

# Caseyev teorem

---

**Naglaš, Adam**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:920742>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Adam Naglaš

**CASEYEV TEOREM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovni teoremi i pojmovi</b>	<b>2</b>
1.1 Ptolomejev teorem . . . . .	2
1.2 Poučak o kosinusima . . . . .	3
1.3 Međusobni položaj dviju kružnica . . . . .	5
1.4 Zajedničke tangente dviju kružnica . . . . .	5
1.5 Tangentna udaljenost kružnice i točke . . . . .	6
1.6 Tangentna udaljenost dviju kružnica . . . . .	7
<b>2 Inverzija</b>	<b>11</b>
<b>3 Caseyev teorem</b>	<b>20</b>
3.1 Prvi dokaz Caseyevog teorema . . . . .	31
3.2 Drugi dokaz Caseyevog teorema . . . . .	35
3.3 Specijalni slučajevi Caseyevog teorema . . . . .	49
<b>4 Primjena Caseyevog teorema</b>	<b>53</b>
4.1 Feuerbachov teorem . . . . .	53
4.2 Sangaku problem . . . . .	58
4.3 Zadaci . . . . .	60
<b>Bibliografija</b>	<b>67</b>

# Uvod

Od samih početaka matematike kružnica je jedan od najproučavanijih geometrijskih likova. Tijekom cijelog obrazovanja susrećemo se s kružnicama i upoznajemo nove zakonitosti i pojmove koji su povezani s kružnicom, poput polumjera, uvjetima dodira dviju kružnica i mnogim drugim.

Cilj ovog diplomskog rada je proučiti, objasniti i dokazati generalizaciju Ptolomejevog teorema, poznatu pod nazivom Caseyev teorem. Prema [1] John Casey prvi je dao iskaz teorema, ali ne u potpunom obliku kakvog ga danas poznajemo. John Casey je znao samo za jednu implikaciju. U radu će do velikog izražaja doći zakonitosti i pojmovi vezani uz kružnice.

John Casey (1820. – 1891.) bio je ugledni irski profesor i matematičar. Prema [2] napisao je više od 25 znanstvenih radova, ali njegova matematička reputacija počiva na šest udžbenika koje je napisao: Nastavak prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata (1881.), Rasprava o analitičkoj geometriji točaka, linija, kruga i konike (1885.), Rasprava o elementarnoj trigonometriji (1886.), Rasprava o trigonometriji ravnine (1888.), Rasprava o sfernoj trigonometriji (1889.). Objavio je i svoje vlastito izdanje prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata (1882.). Zbog svojeg izričitog doprinosa u geometriji smatra se da je uz Émile Lemoinea suosnivač moderne geometrije kružnice i trokuta.

# Poglavlje 1

## Osnovni teoremi i pojmovi

Cilj ovog diplomskog rada je iskazati i dokazati Caseyev teorem. Da bismo mogli to iskazati i dokazati, na početku je potrebno navesti neke osnovne pojmove i teoreme.

### 1.1 Ptolomejev teorem

Kako je Caseyev teorem generalizacija Ptolomejevog teorema prvo ćemo iskazati i dokazati Ptolomejev teorem.

**Teorem 1.1. (*Ptolomejev teorem*)** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $\angle BDC \leq \angle ADB$ , ako nije zamijenimo vrhove  $A$  i  $C$ . Neka je  $E$  točka na dijagonali  $\overline{AC}$  takva da je  $\angle ADE = \angle BDC$ . Kutovi  $\angle CAD$  i  $\angle CBD$  su sukladni jer su to obodni kutovi nad lukom  $\widehat{CD}$ . Slijedi da su trokuti  $AED$  i  $BCD$  slični prema  $K - K$  teoremu o sličnosti trokuta. Iz sličnosti trokuta  $AED$  i  $BCD$  slijedi  $\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$  i stoga je:

$$|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|. \quad (1.1)$$

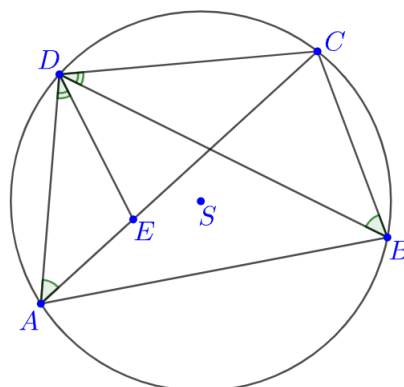
Uočimo da je

$$\angle CDE = \angle BDC + \angle EDB = \angle ADE + \angle EDB = \angle ADB.$$

Kutovi  $\angle DBA$  i  $\angle DCA$  su sukladni jer su to obodni kutovi nad lukom  $\widehat{DA}$ . Slijedi da su trokuti  $BDA$  i  $CDE$  slični prema  $K - K$  teoremu o sličnosti trokuta.

Iz sličnosti trokuta  $DBA$  i  $DCA$  slijedi  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BA|}{|CE|}$  i stoga je:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|. \quad (1.2)$$



Slika 1.1.

Zbrajanjem (1.1) i (1.2) dobije se

$$\begin{aligned}
 |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AE| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CE| \\
 &= |BD| \cdot (|AE| + |CE|) \\
 &= |AC| \cdot |BD|.
 \end{aligned}$$

Ovime je Ptolomejev teorem dokazan. □

## 1.2 Poučak o kosinusima

U dokazima ćemo koristiti poučak o kosinusima.

**Teorem 1.2. (Poučak o kosinusima)** *Ako su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta i  $\alpha, \beta, \gamma$  njegovi kutovi, tada je*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

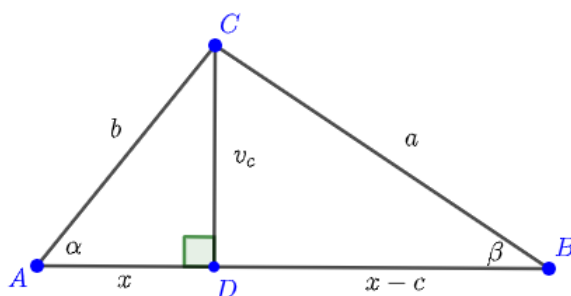
*Dokaz.* Dovoljno je dokazati prvu jednakost.

1° Neka je  $\alpha$  šiljasti kut. Iz pravokutnih trokuta  $ADC$  i  $CDB$  dobije se:

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

odakle slijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$



Slika 1.2.

U pravokutnom trokutu  $ADC$  je  $\cos \alpha = \frac{x}{b}$ , pa je  $x = b \cos \alpha$  i konačno

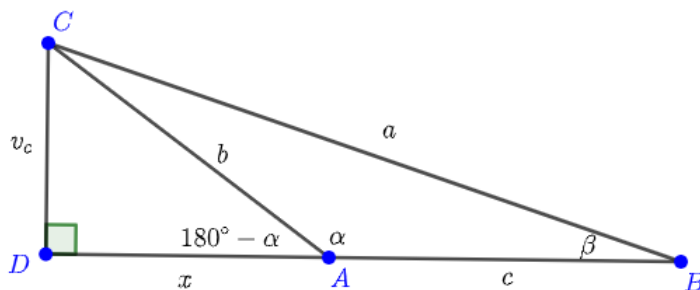
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

2° Neka je  $\alpha$  pravi kut.

Tada je  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

3° Neka je  $\alpha$  tupi kut.

Iz pravokutnih trokuta  $ADC$  i  $CDB$  dobije se:



Slika 1.3.

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2,$$

odakle slijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

U pravokutnom trokutu  $ADC$  je  $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}$ , pa je  $x = b \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cos \alpha$  i konačno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

□

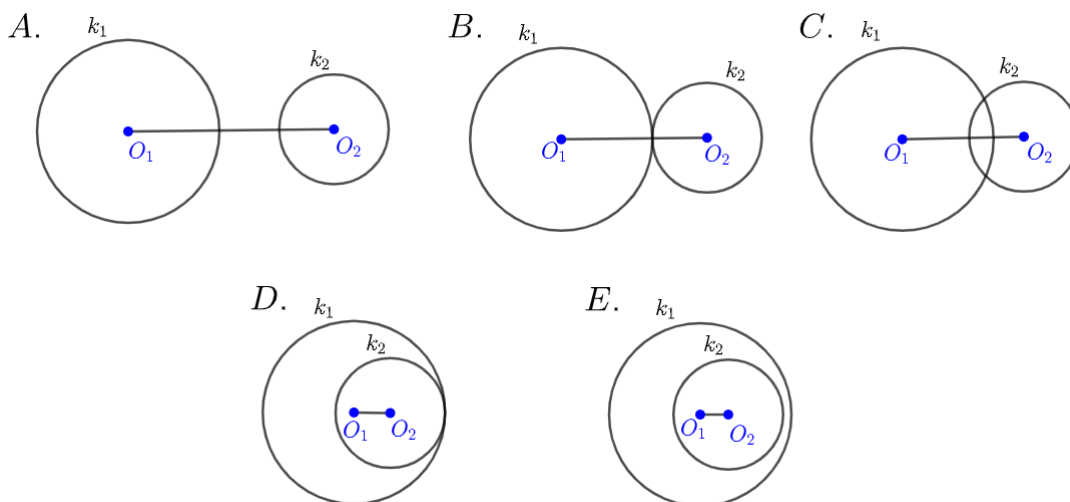


### 1.3 Međusobni položaj dviju kružnica

Kako je Caseyev teorem povezan s međusobnim položajem kružnica, navest ćemo sve moguće položaje dviju kružnica.

Neka su dane kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$ . Označimo s  $d$  udaljenost središta kružnica. Pretpostavimo da je  $r_1 > r_2$ . Mogući su sljedeći položaji kružnica  $k_1$  i  $k_2$ :

- A. ako je  $d > r_1 + r_2$  tada kružnice  $k_1$  i  $k_2$  nemaju zajedničkih točaka,
- B. ako je  $d = r_1 + r_2$  tada se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana,
- C. ako je  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$  tada se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  sijeku u dvjema točkama,
- D. ako je  $d = r_1 - r_2$  tada se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju iznutra,
- E. ako je  $d < r_1 - r_2$  tada kružnice  $k_1$  i  $k_2$  nemaju zajedničkih točaka i kružnica  $k_1$  se nalazi unutar kružnice  $k_2$ .



Slika 1.4.: Međusobni položaj dviju kružnica

### 1.4 Zajedničke tangente dviju kružnica

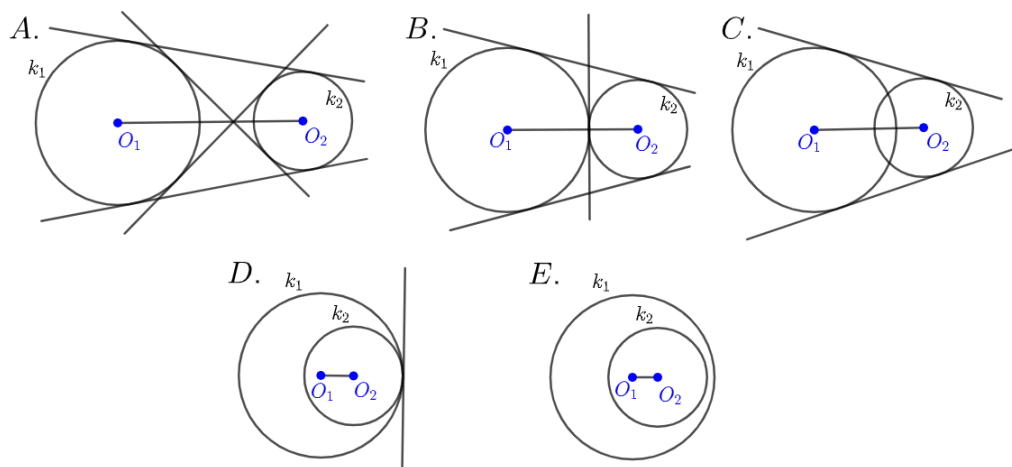
**Definicija 1.1.** *Tangenta kružnice je pravac koji dodiruje tu kružnicu u jednoj točki.*

**Definicija 1.2.** *Zajednička tangenta dviju kružnica je pravac koji je tangenta obiju kružnica.*

Dvije kružnice mogu imati najviše dvije unutarnje i dvije vanjske zajedničke tangente. Unutarnje zajedničke tangente sijeku dužinu koja spaja središta danih kružnica, dok vanjske zajedničke tangente ne sijeku tu dužinu.

Neka su promatrane kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_1)$ . Označimo s  $d$  udaljenost središta kružnica. Pretpostavimo da je  $r_1 > r_2$ . Tada kružnice  $k_1$  i  $k_2$ :

- A. imaju četiri zajedničke tangente ako je  $d > r_1 + r_2$ ,
- B. imaju tri zajedničke tangente ako je  $d = r_1 + r_2$ ,
- C. imaju dvije zajedničke tangente ako je  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ ,
- D. imaju jednu zajedničku tangentu ako je  $d = r_1 - r_2$ ,
- E. nemaju zajedničkih tangenti ako je  $d < r_1 - r_2$ .



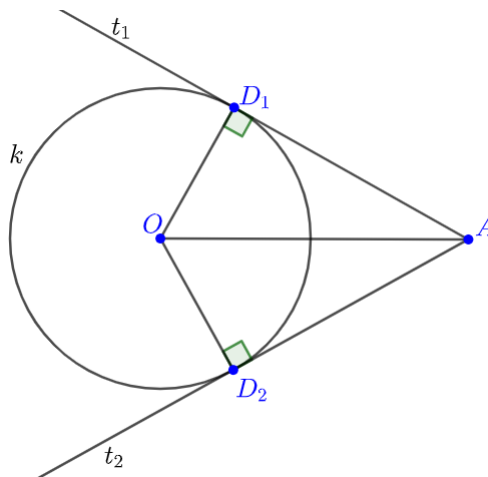
Slika 1.5.: Zajedničke tangente kružnica  $k_1$  i  $k_2$

## 1.5 Tangentna udaljenost kružnice i točke

Povučemo li tangente na kružnicu  $k$  iz točke  $A$ , odsjeci tih tangenti između dirališta i točke  $A$  bit će sukladne dužine.

**Lema 1.1.** Neka su  $D_1$  i  $D_2$  redom dirališta tangenti  $t_1$  i  $t_2$  iz točke  $A$  na kružnicu  $k(r, O)$ . Tada su dužine  $\overline{AD_1}$  i  $\overline{AD_2}$  sukladne.

*Dokaz.* Neka je  $k(r, O)$  kružnica i neka su  $t_1$  i  $t_2$  tangente na kružnicu  $k$  iz točke  $A$ . Točke  $D_1$  i  $D_2$  su redom dirališta tangenti  $t_1$  i  $t_2$  s kružnicom  $k$ . Kako je  $|OD_1| =$



Slika 1.6.

$|OD_2| = r$ ,  $\angle OD_1A = \angle OD_2A = 90^\circ$  i  $\overline{OA}$  zajednička stranica trokuta  $OD_1A$  i  $OD_2A$ , slijedi da su ti trokuti sukladni po  $S - S - K^>$  teoremu o sukladnosti. Odnosno  $|AD_1| = |AD_2|$ .  $\square$

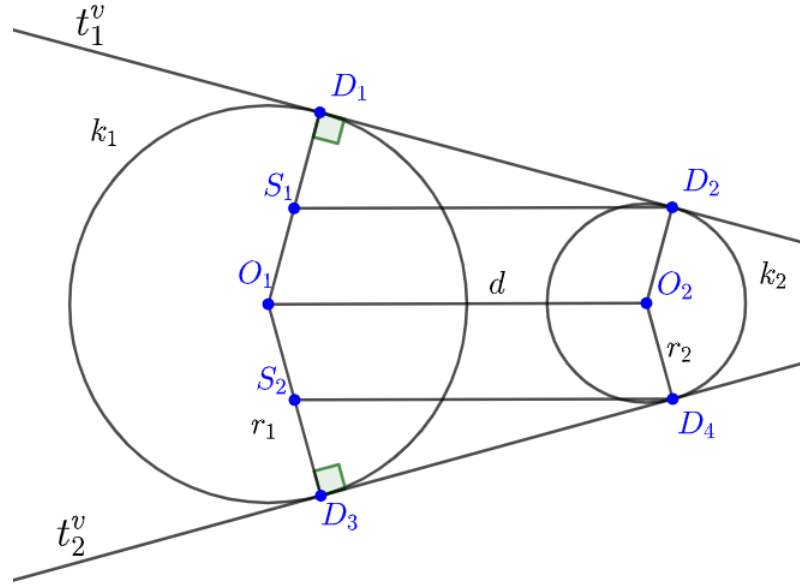
**Definicija 1.3.** Neka je  $t$  tangenta na kružnicu  $k$  iz točke  $A$ , neka je  $D$  diralište tangente  $t$  s kružnicom  $k$ . Udaljenost  $|AD|$  nazivamo **tangentna udaljenost kružnice  $k$  i točke  $A$** .

## 1.6 Tangentna udaljenost dviju kružnica

Povučemo li dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente dviju kružnica, odsječci tih tangenti između dirališta bit će sukladne dužine.

**Lema 1.2.** Neka su  $t_1^v$  i  $t_2^v$  zajedničke vanjske tangente kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$ . Zajednička vanjska tangenta  $t_1^v$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , a zajednička vanjska tangenta  $t_2^v$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_3$  i  $D_4$ . Tada su dužine  $\overline{D_1D_2}$  i  $\overline{D_3D_4}$  sukladne.

*Dokaz.* Označimo  $d = |O_1O_2|$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $r_1 \geq$



Slika 1.7.

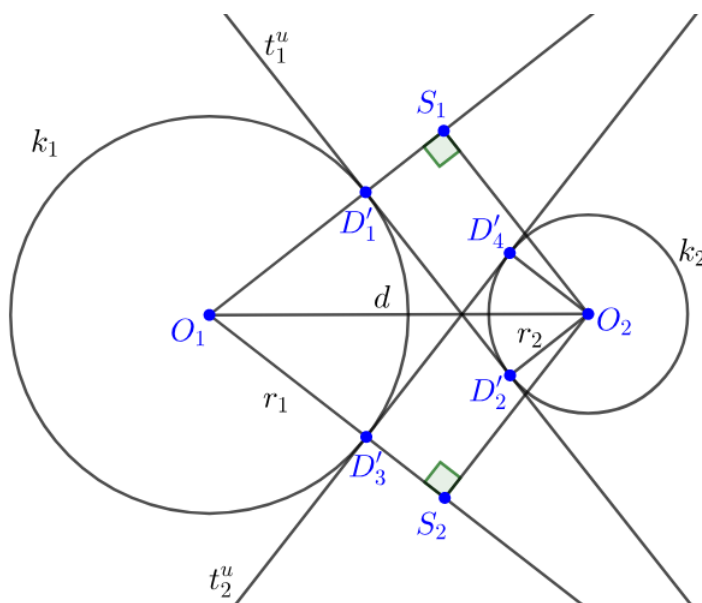
$r_2$ . Povučemo pravce paralelne s pravcem  $O_1O_2$  kroz točke  $D_2$  i  $D_4$ . Označimo sa  $S_1$  sjecište pravca  $O_1D_1$  i pravca paralelnog s pravcem  $O_1O_2$  kroz točku  $D_2$ , te sa  $S_2$  sjecište pravca  $O_1D_3$  i pravca paralelnog s pravcem  $O_1O_2$  kroz točku  $D_4$ . Četverokuti  $O_1O_2D_2S_1$  i  $S_2D_4O_2O_1$  su paralelogrami odakle slijedi  $|S_1D_2| = |S_2D_4| = d$ . Kako je  $|D_1S_1| = |D_3S_2| = r_1 - r_2$  i  $\angle S_1D_1D_2 = \angle S_2D_3D_4 = 90^\circ$ . Slijedi da su trokuti  $S_1D_1D_2$  i  $S_2D_3D_4$  sukladni po  $S - S - K^>$  teoremu o sukladnosti. Odnosno  $|D_1D_2| = |D_3D_4|$ .  $\square$

**Lema 1.3.** *Neka su  $t_1^u$  i  $t_2^u$  zajedničke unutarnje tangente kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$ . Zajednička unutarnja tangenta  $t_1^u$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ , a zajednička unutarnja tangenta  $t_2^u$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D'_3$  i  $D'_4$ . Tada su dužine  $\overline{D'_1D'_2}$  i  $\overline{D'_3D'_4}$  sukladne.*

*Dokaz.* Označimo  $d = |O_1O_2|$ . Neka je  $S_1$  ortogonalna projekcija točke  $O_2$  na pravac  $O_1D'_1$  i  $S_2$  ortogonalna projekcija točke  $O_2$  na pravac  $O_1D'_3$ . Kako su četverokuti  $D'_1D'_2O_2S_1$  i  $D'_3D'_4O_2S_2$  pravokutnici vrijedi sljedeće:  $|D'_1D'_2| = |O_2S_1|$ ,  $|D'_1S_1| = |D'_2O_2| = r_2$ ,  $|D'_3D'_4| = |O_2S_2|$  i  $|D'_3S_2| = |D'_4O_2| = r_2$ .

