Odziv dinamičkog sistema na harmonijsku pobudu

Bakula, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:907486

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET
Diplomski studij rudarstva

ODZIV DINAMIČKOG SISTEMA NA HARMONIJSKU POBUDU

Diplomski rad

Ivan Bakula

R-252

Zagreb, 2021.

KLASA: 602-04/20-01/216
URBROJ: 251-70-03-21-2
U Zagrebu, 08.02.2021.

Ivan Bakula, student

RJEŠENJE O ODOBRENJU TEME

Na temelju Vašeg zahtjeva primljenog pod KLASOM 602-04/20-01/216, UR. BROJ: 251-70-11-20-1 od 13.10.2020. godine priopćujemo temu diplomskog rada koja glasi:

ODZIV DINAMICKOG SISTEMA NA HARMONIJSKU POBUDU

Za voditeljicu ovog diplomskog rada imenuje se u smislu Pravilnika o diplomskom ispitu izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević, izvanredna profesorica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Voditeljicu

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević
(titula, ime i prezime)

Predsjednik povjerenstva za završne i diplomske ispite

(potpis)

Doc. dr. sc. Dubravko Domitrović
(titula, ime i prezime)

Prodekan za nastavu i studente

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Dalibor Kuhinek
(titula, ime i prezime)

Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet

Diplomski rad

ODZIV DINAMIČKOG SISTEMA NA HARMONIJSKU POBUDU

IVAN BAKULA

Diplomski rad je izrađen: Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet
Zavod za rudarstvo i geotehniku
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Sažetak:

U radu će se razmatrati odziv na harmonijsku pobudu najprije sistema s jednim stupnjem slobode a potom i s više stupnjeva slobode. Analizirat će se svojstva odziva, frekvencijske funkcije odziva, pojam rezonancije i primjena na pokuse. Kod više stupnjeva slobode, razmatrat će se slučaj prisilnog stanja za koje nije potrebna modalna analiza a nakon toga i primjena same modalne analize.

Ključne riječi: harmonijska pobuda, sustav s jednim stupnjem slobode, sustav s više stupnjeva slobode, frekvencijska funkcija odziva, rezonancija, modalna analiza

Diplomski rad sadrži: 53 stranice, 1 tablicu, 21 sliku, 6 referenci.

Jezik izvornika: Hrvatski

Diplomski rad pohranjen: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta
Pierottijeva 6, Zagreb

Mentor: Dr.sc Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredni profesor RGNF

Ocjenjivači:
1. Dr.sc Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredni profesor RGNF
2. Dr.sc Petar Hrženjak, izvanredni profesor RGNF
3. Dr.sc Željko Andreić, redoviti profesor u trajnom zvanju RGNF

Datum obrane: 12. veljače 2021., Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu

University of Zagreb Master's Thesis

Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering

DYNAMIC SYSTEM RESPONSE TO HARMONIC EXCITATION

IVAN BAKULA

Thesis completed at: University of Zagreb
Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering
Department of Mining Engineering and Geotechnics
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Abstract:

This paper examines system response to harmonic excitation, first discussing the single degree of freedom (sdof) system response, followed by analyzing the multiple degree of freedom (mdof) system response. It discusses response characteristics, frequency response functions, as well as the concept of resonance, and analyzes the theory's experimental application. The mdof system analysis starts with a discussion on the steady state response, for which modal analysis is not necessary, and continues with the application of the modal analysis.

Keywords: harmonic excitation, single degree of freedom system, multiple degree of freedom system, frequency response function, resonancce, modal analysis

Diplomski rad sadrži: 53 pages, 1 table, 21 figures, 6 references.

Original in: Croatian

Archived in: Library of Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering
Pierottijeva 6, Zagreb

Supervisor: Associate professor Antonia Jaguljnjak Lazarević, PhD

Reviewers:
1. Associate professor Antonia Jaguljnjak Lazarević, PhD
2. Associate professor Petar Hrženjak, PhD
3. Tenured professor Željko Andreić, PhD

Defence date: February 12, 2021, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, University of Zagreb

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Sustavi s jednim stupnjem slobode **2**

2.1 Model sustava s jednim stupnjem slobode 2

2.2 Jednadžba gibanja modela pri sinusnoj pobudi 3

2.3 Statički pomak 9

2.4 Frekvencijske funkcije odziva 9

2.4.1 Izvod 9

2.4.2 Zapis prisilnog dijela odziva 12

2.4.3 Grafički prikaz frekvencijske funkcije odziva 16

2.4.4 Dinamički koeficijenti odziva (pomaka, brzine i ubrzanja) 19

2.5 Rezonancija 22

2.5.1 Rezonancija sustava s prigušenjem 22

2.5.2 Rezonancija sustava bez prigušenja 27

2.5.3 Analiza područja rezonancije 29

2.5.4 Praktična primjena matematičkog modela 31

3 Sustavi s više stupnjeva slobode **35**

3.1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija 35

3.2 Ortogonalnost vlastitih vektora 40

3.3 Normiranje vlastitih vektora 41

3.4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom 42

3.5 Modalna analiza 45

3.6 Prigušenje u sustavu s više stupnjeva slobode 47

4 Zaljučak **51**

5 Popis literature **52**

Popis tablica

2.1 Potreban broj titraja do ustaljenog stanja 26

Popis slika

1.1 Shematski prikaz dinamičkog sustava 1

2.1 Idealizirani sustav s jednim stupnjem slobode 2
2.2 Prikaz sila; (a) prigušenog sustava; (b) neprigušenog sustava 3
2.3 Odziv prigušenog sustava na pobudu sinusnom silom za $\omega/\omega_n = 0,2$ i $\zeta = 0,05$ 7
2.4 Odziv neprigušenog sustava za homogene početne uvjete i $\omega/\omega_n = 0,2$ . . 8
2.5 Shematski prikaz funkcija $H(\omega i)$ i $H^*(\omega i)$ u Gaussovoj ravnini 14
2.6 Dinamički koeficijent i fazni kut za prigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi 16
2.7 Dinamički koeficijent i fazni pomak za neprigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi 17
2.8 Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja za različite vrijednosti ζ 20
2.9 Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja u logaritamskom mjerilu . . . 21
2.10 Odziv prigušenog sustava na pobudu rezonantnom frekvencijom 24
2.11 Ovisnost amplitude odziva o broju titraja u rezonanciji 26
2.12 Rezonancija neprigusenog sustava 28
2.13 Definicija pojasa polovice snage 29
2.14 Shematski prikaz vibracijskog uređaja: (a) u inicijalnom položaju; (b) položaj nakon vremena t 31
2.15 Amplituda ubrzanja u ovisnosti o omjeru frekvencija 32
2.16 Frekvencijska funkcija odziva konstruirana pomoću mjerenih podataka . . . 34

