Odabrana poglavlja euklidske geometrije

Jaković, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Jaković

ODABRANA POGLAVLJA EUKLIDSKE GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ivan Ivec

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Ivanu Ivecu na pruženoj pomoći i uloženom vremenu u izradu ovog diplomskog rada.
Od srca zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na naizmjernoj podršci svih godina.
Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima.

Sadržaj

Uvod

Euklidska geometrija je grana geometrije koja je utemeljena na definicijama i aksiomima. Njih je uveo starogrčki matematičar Euklid u svom najpoznatijem djelu *Elementi*. U prvom poglavlju ovog rada prikazan je kratki pregled razvoja geometrije, a poseban naglasak je upravo na Euklidu i njegovim *Elementima*. Drugo poglavlje podijeljeno je u šest potpoglavlja i svako od njih bavi se jednom od geometrijskih trasformacija ravnine: translacijom, centralnom simetrijom, osnom simetrijom, rotacijom, homotetijom i inverzijom. Za svaku od njih prikazana su osnovna svojstva te kroz različite geometrijske teoreme i zadatke prikazana je njihova primjena.

Nešto detaljnije od ostalih obrađene se homotetija i inverzija. Korištenjem homotetije i inverzije se složeniji problemi mogu svesti na jednostavniji problem koji je lakše riješiti. Ono po čemu se inverzija razlikuje od svih navedenih trasformacija je to što se inverzijom pravac ne mora nužno preslikati u pravac, nego je moguće da se preslika i u kružnicu.

Poglavlje 1

Povijesni razvoj geometrije

Na početku ćemo najprije reći nešto o povijesnom razvoju geometrije te o Euklidovim *Elementima*. Poznato je da su geometriju u svakodnevnom životu koristili već stari Egipćani i Babilonci, ali prvi koji su geometriju formirali kao granu matematike jesu Grci. Naziv geometrija dolazi iz grčkog jezika, tj. grčkih riječi za *zemlju* i *mjeru*. Geometrija se postupno razvijala kao apstraktna teorijska znanost kroz rad starogrčkih matematičara kao što su bili Tales, Pitagora, Platon, Apolonije, Euklid i ostali. Osim što je poznat po poučcima o obodnom kutu nad promjerom kružnice te poučku o proporcionalnosti, Tales je također poznat i kao matematičar koji je prvi uveo koncept dokaza indukcijom. Pitagora je osnovao pitagorejsku školu te su upravo pitagorejci zaslužni za otkrivanje brojnih teorema u geometriji. Za Pitagoru se kaže da je prvi koji je dokazao Pitagorin teorem koristeći deduktivno zaključivanje.

Za geometriju možemo reći da je to prva grana matematike koja se visoko razvila, a ono što je to omogućilo je djelo grčkog matematičara Euklida pod nazivom *Elementi* nastalo u trećem stoljeću prije Krista. *Elementi* sadrže 13 knjiga u kojima je glavna ideja izvesti svu matematiku iz malog broja aksioma (opće matematičke pretpostavke) i postulata (geometrijske pretpostavke). Prva knjiga sadrži rezultate elementarne planimetrije, među njima i teoreme o sukladnosti trokuta. Druga knjiga sadrži definicije i propozicije geometrijske algebre, treća planimetrije kružnice i kruga, a u četvrtoj knjizi opisane su konstrukcije pravilnih mnogokuta upisanih i opisanih kružnicama. Peta i šesta knjiga bave se Eudoksovom općom teorijom omjera i razmjera, dok su u šestoj obrađeni i sličnost te geometrijski omjeri. Sljedeće tri knjige uglavnom se bave teorijom brojeva. Deseta knjiga sadrži klasifikaciju kvadratnih iracionalnosti, dok se sljedeće dvije bave elementarnom stereometrijom, a posljednja pravilnim poliedrima.

Pet Euklidovih aksioma

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom podudaraju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

Pet Euklidovih postulata

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Tijekom povijesti najviše se raspravljalo o petom Euklidovom postulatu, poznatom kao postulatu o paralelama zbog njegove složenosti. Naime, taj postulat nije očit kao ostali postulati, pa su se mnogi matematičari pitali može li se on dokazati pomoću ostala četiri postulata, što je dovelo do otkrivanja mnogo njemu ekvivalentnih tvrdnji. Tek je u 19. stoljeću ruski matematičar Nikolaj Ivanovič Lobačevski razvio novu vrstu geometrije u kojoj ne vrijedi Euklidov peti postulat, poznatu kao hiperbolička geometrija.

Poglavlje 2

Geometrijske transformacije

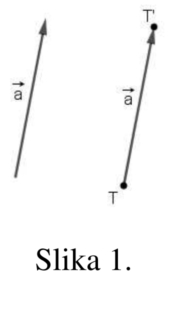
Jedna od najzanimljivijih tema euklidske geometrije jesu geometrijske transformacije, tj. preslikavanja ravnine: translacija, centralna i osna simetrija, rotacija, homotetija i inverzija. Svaku od njih ćemo definirati te prikazati njihovu primjenu na rješavanje nekih geometrijskih problema kao i na dokazivanje nekih teorema.

2.1 Translacija

Definicija 2.1.1. *Neka je A neka točka ravnine i $\vec{a}$ vektor. Neka je $\overrightarrow{AB}$ vektor takav da vrijedi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Tada kažemo da je točka B translacija točke A za vektor $\vec{a}$.*

Označimo li s M skup svih točaka ravnine, translaciju možemo definirati i na sljedeći način.

Definicija 2.1.2. *Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ neki čvrsti vektor u ravnini. Preslikavanje $t_{\vec{a}} : M \to M$ koje točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T)$ iz M, tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ naziva se translacija ravnine M za vektor $\vec{a}$.*



Slika 1.

Propozicija 2.1.3. *Translacijom geometrijskog lika dobit ćemo njemu sukladan lik.*

Propozicija 2.1.4. *Neka su l_1 i l_2 dva paralelna pravca. Svaki od ta dva pravca možemo dobiti translacijom drugog pravca.*

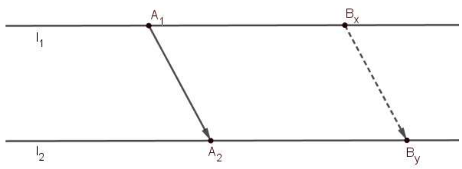
Dokaz. Uzmimo točku A_1 koja leži na pravcu l_1 i točku A_2 koja leži na pravcu l_2 te poglejajmo vektor $\overrightarrow{A_1A_2}$. Uzmimo sada proizvoljnu točku $B_x \in l_1$. Neka je B_y točka takva da vrijedi

$$\overrightarrow{B_xB_y} = \overrightarrow{A_1A_2},$$

iz čega slijedi

$$A_2B_y \parallel A_1B_x,$$

pa zaključujemo da vrijedi $B_y \in l_2$, tj. točka B_y leži na pravcu l_2.



Slika 2.

Prema petom Euklidovom postulatu znamo da postoji jedinstveni pravac paralelan s pravcem l_1 koji prolazi točkom A_2, a to je pravac l_2. Pokazali smo da točka B_y leži na pravcu l_2, a ujedno je i translacija točke B_x za vektor $\overrightarrow{A_1A_2}$, pa zaključujemo da je pravac l_2 translacija pravca l_1. □

Definicija 2.1.5. *Neka je S neki geometrijski oblik. Za dvije translacije kažemo da su uzastopne ako prva translatira S u S_1, a druga S_1 u S_2.*

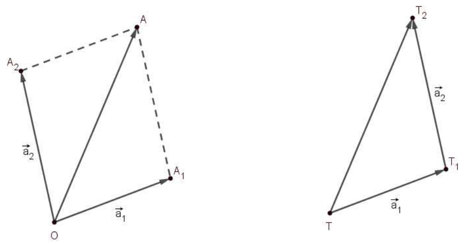
Teorem 2.1.6. *Dvije uzastopne translacije definirane pomoću vektora različitih smjerova možemo zamijeniti translacijom definiranom vektorom koji je suma ta dva vektora.*

Dokaz. Neka su $\vec{a_1} = \overrightarrow{OA_1}$ i $\vec{a_2} = \overrightarrow{OA_2}$ dva vektora koji imaju zajedničku početnu točku O, te neka je $\overrightarrow{OA}$ njihov zbroj. Uzmimo proizvoljnu točku T i translatirajmo ju najprije za vektor $\vec{a_1}$. Dobivenu točku označimo s T_1. Znamo da vrijedi

$$\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{OA_1}. \tag{2.1}$$

Primjenom translacije za vektor $\vec{a_2}$ na točku T_1 dobit ćemo točku T_2 tako da vrijedi

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OA_2}. \tag{2.2}$$



Slika 3.

Primjenom dviju uzastopnih translacija točku T translatirali smo u točku T_2. Vrijedi

$$\overrightarrow{TT_2} = \overrightarrow{TT_1} + \overrightarrow{T_1T_2}. \tag{2.3}$$

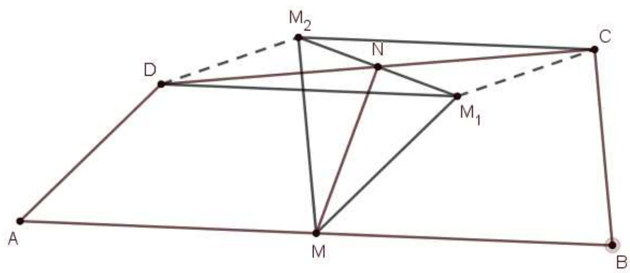
Uvrstimo li sada u tu jednakost jednakosti (2.1) i (2.2), dobit ćemo da vrijedi

$$\overrightarrow{TT_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA}.$$

□

Primjer 2.1.7. *Neka je $ABCD$ četverokut takav da vrijedi $|AD| = |BC|$ i neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokažite da je dužina $\overline{MN}$ paralelna simetrali kuta što ga zatvaraju pravci AD i BC.*

Translatirajmo najprije točku M za vektor $\overrightarrow{AD}$, a zatim za vektor $\overrightarrow{BC}$. Dobivene točke označimo s M_1 i M_2 kao na slici.



Slika 4.