Kako je  $|O_1S_1| = |O_1D'_1| + |D'_1S_1| = r_1 + r_2$  i  $|O_1S_2| = |O_1D'_3| + |D'_3S_2| = r_1 + r_2$ ,  $\angle O_1S_1O_2 = \angle O_1S_2O_2 = 90^\circ$  i  $O_1O_2$  zajednička stranica trokuta  $O_1O_2S_1$  i  $O_1O_2S_2$ , slijedi da su ti trokuti sukladni po  $S - S - K^>$  teoremu o sukladnosti.

Iz sukladnosti trokuta  $O_1O_2S_1$  i  $O_1O_2S_2$  slijedi  $|O_2S_1| = |O_2S_2|$ . Kako je od prije



Slika 1.8.

poznato da vrijedi  $|D'_1D'_2| = |O_2S_1|$  i  $|D'_3D'_4| = |O_2S_2|$ , konačno imamo  $|D'_1D'_2| = |D'_3D'_4|$ .  $\square$

Ako dvije kružnice imaju četiri zajedničke tangente, udaljenosti odgovarajućih dirališta na unutarnjim odnosno vanjskim zajedničkim tangentama neće biti jednake. Stoga definiramo vanjsku i unutarnju tangentnu udaljenost dviju kružnica.

**Definicija 1.4.** Neka je  $t^v$  zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , a točke  $D_1$  i  $D_2$  redom dirališta tangente  $t^v$  s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ . Udaljenost  $|D_1D_2|$  nazivamo **vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$** .

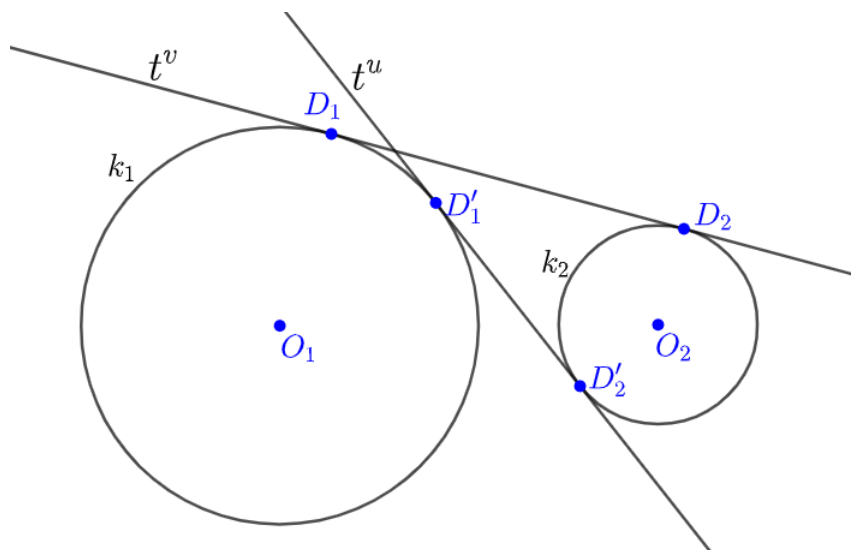
**Definicija 1.5.** Neka je  $t^u$  zajednička unutarnja tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , a točke  $D'_1$  i  $D'_2$  redom dirališta tangente  $t^u$  s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ . Udaljenost  $|D'_1D'_2|$  nazivamo **unutarnja tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$** .

Izračunajmo sada udaljenost  $|D_1D_2|$  iz leme 1.2. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut  $S_1D_1D_2$  sa slike 1.7.. Slijedi

$$\begin{aligned} |D_1D_2|^2 &= |D_2S_1|^2 - |D_1S_1|^2 \\ &= d^2 - (r_1 - r_2)^2. \end{aligned}$$

Konačno, vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  iznosi:

$$t^v = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}. \quad (1.3)$$



Slika 1.9.: Tangentne udaljenosti

Uočimo da ova formula vrijedi i za  $r_1 \leq r_2$ .

Izračunajmo sada udaljenost  $|D'_1 D'_2|$  iz leme 1.3. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut  $O_1 O_2 S_1$  sa slike 1.8.. Slijedi

$$\begin{aligned} |D'_1 D'_2|^2 &= |O_2 S_1|^2 = |O_1 O_2|^2 - |O_1 S_1|^2 \\ &= d^2 - (r_1 + r_2)^2. \end{aligned}$$

Konačno, unutarnja tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  iznosi:

$$t^u = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}. \quad (1.4)$$

Kako je  $|r_1 - r_2| < r_1 + r_2$  vrijedi

$$d^2 - (r_1 - r_2)^2 > d^2 - (r_1 + r_2)^2$$

pa iz jednakosti (1.3) i (1.4) slijedi  $t^v > t^u$ .

**Zaključak:** Vanjska tangentna udaljenost dviju kružnica je veća od unutarnje tangentne udaljenosti tih dviju kružnica.

# Poglavlje 2

## Inverzija

**Definicija 2.1.** Neka je  $M$  ravnina,  $O \in M$  čvrsta točka,  $R \in \mathbb{R}^+$  i  $T \neq O$  bilo koja točka ravnine  $M$ . Preslikavanje ravnine  $I_O : M \setminus \{O\} \rightarrow M \setminus \{O\}$  koje točki  $T$  pridružuje točku  $T'$ , tako da vrijedi:

1.  $O, T, T'$  su kolinearne točke
2.  $T$  i  $T'$  leže s iste strane točke  $O$
3.  $|OT| \cdot |OT'| = R^2$

zove se *inverzija s centrom inverzije  $O$  i konstantom inverzije  $R^2$* .

Iz definicije inverzije direktno slijedi da se svaka točka na kružnici sa središtem u centru inverzije  $O$  i polumjera  $R$  inverzijom  $I_O$  preslika sama na sebe, odnosno, svaka je točka kružnice  $k(O, R)$  fiksna. Kružnica  $k(O, R)$  naziva se **kružnica inverzije**. Inverzija je jednoznačno određena kružnicom inverzije  $k(O, R)$ . Dakle, kada preslikavamo elemente ravnine  $M$  koristeći inverziju  $I_O$  dovoljno je reći da se elementi preslikavaju u odnosu na kružnicu inverzije  $k(O, R)$ .

Sljedeća tri teorema nećemo dokazivati, a dokazi se mogu naći u [10].

**Teorem 2.1.** *Ako je točka  $O$  centar inverzije, pravac  $p$  koji prolazi točkom  $O$  preslikava se u samog sebe.*

**Teorem 2.2.** *Ako je  $O$  centar inverzije, pravac  $p$  koji ne prolazi točkom  $O$  preslikava se u kružnicu  $k$  koja prolazi točkom  $O$ .*

**Teorem 2.3.** *Ako je  $O$  centar inverzije, kružnica  $k$  koja prolazi točkom  $O$  preslikava se u pravac  $p$  koji ne prolazi točkom  $O$ .*

**Teorem 2.4.** *Ako je  $O$  centar inverzije, kružnica koja ne prolazi točkom  $O$  preslika se u kružnicu koja ne prolazi točkom  $O$ .*

**Teorem 2.5.** *Ako je  $O$  centar inverzije, a točke  $A$  i  $B$  tom su inverzijom preslikane u  $A'$  i  $B'$ , tada su trokuti  $OAB$  i  $OB'A'$  slični.*

*Dokaz.* Iz definicije inverzije slijedi:  $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = R^2$ , pa je  $|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'|$ , a budući da je  $\angle AOB = \angle B'OA'$  trokuti  $OAB$  i  $OB'A'$  su slični.  $\square$

**Teorem 2.6.** *Ako je  $O$  centar inverzije, a točke  $A, B, C$  i  $D$  tom se inverzijom preslikaju redom u točke  $A', B', C'$  i  $D'$  tada vrijedi:*

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AD| \cdot |CB|} = \frac{|A'B'| \cdot |C'D'|}{|A'D'| \cdot |C'B'|} \quad (2.1)$$

*Dokaz.* Iz sličnosti trokuta  $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ ,  $\triangle OCD \sim \triangle OD'C'$ ,  $\triangle OAD \sim \triangle OD'A'$  i  $\triangle OCB \sim \triangle OB'C'$  slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

Sljedeći teorem povezuje potenciju točke u odnosu na kružnicu i inverziju.

**Teorem 2.7.** *Neka je  $k'(S', r')$  slika kružnice  $k(S, r)$  u odnosu na kružnicu inverzije  $k_i(O, R)$ . Neka je  $t$  potencija točke  $O$  u odnosu na kružnicu  $k(S, r)$  i  $t'$  potencija točke  $O$  u odnosu na kružnicu  $k'(S', r')$ . Tada vrijedi:*

$$r' = r \cdot \frac{R^2}{t}, \quad t' = \frac{R^4}{t}.$$

*Dokaz.* Pravac koji prolazi točkama  $O$  i  $S$  siječe kružnicu  $k$  u točkama  $P$  i  $Q$ . Točke  $P'$  i  $Q'$  su slike redom točaka  $P$  i  $Q$  pri promatranoj inverziji.

Tada je  $t = |OP| \cdot |OQ|$  i  $t' = |OP'| \cdot |OQ'|$ . Zbog  $|OP| \cdot |OP'| = R^2$  i  $|OQ| \cdot |OQ'| = R^2$  slijedi:

$$t' = \frac{R^2}{|OP|} \cdot \frac{R^2}{|OQ|},$$

konačno

$$t' = \frac{R^4}{t}.$$

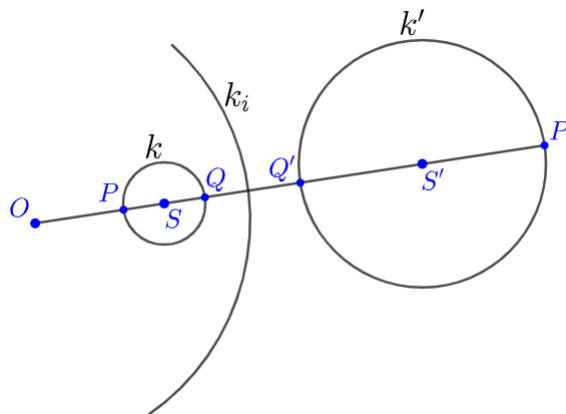
Sada promotrimo duljinu

$$2r' = |Q'P'| = |OP'| - |OQ'|.$$

Kako je  $|OP| \cdot |OP'| = R^2$  i  $|OQ| \cdot |OQ'| = R^2$  slijedi:

$$2r' = R^2 \left( \frac{1}{|OP|} - \frac{1}{|OQ|} \right) = R^2 \left( \frac{|OQ| - |OP|}{|OP| \cdot |OQ|} \right),$$





Slika 2.1.

zbog  $|OQ| - |OP| = |PQ| = 2r$  i  $|OP| \cdot |OQ| = t$ , konačno:

$$r' = r \cdot \frac{R^2}{t}.$$

□

**Napomena 2.1.** Potencija točke  $T$  koja leži izvan kružnice  $k$  s obzirom na kružnicu  $k$  jednaka je kvadratu udaljenosti točke  $T$  i dirališta tangente iz te točke i kružnice  $k$ , odnosno kvadratu tangente udaljenosti točke  $T$  i kružnice  $k$ .

**Teorem 2.8.** Neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dvije kružnice. Neka je  $t_{12}^v$  vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , a  $t_{12}^u$  unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Tada se  $\frac{(t_{12}^v)^2}{r_1 \cdot r_2}$  i  $\frac{(t_{12}^u)^2}{r_1 \cdot r_2}$  ne mijenjaju pri inverziji čiji je centar unutar ili izvan kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Najprije napomenimo da tvrdnja teorema ne vrijedi ako se centar inverzije nalazi unutar jedne, a izvan druge kružnice.

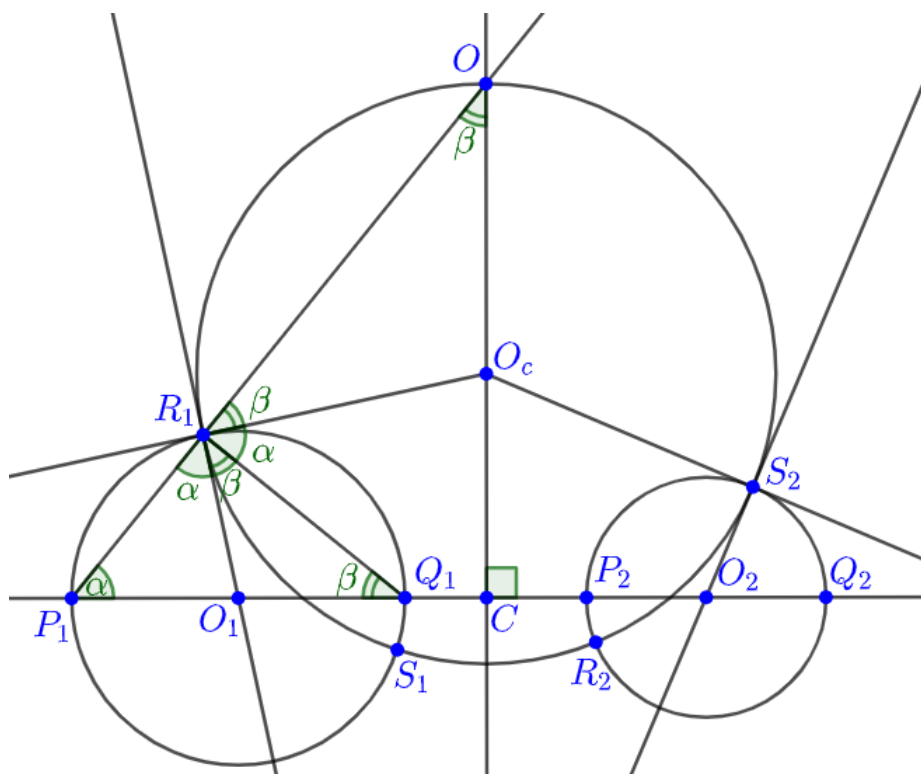
Prije dokaza teorema iskazat ćemo i dokazati sljedeću lemu.

**Lema 2.1.** Neka su  $R_1, S_1, R_2, S_2$  redom sjecišta kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  s kružnicom  $k_c(O_c, r_c)$  koja je ortogonalna na  $k_1$  i  $k_2$ . Neka je pravac  $p$  spojnica središta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  koji kružnicu  $k_1$  siječe redom u točkama  $P_1$  i  $Q_1$  te kružnicu  $k_2$  siječe redom u točkama  $P_2$  i  $Q_2$ . Tada vrijede jednakosti:

$$\frac{|R_1 S_2| \cdot |S_1 R_2|}{|R_1 S_1| \cdot |R_2 S_2|} = \frac{|P_1 Q_2| \cdot |Q_1 P_2|}{|P_1 Q_1| \cdot |P_2 Q_2|} \quad (2.2)$$

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|}. \quad (2.3)$$

*Dokaz.* Označimo  $|O_1O_2| = d$  i uočimo da je  $|P_1Q_1| = 2r_1$ , te  $|P_2Q_2| = 2r_2$ . Kako



Slika 2.2.

točke  $R_1$  i  $S_2$  leže na kružnici  $k_c$ , slijedi  $|O_cR_1| = |O_cS_2| = r_c$ . Potencija točke  $O_c$  u odnosu na kružnicu  $k_1$  iznosi  $|O_cR_1|^2 = r_c^2$ , a na kružnicu  $k_2$  iznosi  $|O_cS_2|^2 = r_c^2$ , pa zbog napomene 2.1 slijedi da  $O_c$  leži na potencijali (radikalnoj osi) kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Pravac  $O_1R_1$  je tangenta na  $k_c$  i pravac  $R_1O_c$  je tangenta na  $k_1$ . Kružnice  $k_1$  i  $k_c$  su ortogonalne pa slijedi da su pravci  $O_1R_1$  i  $O_cR_1$  međusobno okomiti.

Neka je točka  $O$  sjecište potencijale kružnica  $k_1$  i  $k_2$  s pravcem  $P_1R_1$ . Znamo da su pravci  $OO_c$  i  $O_1O_2$  međusobno okomiti.

Označimo kut  $\angle R_1P_1O_1 = \alpha$  i kut  $\angle O_1Q_1R_1 = \beta$ . Kako je  $|O_1P_1| = |O_1R_1| = r_1$  slijedi da je trokut  $P_1O_1R_1$  jednakokrčan, odnosno  $\angle R_1P_1O_1 = \angle P_1R_1O_1 = \alpha$ . Isto tako iz  $|O_1Q_1| = |O_1R_1| = r_1$  slijedi da je trokut  $Q_1O_1R_1$  jednakokrčan, odnosno  $\angle O_1R_1Q_1 = \angle O_1Q_1R_1 = \beta$ .

Kut  $\angle P_1R_1Q_1$  je pravi kut po Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice. Kako je kut  $\angle P_1R_1Q_1$  pravi tada vrijedi  $\angle P_1R_1Q_1 = \angle P_1R_1O_1 + \angle O_1R_1Q_1 = \alpha + \beta =$

$90^\circ$ .

Kako su pravci  $O_1R_1$  i  $O_cR_1$  međusobno okomiti slijedi da je kut  $O_1R_1O_c$  pravi kut, odnosno slijedi da je kut  $\angle Q_1R_1O_c = \alpha$ .

Kut  $\angle Q_1R_1O$  je također pravi kut iz čega slijedi da je  $\angle O_cR_1O = \beta$ .

Točka  $C$  je sjecište potencijale kružnica  $k_1$  i  $k_2$  i pravca  $p$ . Iz pravokutnog trokuta  $P_1OC$  zaključujemo da je kut  $\angle P_1OC = \beta$ . Konačno zaključujemo da je trokut  $R_1O_cO$  jednakokrčan, odnosno da je  $|O_cO| = r_c$  što znači da točka  $O$  leži na kružnici  $k_c$ .

Dakle, točka  $O$  se nalazi na sjecištu potencijale kružnica  $k_1$  i  $k_2$  i kružnice  $k_c$ . Na analogan način se pokaže da pravci  $Q_1S_1$ ,  $P_2R_2$  i  $Q_2S_2$  prolaze točkom  $O$ .

Sada promatrajmo inverziju s centrom u točki  $O$  koja točku  $R_1$  preslika u točku  $P_1$ . Ona preslikava točke  $S_1$ ,  $R_2$ ,  $S_2$  redom u  $Q_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$ , a kružnicu  $k_c$  u pravac  $p$ . Prema teoremu 2.6 za točke  $R_1$ ,  $S_1$ ,  $R_2$ ,  $S_2$  i njihove inverzne slike  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$  vrijede jednakosti:

$$\frac{|R_1S_2| \cdot |S_1R_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|},$$

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|}.$$

□

Dokažimo sada teorem 2.8:

*Dokaz.* Ovisno o međusobnom položaju kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , te centra inverzije razlikujemo tri slučaja.