3.1 Idealizirani sustav s dva stupnja slobode: (a) dvoetažni posmični okvir; (b) ekvivalentni model; (c) prikaz sila 35
3.2 Shematski prikaz vlastitih oblika titranja sustava s dva stupnja slobode . . . 39
3.3 Grafički prikaz vektora U po komponentama U_1 i U_2 44
3.4 Idealizirani sustav s dva stupnja slobode i prigušenjem: (a) dvoetažni posmični okvir s prigušenjem; (b) ekvivalentni prigušeni model; (c) prikaz sila; 47

Popis korištenih oznaka i pripadajućih SI jedinica

Oznaka	Opis	Jedinica
m	masa	kg
k	krutost	Nm^{-1}
c	koeficijent viskoznog prigušenja	kgs^{-1}
$c_k r$	kritično prigušenje	kgs^{-1}
F_S	unutarnja sila	N
F_D	sila prigušenja	N
u	pomak	m
$\dot{u},\ v$	brzina	$ms^{-}1$
$\ddot{u}$	ubrzanje	ms^{-2}
p_0	amplituda	m
σ	stupanj prigušenja	s^{-1}
ω_D	vlastita frekvencija prigušenog titranja	s^{-1}
ω_n	prirodna frekvencija	s^{-1}
i	imaginarna jedinica	
R_d	dinamički faktor pomaka	
R_v	dinamički faktor brzine	
R_a	dinamički faktor ubrzanja	
$\{\psi\}_n$	vlastiti vektori (oblici titranja)	
ω	vlastite vrijednosti (prirodne frekvencije)	s^{-1}
$\mathbf{\Psi}$	modalna matrica	
$\mathbf{\Omega}$	spektralna matrica	$[s^{-1}]$
$\mathbf{m}$	matrica masa	$[kg]$
$\mathbf{k}$	matrica krutosti	$[Nm^{-1}]$
$M_{n,n}$	modalna masa	kg
$K_{n,n}$	modalna krutost	Nm^{-1}
$\mathbf{M}$	matrica modalnih masa	$[kg]$
$\mathbf{K}$	matrica modalnih krutosti	$[Nm^{-1}]$
$\mathbf{C}$	matrica modalnih prigušenja	$[kgs^{-1}]$

1 Uvod

Dinamičke pobude izuzetno su česta pojava u tehnologiji. Primjerice, u graditeljstvu, strojarstvu i sl. dinamičkom pobudom smatramo djelovanje sile čiji se intenzitet mijenja tijekom vremena. Takva sila može biti zadana funkcijom $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$. Dinamički sustav je svaki sustav pod utjecajem dinamičke pobude, a rezultat djelovanja pobude je odziv.



Slika 1.1: Shematski prikaz dinamičkog sustava

Sa shematskoga prikaza 1.1 može se naslutiti da su pobuda i odziv u međusobnoj sprezi. Navedenom spregom "upravlja" dinamički sustav. U slučaju da dinamički sustav pripada razredu linearnih sustava, sprega između pobude i odziva zadana je konvolucijom pobude s prijenosnom funkcije sustava. Sama prijenosna funkcija određena je diferencijalnom jednadžbom sustava.

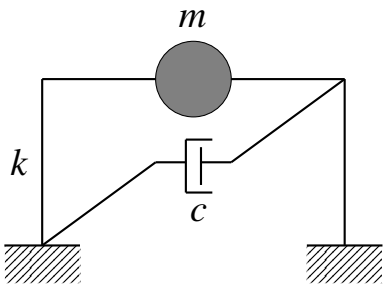
U ovome se radu razmatra mehanički linearni sustav najprije s jednim, a zatim i s više stupnjeva slobode pod utjecajem harmonijske sile $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$. Teorijski koncepti izvedeni za linearni sustav s jednim stupnjem slobode koriste se u razvoju eksperimentalnih metoda za određivanje perioda stupnja prigušenja realnih konstrukcija.

Cilj ovog rada jest upoznavanje s osnovnim teorijskim i praktičnim znanjima iz dinamike konstrukcija.

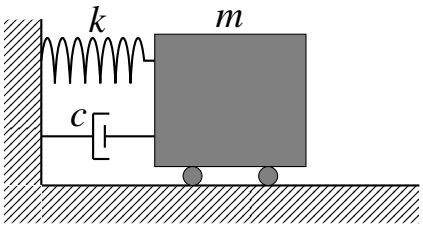
2 Sustavi s jednim stupnjem slobode

2.1 Model sustava s jednim stupnjem slobode

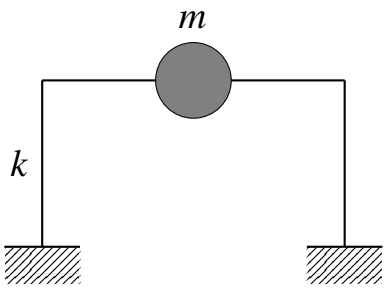
Modeli sustava s jednim stupnjem slobode su posmični okviri, a možemo ih shvatiti kao idealizaciju jednokatnice. Posmični okviri se sastoje od štapova, koncentrirane mase i viskoznog prigušivača, pri čemu je ukupna krutost sustava sadržana u krutosti štapova, ukupna masa sustava u koncentriranoj masi i ukupno prigušenje u viskoznom prigušivaču. Nadalje, vrijedi pretpostavaka o vertikalnoj i horizontalnoj nestišljivosti štapova, tj. štapovi su nepromjenjive dužine.



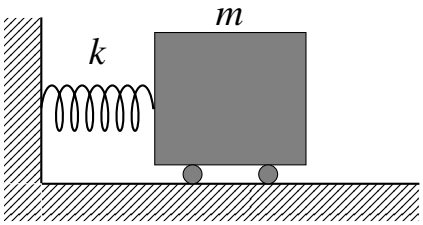
(a) Posmični okvir s prigušenjem



(b) Ekvivalentni model s prigušenjem



(c) Posmični okvir bez prigušenja



(d) Ekvivalentni model bez prigušenja

Slika 2.1: Idealizirani sustav s jednim stupnjem slobode

Primjetimo da navedeni sustav s pogleda statike predstavlja ravninski problem s tri stupnja slobode (dvije rotacije u zglobovima te translacija), stoga ga je potrebno svesti na sustav s jednim stupnjem slobode za potrebe dinamičkog proračuna. Drugim riječima, potrebno je ukupnu krutost sustava izraziti kao lateralnu krutost. Postupak svođenja statičkog sustava s tri stupnja slobode na dinamički sustav s jednim stupnjem slobode naziva se *statička kondenzacija* koju u ovom radu nećemo razmatrati.

