, y_n \rangle)_n$ *ima najmanju* ℓ^2*-normu među svim nizovima koji sintetiziraju* x *preko niza* $(x_n)_n$*.)*

(b) Ako je $(z_n)_n$ *dual baznog okvira* $(x_n)_n$ *za kojeg postoji operator* $D \in \mathbb{B}(H)$ *takav da je* $z_n = Dx_n$ *za sve* n*, tada je* $D = (U^*U)^{-1}$ *te* $z_n = y_n$ *za sve* n*.*

(Drugim riječima, kanonski dual je jedini dual koji proizlazi kao slika ograničenog operatora.)

Dokaz. (a) Znamo da je $(\langle x, y_n \rangle)_n \in \ell^2$. Pretpostavimo da je i $(c_n)_n$ također ℓ^2-niz; u suprotnom nemamo što dokazivati. Radi lakšeg zapisa, označimo $\langle x, y_n \rangle$ s a_n, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\langle x, (U^*U)^{-1}x \rangle &= \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, (U^*U)^{-1} \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle (U^*U)^{-1} x_n, x \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle y_n, x \rangle \\
&= \langle (a_n)_n, (a_n)_n \rangle
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}\langle x, (U^*U)^{-1}x\rangle &= \langle \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, (U^*U)^{-1}\rangle \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (U^*U)^{-1}x_n, x\rangle \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle y_n, x\rangle \\ &= \langle (c_n)_n, (a_n)_n\rangle\end{aligned}$$

Usporedbom dobivenih izraza zaključujemo kako je $(c_n - a_n)_n \perp (a_n)_n$. Stoga je

$$||(c_n)_n||^2 = ||(c_n - a_n)_n + (a_n)_n||^2 = ||(c_n - a_n)_n||^2 + ||(a_n)_n||^2.$$

(b) Prema pretpostavci, imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n\rangle x_n$ te $x = \sum_{n=1}^{\infty} x, (U^*U^{-1}x_n\rangle x_n$ za sve x. Primjenom druge jednakosti na vektor $(U^*U)^*x$ dobivamo

$$(U^*U)D^*x = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle (U^*U)D^*x, (U^*U)^{-1}x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n\rangle x_n = x.$$

Ovime smo pokazali da vrijedi $(U^*U)D^* = I$, iz čega slijedi $(U^*U)^{-1} = D^*$, odakle adjungiranjem dolazimo do $D = (U^*U)^{-1}$. □

Promotrimo sada ponovno proizvoljan bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H te označimo s U pridruženi operator analize. Postavlja se prirodno pitanje: možemo li nekako opisati sve duale od $(x_n)_n$?

Pretpostavimo da imamo bazni okvir $(z_n)_n$ sa svojstvom

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n\rangle x_n \forall x \in H. \tag{4.1}$$

Označimo li s V operator analize pridružen $(z_n)_n$, tada se gornja jednakost može zapisati kao

$$U^*V = I, \tag{4.2}$$

što nam daje još dvije ekvivalentne jednakosti:

$$V^*U = I, \tag{4.3}$$

te

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n\rangle x_n, \forall x \in H. \tag{4.4}$$

U tom slučaju, reći ćemo da su $(x_n)_n$ i $(z_n)_n$ međusobno dualni.

S obzirom da su bazni okviri prostora H u bijekciji s odgovarajućim operatorima analize/sinteze, naš se problem pronalaska svih baznih okvira $(z_n)_n$ dualnih $(x_n)_n$ svodi na pitanje pronalaska svih operatora $V \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ koji zadovoljavaju (4.3). Drugim riječima, za odgovarajući operator analize $U \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ želimo pronaći sve njegove lijeve inverze.

Do kraja ovog dijela bavimo se pitanjima vezanima za postojanje lijevog inverza ograničenog operatora, kao i svojstvima istog.

Lema 4.4. *Neka su H i K Hilbertovi prostori te $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Pretpostavimo da postoji $S \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da je $ST = I$. Tada je T ograničen odozdo i $\operatorname{Im} T$ je zatvoren potprostor od K.*

Dokaz. Adjungiranjem gornje jednakosti dobivamo $T^*S^* = I$ iz čega slijedi da je T^* surjekcija. Prema 3.8 je tada T odozdo ograničen. Druga tvrdnja je direktna posljedica prve. □

Pretpostavimo da je Hilbertov prostor direktna suma dva zatvorena potprostora (u oznaci $H = X \dot{+} Y$), točnije, da za svaki $h \in H$ postoje jedinstveni $x \in X, y \in Y$ takvi da je $h = x + y$. Operator na H definiran s $Fh = x$ zovemo kosi projektor na X parelelan s Y. Uočimo da je F idempotentan (tj. $F^2 = F$) i ograničen. Obratno, svaki idempotentan ograničen operator na H je kosi projektor na svoju sliku paralelan sa svojom jezgrom.

Lema 4.5. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ te $S \in \mathbb{B}(K, H)$ te da vrijedi $ST = I$. Tada vrijedi:*

(a) $\operatorname{Ker} S = (I - TS)(\operatorname{Ker}(T^*)$,

(b) $K = \operatorname{Im} T \dot{+} \operatorname{Ker} S$,

(c) TS je kosi projektor na $\operatorname{Im} T$ *paralelan s* $\operatorname{Ker} S$.