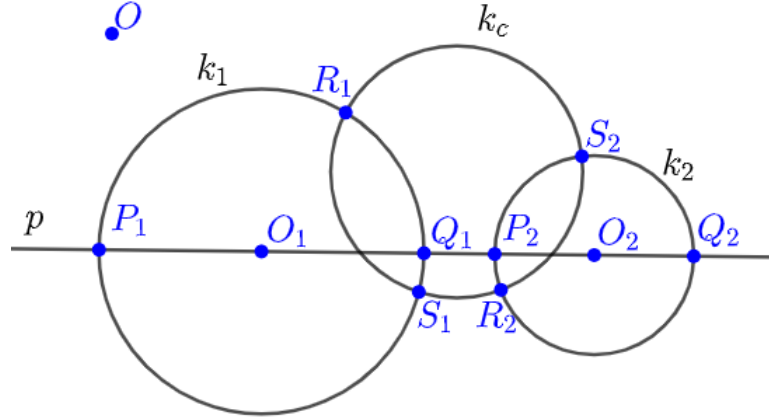
- A. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se ne sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi izvan kružnica  $k_1$  i  $k_2$
- B. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi izvan kružnica  $k_1$  i  $k_2$
- C. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi unutar kružnica  $k_1$  i  $k_2$

Neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice i neka pravac  $p$  siječe kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$  i  $Q_2$  kao na slici 2.3. tako da je  $|P_1Q_1| = 2r_1$  i  $|P_2Q_2| = 2r_2$ .

*Slučaj A.*-kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se ne sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi izvan kružnica  $k_1$  i  $k_2$

Promotrimo sada sljedeće izraze:

$$\frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 + r_2)(d - r_1 - r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 + r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^u)^2}{4r_1r_2},$$



Slika 2.3.

$$\frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) i (1.4) brojnici  $d^2 - (r_1 - r_2)^2$  i  $d^2 - (r_1 + r_2)^2$ , ako su pozitivni, predstavljaju kvadrat tangente udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Neka je  $k_c$  ortogonalna na kružnice  $k_1$  i  $k_2$  i neka su  $R_1, S_1, R_2, S_2$  redom sjecišta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  s kružnicom  $k_c$ . Primijenimo sada lemu 2.1 na točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$ :

$$\frac{|R_1S_2| \cdot |S_1R_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^u)^2}{4r_1r_2},$$

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem  $O$  izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu  $k_1(O_1, r_1)$  u  $k'_1(O'_1, r'_1)$ , kružnicu  $k_2(O_2, r_2)$  u  $k'_2(O'_2, r'_2)$ , a kružnicu  $k_c$  u  $k'_c$ . Kako je  $k_c$  ortogonalna na  $k_1$  i  $k_2$ , a inverzija čuva kutove, kružnica  $k'_c$  je ortogonalna na  $k'_1$  i  $k'_2$ . Primijenimo prethodnu jednakost na slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  točaka  $R_1, S_1, R_2, S_2$  pri toj inverziji:

$$\frac{|R'_1S'_2| \cdot |S'_1R'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t'_{12}{}^u)^2}{4r'_1r'_2},$$

$$\frac{|R'_1R'_2| \cdot |S'_1S'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t'_{12}{}^v)^2}{4r'_1r'_2},$$

gdje je  $t_{12}^u$  unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , te  $t_{12}^v$  vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Prema teoremu 2.6 za točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$  i njihove inverzne slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  vrijedi:

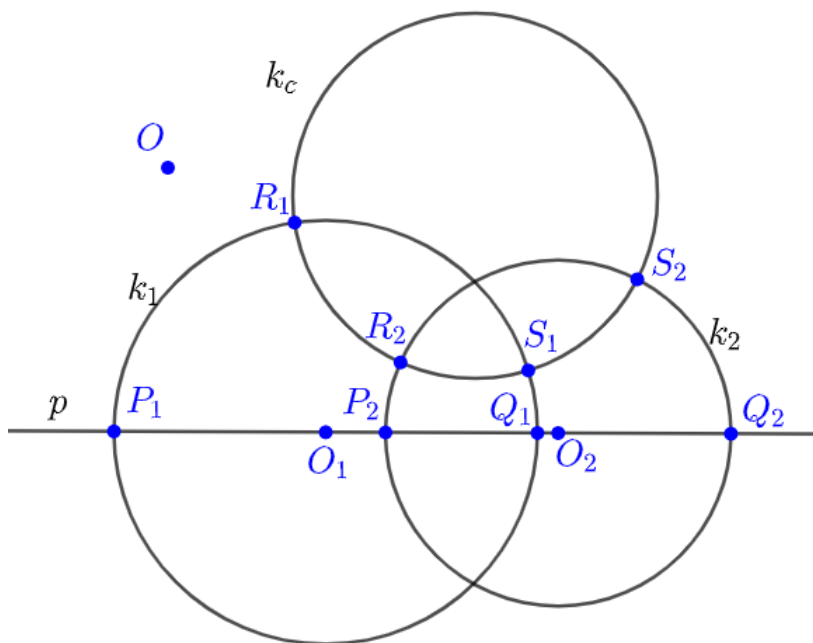
$$\frac{(t_{12}^u)^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1S_2| \cdot |S_1R_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|R'_1S'_2| \cdot |S'_1R'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t_{12}^u)^2}{4r'_1r'_2},$$

$$\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|R'_1R'_2| \cdot |S'_1S'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r'_1r'_2}.$$

Ovime je slučaj *A.* dokazan.

*Slučaj B.*-kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi izvan kružnica  $k_1$  i  $k_2$

Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku pa nemaju unutarnju tangentu udaljenost. Promotrimo



Slika 2.4.

sada sljedeći izraz:

$$\frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) brojnik  $d^2 - (r_1 - r_2)^2$ , ako je pozitivan, predstavlja kvadrat vanjske tangentne udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Primjenimo sada lemu 2.1 na točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$  iz čega slijedi:

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem  $O$  izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu  $k_1(O_1, r_1)$  u  $k'_1(O'_1, r'_1)$ , kružnicu  $k_2(O_2, r_2)$  u  $k'_2(O'_2, r'_2)$ , a kružnicu  $k_c$  u  $k'_c$ . Kako je  $k_c$  ortogonalna na  $k_1$  i  $k_2$ , a inverzija čuva kutove, kružnica  $k'_c$  je ortogonalna na  $k'_1$  i  $k'_2$ . Primijenimo prethodnu jednakost na slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  točaka  $R_1, S_1, R_2, S_2$  pri toj inverziji:

$$\frac{|R'_1R'_2| \cdot |S'_1S'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t'_{12})^2}{4r'_1r'_2},$$

gdje je  $t'_{12}$  vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Prema teoremu 2.6 za točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$  i njihove inverzne slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  vrijedi:

$$\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|R'_1R'_2| \cdot |S'_1S'_2|}{|R'_1S'_1| \cdot |R'_2S'_2|} = \frac{(t'_{12})^2}{4r'_1r'_2}.$$

Ovime je slučaj *B.* dokazan.

*Slučaj C.*-kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku i centar inverzije  $O$  se nalazi unutar kružnica  $k_1$  i  $k_2$

Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku pa nemaju unutarnju tangentu udaljenost. Promotrimo sada sljedeći izraz:

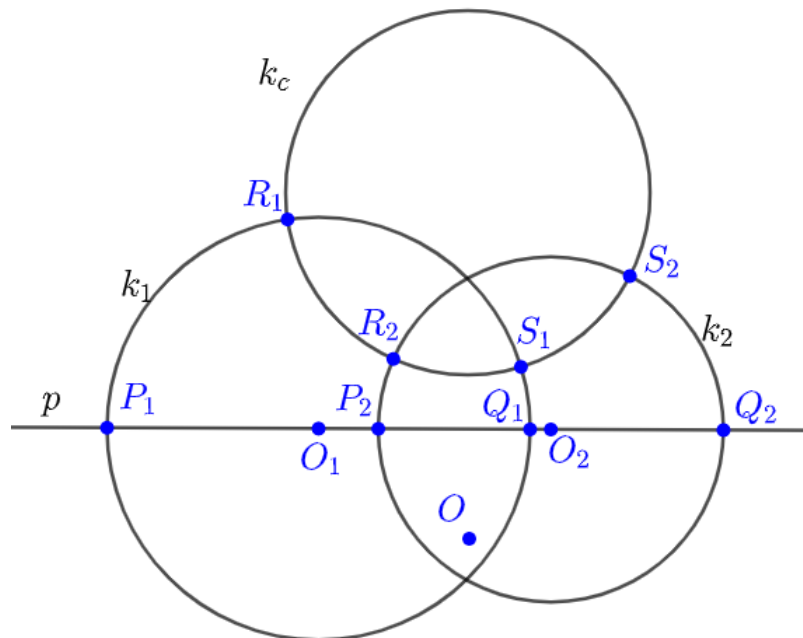
$$\frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) brojnik  $d^2 - (r_1 - r_2)^2$ , ako je pozitivan, predstavlja kvadrat vanjske tangentne udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

Primjenimo sada lemu 2.1 na točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$  iz čega slijedi:

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem  $O$  izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu  $k_1(O_1, r_1)$  u  $k'_1(O'_1, r'_1)$ , kružnicu  $k_2(O_2, r_2)$  u  $k'_2(O'_2, r'_2)$ , a kružnicu  $k_c$  u  $k'_c$ . Kako je  $k_c$  ortogonalna na  $k_1$  i  $k_2$ , a inverzija čuva kutove, kružnica  $k'_c$  je



Slika 2.5.

ortogonalna na  $k'_1$  i  $k'_2$ . Primijenimo prethodnu jednakost na slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  točaka  $R_1, S_1, R_2, S_2$  pri toj inverziji:

$$\frac{|R'_1 R'_2| \cdot |S'_1 S'_2|}{|R'_1 S'_1| \cdot |R'_2 S'_2|} = \frac{(t'_{12})^2}{4r'_1 r'_2},$$

gdje je  $t'_{12}$  vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Prema teoremu 2.6 za točke  $R_1, S_1, R_2, S_2$  i njihove inverzne slike  $R'_1, S'_1, R'_2, S'_2$  vrijedi:

$$\frac{(t'_{12})^2}{4r_1 r_2} = \frac{|R_1 R_2| \cdot |S_1 S_2|}{|R_1 S_1| \cdot |R_2 S_2|} = \frac{|R'_1 R'_2| \cdot |S'_1 S'_2|}{|R'_1 S'_1| \cdot |R'_2 S'_2|} = \frac{(t'_{12})^2}{4r'_1 r'_2}.$$

Ovime je slučaj  $C$ . dokazan.

□

# Poglavlje 3

## Caseyev teorem

Prema L. Gonzalezu [5] Caseyev teorem glasi:

*Neka su  $k_i(O_i, r_i)$   $i = 1, 2, 3, 4$  i  $k(O, r)$  kružnice. Kružnice  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  dodiruju kružnicu  $k$  ako i samo ako, uz pravilan odabir predznaka, vrijedi:*

$$\pm t_{12} \cdot t_{34} \pm t_{23} \cdot t_{14} \pm t_{13} \cdot t_{24} = 0, \quad (3.1)$$

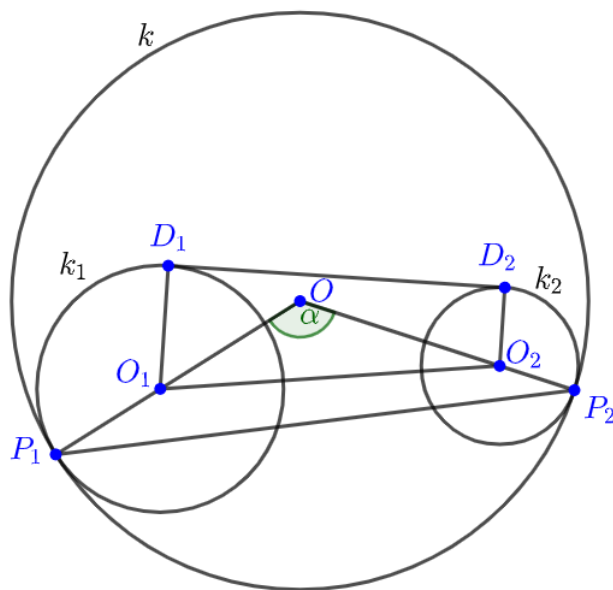
*pri čemu  $t_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  i  $i \neq j$  predstavlja tangentnu udaljenost kružnica  $k_i$  i  $k_j$ . Ako poblize promotrimo gornju formulaciju Caseyevog teorema možemo si postaviti dva pitanja. Koji je pravilan odabir predznaka? Koju tangentu udaljenost koristimo, unutarnju ili vanjsku?*

Izračunajmo tangentnu udaljenost kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  koje dodiruju kružnicu  $k(O, R)$ . Uvedimo najprije oznaku  $t_{12}^v$  za vanjsku tangentnu udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$  i  $t_{12}^u$  za unutarnju tangentnu udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Promotrimo sada četiri slučaja:

- A. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra,
- B. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana,
- C. kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana,
- D. kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra.



Slučaj A.- kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra  
 Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $r_1 \geq r_2$ . Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ . Zajednička vanjska tangenta na kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , vidi sliku 3.1.. Prema



Slika 3.1.

jednakosti (1.3) vrijedi:

$$(t_{12}^v)^2 = |D_1D_2|^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2. \quad (3.2)$$

Označimo  $\angle O_1OO_2 = \alpha$ . Primjenom poučka o kosinusima na trokut  $OO_1O_2$  dobije se:

$$\begin{aligned} d^2 = |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2 \cdot |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \cos \angle O_1OO_2 \\ &= (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut  $OP_1P_2$  i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha). \quad (3.4)$$

Iz jednakosti (3.3) izrazimo  $d^2$ , a iz jednakosti (3.4)  $\cos \alpha$  te uvrstimo u (3.2) i dobi-

jemo:

$$\begin{aligned}
 (t_{12}^v)^2 &= (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(1 - \frac{|P_1P_2|^2}{2R^2}\right) - (r_1 - r_2)^2 \\
 (t_{12}^v)^2 &= (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) + (R - r_1)(R - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2} \\
 &\quad - (r_1 - r_2)^2 \\
 (t_{12}^v)^2 &= R^2 - 2Rr_1 + r_1^2 + R^2 - 2Rr_2 + r_2^2 - 2R^2 + 2Rr_2 + 2Rr_1 - 2r_1r_2 \\
 &\quad + (R - r_1)(R - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2} - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\
 (t_{12}^v)^2 &= (R - r_1)(R - r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2}.
 \end{aligned}$$

Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. \quad (3.5)$$

*Slučaj B.*- kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $r_1 \geq r_2$ . Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ . Zajednička vanjska tangenta na kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , vidi sliku 3.2..

Prema jednakosti (1.3) vrijedi:

$$(t_{12}^v)^2 = |D_1D_2|^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2. \quad (3.6)$$

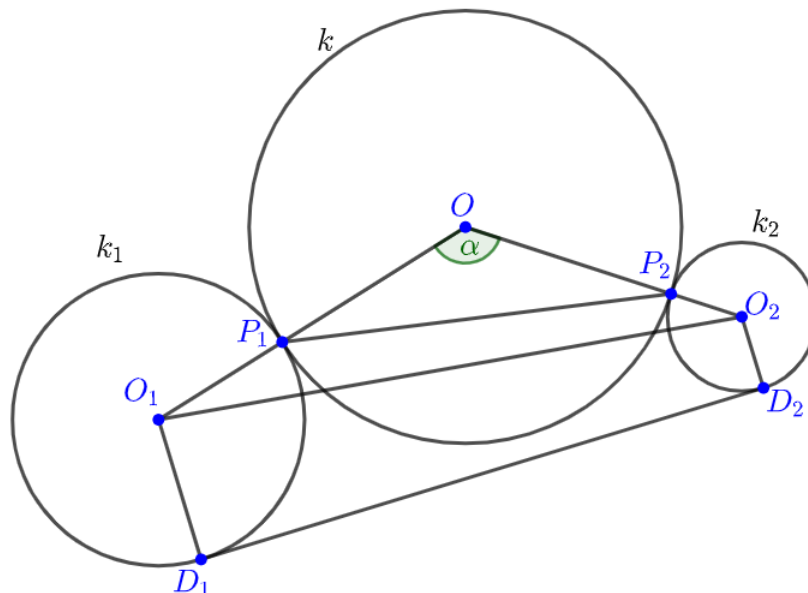
Označimo  $\angle O_1OO_2 = \alpha$ . Primjenom poučka o kosinusima na trokut  $OO_1O_2$  dobije se:

$$\begin{aligned}
 d^2 = |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2 \cdot |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \cos \angle O_1OO_2 \\
 &= (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2) \cos \alpha.
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut  $OP_1P_2$  i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha). \quad (3.8)$$

Iz jednakosti (3.7) izrazimo  $d^2$ , a iz jednakosti (3.8)  $\cos \alpha$  te uvrstimo u (3.6) i dobi-



Slika 3.2.

jemo:

$$\begin{aligned}
 (t_{12}^v)^2 &= (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2) \left(1 - \frac{|P_1P_2|^2}{2R^2}\right) - (r_1 - r_2)^2 \\
 (t_{12}^v)^2 &= (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2) + (R + r_1)(R + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2} \\
 &\quad - (r_1 - r_2)^2 \\
 (t_{12}^v)^2 &= R^2 + 2Rr_1 + r_1^2 + R^2 + 2Rr_2 + r_2^2 - 2R^2 - 2Rr_2 - 2Rr_1 - 2r_1r_2 \\
 &\quad + (R + r_1)(R + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2} - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\
 (t_{12}^v)^2 &= (R + r_1)(R + r_2) \frac{|P_1P_2|^2}{R^2}.
 \end{aligned}$$

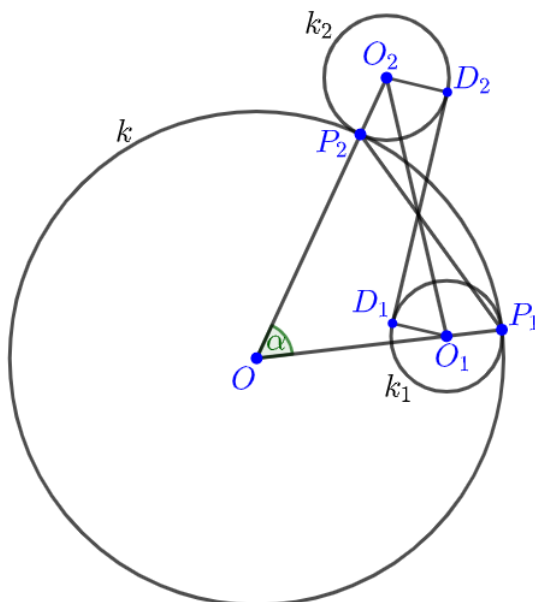
Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R + r_1)(R + r_2)}. \quad (3.9)$$

*Slučaj C.*- kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana

Kružnica  $k_1$  dira kružnicu  $k$  iznutra i kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana redom u

točkama  $P_1$  i  $P_2$ . Zajednička unutarnja tangenta na kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , vidi sliku 3.3.. Prema jednakosti (1.4) vrijedi:



Slika 3.3.

$$(t_{12}^u)^2 = |D_1D_2|^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2. \quad (3.10)$$

Označimo  $\angle O_1OO_2 = \alpha$ . Primjenom poučka o kosinusu na trokut  $OO_1O_2$  dobije se:

$$\begin{aligned} d^2 = |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2 \cdot |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \cos \angle O_1OO_2 \\ &= (R - r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R - r_1)(R + r_2) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut  $OP_1P_2$  i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha). \quad (3.12)$$

Iz jednakosti (3.11) izrazimo  $d^2$ , a iz jednakosti (3.12)  $\cos \alpha$  te uvrstimo u (3.10) i

dobijemo:

$$\begin{aligned}
 (t_{12}^u)^2 &= (R - r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R - r_1)(R + r_2) \left(1 - \frac{|P_1 P_2|^2}{2R^2}\right) - (r_1 + r_2)^2 \\
 (t_{12}^u)^2 &= (R - r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R - r_1)(R + r_2) + (R - r_1)(R + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{R^2} \\
 &\quad - (r_1 + r_2)^2 \\
 (t_{12}^u)^2 &= R^2 - 2Rr_1 + r_1^2 + R^2 + 2Rr_2 + r_2^2 - 2R^2 - 2Rr_2 + 2Rr_1 + 2r_1r_2 \\
 &\quad + (R - r_1)(R + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{R^2} - (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) \\
 (t_{12}^u)^2 &= (R - r_1)(R + r_2) \frac{|P_1 P_2|^2}{R^2}.
 \end{aligned}$$

Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R + r_2)}. \quad (3.13)$$

*Slučaj D.*- kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra

Račun se provodi kao u slučaju C. samo zamijenimo kružnice  $k_1$  i  $k_2$ . Konačna jednakosti glas:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{R} \sqrt{(R + r_1)(R - r_2)}. \quad (3.14)$$

Nakon izračunavanja tangentskih udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$  koje dodiruju kružnicu  $k$  možemo izreći sljedeći teorem.