2.2 Jednadžba gibanja modela pri sinusnoj pobudi

Prikaz sila za sustav s prigušenjem na koji djeluje sila pobude $p(t)$ nalazi se na slijedećoj slici:



(a) (b)

Slika 2.2: Prikaz sila; (a) prigušenog sustava; (b) neprigušenog sustava

Prema drugom Newtonovom aksiomu vrijedi:

$$\Sigma F = ma = m\ddot{u}$$

$$p(t) - F_S - F_D = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + F_S + F_D = p(t) \tag{2.1}$$

gdje je:

F_S	unutarnja sila
F_D	sila prigušenja
m	masa
$a, \ddot{u}$	ubrzanje

Unutarnju silu možemo zapisati kao:

$$F_S = k \cdot u \tag{2.2}$$

A silu prigušenja kao:

$$F_D = c \cdot v = c \cdot \dot{u} \tag{2.3}$$

gdje je:

k	krutost
c	koeficijent viskoznog prigušenja
u	pomak
$\dot{u}, v$	brzina

Uvrštavanjem (2.2) i (2.3) u (2.1) dobijemo:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{2.4}$$

Sila pobude $p(t)$ je sinusna sila $p_0 sin(\omega t)$, pri čemu je p_0 amplituda, a ω frekvencija, stoga jednadžba pod (2.4) postaje:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 sin(\omega t) \tag{2.5}$$

Jednadžba pod (2.5) jest nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda, a riješiti ćemo ju primjenom Laplaceove transformacije[1].

Transformiranjem jednadžbe (2.5) dobijemo slijedeću algebarsku jednadžbu u frekvencijskoj domeni:

$$m(s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0)) + c(sU(s) - u(0)) + kU(s) = P(s) \tag{2.6}$$

gdje je $P(s)$ transformat funkcije $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$, a $U(s)$ transformat funkcije $u(t)$. Sređivanjem (2.6) dobijemo:

$$U(s)\left(ms^2 + cs + k\right) - msu(0) - m\dot{u}(0) - cu(0) = P(s) \tag{2.7}$$

Jednadžbu (2.7) možemo rastaviti na više logičnih cijelina:

$$\text{Dinamička krutost} \qquad Z(s) = ms^2 + cs + k \tag{2.8}$$

$$\text{Prijenosna funkcija sustava} \qquad H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{2.9}$$

$$\text{Pobuda početnim uvjetima} \qquad W(s) = (ms + c)u(0) + m\dot{u}(0) \tag{2.10}$$

$$\text{Pobuda sinusnom silom} \qquad P(s) = p_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{2.11}$$

Uvrštavanjem (2.9),(2.16) u (2.7) dobijemo:

$$\frac{U(s)}{H(s)} = W(s) + P(s)$$

Množenjem prijenosnom funkcijom sustava ($H(s)$) dobijemo:

$$U(s) = H(s)W(s) \; + \; H(s)P(s) \tag{2.12}$$

Pri čemu je:

$H(s) \cdot W(s)$	odziv na pobudu početnim uvjetima u frekvencijskoj domeni
$H(s) \cdot P(s)$	odziv na pobudu sinusnom silom u frekvencijskoj domeni

[1]Iako postupkom dugotrajnija (u ovom slučaju), metoda Laplaceove transformacije nam pruža jedinstven uvid u međudjelovanje sustava i pobude.

Da bi bilo lakše naći inverze odziva u frekvencijskoj domeni potrebno je funkciju $H(s)$ prikazati u tabličnom obliku[2].

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_D}\frac{1}{k}\frac{\omega_D}{(s+\sigma)^2+\omega_D^2} \tag{2.13}$$

gdje je:

$\sigma = \zeta\omega_n$	stupanj prigušenja
$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	vlastita frekvencija prigušenog titranja
$\omega_n = \sqrt{k/m}$	prirodna frekvencija oscilatora
$\zeta = c/c_{kr}$	koeficijent relativnog prigušenja
$c_{kr} = 2m\omega_n$	kritično prigušenje

Pobuda početnim uvjetima zadana je preko jednadžbe:

$$\begin{aligned} H(s)W(s) = \frac{u_0}{\omega_D}\left(\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_D^2} + \sigma\frac{\omega_D}{(s+\sigma)^2+\omega_D^2}\right) \\ + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D}\frac{\omega_D}{(s+\sigma)^2+\omega_D} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Odziv u vremenskoj domeni se određuje pronalaskom inverza $\mathcal{L}$ transformacije funkcije odziva u frekvencijskoj domeni.

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)H(s)\} + \frac{p_0}{k}\mathcal{L}^{-1}\{H(s)P(s)\} \tag{2.15}$$

Funkcija $H(s)W(s)$ svedena je na tablični oblik stoga je moguće izravno naći inverz Laplaceove transformacije koji glasi:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)W(s)\} = e^{-\sigma t}\left[u(0)cos(\omega_D t) + \left(\sigma\frac{u(0)}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D}\right)sin(\omega_D t)\right] \tag{2.16}$$

Funkciju $H(s)P(s)$ nije moguće svesti na tablični oblik, pa je potrebno odrediti konvoluciju funkcija $h(t)$ i $p(t)$. Funkcija funkcija $H(s)$ odgovara funkciji $h(t)$ u vremenskoj domeni, a funkcija $P(s)$ funkciji $p(t)$, stoga:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{k}\frac{\omega_n^2}{\omega}e^{-\sigma t}sin(\omega_D t) \tag{2.17}$$

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p_0\sin(\omega t) \tag{2.18}$$

[2]postupak svođenja prijenosne funkcije sustava na tablični oblik prikazan je u slijedećem pogavlju

Konvoluciju funkcija određujemo preko konvolucijskog integrala:

$$\begin{aligned}(h * p)(t) &= \int_0^t h(\tau)p(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{p_0}{k}\frac{\omega_n^2}{\omega}\int_0^t e^{-\sigma\tau}sin(\tau)sin(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ukupni odziv je suma odziva na pobudu početnim uvjetima i odziva na pobudu harmonijskom silom odnosno:

$$\begin{aligned}u(t) = &\underbrace{e^{-\sigma t}\left[u(0)cos(\omega_D t) + \left(\sigma\frac{u(0)}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D}\right)sin(\omega_D t)\right]}_{\textbf{pobuda početnim uvjetima (prolazni dio odziva)}} \\ &+ \underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{\omega_n^2}{\omega_D}\int_0^t e^{-\sigma\tau}\sin(\tau)\sin(t-\tau)d\tau}_{\textbf{pobuda sinusnom silom}}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Postupak određivanja i sređivanja rješenja konvolucijskog integrala iz (2.19) je dugotrajan pa je u nastavku prikazano samo konačno rješenje.