Dovoljno je pokazati da vrijedi $\angle M_1MN = \angle NMM_2$.
Zbog $|AD| = |BC|$ vrijedi $|MM_1| = |MM_2|$, pa zaključujemo da je trokut $\triangle MM_1M_2$ jednakokračan.

Također, zbog provedenih translacija vrijedi

$$\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{AM} \tag{2.4}$$

i

$$\overrightarrow{M_2C} = \overrightarrow{MB}. \tag{2.5}$$

Iz uvjeta zadatka znamo da je

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \tag{2.6}$$

pa iz jednakosti (2.4), (2.5) i (2.6) slijedi

$$\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{M_2C}.$$

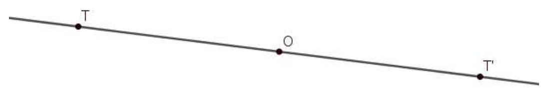
Sada zaključujemo da je četverokut DM_1CM_2 paralelogram. Znamo da za dijagonale paralelograma vrijedi da se one raspolavljaju, pa vrijedi jednakost $|M_1N| = |NM_2|$.
Dakle, N je polovište stranice $\overline{M_1M_2}$, pa je $\overline{MN}$ simetrala kuta $\angle M_1MM_2$ jednakokračnog trokuta $\triangle MM_1M_2$.

2.2 Centralna simetrija

Definicija 2.2.1. *Neka su O i A dvije točke ravnine. Za točku A' kažemo da je centralno simetrična točka točki A u odnosu na točku O ako je O polovište dužine $\overline{AA'}$. Točku O nazivamo centrom simetrije.*

Označimo li s M skup svih točaka ravnine, centralnu simetriju možemo definirati i na sljedeći način.

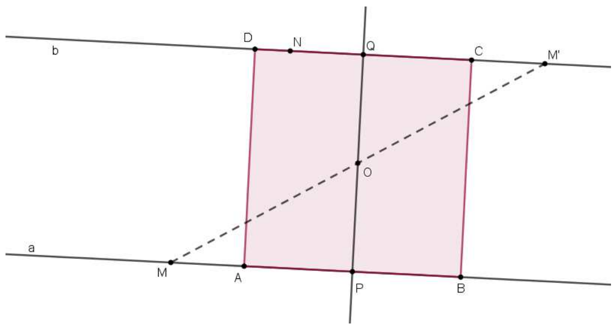
Definicija 2.2.2. *Neka je O čvrsta točka ravnine M. Centralna simetrija ravnine M obzirom na točku O je preslikavanje $s_O : M \to M$ definirano na sljedeći način:*
Najprije je $s_O(O) = O$. Ako je T točka različita od O, neka je T' točka na pravcu TO, različita od T, takva da je $|TO| = |OT'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_O(T) = T'$.



Slika 5.

Primjer 2.2.3. *Zadane su tri nekolinearne točke M, N i O. Konstruirajte kvadrat kojemu pravci na kojima leže suprotne stranice kvadrata prolaze točkama M i N, a O je središte kvadrata.*

Neka je $ABCD$ traženi kvadrat. Promotrimo centralnu simetriju s centrom simetrije O. Ona pravac $AB = a$ preslikava u pravac $b = CD$.
Preslikajmo najprije centralnom simetrijom obzirom na točku O točku M u točku M'. Nacrtajmo sada pravac NM'. To je pravac b. Povucimo zatim paralelu s tim pravcem kroz točku M i dobit ćemo pravac a. Sada smo konstruirali pravce na kojima leže dvije nasuprotne stranice kvadrata, a s obzirom da imamo zadano središte kvadrata O, lako možemo konstruirati traženi kvadrat. Iz točke O povucimo okomicu na te pravce. Ta okomica siječe pravce u točkama P i Q koje su polovišta nasuprotnih stranica kvadrata, a duljina polovine stranice jednaka je udaljenosti točke O do pravaca.



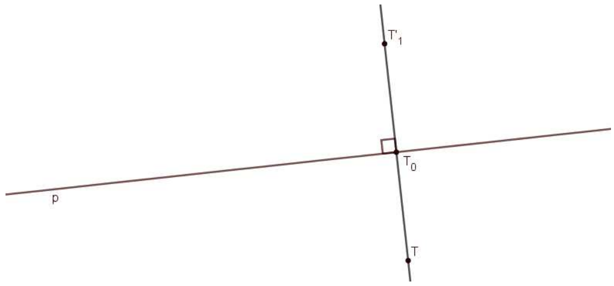
Slika 6.

2.3 Osna simetrija

Definicija 2.3.1. *Neka je p pravac i A točka u ravnini. Za točku A' kažemo da je osnosimetrična točki A u odnosu na pravac p ako je pravac p simetrala dužine $\overline{AA'}$. Pravac p nazivamo os simetrije.*

Označimo li s M skup svih točaka ravnine, osnu simetriju možemo definirati i na sljedeći način.

Definicija 2.3.2. *Neka je p pravac koji leži u ravnini M. Osna simetrija ravnine M obzirom na pravac p je preslikavanje $s_p : M \to M$ definirano na sljedeći način:*
Ako točka T leži na pravcu p, definira se $s_p(T) = T$.
Ako točka T ne leži na pravcu p, tada okomica kroz T na pravac p siječe p u nekoj točki T_0. Neka je T' točka na pravcu TT_0, različita od T, takva da je $|TT_0| = |T_0T'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_p(T) = T'$.



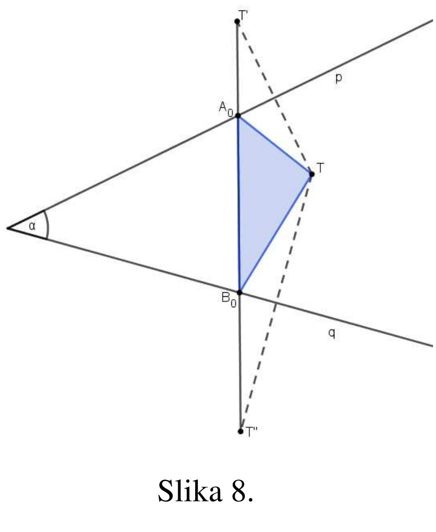
Slika 7.

Primjer 2.3.3. *Zadan je šiljasti kut α i točka T unutar kuta. Konstruirajte točke A i B na krakovima tog kuta tako da je opseg trokuta $\triangle ABT$ minimalan.*

Označimo najprije krakove kuta s p i q kao na slici. Neka je T' osnosimetrična točka točki T obzirom na pravac p, a T'' osnosimetrična točka točki T obzirom na pravac q. Tada za bilo koje točke $A \in p$ i $B \in q$ vrijedi $|AT'| = |AT|$ i $|BT''| = |BT|$. Opseg traženog trokuta jednak je zbroju duljina stranica tog trokuta $|TA| + |AB| + |BT|$, tj. jednak je zbroju duljina dužina $|T'A| + |AB| + |BT''|$.
Povucimo sada dužinu $\overline{T'T''}$. Sjecište te dužine s krakom p označimo s A_0, a sjecište s krakom q označimo s B_0. Primijetimo sada da će za sve točke $A \in p$ i $B \in q$ različite od A_0 i B_0 vrijediti

$$|T'A_0| + |A_0B_0| + |B_0T''| < |T'A| + |AB| + |BT''|\,.$$

Dakle, tražene točke su točke A_0 i B_0.



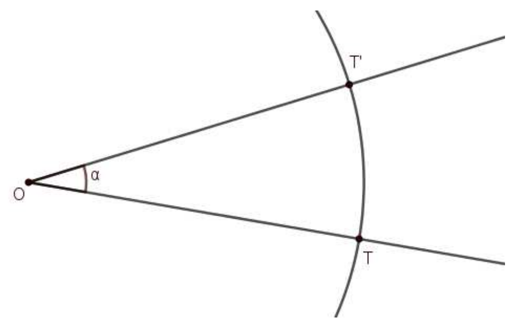
Slika 8.

2.4 Rotacija

Definicija 2.4.1. *Neka je su O i A točke u ravnini, a α pozitivno orijentiran kut. Neka je A' točka takva da vrijedi $\angle AOA' = \alpha$ i $|OA| = |OA'|$. Preslikavanje koje točku A preslikava u točku A' nazivamo rotacija točke A s centrom O i kutom rotacije α.*

Ukoliko je kut za koji rotiramo neku točku, pravac ili neki drugi geometrijski oblik pozitivno orijentiran tada govorimo o pozitivnom smjeru rotacije (obrnut smjer od smjera kretanja kazaljke na satu), a u suprotnom o negativnom smjeru rotacije.
Rotaciju možemo definirati i na sljedeći način.

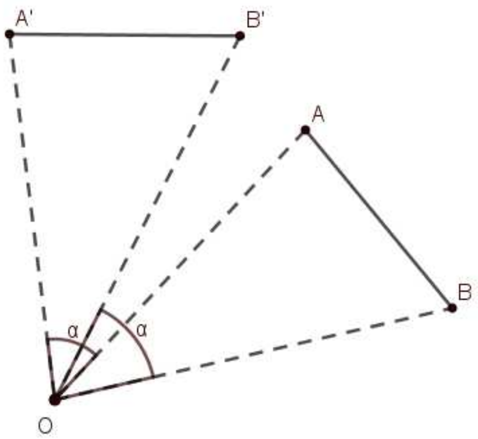
Definicija 2.4.2. *Rotacija ravnine M oko čvrste točke O (središta rotacije) za kut α (kut rotacije) u pozitivnom smjeru je preslikavanje $r : M \to M$ definirano na sljedeći način: Najprije je $r(O) = O$. Ako je T točka različita od O, neka je $k = k(O, |OT|)$ kružnica sa središtem u O i polumjerom $|OT|$. Neka je T' točka na kružnici k takva da luku $\widehat{TT'}$, kojim se od T do T' dolazi gibanjem u pozitivnom smjeru, pripada središnji kut α. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $r(T) = T'$.*



Slika 9.

Primjer 2.4.3. *Dokažite da su slika $\overline{A'B'}$ neke dužine $\overline{AB}$ pri rotaciji za kut α sa središtem rotacije O i sama ta dužina jednake duljine.*

U dokazu ovog primjera koristit ćemo $S-K-S$ teorem o sukladnosti trokuta koji glasi: Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.
Najprije ćemo skicirati neku proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ koju ćemo rotirati oko točke O za kut α.