**Teorem 3.1.** *Dvije kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruju kružnicu  $k(O, R)$  redom u točkama  $P_1$  i  $P_2$ .*

A. *Ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra tada je njihova vanjska tangentska udaljenost:*

$$t_{12}^v = \frac{|P_1 P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. \quad (3.15)$$

B. *Ako kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana tada je njihova vanjska tangentska udaljenost:*

$$t_{12}^v = \frac{|P_1 P_2|}{R} \sqrt{(R + r_1)(R + r_2)}. \quad (3.16)$$

C. *Ako kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana tada je njihova unutarnja tangentska udaljenost:*

$$t_{12}^u = \frac{|P_1 P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R + r_2)}. \quad (3.17)$$

D. Ako kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra tada je njihova unutarnja tangenta udaljenost:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}. \quad (3.18)$$

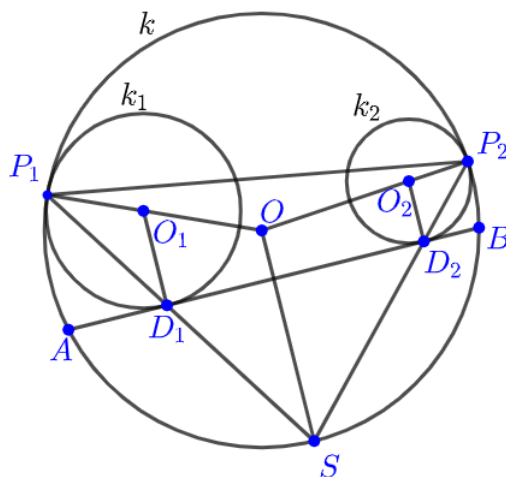
Dokažimo sada teorem 3.1 koristeći sličnost.

*Dokaz. Slučaj A.*- kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra

Neka je  $AB$  zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , tako da su točke  $A$  i  $B$  na kružnici  $k$  (vidi sliku 3.4.). Točke  $D_1$  i  $D_2$  su redom dirališta zajedničke tangente  $AB$  i kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Točke  $P_1$  i  $P_2$  su redom dirališta kružnice  $k$  i kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Sa  $S$  označimo sjecište pravca  $P_1D_1$  i kružnice  $k$ , različito od  $P_1$ . Kutovi  $\angle D_1P_1O_1$  i  $\angle P_1D_1O_1$  su sukladni jer su to kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta  $P_1O_1D_1$ . Kutovi  $\angle SP_1O$  i  $\angle P_1SO$  su sukladni jer su to kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta  $P_1OS$ . Slijedi da su trokuti  $P_1O_1D_1$  i  $P_1OS$  slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta. Zbog sličnosti trokuta  $P_1O_1D_1$  i  $P_1OS$  slijedi da je  $O_1D_1 \parallel OS$ .

Na analogan način se pokaže da su trokuti  $P_2O_2D_2$  i  $P_2OS$  slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta. Zbog sličnosti trokuta  $P_2O_2D_2$  i  $P_2OS$  slijedi da je  $O_2D_2 \parallel OS$ .

Sada imamo:



Slika 3.4.

$$\angle SD_1D_2 = \angle P_1D_1A = \frac{1}{2}\angle P_1O_1D_1 = \frac{1}{2}\angle P_1OS = \angle SP_2P_1.$$

Zbog toga su trokuti  $SD_1D_2$  i  $SP_2P_1$  slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta i slijedi:

$$\frac{|D_1D_2|}{|P_2P_1|} = \frac{|SD_1|}{|SP_2|} = \frac{|SD_2|}{|SP_1|}. \quad (3.19)$$

Sada kvadrirajmo zadnji član iz gornje jednakosti:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|SD_2|}{|SP_1|} \cdot \frac{|SD_2|}{|SP_1|},$$

iz jednakosti (3.19) vidimo da je:

$$\frac{|SD_1|}{|SP_2|} = \frac{|SD_2|}{|SP_1|},$$

te konačno imamo:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|SD_1|}{|SP_2|} \cdot \frac{|SD_2|}{|SP_1|}. \quad (3.20)$$

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na krakove kuta  $\angle OP_1S$  i paralelne pravce  $O_1D_1$  i  $OS$ , slijedi:

$$\frac{|P_1D_1|}{|P_1S|} = \frac{|P_1O_1|}{|P_1O|}, \quad (3.21)$$

$$\frac{|P_1D_1|}{|D_1S|} = \frac{|P_1O_1|}{|OO_1|}. \quad (3.22)$$

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na krakove kuta  $\angle OP_2S$  i paralelne pravce  $O_2Q_2$  i  $OS$ , slijedi:

$$\frac{|P_2D_2|}{|P_2S|} = \frac{|P_2O_2|}{|P_2O|}, \quad (3.23)$$

$$\frac{|P_2D_2|}{|D_2S|} = \frac{|P_2O_2|}{|OO_2|}. \quad (3.24)$$

Iz jednakosti (3.22) izrazimo  $|SD_1|$ :

$$|SD_1| = \frac{|OO_1|}{|P_1O_1|} \cdot |P_1D_1|$$

i iz jednakosti (3.24) izrazimo  $|SD_2|$ :

$$|SD_2| = \frac{|OO_2|}{|P_2O_2|} \cdot |P_2D_2|$$

te uvrstimo u jednakost (3.20). Slijedi:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|P_1D_1| \cdot |OO_1|}{|SP_2| \cdot |P_1O_1|} \cdot \frac{|P_2D_2| \cdot |OO_2|}{|SP_1| \cdot |P_2O_2|}.$$

Grupirajmo sada članove na sljedeći način:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \frac{|P_1D_1|}{|SP_1| \cdot |P_1O_1|} \cdot \frac{|P_2D_2|}{|SP_2| \cdot |P_2O_2|}$$

Iz jednakosti (3.21) vidimo da je treći faktor jednak  $\frac{1}{|P_1O|}$ , a iz jednakosti (3.23) vidimo da je četvrti faktor jednak  $\frac{1}{|P_2O|}$ .

Stoga je:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}.$$

Sada korjenujemo gornju jednakost:

$$\frac{|SD_2|}{|SP_1|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}},$$

te je zbog (3.19):

$$\frac{|D_1D_2|}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}}. \quad (3.25)$$

Kako su točke  $D_1$  i  $D_2$  redom dirališta zajedničke vanjske tangente s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ , slijedi da je  $|D_1D_2| = t_{12}^v$  vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Sada prepoznamo da je  $|OO_1| = R - r_1$ ,  $|OO_2| = R - r_2$  i  $|OP_1| = |OP_2| = R$ , pa gornja jednakost glasi:

$$\frac{t_{12}^v}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R - r_1)(R - r_2)}{R^2}},$$

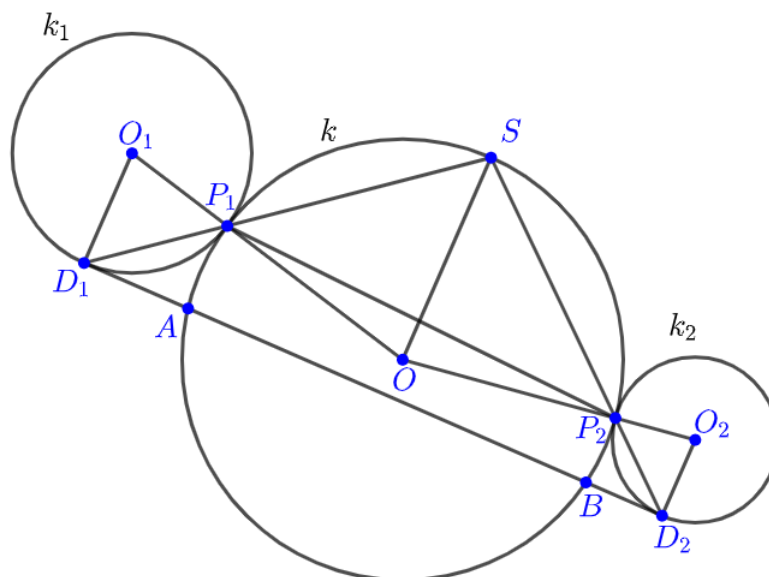
odnosno:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. \quad (3.26)$$

*Slučaj B.*- kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  izvana

Na sličan način kao slučaj A. dokazuje se i ovaj slučaj. U ovom slučaju trokuti  $SD_1D_2$  i  $SP_2P_1$  su također slični i vrijedi  $O_1D_1 \parallel OS \parallel O_2D_2$ . Kako su točke  $D_1$  i  $D_2$  redom dirališta zajedničke vanjske tangente s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ , slijedi da je





Slika 3.5.

$|D_1D_2| = t_{12}^v$  vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Sada prepoznamo da je  $|OO_1| = R + r_1$ ,  $|OO_2| = R + r_2$  i  $|OP_1| = |OP_2| = R$ , pa jednakost (3.25) postaje:

$$\frac{t_{12}^v}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R + r_1)(R + r_2)}{R^2}},$$

odnosno:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R + r_1)(R + r_2)}. \quad (3.27)$$

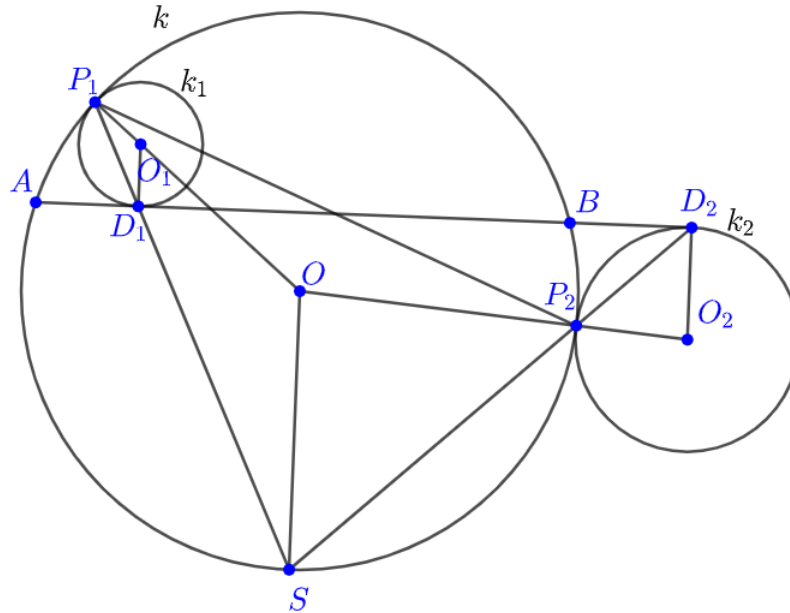
*Slučaj C.*- kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana

Na sličan način kao slučaj A. dokazuje se i ovaj slučaj. U ovom slučaju trokuti  $SD_1D_2$  i  $SP_2P_1$  su također slični i vrijedi  $O_1D_1 \parallel OS \parallel O_2D_2$ . Kako su točke  $D_1$  i  $D_2$  redom dirališta zajedničke unutarnje tangente s kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ , slijedi da je  $|D_1D_2| = t_{12}^u$  unutarnja tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Sada prepoznamo da je  $|OO_1| = R - r_1$ ,  $|OO_2| = R + r_2$  i  $|OP_1| = |OP_2| = R$ , pa jednakost (3.25) postaje:

$$\frac{t_{12}^u}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R - r_1)(R + r_2)}{R^2}},$$

odnosno:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R + r_2)}. \quad (3.28)$$



Slika 3.6.

*Slučaj D.*- kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana, a kružnica  $k_2$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra

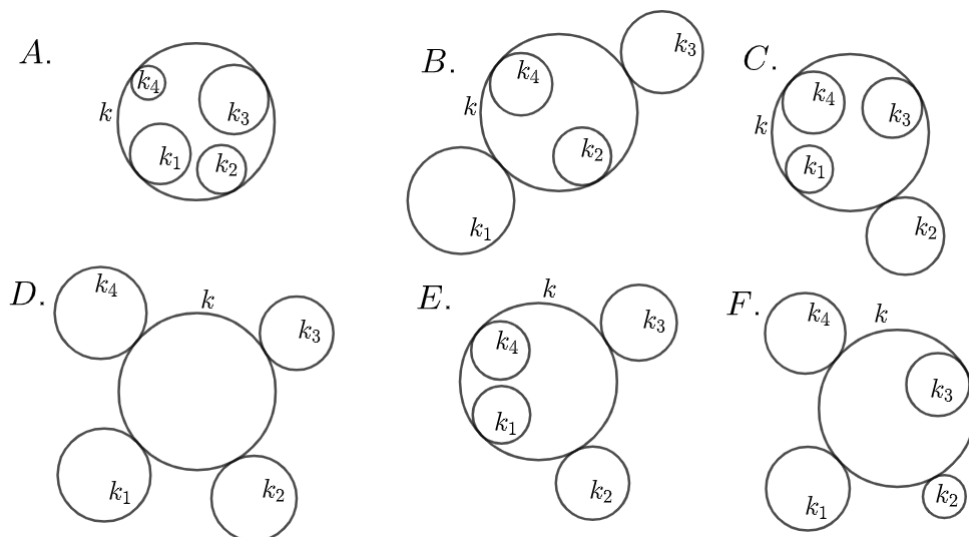
Dokaz se provodi isto kao u slučaju  $C$ . uz zamjenu  $k_1$  i  $k_2$ , pa dobivamo:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{R} \sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}. \quad (3.29)$$

Ovime je dovršen i drugi dokaz teorema 3.1. □

### 3.1 Prvi dokaz Caseyevog teorema

U iskazu Caseyevog teorema javljaju se četiri kružnice koje dodiruju kružnicu  $k$ , izvana ili iznutra. Ovisno o tome dodiruju li kružnice kružnicu  $k$  izvana ili iznutra postoji šest mogućnosti, vidi sliku 3.7..



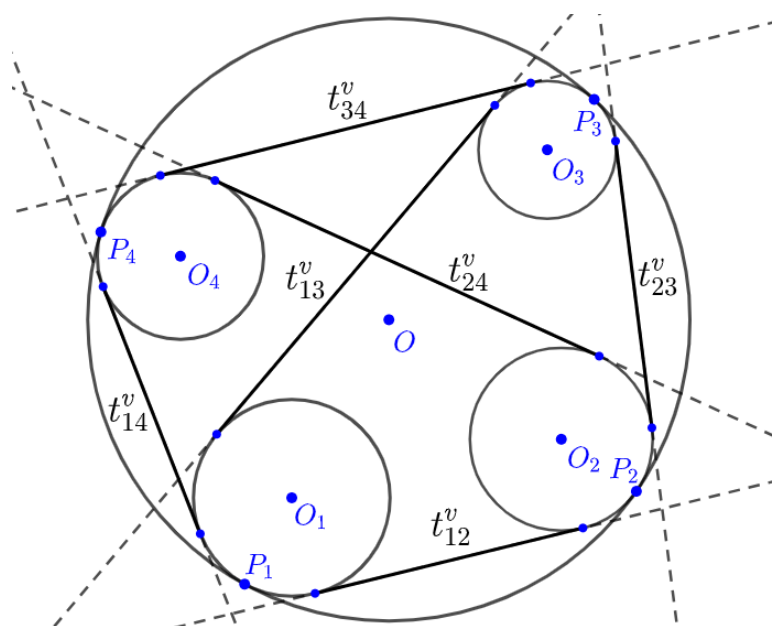
Slika 3.7.: Šest konfiguracija dodirivanja kružnica

Promotrimo detaljnije slučaj  $A$ ., vidi sliku 3.8.. Neka su  $P_1, P_2, P_3, P_4$  redom dirališta kružnica  $k_1, k_2, k_3, k_4$  s kružnicom  $k$ . Na tetivni četverokut  $P_1P_2P_3P_4$  primijenimo Ptolomejev teorem 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \quad (3.30)$$

Kružnice  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, primijenimo jednakost (3.15) iz teorema 3.1:

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}}, \\ |P_3P_4| &= \frac{t_{34}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R-r_4)}}, \\ |P_2P_3| &= \frac{t_{23}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}}, \\ |P_1P_4| &= \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_4)}}. \end{aligned}$$



Slika 3.8.

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_3)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_4)}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.30) slijedi:

$$\begin{aligned} & \frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R-r_4)}} + \frac{t_{23}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_4)}} \\ &= \frac{t_{13}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_4)}}. \end{aligned}$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R-r_1) \cdot (R-r_2) \cdot (R-r_3) \cdot (R-r_4)}$$

te dobivamo:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v.$$

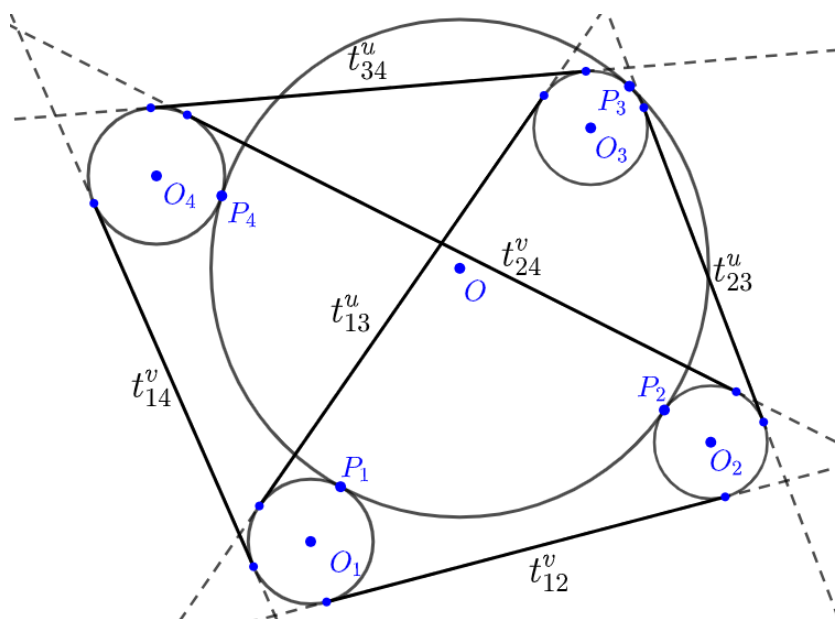
odnosno:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v - t_{13}^v \cdot t_{24}^v = 0.$$

Ovime smo pokazali da Caseyev teorem vrijedi za slučaj *A*. sa slike 3.7..

Slično se dokazuju i ostali slučajevi sa slike 3.7., a ovdje ćemo još provesti dokaz slučaja *F*.. Promotrimo detaljnije slučaj *F*., vidi sliku 3.9.. Neka su  $P_1, P_2, P_3, P_4$  redom dirališta kružnica  $k_1, k_2, k_3, k_4$  s kružnicom  $k$ . Na tetivni četverokut  $P_1P_2P_3P_4$  primijenimo Ptolomejev teorem 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \quad (3.31)$$



Slika 3.9.

Kružnice  $k_1, k_2, k_4$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, a  $k_3$  izvana. Primijenimo jednakosti (3.15), (3.16) i (3.17) iz teorema 3.1:

$$|P_1P_2| = \frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}},$$

$$|P_1P_4| = \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_4)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R+r_4)}}.$$

$$|P_3P_4| = \frac{t_{34}^u \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R+r_4)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R-r_3)}},$$

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_3)}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.31) slijedi:

$$\begin{aligned} & \frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^u \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R+r_4)}} + \frac{t_{23}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_4)}} \\ &= \frac{t_{13}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R+r_4)}}. \end{aligned}$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R+r_1) \cdot (R+r_2) \cdot (R-r_3) \cdot (R+r_4)}$$

te dobivamo:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^v = t_{13}^u \cdot t_{24}^v.$$

odnosno:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^v - t_{13}^u \cdot t_{24}^v = 0.$$

Ovime smo pokazali da Caseyev teorem vrijedi za slučaj  $F$ . sa slike 3.7..