$$\begin{aligned}(h * p)(t) = &\underbrace{Csin(\omega t) + Dcos(\omega t)}_{\textbf{prisilni dio odziva}} \\ &\underbrace{- e^{-\sigma t}\left(Dcos(\omega_D t) + \left(\frac{D\sigma}{\omega_D} + \frac{C\omega}{\omega_D}\right)sin(\omega_D t)\right)}_{\textbf{prolazni dio odziva}}\end{aligned} \tag{2.21}$$

gdje je:

$$C = \frac{p_0}{k}\frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2} \tag{2.22}$$

$$D = \frac{p_0}{k}\frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2]} \tag{2.23}$$

Iz (2.21) i (2.20) možemo zaključiti da će se prolazni dio odziva pojaviti i u slučaju homogenih i u slučaju nehomogenih početnih uvjeta (prisutan i kod pobude početnim uvjetima i kod pobude silom), a ovisi o karakteristikama sustava, te se smanjuje eksponencijalno u ovisnosti o vremenu. Nakon što prolazni dio odziva isčezne preostaje samo prisilni dio odziva, a pojavljuje se neovisno o početnim uvjetima. Karakteristike prisilnog dijela odziva ponajviše ovise o frekvenciji i amplitudi pobude, a zatim i o karakteristikama sustava (o prigušenju te prirodnoj frekvenciji sustava). Karakteristike prisilnog dijela odziva detaljnije će se razmatrati u slijedećim poglavljima.

Uvrštavanjem (2.21) u (2.20), te sređivanjem dobijemo ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe (2.5) koje glasi:

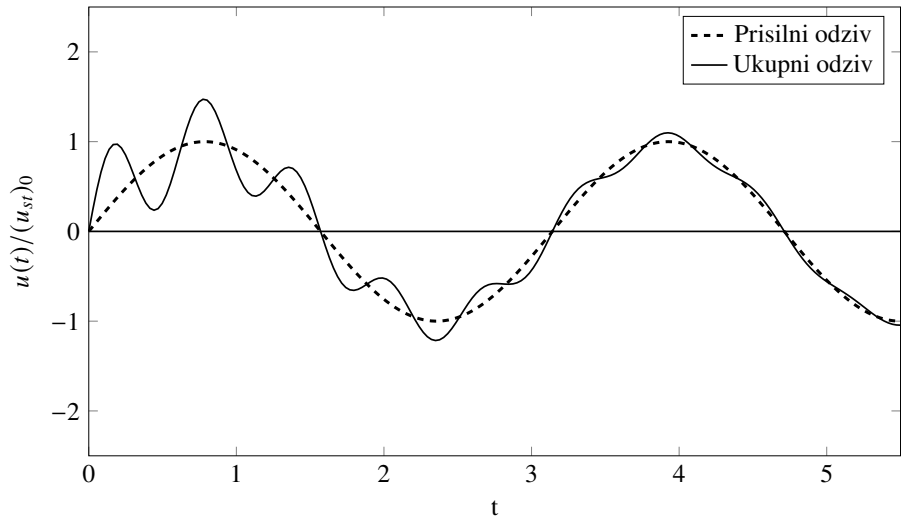
$$u(t) = \underbrace{e^{-\sigma t}(Acos(\omega_D t) + Bsin(\omega_D t))}_{\textbf{prolazni dio odziva}} + \underbrace{Csin(\omega t) + Dcos(\omega t)}_{\textbf{prisilni dio odziva}} \tag{2.24}$$

gdje je:

$$A = u(0) - D \tag{2.25}$$

$$B = \frac{u(0)\sigma}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} - \frac{D\sigma}{\omega_D} - \frac{C\omega}{\omega_D} \tag{2.26}$$

Graf odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode za homogene početne uvjete $u(0) = 0$ i $\dot{u}(0) = 0$ prikazan je na slijedećoj slici.



Slika 2.3: Odziv prigušenog sustava na pobudu sinusnom silom za $\omega/\omega_n = 0,2$ i $\zeta = 0,05$

Neprigušeni sustav možemo shvatiti kao poseban slučaj prigušenog sustava za slučaj $c = 0$ odnosno $\zeta = 0$, pa diferencijalna jednadžba sustava postaje:

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \tag{2.27}$$

Rješenje jednadžbe gibanja možemo odrediti iz (2.24) određivanjem koeficijenata A, B, C i D za $\zeta = 0$.

$$A = u(0) \tag{2.28}$$

$$B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{2.29}$$

$$C = \frac{p_0}{k}\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{2.30}$$

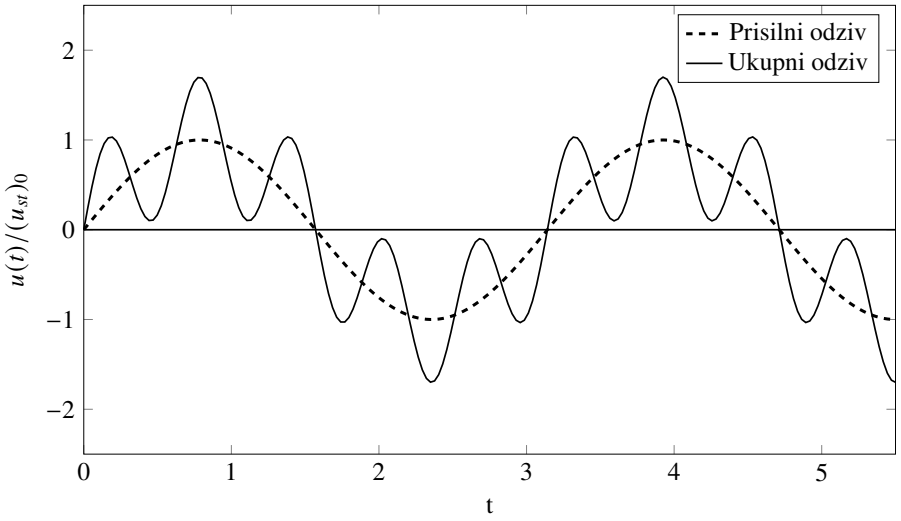
$$D = 0 \tag{2.31}$$

$$\sigma = \omega_n\zeta = \omega_n \cdot 0 = 0 \tag{2.32}$$

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n\sqrt{1 - 0} = \omega_n \tag{2.33}$$

Uvrštavanjem (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) i (2.33) u (2.24) dobijemo rješenje diferencijalne jednadžbe pod (2.27) koje glasi:

$$u(t) = \underbrace{u(0)cos(\omega_n t) + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k}\frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right] sin(\omega_n t)}_{\textbf{prolazni dio odziva}} + \underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} sin(\omega t)}_{\textbf{prisilni dio odziva}} \tag{2.34}$$



Slika 2.4: Odziv neprigušenog sustava za homogene početne uvjete i $\omega/\omega_n = 0,2$

2.3 Statički pomak

Zanemarivanjem ubrzanja u diferencijalnoj jednadžbi pod (2.27) dobijemo:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} sin(\omega t) \tag{2.35}$$