Slika 10.

Iz definicije rotacije slijedi:

$$|OA| = |OA'|$$

$$|OB| = |OB'|$$

$$\angle AOB = \angle A'OB'.$$

Sada po $S - K - S$ poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da je $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$, pa vrijedi i $|AB| = |A'B'|$.

Analogno kao u prethodnom primjeru, lako se pokaže da vrijedi i općenitija tvrdnja, tj. sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4.4. *Dva geometrijska lika takva da se jedan iz drugog može dobiti rotacijom su sukladna.*

Primjer 2.4.5. *Dana je kružnica $k(S, r)$ i točka A izvan kružnice. Neka je točka B proizvoljna točka na kružnici, a točka C takva da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan. Gdje u ravnini leži točka C?*

S obzirom da vrijedi

$$|AC| = |AB|$$

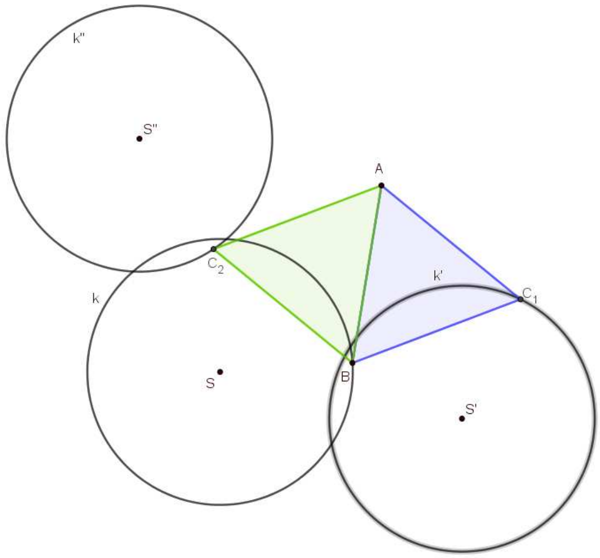
i

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

ili

$$\angle BAC = -\frac{\pi}{3}$$

točku C možemo dobiti rotacijom kružnice k oko točke A za kut $\frac{\pi}{3}$ ili za kut $-\frac{\pi}{3}$, tj. točka C pripada rotaciji kružnice k za neki od ta dva kuta.



Slika 11.

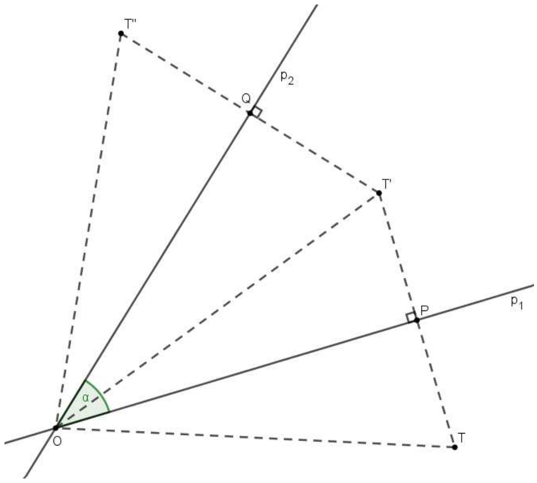
Teorem 2.4.6. *Dvije uzastopne osne simetrije s_{p1} i s_{p2} kojima se osi p_1 i p_2 sijeku u točki O i zatvaraju orijentirani kut α možemo zamijeniti rotacijom s centrom u točki O i kutom rotacije 2α.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu točku T. Osnosimetričnu sliku točke T obzirom na pravac p_1 nazovimo T'. Sada točku T' osnosimetrično preslikajmo obzirom na pravac p_2 u točku T''. Da bismo dokazali tvrdnju teorema, trebamo pokazati da je $\angle TOT'' = 2\alpha$ i $|OT| = |OT''|$. Označimo se P sjecište pravca p_1 i dužine $\overline{TT'}$, a s Q sjecište pravca p_2 i dužine $\overline{T'T''}$. Točke T' i T'' dobili smo primjenom osne simetrije, pa zbog toga vrijedi sljedeće

$$|OT| = |OT'| = |OT''|.$$

Pogledajmo sada kut $\angle TOT''$. Vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
\angle TOT'' &= \angle TOT' + \angle T'OT'' \\
&= 2\cdot\angle POT' + 2\cdot\angle T'OQ \\
&= 2\cdot(\angle POT' + \angle T'OQ) \\
&= 2\cdot\angle POQ = 2\alpha.
\end{aligned} \tag{2.7}$$



Slika 12.

Ovime je tvrdnja teorema dokazana.

□

2.5 Homotetija

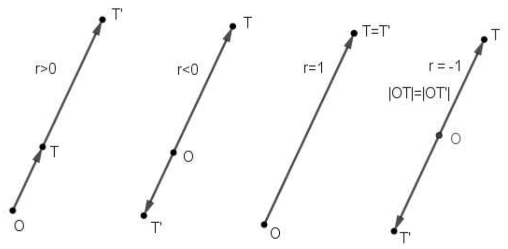
Definicija 2.5.1. *Za točku T' kažemo da je homotetična slika točke T s centrom homotetije O ako vektor $\overrightarrow{OT'}$ zadovoljava uvjet*

$$\overrightarrow{OT'} = r \cdot \overrightarrow{OT},$$

gdje je $r \neq 0$. Realni broj r naziva se koeficijent homotetije.

Ako je $r > 0$, tada su vektori $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OT'}$ jednake orijentacije, a ako je $r < 0$ vektori su suprotne orijentacije. Ako je $r = 1$ radi se o identiteti, a ako je $r = -1$ radi se o centralnoj simetriji.

Ako je T homotetična slika točke T' s centrom homotetije O i koeficijentom r, onda je T' homotetična slika točke T s centrom homotetije O i koeficijentom $\frac{1}{r}$.



Slika 13.

Teorem 2.5.2 (Karakteristični kriterij homotetije). *Geometrijski lik S' homotetičan je geometrijskom liku S s koeficijentom homotetije $r \neq 0, 1$ ako i samo ako za svaki par točaka $A, B \in S$ postoji par točaka $A', B' \in S'$ tako da vrijedi $\overrightarrow{A'B'} = r \cdot \overrightarrow{AB}$.*

Dokaz. Neka je S' homotetična slika lika S s centrom homotetije O i koeficijentom homotetije $r \neq 0, 1$. Neka su $A, B \in S$ proizvoljne točke, a $A', B' \in S'$ njihove homotetične slike. Tada je

$$\overrightarrow{OA'} = r \cdot \overrightarrow{OA}$$

i

$$\overrightarrow{OB'} = r \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Oduzmemo li te dvije jednakosti, dobivamo sljedeće:

$$\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} = r(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}),$$

odnosno

$$\overrightarrow{B'A'} = r \cdot \overrightarrow{BA},$$

ili

$$\overrightarrow{A'B'} = r \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Dokažimo sada drugi smjer.
Neka su $A, B \in S$ i $A', B' \in S'$ takve da je

$$\overrightarrow{A'B'} = r \cdot \overrightarrow{AB},$$

za $r \neq 0, 1$. Neka su A i A' fiksirane točke, a B i B' proizvoljne točke na likovima S i S' redom. Neka je O točka takva da vrijedi

$$\overrightarrow{OA'} = r \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Zbrojimo li sada tu jednakost i jednakost iz pretpostavke, dobivamo

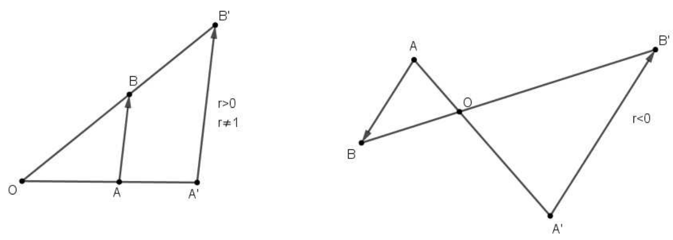
$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = r(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}),$$

iz čega slijedi

$$\overrightarrow{OB'} = r \cdot \overrightarrow{OB},$$

za točke B i B' za koje vrijedi $\overrightarrow{A'B'} = r \cdot \overrightarrow{AB}$. □

Korolar 2.5.3. *Homotetija preslikava pravac u njemu paralelan pravac.*



Slika 14.

Korolar 2.5.4. *Homotetija preslikava mnogokut u njemu sličan mnogokut. Njegove stranice jednako su orijentirane kao stranice početnog mnogokuta ako je koeficijent homotetije $r > 0$, a suprotno orijentirane ako je $r < 0$.*

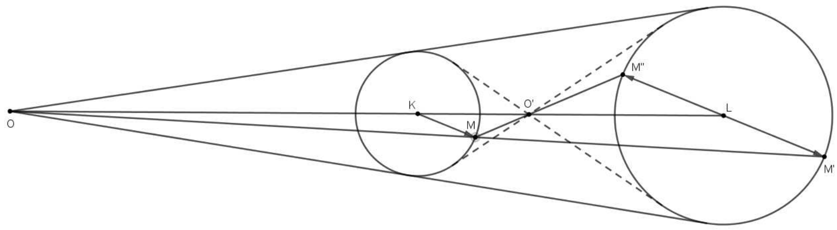
Vrijedi i obrat prethodnog korolara: ako su S i S' dva slična mnogokuta, postoji homotetija koja preslikava S na S'.
Promotrimo sada kako homotetija preslikava kružnice. Za dvije homotetične kružnice koeficijent homotetičnosti jednak je omjeru duljina njihovih polumjera. Vrijedi:

(i) Središta kružnica su homotetične točke.

(ii) Ako je koeficijent homotetije $r \neq 1$, uvijek postoje dvije homotetije koje takve dvije kružnice preslikavaju jednu u drugu.