Dokaz. Prvo pokazujemo da vrijedi

$$\operatorname{Ker} S = \operatorname{Im}(I - TS) \tag{4.5}$$

Zaista, iz $ST = I$ slijedi $STS = I$ te $S(I - TS) = 0$. Odavde odmah dobivamo $\operatorname{Im}(I - TS) \subseteq \operatorname{Ker} S$. Obratno, za svaki $y \in \operatorname{Ker} S$ vrijedi $(I - TS)y = y$, što nam daje $y \in \operatorname{Im}(I - TS)$.

Slijedeći korak je pokazati da vrijedi

$$\operatorname{Im}(I - TS) = (I - TS)(\operatorname{Ker}(T^*). \tag{4.6}$$

Primijetimo prvo da jednakost $ST = I$ daje, prema lemi 4.4 da je $\operatorname{Im} T$ zatvoren. Uzmimo sada proizvoljni $(I - TS)y \in \operatorname{Im}(I - TS)$. Kako je $\operatorname{Im} T$ zatvoren, y možemo zapisati u obliku $y = Tx + z$, za neke $x \in H$ i $z \in \operatorname{Ker}(T^*)$. Primijetimo također da je

$$(I - TS)(Tx) = Tx - TSTx = Tx - Tx = 0$$

Sada je konačno

$$(I - TS)y = (I - TS)(Tx + z) = (I - TS)z \in (I - TS)\operatorname{Ker}(T^*).$$

Dakle, $\operatorname{Im}(I - TS) \subseteq (I - TS)\operatorname{Ker}(T^*)$. S obzirom da je druga inkluzija trivijalna, time je dokaz (4.6) gotov.

Dokazujemo tvrdnju (b). Neka je $y \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S$ proizvoljan. Tada je $y = Tx$ za neki x i $Sy = 0$. Stoga je $0 = Sy = STx = x$, pa je $y = 0$. Nadalje, neka je $y \in K$ proizvoljan. Na isti način kao u dokazu (a) zaključujemo $y = Tx + z$, za neke $x \in H$, $z \in \operatorname{Ker}(T^*)$ te

$$(I - TS)y = (I - TS)z. \tag{4.7}$$

Stavimo $u = TSy \in \operatorname{Im} T$ i $v = (I - TS)z$. Kako je $v \in (I - TS)\operatorname{Ker}(T^*)$, (a) povlači $v \in \operatorname{Ker} S$, što nam daje sljedeći zapis:

$$y = TSy + (I - TS)z = u + v \in \operatorname{Im} T \dot{+} \operatorname{Ker} S, \tag{4.8}$$

čime je dovršen dokaz (b).

Za dokaz tvrdnje (c), primijetimo prvo kako je zbog $(TS)^2 = T(ST)S = TS\,TS$ kosi projektor . Nadalje, za $Tx \in \operatorname{Im} T$ je $TS(Tx) = Tx$, odnosno TS djeluje kao identiteta na $\operatorname{Im} T$. Konačno, TS je očito trivijalan na $\operatorname{Ker} S$. □

Propozicija 4.6. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada T posjeduje lijevi inverz ako i samo ako je ograničen odozdo.*

Dokaz. Ukoliko T posjeduje lijevi inverz, tada je on prema lemi 4.4 ograničen odozdo. Obratno, pretpostavimo da je T odozdo ograničen. Prema propoziciji 3.8 je tada T^* surjekcija. Ista propozicija nam tada garantira da je operator T^*T regularan, pa je dobro definiran ograničen operator $S = (T^*T)^{-1}T^*$, te očito vrijedi $ST = I$. □

Korolar 4.7. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Tada je $T(T^*T)^{-1}T^*$ ortognalni projektor na $\operatorname{Im} T$.*

Dokaz. Iz dokaza prethodne propozicije znamo da je jedan lijevi inverz od T dan s $S = (T^*T)^{-1}T^*$. Prema lemi 4.5, $TS = T(T^*T)^{-1}T^*$ je kosi projektor na $\operatorname{Im} T$ paralelan s $\operatorname{Ker} S$. S obzirom da je $(T^*T)^{-1}$ regularan operator, imamo

$$\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker}((T^*T)^{-1}T^*) = \operatorname{Ker}(T^*) = (\operatorname{Im} T)^{\perp}. \tag{4.9}$$

Dakle, $T(T^*T)^{-1}T^*$ je kosi projektor na $\operatorname{Im} T$ paralelan s $(\operatorname{Im} T)^\perp$, tj. $T(T^*T)^{-1}T^*$ je upravo ortogonalni projektor na $\operatorname{Im} T$. □

Korolar 4.8. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H,K)$ ograničen odozdo. Tada je svaki lijevi inverz $S \in \mathbb{B}(K,H)$ od T oblika $S = (T^*T)^{-1}T^*F$, gdje je $F \in \mathbb{B}(K)$ kosi projektor na $\operatorname{Im} T$ paralelan s nekim zatvorenim direktnim komplementom od $\operatorname{Im} T$ u K.*