Navedena jednadžba predstavlja *vremensku funkciju statičkog pomaka* (Lazarević, Novak i Uroš 2018.). Pomak nazivamo statičkim jer se zanemaruje dinamički utjecaj sile pobude (pretpostavlja se spora promjena opterećenja). Vremenska funkcija statičkog pomaka, preko Hookeovog zakona, stavlja u odnos silu pobude ($p_0 sin(\omega t)$) i pomak sustava $u(t)$. Zanemarivanjem funkcije sinus, dobijemo amplitudu statičkog pomaka koja je definirana slijedećom jednadžbom:

$$(u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \tag{2.36}$$

2.4 Frekvencijske funkcije odziva

2.4.1 Izvod

Ponašanje sustava opisano je diferencijalnom jednadžbom drugog reda (u vremenskoj domeni) koja nakon $\mathcal{L}$-transformacija postaje algebarska jednadžba u s domeni (Babić 1996.). Transformat odziva na sinusnu silu uz homogene početne uvjete glasi:

$$U(s) = P(s) \cdot H(s) \tag{2.37}$$

Funkcija $H(s)$ naziva se prijenosnom funkcijom sustava, a definirana je kao kvocjent odziva i pobude u s domeni.

$$H(s) = \frac{U(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{2.38}$$

Prijenosna funkcija sustava obično sadrži dvije skupine karakterističnih točaka:

1. polovi - nultočke nazivniku
2. nule - nultočke brojnika

Polovi predstavljaju točke u kojima prijenosna funkcija sustava divergira tj ($H(s) \to \infty$), a nule su točke u kojima vrijednost prijenosne funkcije iznosi nula. Polovi i nule za polinom drugog stupnja mogu biti:

1. dva različita realna broja
2. jedan dvostruki realni broj
3. jedan par kompleksno konjugiranih brojeva

Uočimo da za slučaj prijenosne funkcije sustava pod (2.38) nema nula, a polovi su jedan par kompleksno konjugiranih brojeva (polovi su dobiveni izjednačavanjem polinoma u nazivniku s nulom):

$$p_{1,2} = -\sigma \pm \omega_D i \tag{2.39}$$

Realni dio pola prikazuje stupanj prigušenja, a imaginarni dio prirodnu frekvenciju prigušenog titranja. Prijenosna funkcija zapisana preko polova glasi:

$$H(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \tag{2.40}$$

Raspisivanjem dobijemo:

$$H(s) = \frac{1}{(s + \sigma + \omega_D i)(s + \sigma - \omega_D i)} \frac{\omega_n^2}{k} \tag{2.41}$$

I konačno tablični oblik dobijemo množenjem s ω_D/ω_D

$$H(s) = \frac{1}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega_D} \frac{\omega_D}{(s + \sigma^2) + \omega_D^2} \tag{2.42}$$

Poseban slučaj prijenosne funkcije sustava, za slučaj $s = \omega i$, naziva se *frekvencijska funkcija odziva* (Babić 1996.) i glasi:

$$H(\omega i) = \frac{H(\omega i)}{P(\omega i)} = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \frac{1/k}{1/k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(\omega/\omega_n)i} \tag{2.43}$$

Član $1/k$ možemo zanemariti jer je uračunat u amplitudu statičkog pomaka $(u_{st})_0 = p_0/k$, pa je konačni oblik frekvencijske funkcije odziva:

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right) + (2\zeta\omega/\omega_n)\, i} \tag{2.44}$$

Frekvencijska funkcija odziva $H(\omega)$ je funkcija argumenta ω, odnosno promjenom frekvencije pobude, mjenja se i njezina vrijednost, te je redovito je kompleksna (ibid.). Jednadžbu pod (2.44) možemo rastaviti na realni i imaginarni dio. Rastav na realni i imaginarni dio prikazan je u nastavku.

$$\text{Realni dio} \qquad H_r = \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \tag{2.45}$$

$$\text{Imaginarni dio} \quad H_i = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \tag{2.46}$$

Jednadžba pod (2.44) zapisana preko realnog i imaginarnog dijela glasi:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_r - H_i i \\ &= \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} - \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} i \end{aligned} \tag{2.47}$$

Funkciju (2.44) se može prikazati i u trigonometrijskom obliku. Općenito, kompleksni broj se prikazuje u trigonometrijskom obliku na slijedeći način:

$$R = |R|e^{i\phi} = |R|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \tag{2.48}$$

gdje je $|R|$ apsolutna vrijednost ili norma kompleksnog broja, a ϕ kut kojega kompleksni vektor zatvara s realnom osi. Stoga je očito da je za navedeni prikaz potrebno je odrediti normu kompleksnog broja frekvencijske funkcije odziva te kut koji zatvara s realnom osi. Norma je zadana Pitagorinim poučkom, dakle:

$$|H(\omega)| = \sqrt{(H_r^2 + H_i^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}} \tag{2.49}$$

Kut koji kompleksni vektor zatvara s realnom osi moguće je odrediti slijedećom jednadžbom:

$$\phi(\omega) = \left|\arctan\left(\frac{H_i}{H_r}\right)\right| = \left|\arctan\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)\right| \tag{2.50}$$

Prikazana u trigonometrijskom obliku, frekvencijsku funkciju odziva potrebno je rastaviti na normu koja je definirana jednadžbom (2.49) i na fazni kut koji je definiran jednadžbom (2.50). **Napomena:** jednadžba (2.50) stavljena je u apsolutnu vrijednost zato što će se negativni predzak (kašnjenje) ili pozitivni predznak uračunati naknadno, no više o tome u slijedećem poglavlju.

2.4.2 Zapis prisilnog dijela odziva

Prisilni dio odziva definiran je jednadžbom prikazanom u nastavku:

$$u(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \tag{2.51}$$

pri čemu su konstante C i D izračunate pod (2.30) i (2.31). Prisilni odziv pod (2.51) možemo zapisati u obliku $u_0 \sin(\omega t - \phi)$ korištenjem slijedećeg trigonometrijskog identiteta (Lazarević, Novak i Uroš 2018.):

$$u_0 \sin(\omega t - \phi) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \tag{2.52}$$

gdje je:

$$\text{amplituda dinamičkog pomaka} \quad u_0 = \sqrt{C^2 + D^2} \tag{2.53}$$

$$\text{kašnjenje u fazi} \qquad \phi = \arctan -\frac{D}{C} \tag{2.54}$$

Raspisivanjem formule pod (2.53) dobijemo:

$$u_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = \frac{(u_{st})_0}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{2.55}$$

Definiramo dinamički koeficijent pomaka ili koeficijent povećanja pomaka (R_d) kao omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka.