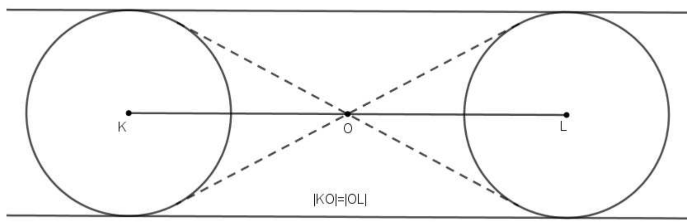
Preciznije, vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.5.5. *Zajedničke vanjske tangente (ako postoje) dviju kružnica $k_1(K, r_1)$ i $k_2(L, r_2)$ prolaze kroz "vanjski" centar homotetije O koji je sjecište pravaca KL i MM', gdje su $M \in k_1$, $M' \in k_2$ takve da su vektori $\overrightarrow{KM}$ i $\overrightarrow{LM'}$ paralelni i jednake orijentacije. Zajedničke unutarnje tangente dvije kružnice prolaze kroz "unutarnji" centar homotetije O' koji je sjecište pravaca KL i MM'', gdje su $M \in k_1$, $M'' \in k_2$ takve da su vektori $\overrightarrow{KM}$ i $\overrightarrow{LM''}$ paralelni i suprotne orijentacije.*



Slika 15.

Ukoliko imamo dvije kružnice jednakih radijusa i različitih središta, onda imamo samo jednu homotetiju kojoj je centar jednak polovištu dužine koja spaja središta kružnica. U tom slučaju radi se o centralnoj simetriji.



Slika 16.

Propozicija 2.5.6. *Neka su S_1, S_2 i S_3 geometrijski likovi. Ako su S_1 i S_2 te S_2 i S_3 homotetični likovi, tada su i S_1 i S_3 homotetični likovi, osim u posebnom slučaju kada je S_3 translacija od S_1. Osim toga, centri te tri homotetije su kolinearne točke.*

U dokazu ove propozicije koristit ćemo sljedeći teorem.

Teorem 2.5.7 (Menelajev teorem). *Dan je trokut $\triangle ABC$ i točke D, E, F redom na pravcima BC, CA i AB. Točke D, E, F su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{AE}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = 1. \tag{2.8}$$

Dokažimo sada iskazanu propoziciju.

Dokaz. Neka su S_1, S_2 i S_3 geometrijski likovi takvi da je S_2 homotetičan liku S_1 s centrom homotetije O_1 i koeficijentom homotetije r_1, a S_3 homotetičan liku S_2 s centrom homotetije O_2 i koeficijentom homotetije r_2. Trebamo pokazati da postoji centar homotetije O_3 takav da je lik S_3 homotetičan liku S_1. Neka su M_1 i M_2 homotetične točke na likovima S_1 i S_2 redom, a M_2 i M_3 homotetične točke na likovima S_2 i S_3 redom. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{O_1M_2} = r_1 \cdot \overrightarrow{O_1M_1} \tag{2.9}$$

i

$$\overrightarrow{O_2M_3} = r_2 \cdot \overrightarrow{O_2M_2} \tag{2.10}$$

Promotrimo sada trokut $\triangle M_1M_2M_3$. Naime, ako točke M_1, M_2 i M_3 leže na jednom pravcu (to je onda pravac O_1O_2), lako se pokazuje da postoji točka $O \in O_1O_2$ takva da je $\overrightarrow{OM_3} = r_1r_2 \cdot \overrightarrow{OM_1}$ (osim u slučaju $r_1r_2 = 1$). Imamo točke O_1 i O_2 za koje vrijedi $O_1 \in M_1M_2$ i $O_2 \in M_2M_3$. Neka je O_3 točka za koju vrijedi $O_3 \in M_1M_3$ i $O_3 \in O_1O_2$. Dakle, točka O_3 nalazi se na presjeku pravaca M_1M_3 i O_1O_2. Naime, ako se ti pravci ne sijeku (opet u slučaju $r_1r_2 = 1$), onda je $\overrightarrow{M_1M_3} = \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, tj. lik S_3 je translacija lika S_1. Sada imamo točke $O_1 \in M_1M_2$, $O_2 \in M_2M_3$ i $O_3 \in M_1M_3$ koje su kolinearne, pa po Menelajevom teoremu mora vrijediti

$$\frac{\overrightarrow{M_1O_1}}{\overrightarrow{M_2O_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{M_2O_2}}{\overrightarrow{M_3O_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{M_3O_3}}{\overrightarrow{M_1O_3}} = 1. \tag{2.11}$$

Uvrstimo li sada (2.9) i (2.10) u jednakost (2.11), dobit ćemo

$$\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\overrightarrow{M_3O_3}}{\overrightarrow{M_1O_3}} = 1,$$

tj.

$$\frac{1}{r_1r_2} \cdot \frac{\overrightarrow{M_3O_3}}{\overrightarrow{M_1O_3}} = 1,$$

iz čega slijedi

$$\overrightarrow{M_3O_3} = r_1r_2 \cdot \overrightarrow{M_1O_3}.$$

Zaključujemo da su točke M_3 i M_1 homotetične s centrom homotetije O_3 i koeficijentom homotetije r_1r_2. □

Definicija 2.5.8. *Neka su $k_1(K, r_1)$ i $k_2(L, r_2)$ dvije kružnice i neka je O centar homotetije koja preslikava kružnice jednu u drugu. Neka su $A \in k_1$ i $B \in k_2$ homotetične točke. Ako pravac AB siječe kružnice u točkama $A_1 \in k_1$ i $B_1 \in k_2$, onda kažemo da je točka B_1 anti-homotetična točki A, a točka A_1 anti-homotetična točki B.*

Teorem 2.5.9. *Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice, a $A \in k_1$ i $B' \in k_2$ anti-homotetične točke. Tada postoji kružnica koja dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama A i B'.*

Dokaz. Označimo s K središte kružnice k_1 i s L središte kružnice k_2. Neka je O centar homotetije koja preslikava kružnice k_1 i k_2 jednu u drugu. Označimo s M sjecište pravaca AK i $B'L$, s B sjecište kružnice k_1 i pravca AB' i s A' sjecište kružnice k_2 i pravca AB'.
Trokut $\triangle A'B'L$ je jednakokračan i vrijedi

$$\angle LA'B' = \angle A'B'L.$$

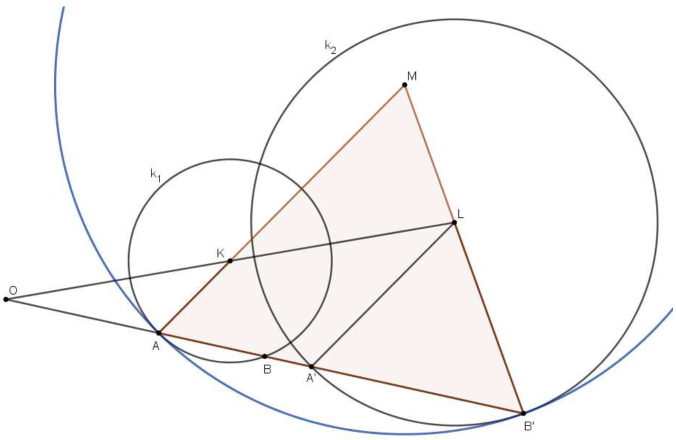
Zbog toga što je $LA' \parallel KA$, vrijedi i

$$\angle KAB = \angle LA'B',$$

što znači da je i

$$\angle KAB = \angle A'B'L$$

iz čega slijedi da je i trokut $\angle MAB'$ jednakokračan.

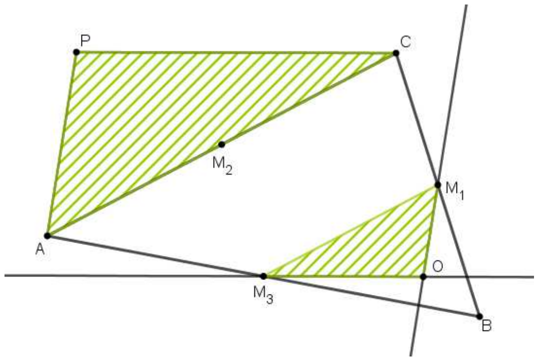


Slika 17.

Kružnica kojoj je M središte, a $|MA|$ polumjer prolazi točkama A i B' i u tim točkama dodiruje kružnice k_1 i k_2.
Analogno se dokaže da tvrdnja vrijedi i za centar homotetije O' koji leži između točaka K i L. □

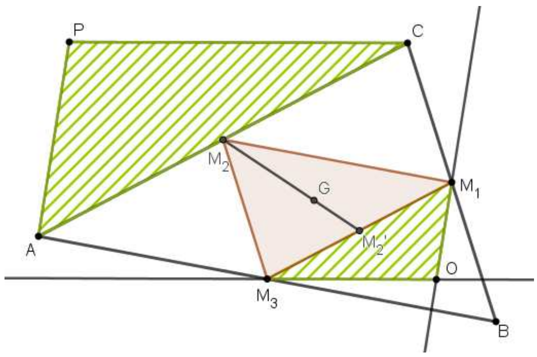
Primjer 2.5.10. *Dan je trokut $\triangle ABC$ i točka P izvan trokuta. Neka su M_1, M_2 i M_3 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Točkom M_1 povucimo paralelu s pravcem PA, točkom M_2 povucimo paralelu s pravcem PB i točkom M_3 povucimo paralelu s pravcem PC. Dokažimo da te tri paralele prolaze istom točkom.*

Neka je O sjecište paralele s pravcem AP kroz M_1 i paralele s pravcem CP kroz M_3. Promotrimo sada trokute $\triangle OM_1M_3$ i $\triangle PAC$.



Slika 18.

Stranica $\overline{M_1M_3}$ je srednjica trokuta $\triangle ABC$, pa je $|AC| = 2 \cdot |M_1M_3|$ i vrijedi $\overline{M_1M_3} \parallel \overline{AC}$. Odgovarajuće stranice trokuta $\triangle PAC$ i trokuta $\triangle OM_1M_3$ su paralelne, pa možemo zaključiti da su ta dva trokuta homotetična, a koeficijent homotetije jednak je $r = -2$. Promotrimo sada trokut $\triangle M_1M_2M_3$. Označimo težište tog trokuta s G, a polovište stranice $\overline{M_1M_3}$ s M_2'.



Slika 19.