Dakle vrijedi:

**Teorem 3.2.** *Neka su  $k_i(O_i, r_i)$   $i = 1, 2, 3, 4$  i  $k(O, r)$  kružnice. Kružnice  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  dodiruju redom kružnicu  $k$  u točkama  $P_1, P_2, P_3, P_4$  koje su vrhovi tetivnog četverokuta. Tada je u slučajevima sa slike 3.7.:*

$$A. \quad t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$B. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^u = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$C. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^v + t_{23}^u \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^u,$$

$$D. \quad t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$E. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^u \cdot t_{24}^u,$$

$$F. \quad t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^v = t_{13}^u \cdot t_{24}^v,$$

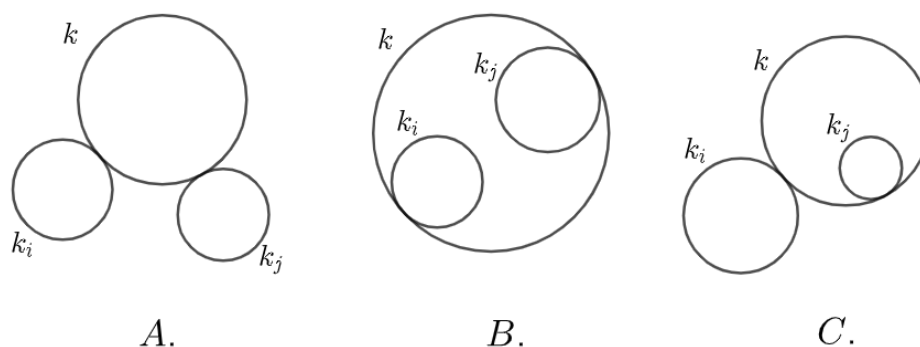
pri čemu  $t_{ij}^v$  predstavlja vanjsku tangentnu udaljenost kružnica  $k_i$  i  $k_j$  i  $t_{ij}^u$  predstavlja unutarnju tangentnu udaljenost kružnica  $k_i$  i  $k_j$ , gdje je  $i, j = 1, 2, 3, 4$  i  $i \neq j$ .

Ovime smo dokazali i iskazali jedan smjer implikacije iz početnog Caseyevog teorema, bez nejasnoća koji predznak koristimo i koju tangentnu udaljenost koristimo.

Sada možemo odgovoriti na pitanja koja smo si postavili na početku ovog poglavlja.

Umnožak tangentnih udaljenosti dviju nasuprotnih kružnica jednak je zbroju umnožaka nasuprotnih tangentnih udaljenosti susjednih kružnica. Pri tome, pod pojam susjednih kružnica podrazumijevamo kružnice čija se dirališta s kružnicom  $k$  u cikličnom poretku nalaze jedna ispred druge ili jedna iza druge.

Ako su kružnice  $k_i$  i  $k_j$  s iste strane kružnice  $k$ , obje dodiruju kružnicu  $k$  izvana ili obje dodiruju kružnicu  $k$  iznutra (slučajevi *A.* i *B.* sa slike 3.10.), tada za  $t_{ij}$



Slika 3.10.

uzimamo vanjsku tangentnu udaljenost kružnica  $k_i$  i  $k_j$ . Ako jedna od njih dira kružnicu  $k$  iznutra, a druga izvana (slučaj *C.* sa slike 3.10.) tada za  $t_{ij}$  uzimamo unutarnju tangentnu udaljenost kružnica  $k_i$  i  $k_j$ .

## 3.2 Drugi dokaz Caseyevog teorema

**Lema 3.1.** *Neka su točke  $A, B, C, D$  redom na pravcu, tada vrijedi:*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|. \quad (3.32)$$



Slika 3.11.

*Dokaz.* Označimo  $b = |AB|$ ,  $c = |AC|$ ,  $d = |AD|$ . Tada je  $|BC| = c - b$ ,  $|BD| = d - b$  i  $|CD| = d - c$ .

$$\begin{aligned}
 |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| &= b \cdot (d - c) + (c - b) \cdot d \\
 &= bd - bc + cd - bd \\
 &= -bc + cd \\
 &= c \cdot (d - b) \\
 &= |AC| \cdot |BD|.
 \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.3. Caseyev teorem** Neka su  $k_i(O_i, r_i)$   $i = 1, 2, 3, 4$  i  $k(O, r)$  kružnice. Kružnice  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  redom dodiruju kružnicu  $k$  ako i samo ako vrijedi:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}, \quad (3.33)$$

pri čemu  $t_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  i  $i \neq j$  predstavlja tangentnu udaljenost (vanjsku ili unutarnju) kružnica  $k_i$  i  $k_j$ .

Sada ćemo dokazati Caseyev teorem pomoću inverzije, ali prije toga izkazat ćemo i dokazati sljedeću lemu.

*Dokaz.* Neka su  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$ ,  $k_3(O_3, r_3)$  i  $k_4(O_4, r_4)$  kružnice koje redom dodiruju kružnicu  $k$  izvana ili iznutra u točkama  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ .

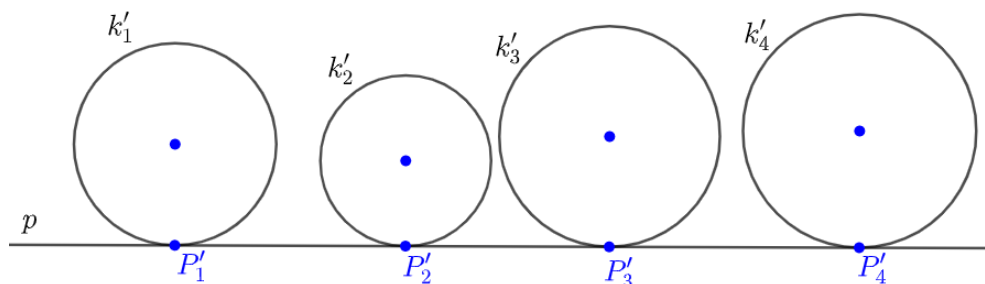
Sada, neka je centar inverzije  $O$  na kružnici  $k$ . Tada se kružnica  $k$  inverzijom preslika u pravac  $p$ , a kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  u kružnice  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'_3$ ,  $k'_4$  koje dodiruju pravac  $p$ . Točke dodira pravca  $p$  i kružnica  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'_3$ ,  $k'_4$  su  $P'_1$ ,  $P'_2$ ,  $P'_3$ ,  $P'_4$  (vidi sliku 3.12.) tada prema lemi 3.1 vrijedi:

$$|P'_1P'_2| \cdot |P'_3P'_4| + |P'_1P'_3| \cdot |P'_2P'_4| = |P'_1P'_4| \cdot |P'_2P'_3| \quad (3.34)$$

Ali  $|P'_1P'_2|$  je baš tangentna udaljenost  $t'_{12}$  kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  u inverznoj slici. Svaki član jednadžbe (3.34) podijelimo s  $\sqrt{r'_1 \cdot r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4}$ , te primijenimo teorem 2.8. Sređivanjem dobivenog izraza dobijemo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24},$$





Slika 3.12.

odnosno:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = 0.$$

Time je dokazan jedan smjer teorema 3.3.

Za dokaz obrata trebat će nam sljedeće leme.

**Lema 3.2.** *Neka je  $k(O, r)$  kružnica i neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice koje dodiruju kružnicu  $k$  izvana. Neka je  $m \leq \min\{r_1, r_2\}$ . Neka su  $k'_1(O_1, r_1 - m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 - m)$  kružnice. Tada je vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentsnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

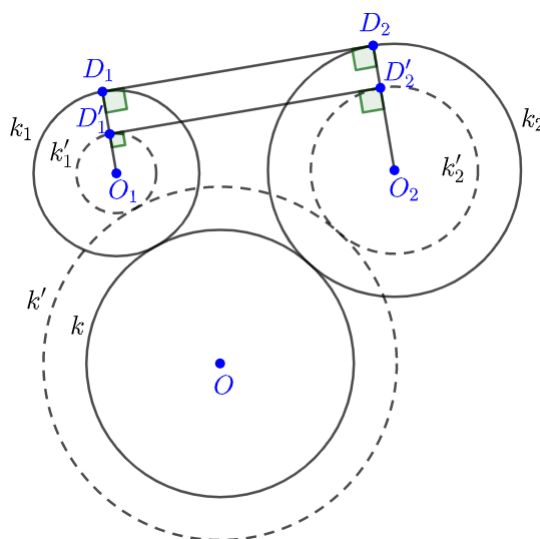
*Dokaz.* Neka je  $k'(O, r + m)$ . Sada pokažimo da kružnice  $k'_1$  i  $k'_2$  dodiruju kružnicu  $k'$  izvana. Označimo  $r' = r + m$ ,  $r'_1 = r_1 - m$  i  $r'_2 = r_2 - m$ . Kako se kružnice  $k$  i  $k_1$  dodiruju izvana i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_1$  je koncentrična s kružnicom  $k_1$ , slijedi:

$$|OO_1| = r + r_1 = (r + m) + (r_1 - m) = r' + r'_1.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Na sličan način se pokaže da vrijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r + m) + (r_2 - m) = r' + r'_2,$$

odnosno da kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Neka zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Tada je dužina  $\overline{D_1D_2}$  okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| = r_1 - (r_1 - m) = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D_2| - |O_2D'_2| = r_2 - (r_2 - m) = m$ . Zato je četverokut  $D_1D'_1D'_2D_2$  pravokutnik pa je pravac  $D'_1D'_2$  vanjska zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je vanjska tangentsna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentsnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$



Slika 3.13.

**Lema 3.3.** *Neka je  $k(O, r)$  kružnica i neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2 = k(O_2, r_2)$  kružnice koje dodiruju kružnicu  $k$  iznutra. Neka je  $m \leq \min\{r_1, r_2\}$ . Neka su  $k'_1(O_1, r_1 - m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 - m)$  kružnice. Tada je vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentsnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

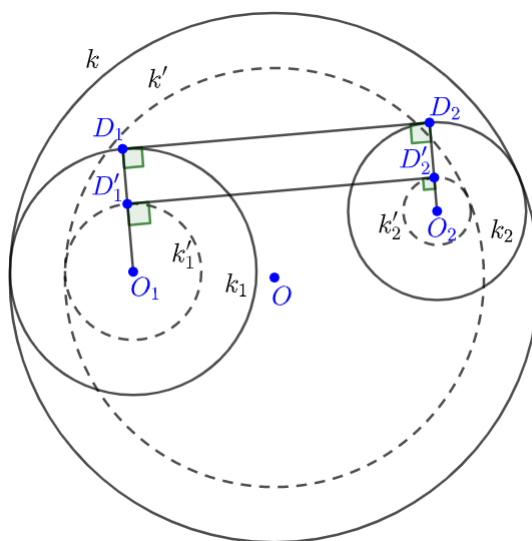
*Dokaz.* Neka je  $k'(O, r - m)$ . Prvo pokažimo da kružnice  $k'_1$  i  $k'_2$  dodiruju kružnicu  $k'$  iznutra. Označimo  $r' = r - m$ ,  $r'_1 = r_1 - m$  i  $r'_2 = r_2 - m$ . Kako se kružnice  $k$  i  $k_1$  dodiruju iznutra i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_1$  je koncentrična s kružnicom  $k_1$ , slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r - m) - (r_1 - m) = r' - r'_1.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  iznutra. Na sličan način se pokaže da vrijedi:

$$|OO_2| = r - r_2 = (r - m) - (r_2 - m) = r' - r'_2,$$

odnosno da kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  iznutra. Neka zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Tada je dužina  $\overline{D_1D_2}$  okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| = r_1 - (r_1 - m) = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D_2| - |O_2D'_2| = r_2 - (r_2 - m) = m$ . Zato je četverokut  $D_1D'_1D'_2D_2$  pravokutnik pa je pravac  $\overline{D'_1D'_2}$  vanjska zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je vanjska tangentsna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentsnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$



Slika 3.14.

**Lema 3.4.** *Neka je  $k(O, r)$  kružnica i neka kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra i kružnica  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana. Neka je  $m \leq r_1$ . Neka su  $k'_1(O_1, r_1 - m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 + m)$ . Tada je unutarinja tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarljivoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

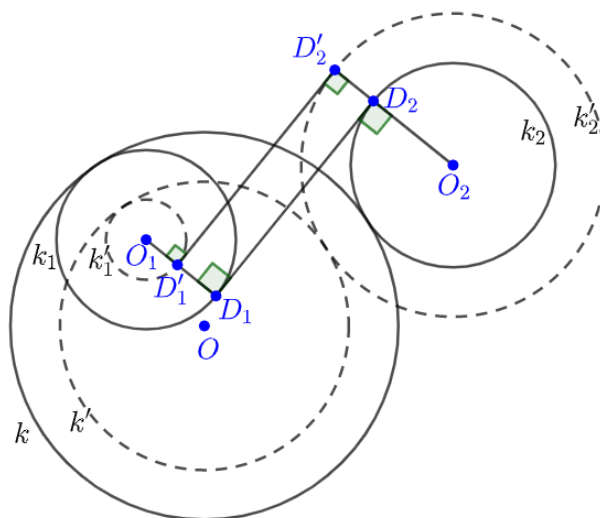
*Dokaz.* Neka je  $k'(O, r - m)$ . Sada pokažimo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  iznutra i kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Označimo  $r' = r - m$ ,  $r'_1 = r_1 - m$  i  $r'_2 = r_2 + m$ . Kako se kružnice  $k$  i  $k_1$  dodiruju iznutra i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_1$  koncentrična s kružnicom  $k_1$ , slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r - m) - (r_1 - m) = r' - r'_1.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Kako se kružnice  $k$  i  $k_2$  dodiruju izvana i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_2$  koncentrična s kružnicom  $k_2$ , slijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r - m) + (r_2 + m) = r' + r'_2.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Neka zajednička unutarinja tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Tada je dužina  $\overline{D_1D_2}$  okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| = r_1 - (r_1 - m) = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D'_2| - |O_2D_2| = (r_2 + m) - r_2 = m$ .



Slika 3.15.

Zato je četverokut  $D'_1D_1D_2D'_2$  pravokutnik pa je pravac  $D'_1D'_2$  unutarnja zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarnjoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$

**Lema 3.5.** *Neka je  $k(O, r)$  kružnica i neka kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra i kružnica  $k_2(O_2, r_2)$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana. Neka je  $m \leq r_2$ . Neka su  $k'_1(O_1, r_1 + m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 - m)$ . Tada je unutarnja tangentska udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarnjoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

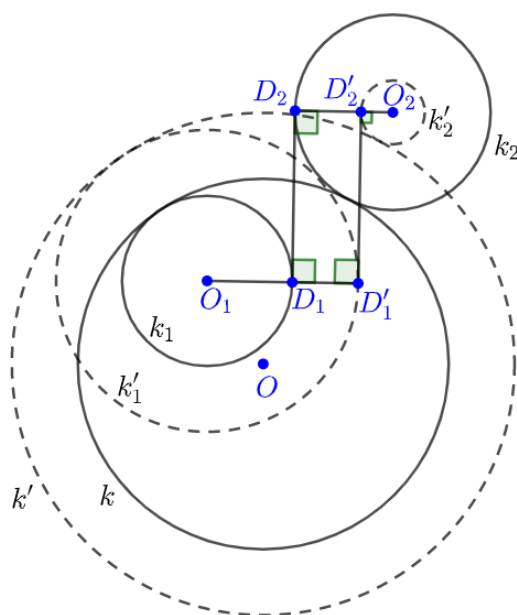
*Dokaz.* Neka je  $k'(O, r + m)$ . Sada pokažimo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  iznutra i kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Označimo  $r' = r + m$ ,  $r'_1 = r_1 + m$  i  $r'_2 = r_2 - m$ . Kako se kružnice  $k$  i  $k_1$  dodiruju iznutra i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_1$  koncentrična s kružnicom  $k_1$ , slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r + m) - (r_1 + m) = r' - r'_1.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_1$  dodiruje kružnicu  $k'$  iznutra. Kako se kružnice  $k$  i  $k_2$  dodiruju izvana i kružnica  $k'$  je koncentrična s kružnicom  $k$  te kružnica  $k'_2$  koncentrična s kružnicom  $k_2$ , slijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r + m) + (r_2 - m) = r' + r'_2.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica  $k'_2$  dodiruje kružnicu  $k'$  izvana. Neka

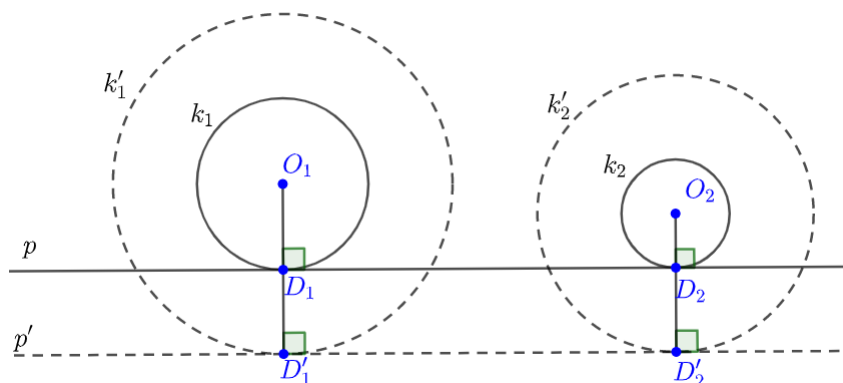


Slika 3.16.

zajednička unutarnja tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  dodiruje te kružnice redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Tada je dužina  $\overline{D_1D_2}$  okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D'_1| - |O_1D_1| = (r_1 + m) - r_1 = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D_2| - |O_2D'_2| = r_2 - (r_2 - m) = m$ . Zato je četverokut  $D'_1D_1D_2D'_2$  pravokutnik pa je pravac  $D'_1D'_2$  unutarnja zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarnjoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$

**Lema 3.6.** *Neka je  $p$  pravac i neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice koje dodiruju pravac  $p$  s iste strane. Neka je  $m > 0$  i neka su  $k'_1(O, r_1 + m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 + m)$  kružnice. Tada je vanjska tangentska udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

*Dokaz.* Pravac  $p$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , tada je pravac  $p$  zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Dužina  $\overline{D_1D_2}$  je okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Kroz točke  $D'_1$  i  $D'_2$  povučemo pravac  $p'$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D'_1| - |O_1D_1| = (r_1 + m) - r_1 = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D'_2| - |O_2D_2| = (r_2 + m) - r_2 = m$ . Zato je četverokut  $D'_1D'_2D_2D_1$  pravokutnik pa je pravac  $p'$  vanjska zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ .

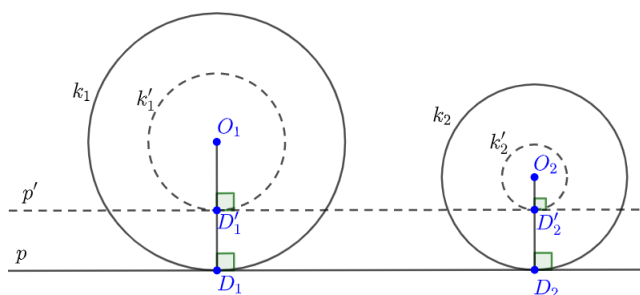


Slika 3.17.

Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$

**Lema 3.7.** *Neka je  $p$  pravac i neka su  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice koje dodiruju pravac  $p$  s iste strane. Neka je  $m \leq \min\{r_1, r_2\}$  i neka su  $k'_1(O_1, r_1 - m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 - m)$  kružnice. Tada je vanjska tangentska udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentskoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

*Dokaz.* Pravac  $p$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , tada je pravac  $p$  zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Dužina  $\overline{D_1D_2}$  je okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Kroz točke  $D'_1$  i  $D'_2$  povučemo pravac  $p'$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| =$



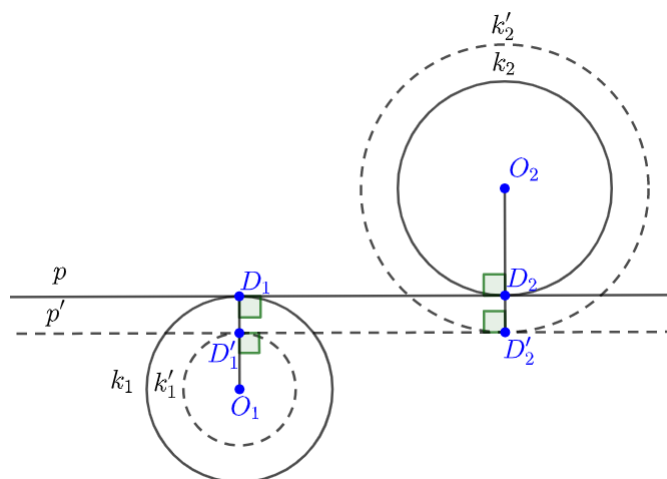
Slika 3.18.