Dokaz. Ako je $S = (T^*T)^{-1}T^*F$, gdje je$F$ kao u iskazu teorema, onda je očito $ST = I$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $S \in \mathbb{B}(K)$ takav da je $ST = I$. Stavimo $F = TS$. Prema lemi 4.5 je F kosi projektor na $\operatorname{Im} T$, te za njega vrijedi $(T^*T)^{-1}T^*F = (T^*T)^{-1}T^*TS = S$. □

Napomena 4.9. *Pretpostavimo da je operator $T \in \mathbb{B}(H,K)$ ograničen odozdo. Prethodni korolar nam govori kako su svi lijevi inverzi od u bijekciji sa svim kosim projektorima na $\operatorname{Im} T$, odnosno, ekvivalentno tome, sa svim zatvorenim direktnim komplementima $\operatorname{Im} T$ u K. U tom smislu možemo reći da je kanonski lijevi inverz od T onaj lijevi inverz koji odgovara ortogonalnom komplementu $\operatorname{Im} T$ u K. Prisjetimo se iz korolara 4.7 kako je ortogonalni projektor na $\operatorname{Im} T$ dan s $P = T(T^*T)^{-1}T^*$. Stavljanjem P na mjesto F u našoj općenitoj formuli za lijevi inverz (4.8) dobivamo $S = (T^*T)^{-1}T^*T(T^*T)^{-1}T^* = (T^*T)^{-1}T^*$. Na ovaj način vidimo da je lijevi inverz od T konstruiran u propoziciji 4.6 ustvari kanonski lijevi inverz od T.*

Korolar 4.10. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H,K)$ odozdo ograničen. Tada je $S \in \mathbb{B}(K,H)$ lijevi inverz od T ako i samo ako je S oblika $S = (T^*T)^{-1}T^* + W(I - T(T^*T)^{-1}T^*)$ za neki $W \in \mathbb{B}(K,H)$.*

Dokaz. Ako je $S = (T^*T)^{-1}T^* + W(I - T(T^*T)^{-1}T^*)$ onda je očito $ST = I$.

Obratno, ako je $ST = I$, stavimo $W = S$, te dobivamo

$$(T^*)T)^{-1}T^* + S(I - T(T^*T)^{-1}T^*) = (T^*T)^{-1} + S - ST(T^*T)^{-1}T^* = S.$$

□

Korolar 4.11. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ bazni okviri Hilbertovog prostora H te U i V njima redom pridruženi operatoir analize. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(v_n)_n$ je dual od $(x_n)_n$

(b) V^* je oblika $V^* = (U^*U)^{-1}U^*F$, gdje je $F \in \mathbb{B}(\ell^2)$ kosi projektor na $\operatorname{Im} U$ paralelan s nekim zatvorenim direktnim komplementom od $\operatorname{Im} U$ u ℓ^2

(c) V^* je oblika $V^* = (U^*U)^{-1}U^* + W(I - U(U^*U)^{-1}U^*)$, za neki $W \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$.

Korolar 4.12. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ međusobno dualni bazni okviri Hilbertovog prostora H te U i V njima redom pridruženi operatori analize. Tada je:*

(a) $\ell^2 = \operatorname{Im} U \dotplus \operatorname{Ker}(V^*)$,

(b) UV^* *je kosi projektor na* $\operatorname{Im} U$ *paralelan s* $\operatorname{Ker}(V^*)$,

(c) $\ell^2 = \operatorname{Im} V \dotplus \operatorname{Ker}(U^*)$,

(d) VU^* *je kosi projektor na* $\operatorname{Im} V$ *paralelan s* $\operatorname{Ker}(U^*)$.

Za sam kraj ćemo navesti jednu klasu baznih okvira koji posjeduju jedinstven dual. U tu svrhu uvodimo sljedeći pojam.

Definicija 4.13. *Niz $(x_n)_n$ je Rieszova baza Hilbertovog prostora H ako je $(x_n)_n$ bazni okvir čiji operator analize je surjekcija.*

Korolar 4.14. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada $(x_n)_n$ posjeduje jedinstven dual ako i samo ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza.*

Dokaz. U napomeni 4.9 je prokomentirana činjenica da su duali od $(x_n)_n$ u bijekciji s zatvorenim direktnim komplementima od $\operatorname{Im} U$ u ℓ^2, gdje je U operator analize pridružen $(x_n)_n$. Međutim, prema pretpostavci je $\operatorname{Im} U = \ell^2$, stoga je jedini (zatvoren) direktan komplement onaj trivijalan. □

Poglavlje 5

Viškovi baznih okvira

Definicija 5.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Višak baznog okvira $(x_n)_n$ definira se kao:*

$$e((x_n)_n) = \sup\{card(S) : \overline{span}\{x_n : n \notin S\} = H\}. \tag{5.1}$$

Drugim riječima, višak baznog okvira je najveći broj elemenata koje možemo ukloniti iz njega da preostali elementi niza čine fundamentalan niz u H. Ukoliko je $e((x_n)_n) = m \in \mathbb{N}$, tada se iz definicije lako vidi da se za bilo koji k, $1 \leq k \leq m$, može pronaći konačan skup indeksa T takvih da je $card(T) = k$ i $\overline{span}\{x_n : n \notin T\} = H$. Slično, ako je $e((x_n)_n = \infty$ moguće je pronaći takav skup T za bilo koji $k \in \mathbb{N}$.