S obzirom da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 od vrha prema stranici, vrijedi

$$\overrightarrow{GM_2} = -2 \cdot \overrightarrow{GM_2'}.$$

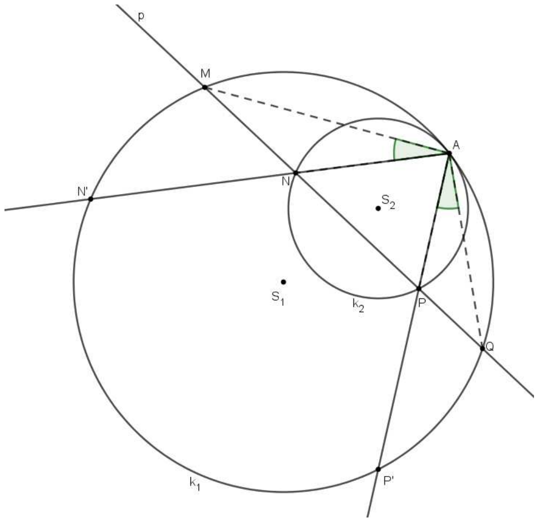
Zaključujemo da je G centar homotetije, pa vrijedi

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GP}.$$

Dakle, tom homotetijom se pravac PB preslika u pravac OM_2, tj. OM_2 je zaista paralela s PB jer homotetija preslikava pravac u njemu paralelan pravac (Korolar 2.5.3).

Primjer 2.5.11. *Dvije kružnice diraju se iznutra u točki A. Pravac p siječe te kružnice u četiri točke M, N, P i Q (točke su tim redom na pravcu). Dokažite da je* $\angle MAN = \angle PAQ$.

Neka su k_1 i k_2 dane kružnice, a S_1 i S_2 njihova središta. Promotrimo homotetiju koja preslikava k_2 u k_1 kojoj je centar homotetije točka A. Sliku točke N pri toj homotetiji označimo s N', a sliku točke P s P'.



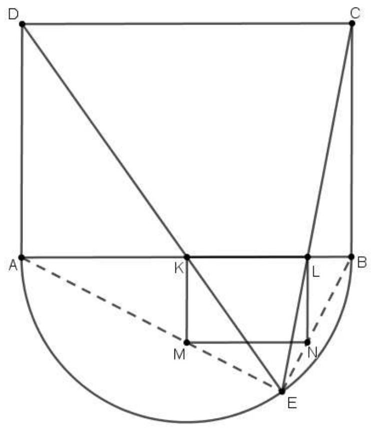
Slika 20.

Primijetimo sada da je $N'P' \parallel NP$, tj. $N'P' \parallel MQ$, pa možemo zaključiti da je četverokut $N'P'QM$ jednakokračni trapez. Dakle, vrijedi $|MN'| = |P'Q|$, pa su i lukovi $\widehat{MN'}$ i $\widehat{P'Q}$ sukladni. Sada zaključujemo da su i obodni kutovi nad tim lukovima sukladni.

Primjer 2.5.12. *Neka je ABCD pravokutnik takav da je* $|AB| = |BC| \cdot \sqrt{2}$. *Neka je E proizvoljna točka na polukružnici kojoj je* $\overline{AB}$ *promjer. Polukružnica se nalazi na suprotnoj strani od točaka C i D. Neka su K i L sjecišta pravca AB s pravcima ED i EC redom. Dokažite da je*

$$|AL|^2 + |BK|^2 = |AB|^2 . \tag{2.12}$$

Neka je $MNLK$ pravokutnik homotetičan pravokutniku $ABCD$ s centrom homotetije E, gdje je K homotetična slika točke D, a L homotetična slika točke C. Tada su točke A, M, E kolinearne, a isto tako i točke B, N, E.



Slika 21.

Uvedimo sljedeće oznake: $|AK| = a$, $|KL| = b$ i $|BL| = c$.
Sada je jednakost (2.12) ekvivalentna s

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 = (a + b + c)^2.$$

Kada ovu jednakost sredimo dobijemo da je ekvivalentna izrazu

$$b^2 = 2ac.$$

$MNLK$ je homotetična slika pravokutnika $ABCD$, pa su ta dva pravokutnika slična i vrijedi

$$|KL| = |KM| \cdot \sqrt{2}. \tag{2.13}$$

Trokuti $\triangle MKA$ i $\triangle BLN$ također su slični (imaju iste kutove kao i pravokutni trokut $\triangle ABE$), pa imamo

$$\frac{a}{|KM|} = \frac{|LN|}{c},$$

a s obzirom da je $|KM| = |LN|$, slijedi

$$|KM|^2 = ac.$$

Primijenimo li sada (2.13), dobit ćemo da vrijedi

$$|KL|^2 = 2ac,$$

tj. $b^2 = 2ac$.

2.6 Inverzija

Do sada su sve transformacije koje smo obradili preslikavale pravce u pravce, a kružnice u kružnice. Po tome se inverzija razlikuje od svih ostalih transformacija, jer je kod nje moguće da se pravac preslika ili u pravac ili u kružnicu.

Definicija 2.6.1. *Označimo s M skup svih točaka ravnine. Neka je O točka u ravnini i $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inverzna slika točke T obzirom na točku O je točka $T' \in OT$ tako da vrijedi*

$$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OT'} = r.$$

Točka O naziva se centar inverzije, a realni broj r potencija inverzije. Simbolima ćemo to zapisivati kao $Inv_{(O,r)}T = T'$.

Ako je $r > 0$, vektori $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OT'}$ jednake su orijentacije, a u slučaju $r < 0$ suprotne su orijentacije.
Inverzna slika točke O s centrom inverzije koji je upravo ta točka je točka u beskonačnosti.

Osnovna svojstva inverzije

Neka su dani geometrijski lik S i točka O u ravnini i neka je $r \neq 0$ realan broj. Inverzna slika od S s centrom inverzije O i potencijom inverzije r je lik S' koji je geometrijsko mjesto točaka inverznih točkama lika S obzirom na centar inverzije O i potenciju inverzije r. To možemo zapisati i kao $Inv_{(O,r)}S = S'$.
Inverzija je involutorna transformacija. To znači ako je S' inverzna slika od S s centrom inverzije O i potencijom inverzije r, onda je S inverzna slika od S' s jednakim centrom i potencijom inverzije. Iz navedenog slijedi da je inverzija bijektivno preslikavanje.

Pogledajmo sada kako inverzija preslikava pravac koji prolazi centrom inverzije.

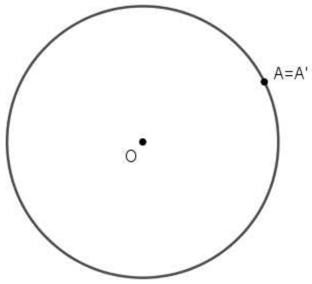
Propozicija 2.6.2. *Dani su pravac p i točka O u ravnini, te realan broj $r \neq 0$. Neka je $Inv_{(O,r)}$ inverzija s centrom O i potencijom r. Pravac p preslikava se sam na sebe, tj. $Inv_{(O,r)}p = p$ vrijedi ako i samo ako je $O \in p$.*

Dokaz. Zaista, ako je $T \in p$ i T' inverzna slika točke T s centrom inverzije O i potencijom inverzije r, tada su točke T, O i T' kolinearne. Dakle, možemo reći da se pravac p koji prolazi centrom inverzije O preslikava sam na sebe. □

Definicija 2.6.3. *Neka je dana inverzija $Inv_{(O,r)}$ s centrom O i potencijom $r > 0$. Kružnica $k(O, \sqrt{r})$ s centrom u točki O i polumjerom $\sqrt{r}$ naziva se kružnica inverzije $Inv_{(O,r)}$. Svaka točka kružnice inverzije fiksna je točka te inverzije i to su njene jedine fiksne točke.*

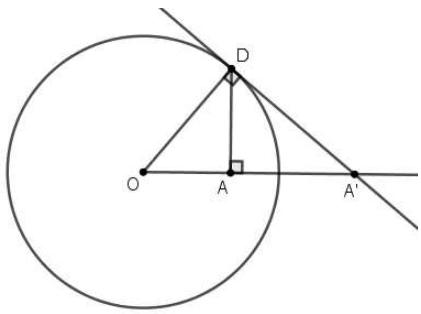
Primjer 2.6.4. *Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka A. Konstruirajte točku A' inverznu točki A s obzirom na kružnicu k.*

Prvi slučaj: $A \in k \Rightarrow A = A'$



Slika 22.

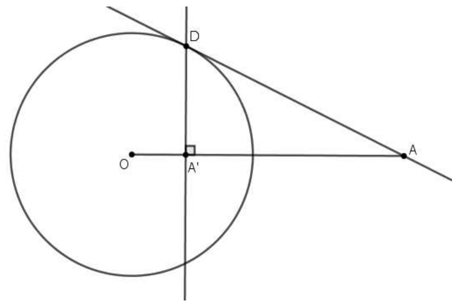
Drugi slučaj: A se nalazi unutar kružnice k
Povučemo okomicu na OA u točki A i jedno od sjecišta te okomice s kružnicom označimo s D. U točki D povucimo tangentu t na kružnicu k. Sjecište tangente t i pravca OA je tražena točka A'.



Slika 23.

Naime, $\triangle OAD \sim \triangle ODA'$, pa je $|OA| \cdot |OA'| = |OD|^2 = r^2$.

Treći slučaj: A se nalazi izvan kružnice k
Povucimo iz točke A jednu od tangenti na kružnicu k i s D označimo diralište tangente i kružnice. Iz D povucimo okomicu na OA. Sjecište te okomice i pravca OA je tražena točka A'.



Slika 24.

Naime, $\triangle OA'D \sim \triangle ODA$, pa je opet $|OA| \cdot |OA'| = |OD|^2 = r^2$.

Propozicija 2.6.5. *Neka su A, A′ i B, B′ parovi pridruženih točaka pri inverziji $Inv_{(O,r)}$. Tada vrijedi*

$$\angle OAB = \angle OB'A'$$

i

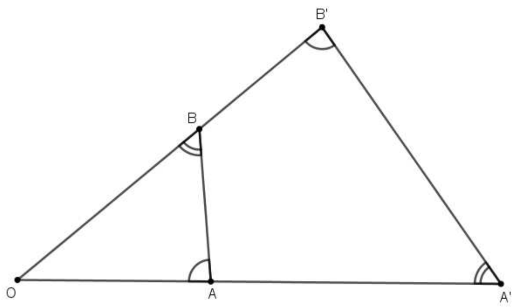
$$\angle OBA = \angle OA'B'.$$

U dokazu ove propozicije koristit ćemo $S - K - S$ teorem o sličnosti trokuta koji glasi: Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a kutovi među njima jednaki.