$r_1 - (r_1 - m) = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D_2| - |O_2D'_2| = r_2 - (r_2 - m) = m$ . Zato je četverokut  $D_1D_2D'_2D'_1$  pravokutnik pa je pravac  $p'$  vanjska zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ .

Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$

**Lema 3.8.** *Neka su  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice koje dodiruju pravac  $p$  s različitih strana. Neka je  $m \leq r_1$  i neka su  $k'_1(O_1, r_1 - m)$  i  $k'_2(O_2, r_2 + m)$  kružnice. Tada je unutarnja tangentna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

*Dokaz.* Pravac  $p$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ , tada je pravac  $p$  zajednička vanjska tangenta kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Dužina  $\overline{D_1D_2}$  je okomita na  $\overline{O_1D_1}$  i na  $\overline{O_2D_2}$ . Neka polupravci  $O_1D_1$  odnosno  $O_2D_2$  sijeku  $k'_1$  i  $k'_2$  redom u točkama  $D'_1$  i  $D'_2$ . Kroz točke  $D'_1$  i  $D'_2$  povučemo pravac  $p'$ . Uočimo da je  $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| =$



Slika 3.19.

$r_1 - (r_1 - m) = m$  i  $|D_2D'_2| = |O_2D'_2| - |O_2D_2| = (r_2 + m) - r_2 = m$ . Zato je četverokut  $D'_1D'_2D_2D_1$  pravokutnik pa je pravac  $p'$  unutarnja zajednička tangenta kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ . Zbog  $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$  slijedi da je unutarnja tangentna udaljenost kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  $\square$

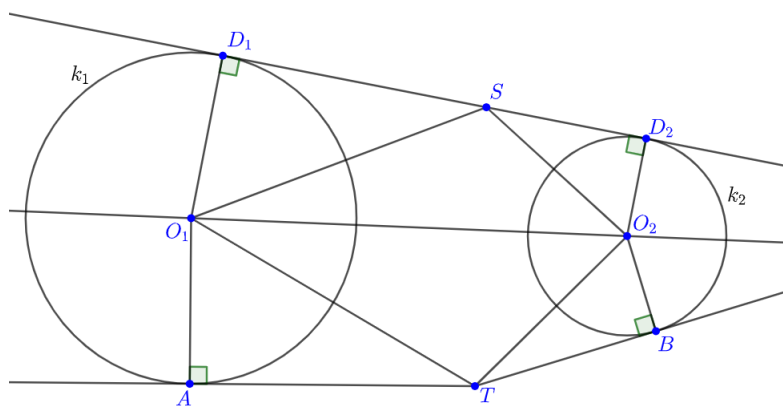
**Lema 3.9.** *Neka je  $T$  točka i neka su  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$  kružnice. Neka je  $t_{T1} + t_{T2} = t_{12}$  ili  $t_{T1} + t_{12} = t_{T2}$ , tangentna udaljenost  $t_{12}$  kružnica  $k_1$  i  $k_2$  može biti unutarnja ili vanjska. Tada točka  $T$  leži na zajedničkoj tangenti (unutarnjoj ili vanjskoj) kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .*

*Dokaz.* Ako pobliže promotrimo lemu vidimo da imamo dva slučaja:

A. vrijedi jednakost  $t_{T1} + t_{T2} = t_{12}$ ,

B. vrijedi jednakost  $t_{T_1} + t_{12} = t_{T_2}$ .

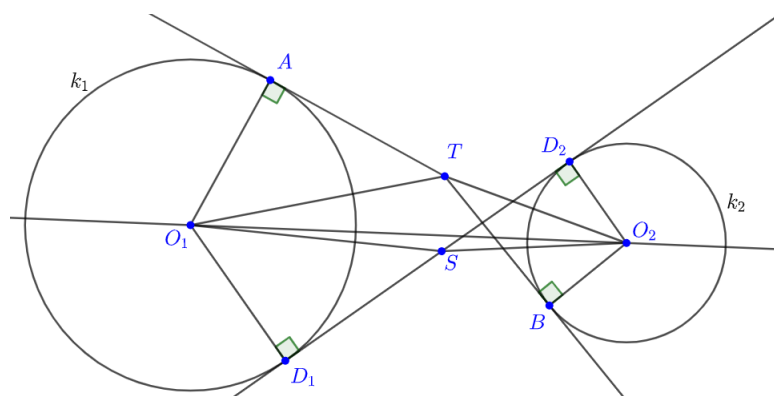
*Slučaj A.* - Neka je  $t_{T_1} + t_{T_2} = t_{12}$ , gdje je  $t_{12}$  vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  (vidi sliku 3.20.) ili  $t_{12}$  unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  (vidi sliku 3.21.),  $t_{T_1}$  tangenta udaljenost točke  $T$  i kružnice  $k_1$  i  $t_{T_2}$  tangenta udaljenost točke  $T$  i kružnice  $k_2$ . Zajednička vanjska (unutarnja) tangenta dira kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Neka su točke  $A$  i  $B$  redom dirališta tangenta iz točke  $T$  na kružnice  $k_1$  i  $k_2$ . Zbog uvjeta  $t_{T_1} + t_{T_2} = t_{12}$ , odnosno  $|TA| + |TB| = |D_1D_2|$  na dužini  $\overline{D_1D_2}$  postoji točka  $S$  takva da je  $|D_1S| = |TA|$  i  $|D_2S| = |TB|$ . Kako je



Slika 3.20.

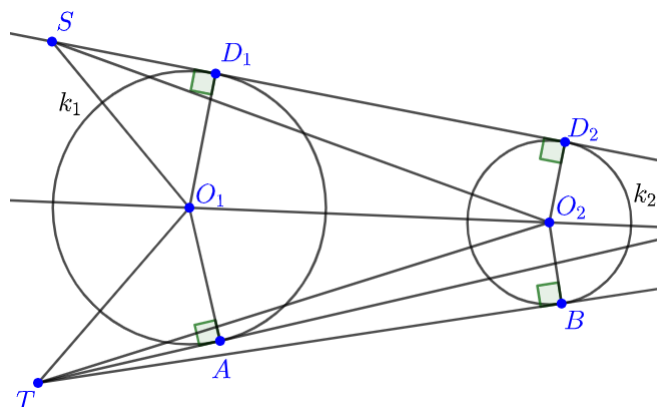
$\angle SD_1O_1 = \angle TAO_1 = 90^\circ$ ,  $|D_1O_1| = |O_1A| = r_1$  i  $|D_1S| = |TA|$  slijedi da su trokuti  $O_1AT$  i  $O_1D_1S$  sukladni po  $S - K - S$  teoremu o sukladnosti trokuta. Isto tako trokuti  $O_2BT$  i  $O_2D_2S$  su sukladni po  $S - K - S$  teoremu o sukladnosti trokuta jer je  $\angle SD_2O_2 = \angle TBO_2 = 90^\circ$ ,  $|D_2O_2| = |O_2B| = r_2$  i  $|D_2S| = |TB|$ . Iz sukladnosti trokuta  $O_1AT$  i  $O_1D_1S$  slijedi  $|O_1T| = |O_1S|$  i iz sukladnosti trokuta  $O_2BT$  i  $O_2D_2S$  slijedi  $|O_2T| = |O_2S|$ . Kako je  $\overline{O_1O_2}$  zajednička stranica trokuta  $O_1O_2S$  i  $O_1O_2T$ , te je  $|O_1T| = |O_1S|$  i  $|O_2T| = |O_2S|$  slijedi da su ti trokuti sukladni po  $S - S - S$  teoremu o sukladnosti trokuta. Ovo znači da su točke  $T$  i  $S$  osnosimetrične u odnosu na pravac  $O_1O_2$  ili se podudaraju. Kako je  $S$  na zajedničkoj vanjskoj (unutarnjoj) tangenti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , isto vrijedi i za točku  $T$ . To znači da je točka  $T$  na jednoj od dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .





Slika 3.21.

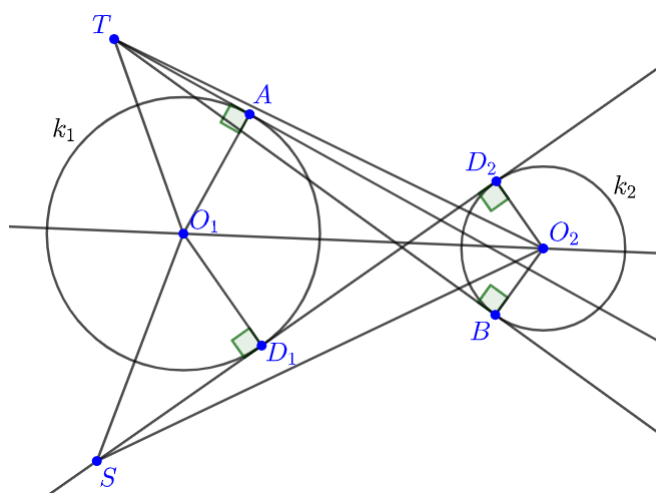
*Slučaj B.* - Neka je  $t_{T_1} + t_{12} = t_{T_2}$ , gdje je  $t_{12}$  vanjska tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  (vidi sliku 3.22.) ili  $t_{12}$  unutarnja tangenta udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$  (vidi sliku 3.23.),  $t_{T_1}$  tangenta udaljenost točke  $T$  i kružnice  $k_1$  i  $t_{T_2}$  tangenta udaljenost točke  $T$  i kružnice  $k_2$ . Zajednička vanjska (unutarnja) tangenta dira kružnice  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Neka su točke  $A$  i  $B$  redom dirališta tangenta iz točke  $T$  na kružnice  $k_1$  i  $k_2$ . Zbog uvjeta  $t_{T_1} + t_{12} = t_{T_2}$ , odnosno  $|D_1D_2| = |TB| - |TA|$  na pravcu  $D_1D_2$  postoji točka  $S$  takva da je  $|D_1S| = |TA|$  i  $|D_2S| = |TB|$ . Kako je



Slika 3.22.

$\angle SD_1O_1 = \angle TAO_1 = 90^\circ$ ,  $|D_1O_1| = |O_1A| = r_1$  i  $|D_1S| = |TA|$  slijedi da su trokuti  $O_1AT$  i  $O_1D_1S$  sukladni po  $S - K - S$  teoremu o sukladnosti trokuta. Isto tako trokuti  $O_2BT$  i  $O_2D_2S$  su sukladni po  $S - K - S$  teoremu o sukladnosti trokuta jer je  $\angle SD_2O_2 = \angle TBO_2 = 90^\circ$ ,  $|D_2O_2| = |O_2B| = r_2$  i  $|D_2S| = |TB|$ . Iz sukladnosti trokuta  $O_1AT$  i  $O_1D_1S$  slijedi  $|O_1T| = |O_1S|$  i iz sukladnosti trokuta  $O_2BT$  i  $O_2D_2S$

slijedi  $|O_2T| = |O_2S|$ . Kako je  $\overline{O_1O_2}$  zajednička stranica trokuta  $O_1O_2S$  i  $O_1O_2T$ , te je  $|O_1T| = |O_1S|$  i  $|O_2T| = |O_2S|$  slijedi da su ti trokuti sukladni po  $S - S - S$  teoremu o sukladnosti trokuta. Ovo znači da su točke  $T$  i  $S$  osnosimetrične u odnosu



Slika 3.23.

na pravac  $O_1O_2$  ili se podudaraju. Kako je  $S$  na zajedničkoj vanjskoj (unutarnjoj) tangenti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , isto vrijedi i za točku  $T$ . To znači da je točka  $T$  na jednoj od dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . □

Sada možemo dokazati obrat Caseyevog teorema. Ako kružnice  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$ ,  $k_3(O_3, r_3)$  i  $k_4(O_4, r_4)$  zadovoljavaju jednakost

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}, \quad (3.35)$$

tada želimo dokazati da one dodiruju izvana ili iznutra istu kružnicu  $k$ .

Dokaz ćemo provesti u slučaju da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Ako nisu, dokaz je moguće prilagoditi vodeći računa o tome koje su tangentne udaljenosti unutarnje, a koje vanjske. Na temelju koja je tangenta udaljenost (unutarnja ili vanjska) odredi se pomoću lema 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5 koje kružnice se istovremeno smanjuju ili povećavaju.

Dokaz sadrži nekoliko koraka. Počinjemo smanjivanjem polumjera najmanje kružnice. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to kružnica  $k_4$  i smanjimo njen polumjer na nulu, dok istodobno povećavamo ili smanjujemo svaki polumjer ostalih kružnica. Prema lemapa 3.2 i 3.3 tangentne udaljenosti neće se promijeniti (tj.

$t'_{12} = t_{12}, \dots$ ), pa vrijedi formula:

$$t'_{12} \cdot t'_{34} + t'_{23} \cdot t'_{14} = t'_{13} \cdot t'_{24}. \quad (3.36)$$

Kružnica  $k_4$  smanjenjem polumjera na nulu postaje točka  $O_4$ , a kružnice  $k_1, k_2, k_3$  postaju  $k'_1(O_1, r'_1), k'_2(O_2, r'_2), k'_3(O_3, r'_3)$ . Točka  $O_4$  uvijek se nalazi izvan ostalih kružnica.

Sada primijenimo inverziju s točkom  $O_4$  kao centrom inverzije i polumjerom inverzije  $R$ . Kružnice  $k'_1, k'_2, k'_3$  se tom inverzijom preslikaju u kružnice  $k''_1(O''_1, r''_1), k''_2(O''_1, r''_1), k''_3(O''_1, r''_1)$ . U skladu s teoremom 2.8 imamo:

$$t'_{12} = t''_{12} \sqrt{\frac{r'_1 r'_2}{r''_1 r''_2}},$$

$$t'_{23} = t''_{12} \sqrt{\frac{r'_2 r'_3}{r''_2 r''_3}},$$

$$t'_{13} = t''_{13} \sqrt{\frac{r'_1 r'_3}{r''_1 r''_3}}.$$

Isto tako iz teorema 2.7 slijedi:

$$\frac{r''_1}{r'_1} = \frac{R^2}{t'^2_{14}} \Rightarrow t'_{14} = R \sqrt{\frac{r'_1}{r''_1}},$$

$$\frac{r''_2}{r'_2} = \frac{R^2}{t'^2_{24}} \Rightarrow t'_{24} = R \sqrt{\frac{r'_2}{r''_2}},$$

$$\frac{r''_3}{r'_3} = \frac{R^2}{t'^2_{34}} \Rightarrow t'_{34} = R \sqrt{\frac{r'_3}{r''_3}}.$$

Uvrštavanjem gornjih jednakosti u (3.36):

$$t''_{12} \sqrt{\frac{r'_1 r'_2}{r''_1 r''_2}} \cdot R \sqrt{\frac{r'_3}{r''_3}} + t''_{12} \sqrt{\frac{r'_2 r'_3}{r''_2 r''_3}} \cdot R \sqrt{\frac{r'_1}{r''_1}} = t''_{13} \sqrt{\frac{r'_1 r'_3}{r''_1 r''_3}} \cdot R \sqrt{\frac{r'_2}{r''_2}},$$

odnosno:

$$t''_{12} \cdot R \sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}} + t''_{23} \cdot R \sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}} = t''_{31} \cdot R \sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}}.$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{r_1'' r_2'' r_3''}{r_1' r_2' r_3'}}$$

te dobivamo:

$$t_{12}'' + t_{23}'' = t_{31}'' \quad (3.37)$$

Sve tri tangente udaljenosti su vanjske tangente udaljenosti jer smo na početku rekli da ćemo promatrati kada su sve tangentne udaljenosti vanjske.

Sada smanjimo najmanju od kružnica  $k_1''$ ,  $k_2''$ ,  $k_3''$  do točke, a ostalima smanjimo polumjer. Prema lemi 3.7 tangentne udaljenosti neće se promijeniti (tj.  $t_{12}''' = t_{12}''$ , ...).

Promotrimo kako će jednakost (3.37) glasiti ako je:

A. kružnica  $k_1''$  najmanja,

B. kružnica  $k_2''$  najmanja,

C. kružnica  $k_3''$  najmanja.

*Slučaj A.*-Ako kružnicu  $k_1''$  smanjimo do točke  $O_1''$  kružnice  $k_2''$ ,  $k_3''$  postaju redom kružnice  $k_2'''(O_2'', r_2''')$ ,  $k_3'''(O_3'', r_3''')$ . Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{O_1''2}''' + t_{23}''' = t_{O_1''3}''' \quad (3.38)$$

Tangentna udaljenost  $t_{23}'''$  kružnica  $k_2'''$  i  $k_3'''$  je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka  $O_1''$  nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti  $t'''$  kružnica  $k_2'''$  i  $k_3'''$ , odnosno kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$  i  $k_3''$  dodiruju isti pravac.

*Slučaj B.*-Ako kružnicu  $k_2''$  smanjimo do točke  $O_2''$  kružnice  $k_1''$ ,  $k_3''$  postaju redom kružnice  $k_1'''(O_1'', r_1''')$ ,  $k_3'''(O_3'', r_3''')$ . Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{1O_2''}''' + t_{O_2''3}''' = t_{31}''' \quad (3.39)$$

Tangentna udaljenost  $t_{31}'''$  kružnica  $k_1'''$  i  $k_3'''$  je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka  $O_2''$  nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti  $t'''$  kružnica  $k_1'''$  i  $k_3'''$ , odnosno kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$  i  $k_3''$  dodiruju isti pravac.

*Slučaj C.*-Ako kružnicu  $k_3''$  smanjimo do točke  $O_3''$  kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$  postaju redom kružnice  $k_1'''(O_1'', r_1''')$ ,  $k_2'''(O_2'', r_2''')$ . Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{12}''' + t_{2O_3''}''' = t_{1O_3''}''' \quad (3.40)$$

Tangentna udaljenost  $t_{12}'''$  kružnica  $k_1'''$  i  $k_2'''$  je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka  $O_2''$  nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti  $t'''$  kružnica  $k_1'''$  i  $k_3'''$ , odnosno kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$  i  $k_3''$  dodiruju isti pravac.

Ovime smo pokazali da kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$ ,  $k_3''$  dodiruju isti pravac.

Primijenimo inverziju s točkom  $O_4$  kao centrom inverzije i polumjerom inverzije  $R$ , kružnice  $k_1''$ ,  $k_2''$  i  $k_3''$  se preslikaju redom u kružnice  $k_1'$ ,  $k_2'$  i  $k_3'$ , a pravac  $t'''$  u kružnicu  $k'$  koja prolazi točkom  $O_4$  i sve kružnice  $k_1'$ ,  $k_2'$  i  $k_3'$  dodiruje istodobno izvana ili iznutra.

Sada istodobno povećavamo ili smanjujemo polumjere kružnica  $k'$ ,  $k_1'$ ,  $k_2'$ ,  $k_3'$  i točke  $O_4$  one će redom postati kružnice  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$ , a prema lemapa 3.2 i 3.3 tangentne udaljenosti neće se promijeniti.

Drugim riječima ako vrijedi jednakost (3.35) tada kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  dodiruju kružnicu  $k$ .  $\square$

Vidjeli smo da vrijede oba smjera Caseyevog teorema s početka poglavlja. Konačno nakon shvaćanja koje tangentne udaljenosti kada koristimo i kako glasi Caseyev teorem u kojem slučaju (vidi sliku 3.7. i teorem 3.2) možemo razumijeti Caseyev teorem u potpunosti bez ikakvih nejasnoća.