Sljedeći bitan rezultat o viškovima baznih okvira navest ćemo bez dokaza; isti se može pronaći u [2], teorem 2.5.5.

Teorem 5.2. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir HIlbertovog prostora H te U pridruženi operator analize. Tada je $e((x_n)_n = \dim \mathrm{Ker}(U^{*})$.*

U nastavku ćemo navesti nekoliko korisnih rezultata o viškovima baznih okvira, te konačno karakterizaciju baznih okvira koji posjeduju Parsevalov dual.

Propozicija 5.3. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te U njemu pridružen operator analize. Tada vrijedi $e((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \langle (U^*U)^{-1}x_n, x_n \rangle)$.*

Dokaz. Prisjetimo se korolara 4.7: $(U^*U)^{-1}$ je ortogonalni projektor na $\mathrm{Im}\, U$; stoga je $I-(U^*U)^{-1}$ ortogonalni projektor na $\mathrm{Ker}(U^*$. Označimo ponovno s $(e_n)_n$ kanonsku ONB za ℓ^2. Koristeći se teoremom 5.2 računamo:

$$\begin{aligned} e((x_n)_n) &= \dim \operatorname{Ker}(U^*) \\ &= tr(I - U(U^*U)^{-1}U^*) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle (I - U(U^*U)^{-1}U^*)e_n, e_n \rangle \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (\langle e_n, e_n \rangle - \langle (U^*U)^{-1}U^*e_n, U^*e_n \rangle) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \langle (U^*U)^{-1}x_n, x_n \rangle) \end{aligned}$$

□

Korolar 5.4. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora H. Tada je $e((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - ||x_n||^2)$.*

Propozicija 5.5. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ međusobno dualni bazni okviri Hilbertovog prostora H. Tada je $e((x_n)_n) = e((v_n)_n)$.*

Dokaz. Označimo s U i V odgovarajuće operatore analize. Prema teoremu 5.2 dovoljno je pokazati da je $\dim \operatorname{Ker}(U^*) = \dim \operatorname{Ker}(V^*)$. Kako je $V^*U = I$, lema 4.5 (a) (uz $S = V^*$ i $T = U$) daje

$$\operatorname{Ker}(V^*) = (I - UV^*)(\operatorname{Ker}(U^*).$$

Iz toga zaključujemo

$$\dim \operatorname{Ker}(V^*) = \dim((I - UV^*)(\operatorname{Ker}(U^*)) \leq \dim \operatorname{Ker}(U^*).$$

Druga nejednakost slijedi na isti način s obzirom da je $V^*U = I$ ekvivalentno s $U^*V = I$. □

Teorem 5.6. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H, A_{opt} i B_{opt} njegove optimalne granice te U pridruženi operator analize. Tada $(x_n)_n$ posjeduje Parsevalov dual ako i samo ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:*

(a) $A_{opt} \geq 1$,

(b) $\dim \operatorname{Im}(U^*U - I) \leq e((x_n)_n)$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $(v_n)_n$ Parsevalov dual od $(x_n)_n$ te označimo s V njemu pridružen operator analize. Prema korolaru 4.11, V je oblika $V = U(U^*U)^{-1} + QW$, gdje je $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na $\operatorname{Im} U^{\perp}$, a $W \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ je proizvoljan.

Kako je $(v_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, imamo $V^*V = I$, odnosno

$$((U^*U)^{-1}U^* + W^*Q)(U(U^*U)^{-1} + QW) = I.$$

Kako je $QU = 0$ i $U^*Q = 0$, to dobivamo

$$(U^*U)^{-1} + W^*QW = I. \tag{5.2}$$

Posebno, ovo implicira $(U^*U)^{-1} \leq I$ pa posljedično $U^*U \geq I$. To dokazuje $A_{opt} \geq 1$.

Nadalje, množeći (5.2) s obje strane s $(U^*U)^{\frac{1}{2}}$ dobivamo

$$U^*U - I = (U^*U)^{\frac{1}{2}}(W^*QW)(U^*U)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako je $(U^*U)^{\frac{1}{2}}$ regularan operator, zaključujemo

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Im}(U^*U - I)) &= \dim(\mathrm{Im}(U^*U)^{\frac{1}{2}}(W^*QW)(U^*U)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \dim(\mathrm{Im}(W^*QW)) \\
&\leq \dim(\mathrm{Im}\, Q) \\
&= \dim(\mathrm{Im}\, U^{\perp}) \\
&= e((x_n)_n.
\end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da vrijede (a) i (b). Promotrimo rastav $H = \mathrm{Ker}(U^*U - I) \oplus \overline{\mathrm{Im}(U^*U - I)}$, te shodno tome zapišimo operator U^*U u obliku $U^*U = I \oplus T$. Uočimo kako je $T \geq 0$, te također, zbog (a), $\sigma(T) \subseteq [1, B_{opt}]$.