Dokaz. Iz $Inv_{(O,r)}A = A'$ slijedi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r$.
Analogno je $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} = r$, pa vrijedi

$$|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'| .$$

Trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$ imaju zajednički kut pri vrhu O, pa po $S - K - S$ teoremu o sličnosti zaključujemo da je $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, iz čega slijedi tvrdnja propozicije. □

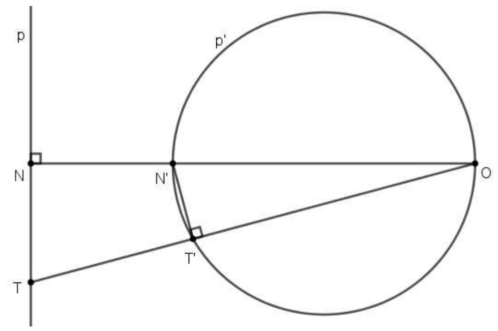


Slika 25.

Iz ove propozicije slijedi da je četverokut $AA'B'B$ tetivni četverokut.

Propozicija 2.6.6. *Dani su pravac p i točka O u ravnini, te realan broj $r \neq 0$. Neka je $Inv_{(O,r)}$ inverzija s centrom O i potencijom r. Pravac p koji ne prolazi centrom inverzije preslikava se u kružnicu koja prolazi centrom inverzije i ima tangentu u toj točki paralelnu s pravcem p.*

Dokaz. Označimo s p' inverznu sliku pravca p s centrom inverzije O i potencijom inverzije r, tj. $Inv_{(O,r)}p = p'$. Neka je N nožište okomice spuštene iz O na pravac p i $Inv_{(O,r)}N = N'$. Uzmimo bilo koju točku T koja leži na pravcu p i neka je $Inv_{(O,r)}T = T'$. Sada iz Propozicije 2.6.5 slijedi $\angle ONT = \angle OT'N' = \frac{\pi}{2}$.



Slika 26.

Kut $\angle OT'N'$ je dakle pravi kut, pa po Talesovom teoremu o obodnom kutu zaključujemo da se točka T' nalazi na kružnici kojoj je $\overline{ON'}$ promjer. Dakle, svaka točka pravca p preslikava se na kružnicu p' promjera $\overline{ON'}$, a s obzirom da je inverzija bijektivno preslikavanje, zaključujemo da tvrdnja propozicije vrijedi. □

Pogledajmo sada kako možemo izračunati udaljenost između inverznih točaka. Neka je O centar inverzije i $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ potencija inverzije, a S_1 i S_2 dva gemetrijska lika koja su jedan drugom inverzna slika s obzirom na centar inverzije O i potenciju inverzije r. Neka su $A \in S_1$ i $A' \in S_2$ te $B \in S_2$ i $B' \in S_2$ parovi pridruženih točaka pri inverziji. Znamo da vrijedi $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, iz čega slijedi

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|} \Rightarrow |A'B'| = |AB| \cdot \frac{|OA'|}{|OB|}. \tag{2.14}$$

Iz definicije inverzije slijedi

$$\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA} = r \Rightarrow |OA'| \cdot |OA| = |r|. \tag{2.15}$$

Sada iz (2.14) i (2.15) imamo

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{|OA'| \cdot |OA|}{|OB| \cdot |OA|} = |AB| \cdot \frac{|r|}{|OB| \cdot |OA|}.$$

Sljedeće svojstvo inverzije koje ćemo navesti vezano je za kutove koje zatvaraju inverzni likovi.

Definicija 2.6.7. *Kut između krivulja je kut pod kojim se sijeku njihove tangente u točkama presjeka.*

Definicija 2.6.8. *Ako preslikavanje čuva kut između krivulja, onda se ono zove konformno preslikavanje.*

Teorem 2.6.9. *Inverzija je konformno preslikavanje.*

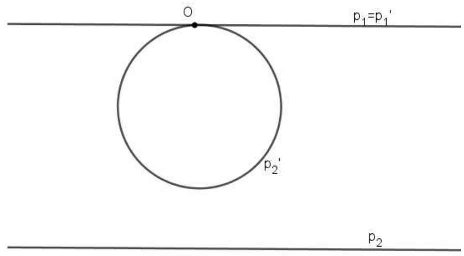
Dokaz. Zbog Definicije 2.6.7 dovoljno je pokazati da inverzija čuva kut između pravaca. Definirajmo najprije inverziju $Inv_{(O,r)}$ s centrom inverzije O i potencijom inverzije r. Neka su p_1 i p_2 dva pravca u ravnini, a p_1' i p_2' njihove inverzne slike obzirom na inverziju $Inv_{(O,r)}$. U ovom dokazu razlikovat ćemo tri slučaja, ovisno o položaju pravaca u odnosu na centar inverzije.

1. Pravci prolaze centrom inverzije O.
   U ovom slučaju tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 2.6.2.

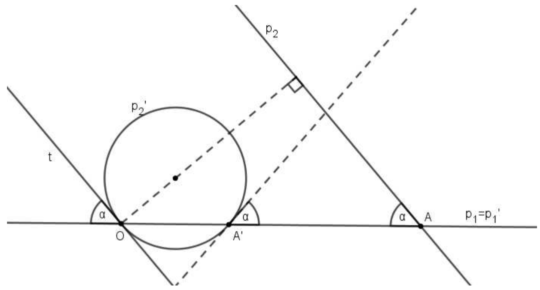
2. Jedan pravac prolazi centrom inverzije O, a drugi ne.
   Neka pravac p_1 prolazi centrom inverzije. U ovom slučaju razlikujemo dva podslučaja.

   2a) Pravci p_1 i p_2 su paralelni.
   S obzirom da su pravci paralelni, vrijedi $\angle(p_1, p_2) = 0$. Za pravac p_1 vrijedi $Inv_{(O,r)} p_1 = p_1$, a iz Propozicije 2.6.6 slijedi da je inverzna slika pravca p_2, kružnica p_2' koja prolazi centrom inverzije O i kojoj je pravac p_1 tangenta. Dakle, $\angle(p_1', p_2') = 0$ (Slika 27.).

   2b) Pravci p_1 i p_2 se sijeku.
   Označimo s A sjecište pravaca p_1 i p_2 i s α kut između njih, $\angle(p_1, p_2) = \alpha$. Kao i u prethodnom slučaju, pravac p_1 preslikava se sam na sebe, a pravac p_2 preslikava se u kružnicu p_2' koja prolazi centrom inverzije O. S A' označimo inverznu sliku točke A. Trebamo pokazati da je $\angle(p_1, p_2') = \alpha$ (Slika 28.).
   Iz Propozicije 2.6.6 slijedi da je tangenta t u točki O kružnice p_2' paralelna s pravcem p_2, pa ona s pravcem p_1 zatvara kut α. Kako je $\overline{OA'}$ tetiva kružnice p_2', tangenta u točki A' također zatvara kut α s pravcem p_1.



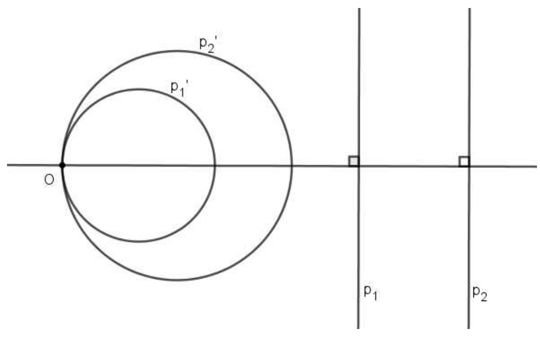
Slika 27.



Slika 28.

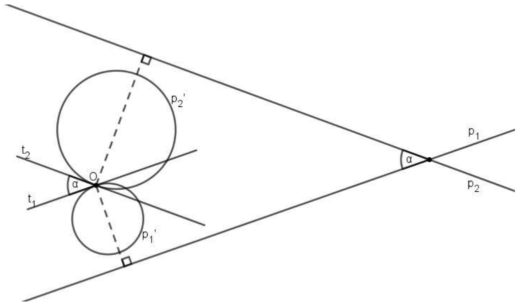
3. Ni jedan od pravaca ne prolazi centrom inverzije.

   3a) Pravci p_1 i p_2 su paralelni.
   S obzirom da su pravci paralelni, vrijedi $\angle(p_1, p_2) = 0$, a iz Propozicije 2.6.6 slijedi da se pravci inverzijom preslikavaju u kružnice p_1' i p_2' koje prolaze centrom inverzije O i koje u točki O imaju zajedničku tangentu paralelnu s p_1 i p_2. Dakle, $\angle(p_1', p_2') = \angle(p_1, p_2) = 0$.



Slika 29.

3b) Pravci p_1 i p_2 se sijeku.
Označimo s α kut između pravaca, $\angle(p_1, p_2) = \alpha$.



Slika 30.

Kao i u prethodnom slučaju, pravci će se preslikati u kružnice p_1' i p_2' koje prolaze centrom inverzije O. Označimo s t_1 i t_2 tangente na kružnice p_1' i p_2' u točki O. Iz Propozicije 2.6.6 slijedi $t_1 \parallel p_1$ i $t_2 \parallel p_2$, pa je $\angle(t_1, t_2) = \angle(p_1, p_2) = \alpha$.

□

Pokazali smo kako inverzija preslikava pravce ovisno o tome prolaze li centrom inverzije ili ne. Sada ćemo vidjeti što se događa s kružnicama prilikom inverzije, tj. kako inverzija preslikava kružnice.