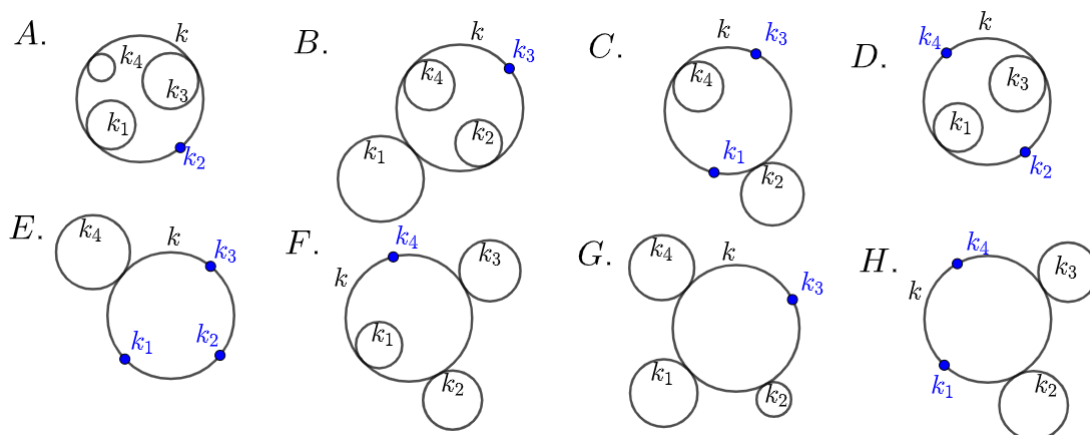
### 3.3 Specijalni slučajevi Caseyevog teorema

Kako je točka degenerirani slučaj kružnice, odnosno točka je kružnica polumjera nula, možemo se pitati vrijedi li Caseyev teorem za slučajeve kada neka od kružnica  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  ima polumjer nula. Na slici 3.24. su prikazani neki od specijalnih slučajeva Caseyevog teorema. Kao pomoć pri dokazivanju specijalnih slučajeva Caseyevog teorema koristit ćemo sljedeći korolar.

**Korolar 3.1.** *Neka kružnica  $k_1(O_1, r_1)$  dodiruje kružnicu  $k(O, R)$  i točka  $P \in k$ . Tangentna udaljenost kružnice  $k_1$  i točke  $P$  dana je izrazom:*

A.

$$t_{1P} = \frac{|P_1P|}{R} \sqrt{R(R - r_1)}, \quad (3.41)$$



Slika 3.24.: Specijalni slučajevi Caseyevog teorema

ako kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  iznutra,

B.

$$B. \quad t_{1P} = \frac{|P_1P|}{R} \sqrt{R(R+r_1)}, \quad (3.42)$$

ako kružnica  $k_1$  dodiruje kružnicu  $k$  izvana.

*Dokaz.* Dokaz korolara 3.1 slijedi direktno ako za slučajeve A. i B. iz teorema 3.1 uvrstimo  $r_2 = 0$ .  $\square$

Na slici 3.25. prikazan je specijalan slučaj Caseyevog teorema u kojem je kružnica  $k_4$  polumjera nula, odnosno ona je postala točka koju smo označili s  $P_4$ .

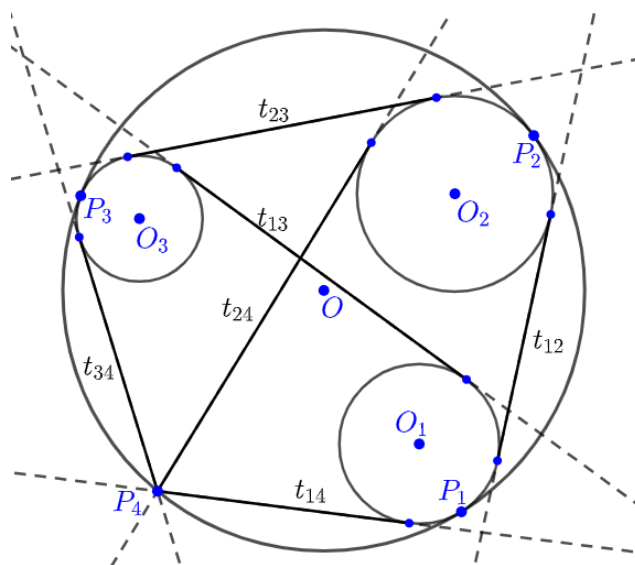
*Dokaz.* Neka su  $P_1, P_2, P_3$  redom dirališta kružnica  $k_1, k_2, k_3$  s kružnicom  $k$ . Na tetivni četverokut  $P_1P_2P_3P_4$  primijenimo Ptolomejev teorema 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \quad (3.43)$$

Kružnice  $k_i, i = 1, 2, 3$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra, primijenimo jednakost (3.15) iz teorema 3.1:

$$|P_1P_2| = \frac{t_{12} \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23} \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}},$$



Slika 3.25.: Caseyev teorem

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)(R - r_3)}}.$$

Kako je točka  $P_4$  kružnica polumjera nula primijenimo jednakost (3.41) iz korolara 3.1 slijedi:

$$|P_1P_4| = \frac{t_{14} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)R}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)R}},$$

$$|P_3P_4| = \frac{t_{34} \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)R}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.43) slijedi:

$$\begin{aligned} & \frac{t_{12} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}} \cdot \frac{t_{34} \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)R}} + \frac{t_{23} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)(R - r_3)}} \cdot \frac{t_{14} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)R}} \\ &= \frac{t_{13} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)(R - r_3)}} \cdot \frac{t_{24} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)R}} \end{aligned}$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R - r_1) \cdot (R - r_2) \cdot (R - r_3) \cdot R}$$

te dobivamo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24},$$

odnosno:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = 0.$$

To je zapravo jednakost iz Caseyevog teorema. Na sličan način se dokazuju ostali specijalni slučajevi Caseyevog teorema.  $\square$



# Poglavlje 4

## Primjena Caseyevog teorema

### 4.1 Feuerbachov teorem

Feuerbachova kružnica ili kružnica devet točaka, ponekad se još naziva Eulerova kružnica, prolazi kroz tri nožišta visina u trokutu, tri polovišta stranica i polovišta triju dužina koje spajaju vrh s ortocentrom.

**Teorem 4.1. (*Feuerbachov teorem*)** *Kružnica devet točaka dira upisanu i sve tri pripisane kružnice danog trokuta. Pri tome upisana kružnica dira kružnicu devet točaka iznutra, dok je pripisane kružnice diraju izvana.*

Kako bismo dokazali Feuerbachov teorem potrebni su nam sljedeći teoremi.

**Teorem 4.2.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $k$  upisana kružnica tog trokuta. Kružnica  $k$  dodiruje stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $P$ ,  $Q$  i  $R$  i neka je  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Tada vrijedi:*

$$|CP| = |CQ| = s - c,$$

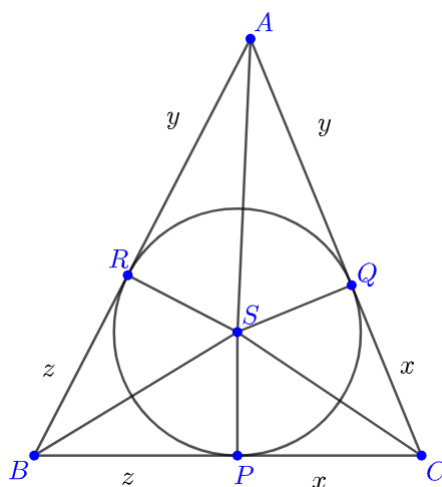
$$|BP| = |BR| = s - b,$$

$$|AR| = |AQ| = s - a.$$

*Dokaz.* Neka je  $S$  središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ . Iz sukladnosti trokuta  $SPC$  i  $SQC$  slijedi da je  $|CP| = |CQ|$ , iz sukladnosti trokuta  $ASR$  i  $ASQ$  slijedi da je  $|AR| = |AQ|$  i iz sukladnosti trokuta  $BRS$  i  $BPS$  slijedi da je  $|BP| = |BR|$ . Označimo:

$$x = |CP| = |CQ|,$$

$$y = |AR| = |AQ|,$$



Slika 4.1.

$$z = |BP| = |BR|.$$

Sada je  $s = x + y + z$  i  $a = x + z$ ,  $b = x + y$ ,  $c = y + z$ . Dakle,

$$|CP| = |CQ| = x = (x + y + z) - (y + z) = s - c,$$

$$|BP| = |BR| = y = (x + y + z) - (x + z) = s - b,$$

$$|AR| = |AQ| = z = (x + y + z) - (x + y) = s - a.$$

□

**Teorem 4.3.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $k$  pripisana kružnica trokuta  $ABC$  nasuprot vrha  $A$ . Kružnica  $k$  dodiruje stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $P_a$  i pravce na kojima leže stranice  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $Q_a$  i  $R_a$ . Tada vrijedi:*

$$|BP_a| = s - c,$$

$$|CP_a| = s - b.$$

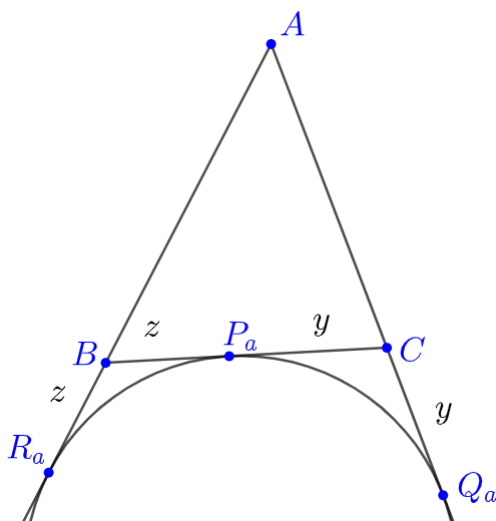
*Dokaz.* Označimo:

$$x = |AR_a| = |AQ_a|,$$

$$y = |CQ_a| = |CP_a|,$$

$$z = |BP_a| = |BR_a|.$$

Sada je:



Slika 4.2.

$$b = |AC| = |AQ_a| - |Q_aC| = x - y,$$

$$c = |AB| = |AR_a| - |R_aB| = x - z,$$

$$a = |BC| = |BP_a| + |P_aC| = y + z.$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobijemo  $2x = a + b + c$  tj.  $x = s$ . Sada imamo  $y = x - b = s - b$ , tada je

$$|CQ_a| = |CP_a| = s - b$$

i  $z = x - c = s - c$  pa je

$$|BP_a| = |BR_a| = s - c.$$

□

Na analogni način se pokaže da vrijedi:

$$|BP_c| = |BR_c| = s - a,$$

$$|AR_c| = |AQ_c| = s - b,$$

$$|CP_b| = |CQ_b| = s - a,$$

$$|AR_b| = |AQ_b| = s - c.$$

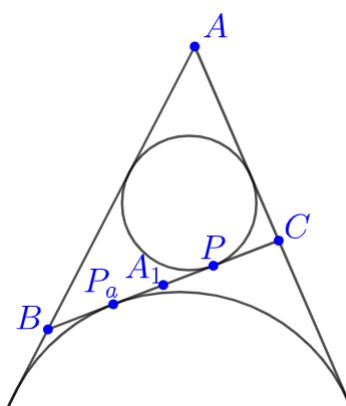
**Teorem 4.4.** Neka je  $ABC$  trokut i  $A_1$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , točka  $P$  je diralište stranice  $\overline{BC}$  i trokutu upisane kružnice i točka  $P_a$  je diralište stranice  $\overline{BC}$  i trokutu pripisane kružnice. Tada vrijedi:

$$|A_1P| = |A_1P_a|.$$

*Dokaz.* Imamo:

$$|BP| = s - b \text{ prema teoremu 4.2,}$$

$$|CP_a| = s - b \text{ prema teoremu 4.3.}$$



Slika 4.3.

Neka je  $|AB| > |AC|$  to jest  $c > b$ .  $A_1$  je polovište stranice  $\overline{BC}$  i vrijedi  $|BA_1| = |A_1C| = \frac{a}{2}$ . Slijedi:

$$|A_1P| = |BP| - |BA_1| = (s - b) - \frac{a}{2} = \frac{c - b}{2},$$

$$|A_1P_a| = |CP_a| - |A_1C| = (s - b) - \frac{a}{2} = \frac{c - b}{2}.$$

Ovime je teorem dokazan. □

Na analogni način se pokaže da vrijedi  $|B_1Q| = |B_1Q_b|$  i  $|C_1R| = |C_1R_c|$ .

**Napomena 4.1.** Iz teorema 4.4 uz pretpostavku  $c > b$  slijedi:

$$|PP_a| = c - b.$$

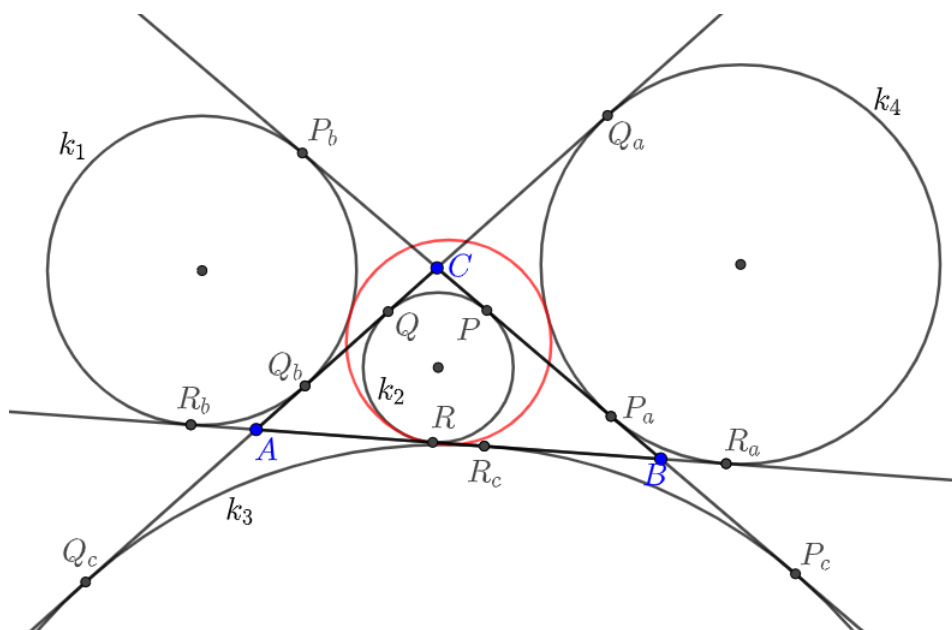
Pokažimo da je udaljenost  $|P_bP_c| = b + c$ . Sa slike 4.4. vidimo da je  $|P_bP_c| = |P_bC| + |BC| + |BP_c|$ . Iz teorema 4.3 slijedi  $|P_bC| = s - a$  i  $|BP_c| = s - a$ . Konačno je  $|P_bP_c| = (s - a) + a + (s - a) = b + c$ .

Na sličan način se pokaže da je  $|Q_aQ_c| = a + c$  i  $|R_aR_b| = a + b$ .

Primjenjujući prethodno izrečeno dokazat ćemo Feuerbauchov teorem.

*Dokaz.* Za dokaz ćemo iskoristiti obrat Caseyevog teorema 3.3. Ako pripisane kružnice i upisana kružnica trokuta zadovoljavaju jednakost (3.33) tada one diraju kružnicu devet točaka. Pretpostavimo da je kao na slici 4.4. stranica  $\overline{AB}$  najdulja, a stranica  $AC$  najkraća stranica trokuta  $ABC$  to jest  $b < a < c$ .

Neka je  $k_2$  upisana kružnica trokuta  $ABC$ , a kružnice  $k_1, k_3$  i  $k_4$  su pripisane kružnice trokuta  $ABC$ . Očekujemo da upisana kružnica dira kružnicu devet točaka iznutra, a pripisane kružnice diraju izvana. Zato odredimo vanjske tangentne udaljenosti između pripisanih kružnica i unutarnju tangentnu udaljenost između upisane kružnice i pripisanih kružnica. Sada koristeći teoreme 4.2, 4.3 i 4.4 i sliku 4.4. odredimo tan-



Slika 4.4.

gentnu udaljenost kružnica  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$ .

$$t_{12}^u = |QQ_b| = c - a$$

$$t_{34}^v = |Q_aQ_c| = a + c$$

$$t_{23}^u = |RR_c| = a - b$$

$$t_{14}^v = |R_aR_b| = a + b$$

$$t_{13}^v = |P_bP_c| = b + c$$

$$t_{24}^u = |PP_a| = c - b$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.33) imamo:

$$\begin{aligned} t_{12}^u \cdot t_{34}^v + t_{23}^u \cdot t_{14}^v &= (a - c) \cdot (a + c) + (b - a) \cdot (a + b) \\ &= a^2 - c^2 + b^2 - a^2 \\ &= b^2 - c^2 \\ &= (b + c) \cdot (b - c) \\ &= t_{13}^v \cdot t_{24}^u. \end{aligned}$$

Vidimo da jednakost (3.33) vrijedi. Po Caseyevom teoremu zaključujemo da pripisane kružnice trokuta i upisana kružnica dodiruju kružnicu devet točaka.  $\square$

## 4.2 Sangaku problem

**Primjer 1. (*Sangaku problem*)** Neka kružnica  $k(O, r)$  leži unutar kvadrata i neka su  $k_i(O_i, r_i)$   $i = 1, 2, 3, 4$  kružnice koje dodiruju kružnicu  $k$  izvana i dodiruju po dvije stranice kvadrata. Odredite duljinu stranice kvadrata u ovisnosti o  $r_1, r_2, r_3, r_4$ .

*Rješenje.* Označimo s  $L$  duljinu stranice kvadrata. Postavimo kvadrat u koordinatni sustav tako da donji lijevi vrh ima koordinate  $(0, 0)$ , a gornji desni vrh ima koordinate  $(L, L)$ .

Koordinate središta kružnica su:  $O(x, y)$ ,  $O_1(r_1, r_1)$ ,  $O_2(L - r_2, r_2)$ ,  $O_3(L - r_3, L - r_3)$  i  $O_4(r_4, L - r_4)$ . Tangentne udaljenosti  $t_{12}$ ,  $t_{23}$ ,  $t_{34}$  i  $t_{14}$  možemo odrediti sa slike 4.5.:

$$t_{12} = L - r_1 - r_2,$$

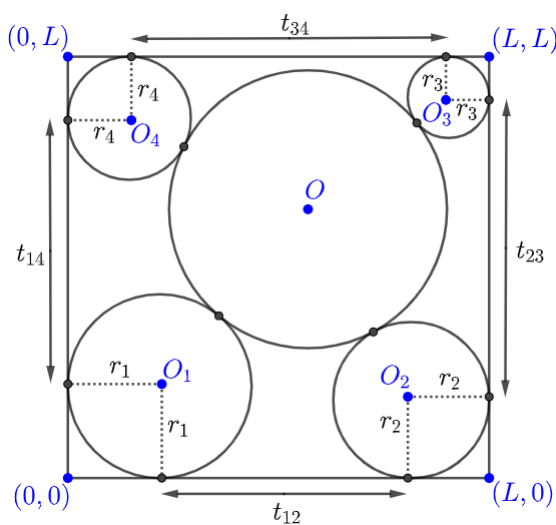
$$t_{23} = L - r_2 - r_3,$$

$$t_{34} = L - r_3 - r_4,$$

$$t_{14} = L - r_1 - r_4.$$

Preostaje nam još odrediti tangentne udaljenosti  $t_{13}$  i  $t_{24}$ . Prvo odredimo udaljenosti  $|O_1O_3|$  i  $|O_2O_4|$ . Udaljenost središta  $O_1$  i  $O_3$  je:

$$|O_1O_3|^2 = (L - r_1 - r_3)^2 + (L - r_1 - r_3)^2 = 2(L - r_1 - r_3)^2,$$



Slika 4.5.: Sangaku problem

a udaljenost središta  $O_2$  i  $O_4$  je:

$$|O_2O_4|^2 = (L - r_2 - r_4)^2 + (L - r_2 - r_4)^2 = 2(L - r_2 - r_4)^2.$$

Primijenimo jednakost (3.2) da dobijemo tangentne udaljenosti  $t_{13}$  i  $t_{24}$ :

$$t_{13} = \sqrt{2(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2},$$

$$t_{24} = \sqrt{2(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Sada imamo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = (L - r_1 - r_2) \cdot (L - r_3 - r_4) + (L - r_2 - r_3) \cdot (L - r_1 - r_4),$$

$$t_{13} \cdot t_{24} = \sqrt{2(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \cdot \sqrt{2(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Sada primijenimo Caseyev teorem na kružnice  $k_1, k_2, k_3, k_4$  i njihove tangentne udaljenosti  $t_{12}, t_{23}, t_{34}, t_{14}, t_{13}$  i  $t_{24}$ :

$$\begin{aligned} & (L - r_1 - r_2) \cdot (L - r_3 - r_4) + (L - r_2 - r_3) \cdot (L - r_1 - r_4) \\ &= \sqrt{2(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \cdot \sqrt{2(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}. \end{aligned}$$

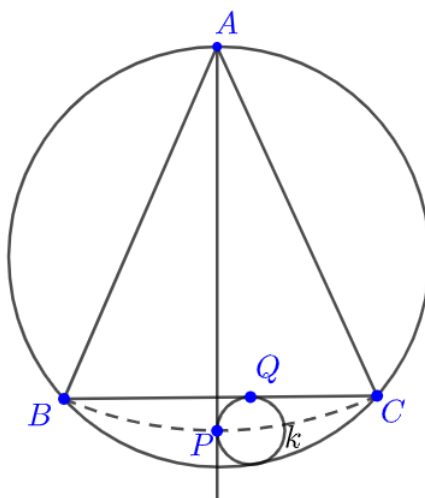
Nakon rješavanja gornje jednakosti po  $L$  dobije se:

$$L = \frac{2(r_1r_3 - r_2r_4) + \sqrt{2(r_1 - r_2)(r_1 - r_4)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4}.$$

### 4.3 Zadaci

**Primjer 2.** Neka je  $ABC$  jednakokravan trokut s krakovima  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ . Kružnica  $k$  dodiruje stranicu  $\overline{BC}$  i luk  $BC$  trokutu  $ABC$  opisane kružnice. Tangenta iz točke  $A$  dodiruje kružnicu  $k$  u točki  $P$ . Opišite geometrijsko mjesto točaka  $P$ .