Označimo s $g : [1, \infty\rangle \to [0, 1\rangle$ neprekidnu funkciju definiranu s $g(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{t}}$. Stavimo $G = g(T)$. Sada pomoću (b) konstruiramo parcijalnu izometriju $L \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ koja je izometrija na $\overline{\mathrm{Im}(U^*U - I)}$ te čija je slika sadržana u $\mathrm{Ker}(U^*)$. Naime, $\dim \mathrm{Im}(U^*U - I) \leq e((x_n)_n) = \dim \mathrm{Ker}(U^*)$, pa je takvu parcijalnu izometriju moguće dobiti injektivnim preslikavanjem neke ONB za $\mathrm{Im}(U^*U - I)$ u proizvoljan podskup neke ONB za $\mathrm{Ker}(U^*)$. Konačno, označimo s $P \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalni projektor na $\overline{\mathrm{Im}(U^*U - I)}$.

Stavimo $V = U(U^*U)^{-1} + L(0 \oplus G)P$. Tada je

$$\begin{aligned}
V^*V &= ((U^*U)^{-1}U^* + P(0 \oplus G)L^*)(U(U^*U)^{-1} + L(0 \oplus G)P) \\
&= (U^*U)^{-1} + (0 \oplus G^2) \\
&= (I \oplus T^{-1}) + (0 \oplus (I - T^{-1})) \\
&= I.
\end{aligned}$$

Stavimo sada $v_n = V^* e_n, n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska ONB za ℓ^2. Kako je $V^*V = I$, to je niz $(v_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Također je $V^*U = (U^*U)^{-1}U^*U + P(0 \oplus G)L^*U = I$, zbog $L^*U = 0$. Dakle, $(v_n)_n$ je dualan $(x_n)_n$. $\square$

Poglavlje 6

Konačna proširenja Besselovih nizova

U ovom ćemo se dijelu baviti pitanjem konačnih proširenja Besselovih nizova. Radit ćemo isključivo s beskonačnodimenzionalnim prostorima s obzirom da su odgovori na naša pitanja trivijalni u slučaju konačne dimenzije. Kada radimo s konačnim nizovima koji se sastoje od, recimo, k elemenata, prirodno je smatrati da njemu pridruženi operator analize poprima vrijednosti u $\mathbb{F}^k$. Međutim, kako radimo u beskonačnodimenzionalnom prostoru, prigodno je usvojiti sljedeću konvenciju: ako je $(x_n)_{n=1}^k$ konačan niz u Hilbertovom prostoru H podrazumijevat ćemo da njemu pridruženi operator analize poprima vrijednosti u ℓ^2, tj. podrazumijevat ćemo da nakon vektora $x_1, x_2, ..., x_k$ slijedi beskonačno nulvektora.

Pretpostavimo sada da imamo Besselov niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H. Postavlja se pitanje: postoji li niz $(f_n)_{n=1}^k$ u H takav da je prošireni niz $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ bazni okvir za H?

Za Besselov niz $(x_n)_n$ definiramo deficit kao najmanji kardinalni broj d takav da postoji $G \subseteq H$ kardinalnosti d takav da je $\overline{span}\{(x_n)_n \cup G\} = H$. Ako je $(x_n)_n$ već fundamentalan (kao što je slučaj kad je $(x_n)_n$ bazni okvir za H) podrazumijevamo da je deficit jednak 0. Ako s U označimo pridruženi operator analize zbog

$$\dim(\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \dim(\overline{\mathrm{Im}(U^*)}) = \dim H - \dim(\mathrm{Ker}\, U)$$

jasno je da je deficit $(x_n)_n$ jednak $\dim(\mathrm{Ker}\, U)$. Dakle, ukoliko želimo proširiti Besselov niz do baznog okvira za H s konačno mnogo elemenata, njegov deficit mora nužno biti konačan. Međutim, može se pokazati da taj uvjet nije dovoljan.

Sada ćemo dati još jedan nužan uvjet na Besselov niz koji se može proširiti do baznog okvira.

Propozicija 6.1. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u H za koji postoji konačan niz $(f_n)_{n=1}^k$ sa svojstvom da je prošireni niz $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada postoji Besselov niz $(v_n)_n$ u H takav da je operator $I - V^*U$ konačnog ranga, gdje su U i V operatori analize pridruženi $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ redom.*

Dokaz. Označimo s U_1 operator analize baznog okvira $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$. Uzmimo proizvoljan dual od $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ i označimo ga, jednostavnosti radi, s $(g_n)_{n=1}^k \cup (v_n)_n$. Neka je V_1 njemu pridružen operator analize. Sada za sve $x \in H$ imamo

$$x = V_1^* U_1 x = \sum_{n=1}^k \langle x, f_n \rangle g_n + \sum_{n=1}^\infty \langle x, x_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^k \langle x, f_n \rangle g_n + V^* U x;$$

pa je stoga

$$(I - V^*U)x = \sum_{n=1}^k \langle x, f_n \rangle g_n, \forall x \in H.$$

Iz ovoga vidimo da $I - V^*U$ ima konačan rang. □

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a on je svojevrsna jača verzija obrata prethodne propozicije. Dokaz istog može se pronaći u [2], teorem 2.6.3