Propozicija 2.6.10. *Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije je kružnica koja također ne prolazi centrom inverzije.*

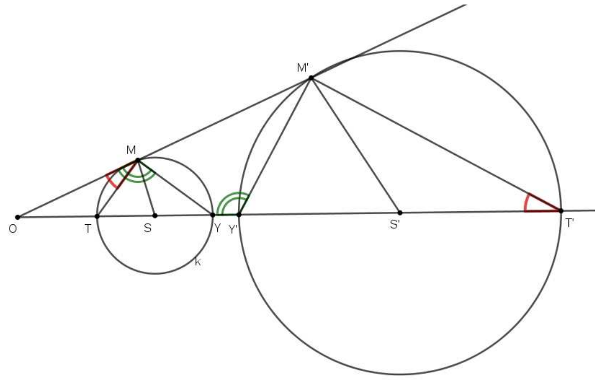
Dokaz. Neka je $k(S, l)$ kružnica u ravnini i O točka ravnine takva da $O \notin k$, a $Inv_{(O,r)}$ inverzija s centrom O i potencijom r. Neka je M proizvoljna točka na kružnici k, a M' njena inverzna točka, $Inv_{(O,r)}M = M'$. Sjecišta pravca OS i kružnice k označimo s T i Y, a T' i Y' neka su točke na pravcu OS, $T', Y' \in OS$ takve da je

$$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OT'} = r$$

i

$$\overrightarrow{OY} \cdot \overrightarrow{OY'} = r,$$

tj. inverzne slike točaka T i Y.
Iz definicije inverzije znamo da je i $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r$.



Slika 31.

Dakle, $|OM| \cdot |OM'| = |OT| \cdot |OT'| = |OY| \cdot |OY'| = |r|$, pa je

$$\frac{|OM|}{|OT|} = \frac{|OT'|}{|OM'|} \Rightarrow \triangle OMT \sim \triangle OT'M'$$

i

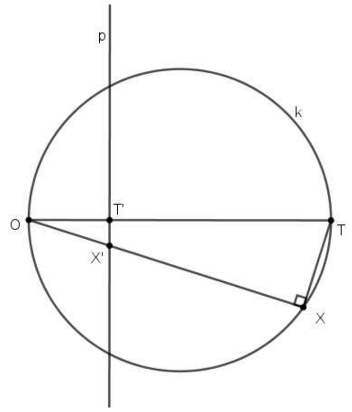
$$\frac{|OM|}{|OY|} = \frac{|OY'|}{|OM'|} \Rightarrow \triangle OMY \sim \triangle OY'M'.$$

S obzirom da je $\overline{TY}$ promjer kružnice k, kut $\angle YMT$ je obodni kut nad promjerom, pa je $\angle YMT = \frac{\pi}{2}$. Stoga, prema zbroju kutova u trokutu $\triangle T'M'Y'$:
$\angle T'M'Y' = \pi - \angle M'T'O - \angle M'Y'T' = \angle OY'M' - \angle M'T'O = \angle OMY - \angle TMO = \angle YMT = \frac{\pi}{2}$. Prema Talesovom poučku slijedi da je geometrijsko mjesto točaka M' kružnica promjera $\overline{T'Y'}$ i ona je inverzna slika kružnice k. □

Propozicija 2.6.11. *Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije je pravac koji ne prolazi centrom inverzije.*

Dokaz. Neka je O centar inverzije i r potencija inverzije $Inv_{(O,r)}$. Neka je k kružnica koja prolazi centrom inverzije i neka je $\overline{OT}$ njen promjer. Uzmimo proizvoljnu točku $X \in k$ i neka je X' njena inverzna slika, tj. $Inv_{(O,r)}X = X'$, a T' neka je inverzna slika točke T, tj. $Inv_{(O,r)}T = T'$. Neka je p pravac kroz točku T' okomit na polumjer kružnice $\overline{OT}$ (Slika 32.). Tvrdimo da je $Inv_{(O,r)}k = p$. Vrijedi $\angle TXO = \frac{\pi}{2}$, pa prema Propoziciji 2.6.5 slijedi $\angle OT'X' = \frac{\pi}{2}$, pa je $X' \in p$. To vrijedi za svaku točku $X \in k$. S obzirom da je inverzija bijektivno preslikavanje, zaključujemo da vrijedi $Inv_{(O,r)}k = p$. □

Alternativno, Propozicija 2.6.11 slijedi iz Propozicije 2.6.6 i činjenice da je inverzija involutorno preslikavanje.



Slika 32.

Neka zanimljiva svojstva inverzije

Teorem 2.6.12. *Dva geometrijska lika S_1 i S_2 koja su inverzna slika trećeg lika S s jednakim centrom inverzije O su homotetična.*

Dokaz. Neka su S_1 i S_2 geometrijski likovi takvi da je $Inv_{(O,r_i)}S = S_i$, gdje je r_i odgovarajuća potencija inverzije i $r_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1,2$. Neka je $M \in S$ točka, a $M_i \in S_i, i = 1,2$ točke za koje vrijedi $M_i = Inv_{(O,r_i)}M$. Za te točke je

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM} = r_1$$

i

$$\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM} = r_2,$$

iz čega slijedi

$$|OM_1| \cdot |OM| = |r_1|,$$

$$|OM_2| \cdot |OM| = |r_2|.$$

Stavimo li gornje jednakosti u omjer, dobivamo

$$\frac{|OM_1|}{|OM_2|} = \frac{|r_1|}{|r_2|},$$

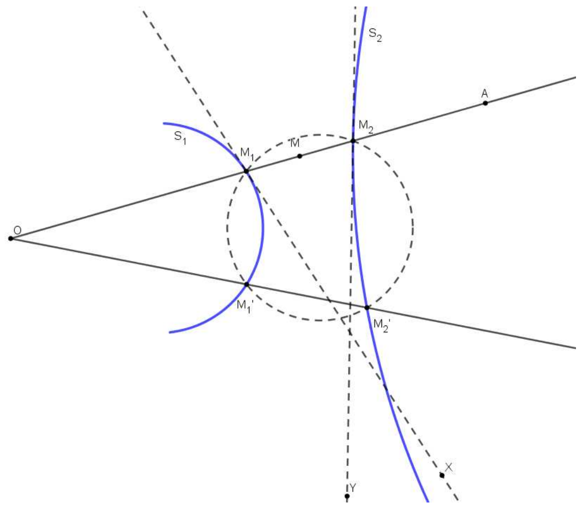
iz čega možemo zaključiti (budući da točke M_1 i M_2 leže na pravcu OM) da su likovi S_1 i S_2 homotetični, te da je O centar homotetije. □

Označimo s M skup svih točaka ravnine. Neka je $c : I \to M, I \subset \mathbb{R}$ ravninska krivulja i točka $M_0 \in c$. Za bilo koju točku $M \in c$ možemo konstruirati pravac M_0M. Intuitivno možemo zaključiti da je limes familije takvih pravaca kad $M \to M_0$, ako postoji, pravac p_0

koji je tangenta krivulje c u točki M_0. Za taj pravac, tj. tangentu vrijedi:
Postoji dio krivulje c, tj. segment omeđen točkama A i B unutar kojeg se nalazi točka M_0 takva da je M_0 sjecište tangente p_0 i tog segmenta.

Teorem 2.6.13. *Neka su S_1 i S_2 ravninske krivulje za koje vrijedi da su jedna drugoj inverzna slika $S_1 = Inv_{(O,r)}S_2$, $r \neq 0$ obzirom na centar inverzije O i potenciju inverzije r. Tangente u odgovarajućim točkama $M_1 \in S_1$ i $M_2 \in S_2$ za koje vrijedi $Inv_{(O,r)}M_2 = M_1$ zatvaraju sukladne kutove s pravcem M_1M_2.*

Dokaz. Neka je M_1X tangenta na krivulju S_1 u točki M_1 i M_2Y tangenta na krivulju S_2 u točki M_2. Neka je A točka takva da su O, M_1, M_2, M i A kolinearne točke, kao na slici. Treba pokazati da je $\angle XM_1M_2 = \angle M_1M_2Y$.

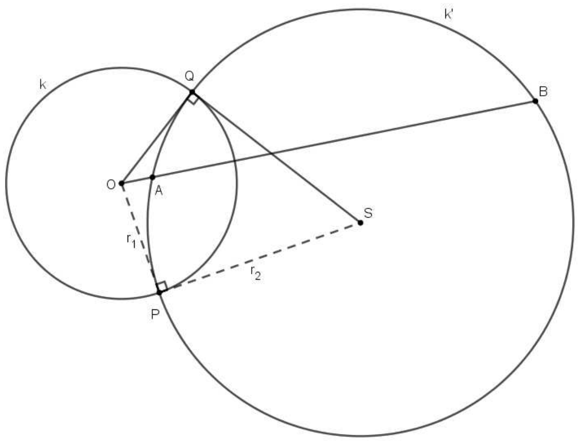


Slika 33.

Uzmimo proizvoljnu točku $M_1' \in S_1$ i neka je $M_2' \in S_2$ njena inverzna slika. Sada znamo da je četverokut $M_1M_1'M_2'M_2$ tetivni četverokut, tj. četverokut kojem se može opisati kružnica i vrijedi $\angle M_1M_1'M_2' = \angle M_2'M_2A$. Na limesu kad $M_1' \to M_1$ i $M_2' \to M_2$ dobivamo tvrdnju. □

Teorem 2.6.14. *Bilo koja kružnica koja prolazi inverznim točkama A i B ortogonalna je na kružnicu inverzije $k(O, r_1)$.*

Dokaz. Neka je $k'(S, r_2)$ kružnica sa središtem S radijusa r_2 koja prolazi inverznim točkama A i B i neka siječe kružnicu inverzije u točkama P i Q.



Slika 34.

Vrijedi sljedeće:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = r_1^2$$

i

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = r_1,$$

pa je

$$\overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Slijedi da je OP tangenta na kružnicu k', tj. $\angle OPS = \frac{\pi}{2}$ (svojstvo potencije točke O obzirom na kružnicu k' - opisano kasnije u Teoremu 2.6.16).