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{2.56}$$

Fazni kut ϕ dobijemo raspisivanjem izraza pod (2.54) te dobijemo:

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{2.57}$$

Te konačno, uvrštavanjem (2.56) i (2.57) u (2.52) dobijemo prisilni odziv koji glasi:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} R_d \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \tag{2.58}$$

Prisilni odziv kao poseban slučaj rješenja $p(t) = p_o e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

[3] Odziv na pobudu sinusnom silom može se odrediti konvolucijom prijenosne funkcije i funkcije pobude u vremenskoj domeni. Zadana je pobuda sinusnom silom oblika:

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t}\sin(\omega t) \tag{2.59}$$

[3] Postupak je temeljen na (Babić 1996.) str 112

Jednadžbu (2.59) možemo zapisati u eksponencijalnom obliku:

$$p(t) = \frac{1}{2i} p_0 (e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}) \tag{2.60}$$

Uvodimo:

$$s = \alpha + i\omega \tag{2.61}$$

$$s^* = \alpha - i\omega \tag{2.62}$$

Uvrštavanjem (2.61) i (2.62) u (2.60) dobijemo:

$$p(t) = \frac{1}{2i} p_0 (e^{st} - e^{s^* t}) \tag{2.63}$$

Prijenosna funkcija sustava (s izlučenim članom $1/k$) zadana je u obliku $1/kh(t)$. Izračun odziva je prikazan u nastavku:

$$u(t) = \frac{1}{k}(h * p)(t) = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

Uvodi se supstitucija $\lambda = t - \tau$.

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(\lambda) p(t-\lambda) d\lambda = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(\lambda) \left[\frac{1}{2i} p_0 \left(e^{st - s\lambda} - e^{s^* t - s^* \lambda} \right) \right] d\lambda$$

Raspisivanjem i sređivanjem dobijemo:

$$u(t) = \frac{1}{2i} \frac{p_0}{k} \left[e^{st} \underbrace{\int_0^\infty h(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda}_{I)} - e^{s^* t} \underbrace{\int_0^\infty h(\lambda) e^{-s^* \lambda} d\lambda}_{II)} \right] \tag{2.64}$$

Uočimo da integrali označeni s $I)$ i $II)$ predstavljaju Laplaceovu transformaciju prijenosne funkcije sustava pa izraz pod (2.64) postaje:

$$u(t) = \frac{1}{2i} \frac{p_0}{k} (e^{st} H(s) - e^{s^* t} H(s)) \tag{2.65}$$

Varijabla s^* je kompleksno konjugirana varijabla s, pa je funkcija $H(s^*)$ kompleksno konjugirana funkcija $H(s)$, odnosno:

$$H(s^*) = H^*(s) \tag{2.66}$$

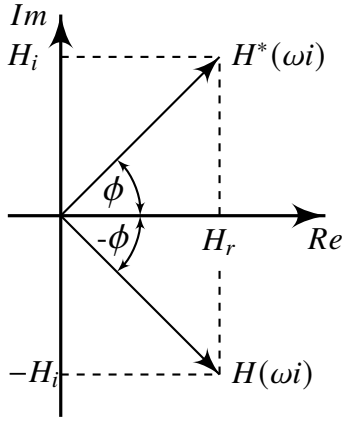
Korištenjem (2.66) jednadžba (2.65) postaje:

$$u(t) = \frac{1}{2i} \frac{p_0}{k} (e^{st} H(s) - e^{s^* t} H^*(s)) \tag{2.67}$$

Poseban slučaj je za $\alpha = 0$ odnoso $s = i\omega$ i $s^* = -i\omega$. Tada prijenosne funckije sustava postaju frekvencijske funkcije odziva, a izraz pod (2.67) glasi:

$$u(t) = \frac{1}{2i}\frac{p_0}{k}(e^{i\omega t}H(\omega i) - e^{-i\omega t}H^*(i\omega)) \tag{2.68}$$

Frekvencijska funkcija odziva $H(\omega i)$ zadana je jednadžbom (2.47). Možemo uočiti da je njezin imaginarni dio negativan, što znači da je imaginarni dio funkcije $H^*(\omega i)$ pozitivan.



Slika 2.5: Shematski prikaz funkcija $H(\omega i)$ i $H^*(\omega i)$ u Gaussovoj ravnini

Modul funkija $H(\omega)$ i $H^*(\omega)$ je isti a definiran je jednadžbom (2.49) a fazni kut jednadžbom (2.50). Sa slike 2.5 vidljivo je da je kut ϕ što ga zatvara $H(\omega)$ s realnom osi negativan, a kut što ga zatvara $H^*(\omega)$ s realnom osi pozitivan. Trigonometrijski zapisi funkcija $H(\omega)$ i $H^*(\omega)$ dati su u nastavku.

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{-i\phi} \tag{2.69}$$

$$H^*(\omega) = |H(\omega)|e^{i\phi} \tag{2.70}$$

Uvrštavanjem (2.69) i (2.70) u (2.68) dobijemo:

$$u(t) = \frac{1}{2i}\frac{p_0}{k}|H(\omega)|(e^{i\omega t}e^{-i\phi} - e^{-i\omega t}e^{i\phi}) = \frac{1}{2i}\frac{p_0}{k}|H(\omega)|(2i\sin(\omega t - \phi)) \tag{2.71}$$

Te konačno:

$$u(t) = \frac{p_0}{k}|H(\omega)|\sin(\omega t - \phi) \tag{2.72}$$

Jednadžba (2.72) predstavlja prisilni dio odziva.

Iz (2.56) i (2.49) slijedi da je *dinamički faktor* zapravo *norma (ili intenzitet)* frekvencijske funkcije odziva. Stoga jednadžbu pod (2.72) možemo zapisati kao:

$$u(t) = \frac{p_0}{k}R_d\sin(\omega t - \phi) \tag{2.73}$$

Iz (2.73) možemo definirati fizikalnu interpretaciju frekvencijske funkcije odziva. Dakle, frekvencijska funkcija odziva definira odnos između pobude i odziva. Taj odnos je kompleksan jer je opisan intenzitetom, odnosno dinamičkim koeficijentom pomaka, te faznim kutom kompleksne funkcije definirane u s domeni (Košćak i Turkalj 2012.). Drugim riječima, frekvencijska funkcija odziva nas upućuje na slijedeća svojstva (prisilnog) odziva:

1. Frekvencija odziva biti će jednaka frekvenciji pobude (ω).

2. Amplituda odziva biti će skalirana amplituda statičkog pomaka. Prisjetimo se da je amplituda statičkog pomaka u izravnoj vezi sa amplitudom sile pobude.

3. Odziv će zaostajati u fazi za pobudom.

Skaliranje amplitude statičkog pomaka $(u_{st})_0$ definirano je *dinamičkim koeficijentom* R_d. Navedeni koeficijent je konkretna vrijednost frekvencijske funkcije odziva za određenu frekvenciju ω. Analogno tome, kašnjenje u fazi definirano je faznim kutom funkcije odziva.