Teorem 6.2. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ Besselovi nizovi u H, B i D Besselove ograde te U i V operatori analize pridruženi $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ redom. Pretpostavimo da je $I - V^*U$ kompaktan operator. Tada postoje konačni nizovi $(f_n)_{n=1}^k$ i $(h_n)_{n=1}^l$ takvi da su $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ i $(h_n)_{n=1}^l \cup (v_n)_n$ bazni okviri za H s gornjim granicama B i D.*

Motivirani propozicijom 6.1 i teoremom 6.2 uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 6.3. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ Besselovi nizovi u H te U i V redom njima pridruženi operatori analize. Kažemo da su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ esencijalno dualni ako je $I - V^*U$ kompaktan operator.*

Sada možemo na elegantniji način sumirati tvrdnje propozicije 6.1 i teorema 6.2:

Teorem 6.4. *Besselov niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H ima konačno proširenje do baznog okvira za H ako i samo ako postoji Besselov niz esencijalno dualan $(x_n)_n$.*

Za kraj ovog dijela iznijet ćemo rezultat koji nam daje nužne i dovoljne uvjete na Besselov niz da bi se on mogao proširiti do Parsevalovog baznog okvira.

Teorem 6.5. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H, B_{opt} njegova optimalna granica te U pridruženi operator analize. Tada je ekvivalentno:*

(a) Postoji konačan niz $(f_n)_{n=1}^k$ u H takav da je $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H,

(b) $B_{opt} = 1$ i $\dim \mathrm{Im}(I - U^*U) \leq \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji niz $(f_n)_{n=1}^k$ takav da je $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{k} |\langle x, f_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = ||x||^2, \forall x \in H$$

zaključujemo da je $B_{opt} \leq 1$.

Označimo sada s F operator analize pridružen $(f_n)_{n=1}^k$. Kako je ovo konačan niz, to je F konačnog ranga. Primijetimo sada da je operator analize U_1 pridružen $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ dan s $U_1 = F + S^k U$, gdje smo s S označili operator unilateralnog shifta na ℓ^2. Kako je prema našoj pretpostavci $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, to je $U_1^* U_1 = I$. Iz ovoga zaključujemo

$$I = (F + S^k U)^*(F + S^k U) = F^*F + F^*S^kU + U^*(S^k)^*F + U^*U.$$

Stavimo $K = F^*F + F^*S^kU + U^*(S^k)^*F$. Tada je K konačnog ranga te vrijedi $I - U^*U = K$. Tada je operator $I - U^*U$ konačnog ranga, pa on, posebno, nije regularan. Ovo, pak, povlači da se 1 nalazi u $\sigma(U^*U)$, što konačno daje $B_{opt} = 1$.

Obratno, pretpostavimo da je $B_{opt} = 1$ i $\dim \operatorname{Im}(I - U^*U) \leq \infty$. Tada je dobro definiran pozitivan operator $(U^*U)^{\frac{1}{2}}$. Uočimo da je $\operatorname{Ker}(I - U^*U)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Ker}(I - U^*U)$. Uzimanjem ortogonalnih komplemenata dobivamo $\operatorname{Im}(I - U^*U)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Im}(I - U^*U)$ (kako je ovaj potprostor konačnodimenzionalan, to je on i zatvoren).

Stavimo $k = \dim \operatorname{Im}(I - U^*U) < \infty$ i $M_k = span\{e_1, ..., e_k\} \leq \ell^2$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Uzmimo proizvoljnu izometriju $F_0 \in \mathbb{B}(\operatorname{Im}(I - U^*U), M_k)$ te ju trivijalno proširimo do parcijalne izometrije $F \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$. Uočimo da je $\operatorname{Im} F = M_k \perp \operatorname{Im}(S^kU)$.

Stavimo $U_1 = F(I - U^*U)^{\frac{1}{2}} + S^kU$. Tvrdimo da je U_1 izometrija. Zaista, za proizvoljan $x \in H$ imamo

$$\begin{aligned}
||U_1x||^2 &= ||F(I - U^*U)^{\frac{1}{2}}x + S^kUx||^2 \\
&= ||F(I - U^*U)^{\frac{1}{2}}x||^2 + ||S^kUx||^2 \\
&= ||(I - U^*U)^{\frac{1}{2}}x||^2 + ||Ux||^2 \\
&= \langle (I - U^*U)x, x\rangle + \langle U^*Ux, x\rangle \\
&= ||x||^2.
\end{aligned}$$

Kako je U_1 izometrija, $(U_1^*e_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H. Uočimo da je $U_1^* = (I - U^*U)^{\frac{1}{2}}F^* + U^*(S^*)^k$, što povlači $U_1^*e_{k+j} = U^*e_j = x_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Stoga je proširenje do baznog okvira našeg originalnog Besselovog niza $(x_n)_n$ dano s $f_j = U_1^* e_j = (I - U^* U)^{\frac{1}{2}} F^* e_j$, $j = 1, ..., k$. $\square$

Poglavlje 7

Fundamentalna jednakost za Parsevalove bazne okvire

Za kraj ovog rada, dokazat ćemo jedan interesantan identitet za Parsevalove bazne okvire.