*Rješenje.* Označimo  $|AB| = |AC| = l$ . Točke  $A, B, C$  shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula. Kružnice  $A, B, C, k$  dodiruju iznutra opisanu kružnicu trokuta  $ABC$ . Neka kružnica  $k$  dodiruje  $\overline{BC}$  u točki  $Q$ . Primijenimo sada Caseyev teorem



Slika 4.6.: Primjer 2.

na kružnice  $A, B, k$  i  $C$ :

$$t_{AB} \cdot t_{kC} + t_{Bk} \cdot t_{AC} = t_{Ak} \cdot t_{BC},$$

$$l \cdot |CQ| + l \cdot |BQ| = |AP| \cdot |BC|.$$

Stoga imamo:

$$|AP| = \frac{l \cdot (|BQ| + |CQ|)}{|BC|},$$

a kako je  $|BQ| + |CQ| = |BC| = l$  slijedi:

$$|AP| = \frac{l \cdot |BC|}{|BC|} = l.$$

Duljina  $|AP|$  je konstantna, dakle geometrijsko mjesto svih točaka  $P$  je dio kružnice sa središtem u točki  $A$  i polumjera  $|AB| = |AC| = l$  između točaka  $B$  i  $C$ .

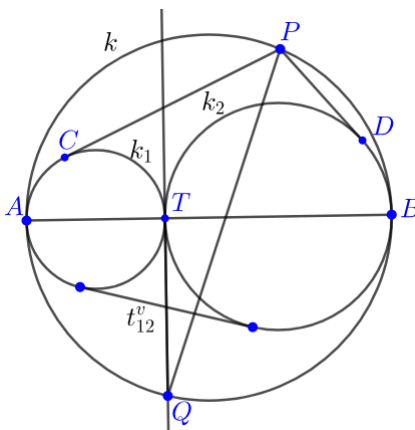


**Primjer 3.** Neka je  $k$  kružnica promjera  $\overline{AB}$ .  $P$  i  $Q$  su točke na kružnici  $k$  i nalaze se s različitih strana  $\overline{AB}$ . Točka  $T$  je ortogonalna projekcija točke  $Q$  na  $\overline{AB}$ . Neka su  $k_1$  i  $k_2$  kružnice s promjerima  $\overline{TA}$  i  $\overline{TB}$ . Neka su točke  $C$  i  $D$  redom dirališta tangenti na kružnice  $k_1$  i  $k_2$  iz točke  $P$ . Pokažite da vrijedi:

$$|PC| + |PD| = |PQ|.$$

*Rješenje.* Neka je  $t_{12}^v$  vanjska tangentna udaljenost kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Odmah vidimo da je  $|PC| = t_{P1}$  tangentna udaljenost kružnice  $k_1$  i točke  $P$  i  $|PD| = t_{P2}$  tangentna udaljenost kružnice  $k_2$  i točke  $P$ . Točke  $P$  i  $Q$  shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula.

Kružnice  $P$ ,  $Q$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  dodiruju kružnicu  $k$  iznutra. Primijenimo Caseyev teorem na



Slika 4.7.: Primjer 3.

kružnice  $k_1$ ,  $P$ ,  $k_2$  i  $Q$ :

$$\begin{aligned} t_{P1} \cdot t_{Q2} + t_{P2} \cdot t_{Q1} &= t_{12}^v \cdot |PQ|, \\ |PC| \cdot |QT| + |PD| \cdot |QT| &= t_{12}^v \cdot |PQ|, \\ |QT| \cdot (|PC| + |PD|) &= t_{12}^v \cdot |PQ|, \\ |PC| + |PD| &= |PQ| \cdot \frac{t_{12}^v}{|QT|}. \end{aligned}$$

Sada prepoznamo da udaljenost dirališta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  s kružnicom  $k$  iznosi  $|AB|$ ,

$R = \frac{|AB|}{2}$ ,  $r_1 = \frac{|TA|}{2}$  i  $r_2 = \frac{|TB|}{2}$ , pa jednakost (3.15) iz teorema 3.1 postaje:

$$\begin{aligned} t_{12}^v &= \frac{|AB|}{\frac{|AB|}{2}} \sqrt{\left(\frac{|AB|}{2} - \frac{|TA|}{2}\right) \left(\frac{|AB|}{2} - \frac{|TB|}{2}\right)} \\ &= 2 \sqrt{\frac{|AB| - |TA|}{2} \cdot \frac{|AB| - |TB|}{2}} \\ &= \sqrt{|TB| \cdot |TA|}. \end{aligned}$$

Primijenimo Euklidov teorem na trokut  $ABQ$ , tada imamo:

$$\sqrt{|TB| \cdot |TA|} = |QT|,$$

odnosno  $t_{12}^v = |QT|$ .

Konačno  $|PC| + |PD| = |PQ|$ .

**Primjer 4.** U trokutu  $ABC$  kružnice  $k_A$ ,  $k_B$  i  $k_C$  redom dodiruju stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  u njihovim polovištima, te dodiruju lukove  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CA}$ ,  $\widehat{AB}$  opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Ako  $t_{BC}$ ,  $t_{CA}$  i  $t_{AB}$  redom predstavljaju tangente udaljenosti parova kružnica  $(k_B, k_C)$ ,  $(k_C, k_A)$  i  $(k_A, k_B)$ , pokažite da vrijedi:

$$t_{BC} = t_{CA} = t_{AB} = \frac{1}{4}(a + b + c),$$

pri čemu je  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  i  $c = |AB|$ .

*Rješenje.* Neka su redom  $t_A$ ,  $t_B$ ,  $t_C$  tangente udaljenosti točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i kružnica  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $k_C$ . Točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula.

Neka su  $D$ ,  $E$ ,  $F$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ . Kružnice  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $k_B$  dodiruju opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  iznutra. Primijenimo Caseyev teorem na kružnice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $k_B$ :

$$t(A, B) \cdot t(C, k_B) + t(A, k_B) \cdot t(B, C) = t(A, C) \cdot t(B, k_B),$$

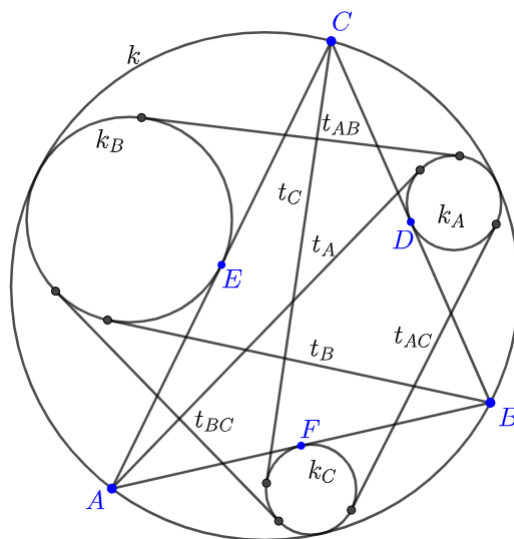
$$|AB| \cdot |CE| + |AE| \cdot |BC| = |AC| \cdot t_B.$$

Kako je  $|AE| = |CE| = \frac{1}{2}|AC|$  slijedi:

$$t_B = \frac{1}{2}(a + c).$$

Sada primijenimo Caseyev teorem na kružnice  $A$ ,  $k_C$ ,  $B$  i  $C$ :

$$t(A, k_C) \cdot t(B, C) + t(A, C) \cdot t(k_C, B) = t(A, B) \cdot t(k_C, C),$$



Slika 4.8.: Primjer 4.

$$|AF| \cdot |BC| + |AC| \cdot |BF| = |AB| \cdot t_C.$$

Kako je  $|AF| = |BF| = \frac{1}{2}|AB|$  slijedi:

$$t_C = \frac{1}{2}(a + b).$$

Ponovo primijenimo Caseyev teorem na kružnice  $B$ ,  $C$ ,  $k_B$  i  $k_C$ , tada imamo:

$$t(B, C) \cdot t(k_B, k_C) + t(B, k_C) \cdot t(C, k_B) = t(B, k_B) \cdot t(C, k_C),$$

$$|BC| \cdot t_{BC} + |BF| \cdot |CE| = t_B \cdot t_C.$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} t_{BC} &= \frac{t_B \cdot t_C - |BF| \cdot |CE|}{|BC|} \\ &= \frac{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{b}{2}}{a} \\ &= \frac{(a+c)(a+b) - bc}{4a} \\ &= \frac{1}{4}(a + b + c) \end{aligned}$$

Na analogni način se pokaže da vrijedi:

$$t_{CA} = t_{AB} = \frac{1}{4}(a + b + c).$$

**Primjer 5.** Neka je  $ABC$  trokut takav da je  $|AC| > |AB|$ . Kružnica  $k_A(O, r_A)$  dodiruje iznutra opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  i dodiruje stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ . Neka je točka  $S$  polovište luka  $\widehat{BC}$  koji ne sadrži točku  $A$ . Točka  $T$  je diralište kružnice  $k_A$  i tangente na kružnicu  $k_A$  iz točke  $S$ . Pokažite da vrijedi:

$$\frac{|ST|}{|SA|} = \frac{|AC| - |AB|}{|AC| + |AB|}.$$

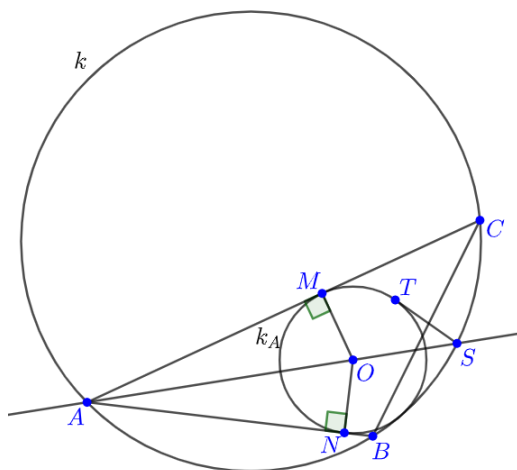
*Rješenje.* Neka su točke  $M, N$  redom dirališta kružnice  $k_A(O, r_A)$  i stranica  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Točke  $B, C$  i  $S$  shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula. Primjenom Caseyevog teorema na kružnice  $k_A, B, C, S$  imamo:

$$|BN| \cdot |CS| + |ST| \cdot |BC| = |CM| \cdot |BS|.$$

Kako je  $|BS| = |CS|$  iz gornje jedankosti slijedi:

$$|ST| \cdot |BC| = |CS| (|CM| - |BN|). \quad (4.1)$$

Kako je  $|OM| = |ON| = r_A$ ,  $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$  i  $\overline{OA}$  zajednička stranica



Slika 4.9.: Primjer 5.

trokuta  $OMA$  i  $ONA$ , slijedi da su ti trokuti sukladni po  $S - S - K^>$  teoremu o sukladnosti. Odnosno  $|AM| = |AN|$ . Sada imamo:

$$|CM| - |BN| = (|AC| - |AM|) - (|AB| - |AN|) = |AC| - |AB|.$$

Stoga je jednakost (4.1):

$$|ST| \cdot |BC| = |CS| (|AC| - |AB|). \quad (4.2)$$

Primijenimo sada Ptolomejev teorem na četverokut  $ABSC$ , te tada imamo:

$$\begin{aligned} |SA| \cdot |BC| &= |SC| \cdot |AB| + |SC| \cdot |AC| \\ &= |SC| (|AB| + |AC|). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Djeljenjem jednakosti (4.2) i (4.3) dobije se:

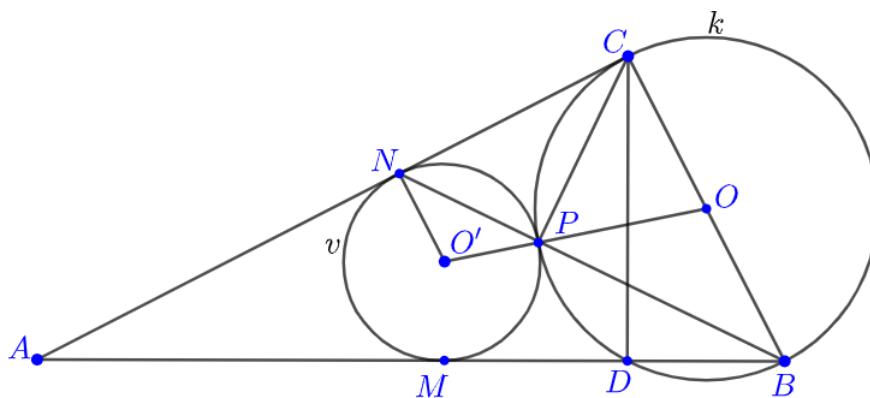
$$\frac{|ST|}{|SA|} = \frac{|AC| - |AB|}{|AC| + |AB|}.$$

**Primjer 6.** (2009., China, Hong Kong, Math Olympiad) Neka je  $ABC$  pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha  $C$ ,  $\overline{CD}$  je visina iz vrha  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Kružnica  $k$  je opisana trokutu  $BCD$ , a kružnica  $v$  je smještena u trokut  $ACD$  tako da dodiruje stranice  $\overline{AD}$  i  $\overline{AC}$  redom u točkama  $M$  i  $N$ . Kružnice  $k$  i  $v$  dodiruju se u točki  $P$ . Pokažite da vrijedi:

a)  $|BD| \cdot |CN| + |BC| \cdot |DM| = |CD| \cdot |BM|$

b)  $|BM| = |DC|$ .

Rješenje.



Slika 4.10.: Primjer 6.

- a) Točke  $B$ ,  $C$  i  $D$  shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula. Primijenimo Caseyev teorem na kružnice  $D$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $v$  iz čega domah slijedi jednakost:

$$\begin{aligned} t_{DB} \cdot t_{Cv} + t_{Dv} \cdot t_{BC} &= t_{DC} \cdot t_{Bv}, \\ |BD| \cdot |CN| + |BC| \cdot |DM| &= |CD| \cdot |BM|. \end{aligned}$$

- b) Kružnice  $k$  i  $v$  se dodiruju u točki  $P$ . Po Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice slijedi  $\angle BPC = 90^\circ$ . Neka je  $O$  središte kružnice  $k$  i  $O'$  središte kružnice  $v$ . Slijedi da su točke  $O, P, O'$  kolinearne. Kut između tangente i tetive jednak je polovicu središnjeg kuta nad tom tetivom, odnosno  $\angle PNC = \frac{1}{2}\angle PO'N$  i  $\angle PCN = \frac{1}{2}\angle POC$ .  
Iz četverokuta  $OO'NC$  slijedi:

$$360^\circ = \angle PO'N + \angle POC + \angle OCN + \angle O'NC,$$

kako su kutovi  $\angle OCN$  i  $\angle O'NC$  pravi:

$$180^\circ = \angle PO'N + \angle POC.$$

Dakle,

$$\angle PNC + \angle PCN = \frac{1}{2}(\angle PO'N + \angle POC) = 90^\circ.$$

Promotrimo sada trokut  $NPC$ , kako je  $\angle PNC + \angle PCN = 90^\circ$  slijedi da je  $\angle NPC = 90^\circ$ . Stoga su točke  $B, P, N$  kolinearne. Primjenom teorema o potenciji točke na točku  $B$  i kružnicu  $v$  slijedi  $|BM|^2 = |BP| \cdot |BN|$ . Kako je  $\angle BCN = 90^\circ$  i  $CP \perp BN$  primijenimo Euklidov teorem na trokut  $NBC$  što povlači da je  $|BC|^2 = |BP| \cdot |BN|$ . Konačno

$$|BM| = |BC|.$$

# Bibliografija

- [1] R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960.
- [2] MacTutor History of Mathematics, John Casey, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Casey.html>
- [3] S. Shirali, On The Generalized Ptolemy Theorem, Rishi Valley. <https://cms.math.ca/crux/v22/n2/page49-53.pdf>
- [4] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, Zagreb, 2007.
- [5] L. Gonzalez, Casey's Theorem and its Applications, Maracaibo, Venezuela, July 2011, [http://geometry.ru/articles/Luis\\_Casey.pdf](http://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf)
- [6] The Irish Mathematical Olympiad, Feuerbach's Theorem, <http://www.irmo.ie/4.Feuerbach.pdf>
- [7] Wikipedia, Casey's theorem, [https://en.wikipedia.org/wiki/Casey%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Casey%27s_theorem)
- [8] Scientific American, Japanese Temple Geometry, May 1998, <http://www.cipriancoman.net/~ciprianc/VAR/sangaku.pdf>
- [9] Mathematical Excalibur, Vol. 16, No. 5, Mar.-Apr. 12, [https://www.math.ust.hk/excalibur/v16\\_n5.pdf](https://www.math.ust.hk/excalibur/v16_n5.pdf)
- [10] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se Caseyevim teoremom. U prvom poglavlju iskazujemo i dokazujemo Ptolomejev teorem kako bismo pobliže razumjeli Caseyev teorem, te definiramo osnovne pojmove koje koristimo kroz rad. U drugom poglavlju pažnju posvećujemo inverziji koja se koristi u dokazivanju Caseyevog teorema. U trećem poglavlju iskazujemo i dokazujemo Caseyev teorem na nekoliko načina i dokazujemo specijalne slučajeve Caseyevog teorema. Sami kraj rada posvećen je primjeni Caseyevog teorema u dokazivanju drugih teorema i u rješavanju geometrijskih zadataka.



# Summary

In this graduate thesis we are dealing with Casey's theorem. In the first chapter, we formulate and prove Ptolemy's theorem to better understand Casey's theorem, and define the basic terms we use through graduate thesis. In the second chapter, we dedicate to the inversion used to prove Casey's theorem. In the third chapter, we phrase and prove Casey's theorem in several ways and prove the special cases of Casey's theorem. The end of the graduate thesis is dedicated to the application of Casey's theorem in proving other theorems and in solving geometric problems.

# Životopis

Moje ime je Adam Naglaš. Rođen sam 24. 6. 1994. godine u Varaždinu. Odrastao sam živeći u Lepoglavi s obitelji. 2001. godine krenuo sam u Osnovnu školu Ante Starčevića u Lepoglavi te 2009. godine istu i završio. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavio u Elektrostrojarskoj školi Varaždin, smjer: tehničar za elektroniku. Nakon maturiranja, 2013. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Matematika i fizika smjer: nastavnički. Svoje odrastanje obogatio sam baveći se sportskim aktivnostima, pripremajući se za natjecanja iz matematike i fizike te držeći poduke iz istih predmeta svojim vršnjacima. Tijekom studiranja radio sam studentski posao koji mi je proširio vidike i otvorio mogućnost zapošljavanja po završetku studija.