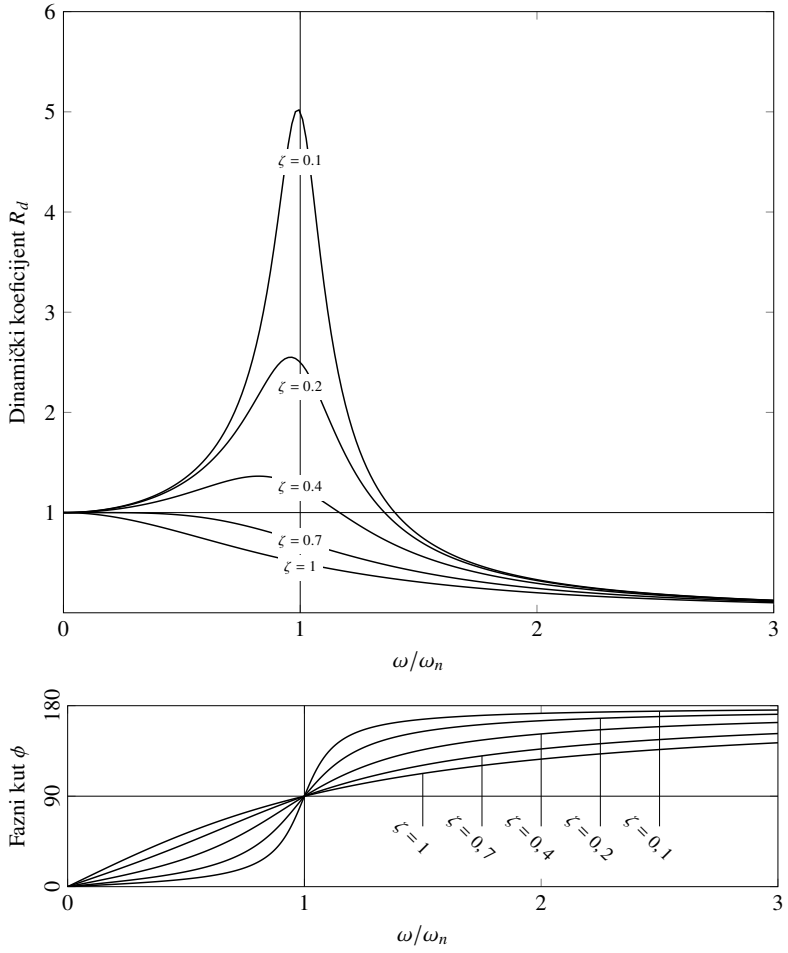
2.4.3 Grafički prikaz frekvencijske funkcije odziva

Zbog toga što frekvencijska funkcija pomaka definira uvećanje amplitude statičkog pomaka (dinamički koeficijent pomaka) i fazno zaostajanje odziva za pobudom od posebnog su nam interesa kut i intenzitet frekvencijske funkcije odziva (polarni zapis).

Za konstantan ω_n vrijednosti funkcija definiranih jednadžbama (2.49) i (2.50) biti će za omjer ω/ω_n, stoga taj omjer možemo postaviti i kao argument navedenih funkcija.

$$R_d = \left| H\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{((1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}} \tag{2.74}$$

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)}\right) \tag{2.75}$$



Slika 2.6: Dinamički koeficijent i fazni kut za prigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi

Intenzitet frekvencijske funkcije odziva prikazuje funkcijsku ovisnost dinamičkog koeficijenta R_d o omjeru frekvencije pobude i prirodne frekvencije za određeno prigušenje. Analogno tome fazni kut frekvencijske funkcije odziva prikazuje kašnjenje u fazi za pobudom u ovisnosti o omjeru frekvencija ω/ω_n za određeni faktor relativnog prigušenja.

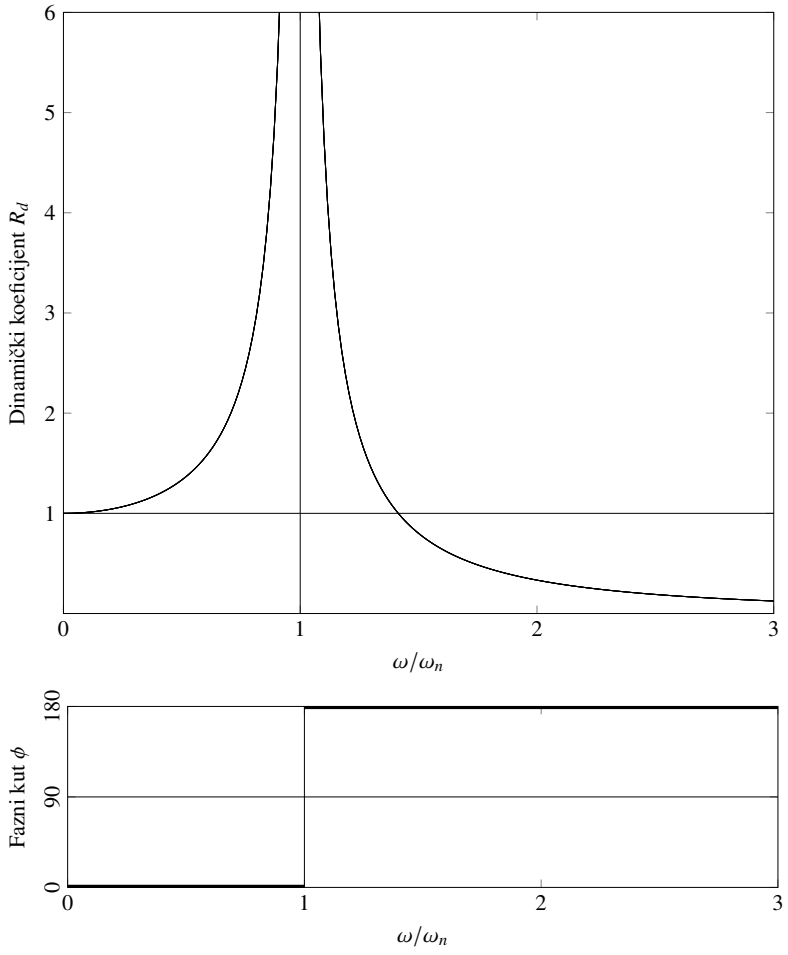
Za neprigušeno titranje, funkcije faznoga kuta i dinamičkog koeficijenta pomaka prikazane su u nastavku.