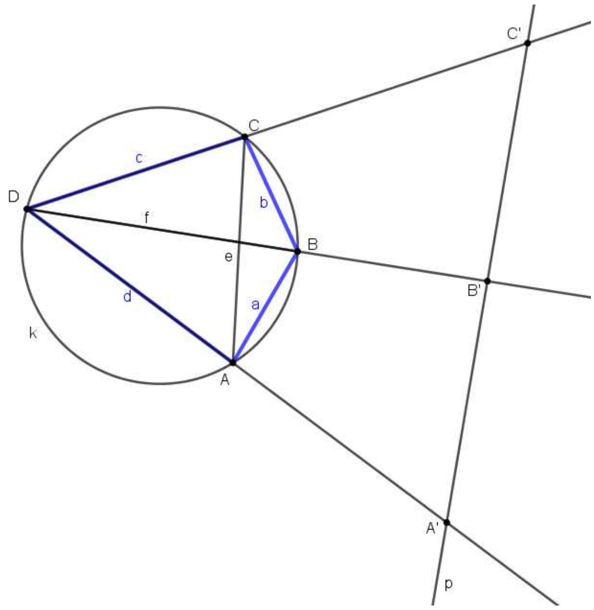
□

Primjena inverzije

Teorem 2.6.15 (Ptolomejev teorem). *U svakom tetivnom četverokutu produkt duljina dijagonala jednak je zbroju produkata njegovih nasuprotnih stranica.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Promotrimo inverziju $Inv_{(D,r)}$ s centrom inverzije D i potencijom $r > 0$. Neka su A', B' i C' redom inverzne slike točaka A, B i C. Neka je k kružnica opisana četverokutu $ABCD$. Prema Propoziciji 2.6.11 kružnica k preslikat će se u pravac koji ne prolazi centrom inverzije, tj. točkom D. Označimo taj pravac s p. Dakle, luk $\widehat{ABC}$ preslikava se u odsječak $A'B'C'$ pravca p. Točke A', B', C' su kolinearne i njihov raspored je A' - B' - C'. Imamo

$$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|. \tag{2.16}$$



Slika 35.

Uvedimo sada oznake $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$, $|AC| = e$ i $|BD| = f$. A' i C' su inverzne slike točaka A i C, pa je (vidjeti izračun prije Definicije 2.6.7)

$$|A'C'| = |AC| \cdot \frac{r}{|DA| \cdot |DC|},$$

tj.

$$|A'C'| = \frac{er}{cd}. \tag{2.17}$$

Analogno dobijemo da je

$$|B'C'| = \frac{br}{fc} \tag{2.18}$$

i

$$|A'B'| = \frac{ar}{fd}. \tag{2.19}$$

Uvrstimo sada (2.17), (2.18) i (2.19) u (2.16):

$$\frac{er}{cd} = \frac{ar}{fd} + \frac{br}{fc}.$$

Pomnožimo dobivenu jednakost s $\frac{cdf}{r}$ i dobit ćemo da vrijedi

$$ef = ac + bd,$$

tj.

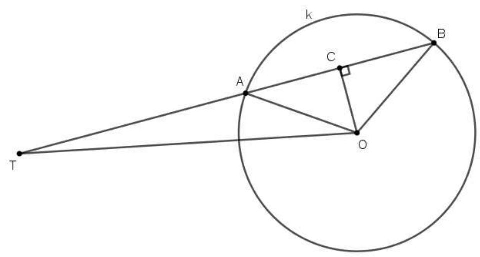
$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|,$$

čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Prije sljedećeg primjera dokazat ćemo teorem koji ćemo koristiti.

Teorem 2.6.16. *Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka T. Ako je p bilo koji pravac kroz T koji siječe kružnicu u točkama A i B, tada je $|TA| \cdot |TB| = \left||OT|^2 - r^2\right| = const$. Tu konstantu zovemo potencija točke T obzirom na kružnicu k.*

Dokaz. Neka je C polovište tetive $\overline{AB}$.



Slika 36.

Tada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} &= \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA}\right)\left(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{TC}^2 - \overrightarrow{CA}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{TO}^2 - \overrightarrow{OC}^2\right) - \left(\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OC}^2\right) = \overrightarrow{TO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OT}^2 - r^2.\end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Primjer 2.6.17. *Neka je $Inv_{(O,R)}$ inverzija s centrom O i potencijom $R \neq 0$, $k(S, r)$ kružnica sa središtem u točki S radijusa r i $k' = Inv_{(O,R)}k$ kružnica polumjera r'. Dokažite da je*

$$r' = \frac{r\,|R|}{\left||OS|^2 - r^2\right|}.$$

Dakle, prema Propozicijama 2.6.10 i 2.6.11 k je kružnica koja ne prolazi centrom inverzije. Neka su $A, B \in k$ krajevi promjera kružnice k koji leži na pravcu $\overline{OS}$ te neka su A' i B' njihove inverzne točke, redom. Tada je

$$2r' = |A'B'| = |AB| \cdot \frac{|R|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{2r \cdot |R|}{\left||OS|^2 - r^2\right|},$$

odakle slijedi tvrdnja.

Definirajmo sada pojmove koji se nalaze u sljedećem teoremu.

Definicija 2.6.18. *Upisana kružnica trokutu je kružnica koja dira svaku od stranica tog trokuta s unutrašnje strane. Središte joj se nalazi u sjecištu simetrala unutarnjih kutova tog trokuta.*

Polumjer trokutu upisane kružnice označavat ćemo s r.

Definicija 2.6.19. *Opisana kružnica trokutu je kružnica koja prolazi vrhovima tog trokuta. Središte joj se nalazi u sjecištu simetrala stranica tog trokuta.*

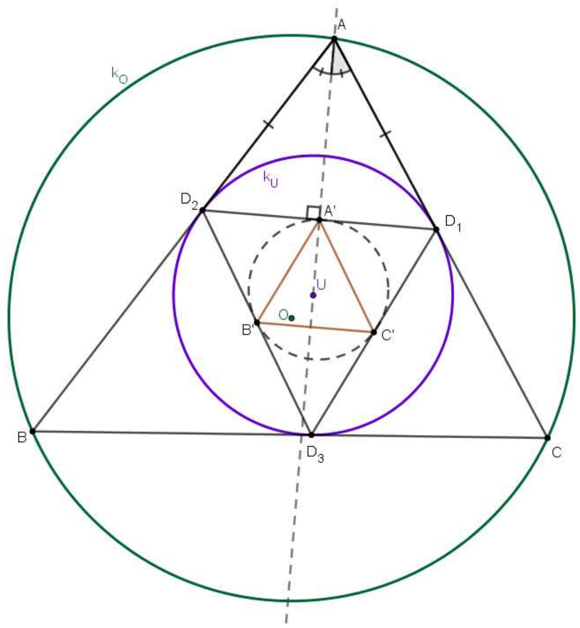
Polumjer trokutu opisane kružnice označavat ćemo s R.

Teorem 2.6.20. *Udaljenost središta U upisane kružnice k_U i središta O opisane kružnice k_O trokuta ABC dana je formulom*

$$|UO| = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

gdje je r polumjer upisane, a R polumjer opisane kružnice trokuta ABC.

Dokaz. Neka su dirališta stranica AC, AB i BC i kružnice k_U redom točke D_1, D_2 i D_3. Promotrimo inverziju kojoj je kružnica inverzije kružnica k_U (to znači da je potencija inverzije r^2). Označimo, kao na slici, s A', B' i C' sjecišta stranica trokuta $D_1D_2D_3$ i pravaca na kojima leži točka U i odgovarajući vrh trokuta ABC.



Slika 37.

Prema konstrukciji inverzne slike točke (Primjer 2.6.4) vidimo da su točke A', B' i C' slike točaka A, B i C obzirom na kružnicu inverzije k_U. Također, vrijedi da su točke A', B' i C' redom polovišta stranica $\overline{D_1D_2}$, $\overline{D_2D_3}$ i $\overline{D_3D_1}$. To se lako pokaže. Recimo, točke D_1 i D_2 dirališta su tangenti iz točke A na kružnicu k_U, pa je $|AD_2| = |D_1A|$. Dakle, trokut $\triangle AD_2D_1$ je jednakokračan. Točka A' pripada dužini D_2D_1, a po konstrukciji točke A' mora vrijediti $AA' \perp D_2D_1$. Pokazali smo da je trokut $\triangle AD_2D_1$ jednakokračan, što povlači da je A' polovište stranice D_2D_1. Tvrdnja analogno vrijedi i za preostale dvije točke.
Stoga se trokutu $\triangle ABC$ opisana kružnica k_O preslikava u kružnicu opisanu trokutu $A'B'C'$ polumjera r'. Trokut $A'B'C'$ homotetičan je s trokutom $D_1D_2D_3$ s koeficijentom homotetije $\frac{1}{2}$, pa je $r' = \frac{r}{2}$. Prema Primjeru 2.6.17 imamo

$$\frac{r}{2} = r' = \frac{Rr^2}{R^2 - |UO|^2},$$

tj. $R^2 - |UO|^2 = 2Rr$, odakle slijedi tvrdnja teorema. □

Bibliografija

[1] Š. Arslanagić, *Ptolomejev teorem, njegova generalizacija i primjena*, Poučak 42, Hrvatsko matematičko društvo i Profil, Zagreb, 2010.

[2] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf`

[3] R. Leikin, A. Berman, O. Zaslavsky, *Applications of symmetry to problem solving*, Taylor & Francis group, 2000.

[4] S. E. Loutidas, M. Th. Rassias, *Problem - solving and selected topics in Euclidean geometry*, Springer, New York, 2013.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[6] J. Stillwell, *Mathematics and its history*, Springer, New York, 2010.

[7] `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg_predavanja.pdf`

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su geometrijske transformacije ravnine i njihova primjena. U prvom poglavlju nalazi se kratki povijesni pregled razvoja euklidske geometrije. Drugo poglavlje bavi se geometrijskim transformacijama ravnine, odnosno preslikavanjima ravnine. Sastoji se od šest potpoglavlja od kojih je u svakom definirana jedna trasformacija, navedena su i dokazana njena osnovna svojstva te prikazana primjena na dokazivanje teorema i rješavanje različitih zadataka. Redom su obrađene sljedeće tranformacije: translacija, centralna simetrija, osna simetrija, rotacija, homotetija i inverzija. Poseban naglasak stavljen je na homotetiju i inverziju.

Summary

This graduate thesis focuses on plane geometric transformations and their applications. First chapter is about historical development of Euclidean geometry. Next chapter is about plane geometric transformations. It consists of six subchapters. In every one of them one geometric transformation is defined and proofs of its basic properties are given. Also, for every geometric transformation, its applications to some interesting theorems and geometric problems are presented. Following transformations are analyzed: translation, symmetry with respect to a center, symmetry with respect to an axis, rotation, homothety and inversion, with main emphasis on homothety and inversion.

Životopis

Rođena sam 21.12.1994. u Splitu. Pohađala sam OŠ Trilj u Trilju, nakon čega sam nastavila svoje školovanje u Općoj gimnaziji Dinka Šimunovića u Sinju. U srpnju 2013. godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički završila sam 2017. godine i iste godine upisala diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.