Prije nego nastavimo, prisjetimo se kako je za proizvoljan bazni okvir $(x_n)_n$ i njemu pridruženi operator analize U, operator U^*U regularan te djeluje na sljedeći način:

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H.$$

U nastavku ćemo jednostavnosti radi uglavnom s F označavati operator U^*U. Također, za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ definiramo operator $F_S \in \mathbb{B}(H)$,

$$F_S x = \sum_{n \in S} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H.$$

Za početak, navest ćemo jedan rezultat koji ćemo koristiti nekoliko puta čiji se dokaz može naći u [3], kao i dva osnovna rezultata teorije operatora.

Propozicija 7.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, U njemu pridruženi operator analize te $F = U^*U$. Za svaki $x \in H$ vrijedi*

(a) $|| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n ||^2 \leq ||F|| \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x.x_n \rangle|^2$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq ||F^{-1}|| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n ||^2$. *Štoviše, gornje ograde su najbolje moguće.*

Propozicija 7.2. *Neka su $S, T \in \mathbb{B}(H)$ takvi da vrijedi $S + T = I$. Tada je $S - T = S^2 - T^2$.*

Dokaz. Računamo
$S - T = S - (I - S) = 2S - I = S^2 - (I - 2S + S^2) = S^2 - (I - S)^2 = S^2 - T^2$. □

Propozicija 7.3. *Neka su $S, T \in \mathbb{B}(H)$ takvi da vrijedi $S + T = I$. Tada su S i T hermitski ako i samo ako je S^*T hermitski.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S^*T hermitski. Tada je
$S - T = I(S - T) = (S^* + T^*)(S - T) = S^*S + T^*S - S^*T - T^*T = S^*S - T^*T$.
Kako je izraz na kraju hermitski operator, to je i $S - T$ hermitski. Kako je prema pretpostavci $S + T$ hermitski, to su

$$S = \tfrac{1}{2}(S + T + (S - T)) \text{ i } T = \tfrac{1}{2}(S + T - (S - T))$$

također hermitski.

Obratno, pretpostavimo da su S i T hermitski. Imamo

$$S^*T = S^*(I - S) = S^* - S^*S.$$

Kako je izraz na kraju hermitski operator (jer je S prema pretpostavci hermitski), to je i S^*T hermitski. □

Prije nego što iskažemo fundamentalnu jednakost za Parsevalove bazne okvire, proučit ćemo slučaj općenitih baznih okvira, te taj slučaj primijeniti na Parsevalove.

Teorem 7.4. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H te $(y_n)_n$ njegov kanonski dual. Tada za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ i za sve $x \in H$ vrijedi*

$$\textstyle\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_S x, y_n\rangle|^2 = \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_{S^c} x, y_n\rangle|^2.$$

Dokaz. Stavimo ponovno $F = U^*U$. Kako je $F = F_S + F_{S^c}$, slijedi $I = F^{-1}F_S + S^{-1}F_{S^c}$. Primjenom propozicije 7.2 na operatore $F^{-1}F_S$ i $F^{-1}F_{S^c}$ dobivamo

$$F^{-1}F_S - F^{-1}F_S F^{-1}F_S = F^{-1}F_{S^c} - F^{-1}F_{S^c}F^{-1}F_{S^c}. \tag{7.1}$$

Također, za sve $x, y \in H$ imamo

$$\langle F^{-1}F_S x, y\rangle - \langle F^{-1}F_S F^{-1}F_S x, y\rangle = \langle F_S x, F^{-1}y\rangle - \langle F^{-1}F_S x, F_S F^{-1}y\rangle \tag{7.2}$$

Sada stavimo $y = Fx$ pa možemo nastaviti jednakost (7.1) na sljedeći način:

$$= \langle F_S x, x\rangle - \langle F^{-1}F_S x, F_S x\rangle = \textstyle\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_S x, y_n\rangle|^2.$$

Koristeći istu jednakost kao u (7.2) za S^c te pomoću (7.1) konačno dobivamo

$$\textstyle\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_S x, y_n\rangle|^2 = \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_{S^c} x, y_n\rangle|^2.$$

□

Teorem 7.5. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ i za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||\sum_{n\in S}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 = \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||\sum_{n\in S^c}\langle x, x_n\rangle x_n||^2.$$

Dokaz. Cilj nam je nekako primijeniti teorem 7.4. Znamo otprije da je kanonski dual od $(x_n)_n$ upravo on sam. Sada koristeći 7.4 i činjenicu da je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir računamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||\sum_{n\in S}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 &= \sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||F_S x||^2 \\
&= \sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_S x, x_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_{S^c} x, x_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle F_{S^c} x, x_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||F_{S^c}||^2 \\
&= \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 - ||\sum_{n\in S^c}\langle x, x_n\rangle x_n||^2.
\end{aligned}$$

□

Identitet dan u teoremu 7.5 je začuđujuć iz razloga što veličine na različitim stranama jednakosti općenito nisu usporedive. Primjerice, ako je S prazan skup, tada je lijeva strana jednaka 0 jer nemamo što sumirati. Desna strana je tada također jednaka nuli, no sada zato što je

$$\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 = ||x||^2 = ||\sum_{n\in S}\langle x, x_n\rangle x_n||^2.$$

Slično, ako je J jednočlan skup, oba izraza na lijevoj strani ove jednakosti mogu biti proizvoljno mali, dok su dva izraza s desne strane približno jednaka $||x||^2$, te se poništavaju dovoljno da bi identitet vrijedio.

Ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H, tada za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ i svaki $x \in H$ imamo

$$||x||^2 = \sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 + \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Stoga, jedan od dva izraza na desnoj strani gornje jednakosti je veći ili jednak $\frac{1}{2}||x||^2$. Iz teorema 7.5 slijedi da za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ i sve $x \in H$ vrijedi

$$\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 + ||\sum_{n\in S^c}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 = \sum_{n\in S^c} |\langle x, x_n\rangle|^2 + ||\sum_{n\in S}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 \geq \frac{1}{2}||x||^2.$$

Sada ćemo vidjeti da je desna strana ove nejednakosti ustvari mnogo veća.

Propozicija 7.6. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Tada za svaki $S \subseteq \mathbb{N}$ i sve $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 + ||\sum_{n\in S^c}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 \geq \tfrac{3}{4}||x||^2.$$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned} ||x||^2 = ||F_S x + F_{S^c}x||^2 &\leq ||F_S x||^2 + ||F_{S^c}||^2 + 2||F_S x||||F_{S^c}x|| \\ &\leq 2(||F_S x||^2 + ||F_{S^c}x||^2) \end{aligned}$$

to dobivamo

$$\langle (F_S^2 + F_{S^c}^2)x, x\rangle = ||F_S x||^2 + ||F_{S^c}x||^2 \geq \tfrac{1}{2}||x||^2 = \langle \tfrac{1}{2}Ix, x\rangle$$

Kako je $F_S + F_{S^c} = I$, siljedi da je $F_S + F_{S^c}^2 + F_{S^c} + F_S^2 \geq \frac{3}{2}I$. Primjenom propozicije 7.2 na $S = F_S$ i $T = F_{S^c}$ dobivamo $F_S + F_{S^c}^2 = F_{S^c} + F_S^2$. Stoga je

$$2(F_S + F_{S^c}^2) = F_S + F_{S^c}^2 + F_{S^c} + F_S^2 \geq \tfrac{3}{2}I.$$

Konačno, za svaki $x \in H$ imamo

$$\sum_{n\in S} |\langle x, x_n\rangle|^2 + ||\sum_{n\in S^c}\langle x, x_n\rangle x_n||^2 = \langle F_S x, x\rangle + \langle F_{S^c}x, F_{S^c}x\rangle = \\ \langle (F_S + F_{S^c}^2)x, x\rangle \geq \tfrac{3}{4}||x||^2.$$

$\square$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, skripta*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1718.pdf(rujan 2018.).

[2] D. Bakić, *Notes on frames*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf(rujan 2018.).

[3] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, 2002.

[4] C. Heil, *A Basis Theory Primer (Expanded Edition)*, Birkhäuser, 2011.

Sažetak

U ovom radu najprije izlažemo neke osnovne pojmove i rezultate iz teorije normiranih prostora koji će se koristiti tijekom daljnjeg proučavanja. Nakon toga uvodimo pojmove Besselovog niza i baznog okvira, pojmove koji će biti središnji dio naših promatranja. Poseban naglasak imaju Parsevalovi bazni okviri. Opisuju se njihova osnovna svojstva te veze između navedenih pojmova. Poseban dio posvećen je dualnim baznim okvirima te njihovoj karakterizaciji pomoću ograničenih operatora koji posjeduju lijevi inverz. Zatim definiramo viškove baznih okvira, navodimo neka svojstva, te naposljetku pomoću istih dolazimo do karakterizacije baznih okvira koji posjeduju Parsevalov dual. Nadalje, opisujemo Besselove nizove koji dopuštaju konačno proširenje do baznog okvira. Za sam kraj rada izlažemo i kratko komentiramo fundamentalnu jednakost za Parsevalove bazne okvire.

Summary

In this thesis we first give some of the fundamental terms and results from the theory of normed spaces which will be used during further study. Afterwards, we introduce Bessel sequences and frames, terms which will be central part of our study. Special emphasis is put on Parseval frames. We describe their properties and the connections between aforementioned terms. Special part is dedicated to dual frames and their characterization using bounded operators which possess left inverse. Next we define excesses of frames, state some of their properties, and finally give a characterization of frames that possess Parseval dual by using excesses of frames. Furthermore, we describe Bessel sequences that allow finite extension to a frame. In the last part we give a fundamental identity for Parseval frames, as well as a brief discussion considering this identity.

Životopis

Rođen sam 9. lipnja 1994. u Rijeci. Nakon završetka Osnovne škole Srdoči, pohađao sam Gimnaziju Andrije Mohorovičića, također u Rijeci. 2013. godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka istog, 2016. upisujem studij Teorijska matematika na istom fakultetu, gdje sam 2018. godine dobio nagradu Vijeća Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za najuspješnije studente završnih godina.