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1-(\omega/\omega_n)}\right) \tag{2.76}$$

$$R_d = \left|H\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{((1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\cdot 0(\omega/\omega_n))^2}} = \frac{1}{|1-(\omega/\omega_n)^2|} \tag{2.77}$$

Iz formule (2.76) očito je da za neprigušeno titranje postoje tri vrijednosti faznog kuta koje ovise o izrazu u nazivniku. Vrijednosti faznog kuta prikazane su u nastavku:

$$\phi = \begin{cases} 0° & \text{za } 1-(\omega/\omega_n)^2 > 0 \\ 90° & \text{za } 1-(\omega/\omega_n)^2 = 0 \\ 180° & \text{za } 1-(\omega/\omega_n)^2 < 0 \end{cases}$$



Slika 2.7: Dinamički koeficijent i fazni pomak za neprigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi

Analizirajući krivulje sa (2.6) i (2.7) navedene grafove možemo podijeliti na tri područja (Chopra 2011.):

1. Područje kontrolirano krustošću - za slučaj spore promjene opterećenja ($\omega/\omega_n << 1$ - lijevo na grafu) utjecaj prigušenja je neznatan (krivulje za različita prigušenja su jako bliske) a dinamički utjecaj je mali, tj. $R_d \approx 1$ što znači da je amplituda prisilnog odziva približno jednaka amplitudi statičkog pomaka, pa amplitudu prisilnog odziva možemo aproksimirati slijedećom jednadžbom:

$$u_0 \simeq (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \tag{2.78}$$

   Fazni kut je približno 0° pa su pobuda i odziv u fazi.

2. Područje kontrolirano prigušenjem - Za slučaj $\omega/\omega_n \simeq 1$, izražen razmak između krivulja nalaže najeveći utjecaj prigušenja na vrijednost dinamičkog faktora, a samim time i na ukupnu amplitudu prisilnog odziva. Dinamički faktor R_d, u navedenom intervalu, postiže najveće vrijednosti, a u slučaju $\zeta = 0$ R_d, je neograničen (teži u beskonačno). Dominantni član izraza (2.74) je $2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})$, a aproksimacija amplitude prisilnog odziva glasi:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \tag{2.79}$$

   Fazni kut za sva prigušenja iznosi 90°.

3. Područje kontrolirano masom - Za slučaj brze promjene opterećenja $\omega/\omega_n >> 1$ utjecaj prigušenja je zanemariv jer su krivulje vrlo bliske. Dinamički faktor R_d teži u nulu, što znači da je ukupna amplituda prisilnog odziva manja od amplitude statičkog pomaka. Dominantni član jednadžbe (2.49) jest $(\omega/\omega_n)^4$ što znači da jednadžbu pod (2.74) možemo aproksimirati na slijedeći način:

$$H(\omega/\omega_n) \simeq \frac{\omega_n^2}{\omega^2}$$

   Prema tome, amplituda prisilnog odziva glasi:

$$u_0 = (u_{st})_0 \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 = \frac{p_0}{m\omega^2} \tag{2.80}$$

   U ovom slučaju ($\omega/\omega_n >> 1$), fazni kut je približno 180°, što znači da su pobuda i odziv izvan faze.

2.4.4 Dinamički koeficijenti odziva (pomaka, brzine i ubrzanja)

U prethodnim poglavljima, prisilni dio odziva je prikazan kao vremenska funkcija pomaka pri čemu je njegova amplituda jednaka statičkom pomaku skaliranom dinamičkim koeficijentom pomaka R_d. Osim vremenskom funkcijom pomaka, odziv sustava potrebno je opisati i vremenskim funkcijama brzine i ubrzanja.

Deriviranjem vremenske funkcije pomaka po vremenu dobijemo vremensku funkciju brzine (Chopra 2011.):

$$\frac{\dot{u}(t)}{(u_{st})_0} = \omega R_d \cos(\omega t - \phi)\frac{\omega_n}{\omega_n}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{\omega_n p_0/k} = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \cos(\omega t - \phi) \tag{2.81}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \tag{2.82}$$

gdje je:

R_v Dinamički koeficijent brzine

Iz jednadžbi pod (2.81) i (2.82) slijedi relacija:

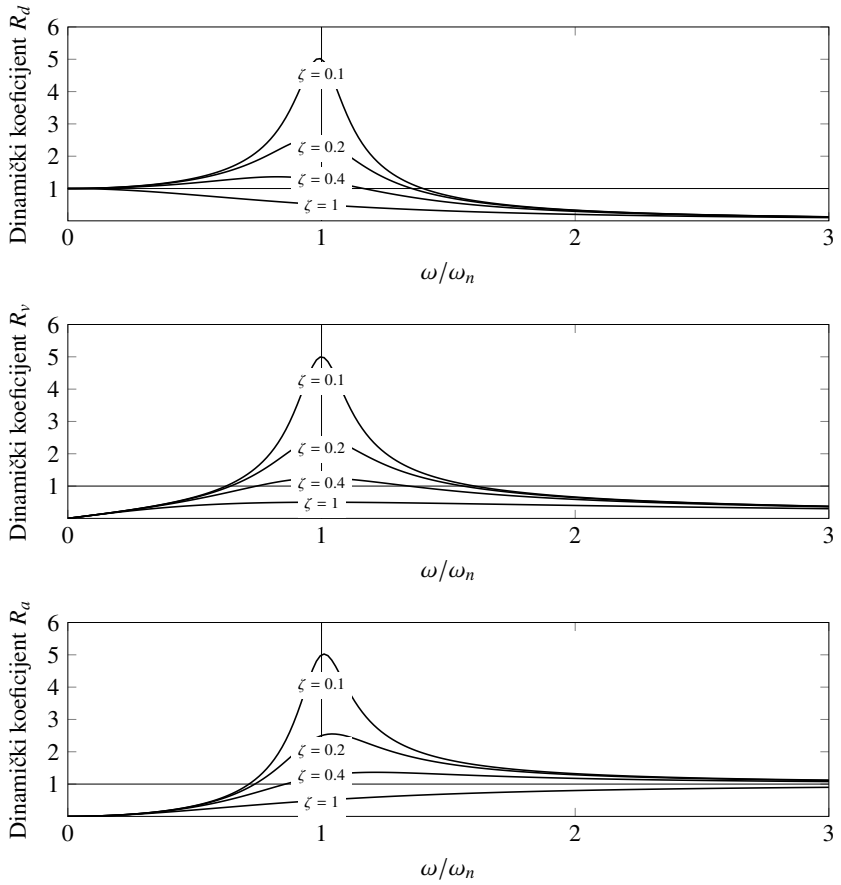
$$\frac{\dot{u}(0)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) R_d \tag{2.83}$$

Analogno tome, dobije se i dinamički faktor ubrzanja koji glasi:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a = -\frac{\omega}{\omega_n} R_v = -\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{2.84}$$

gdje je:

R_a Dinamički koeficijent ubrzanja



Slika 2.8: Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja za različite vrijednosti ζ

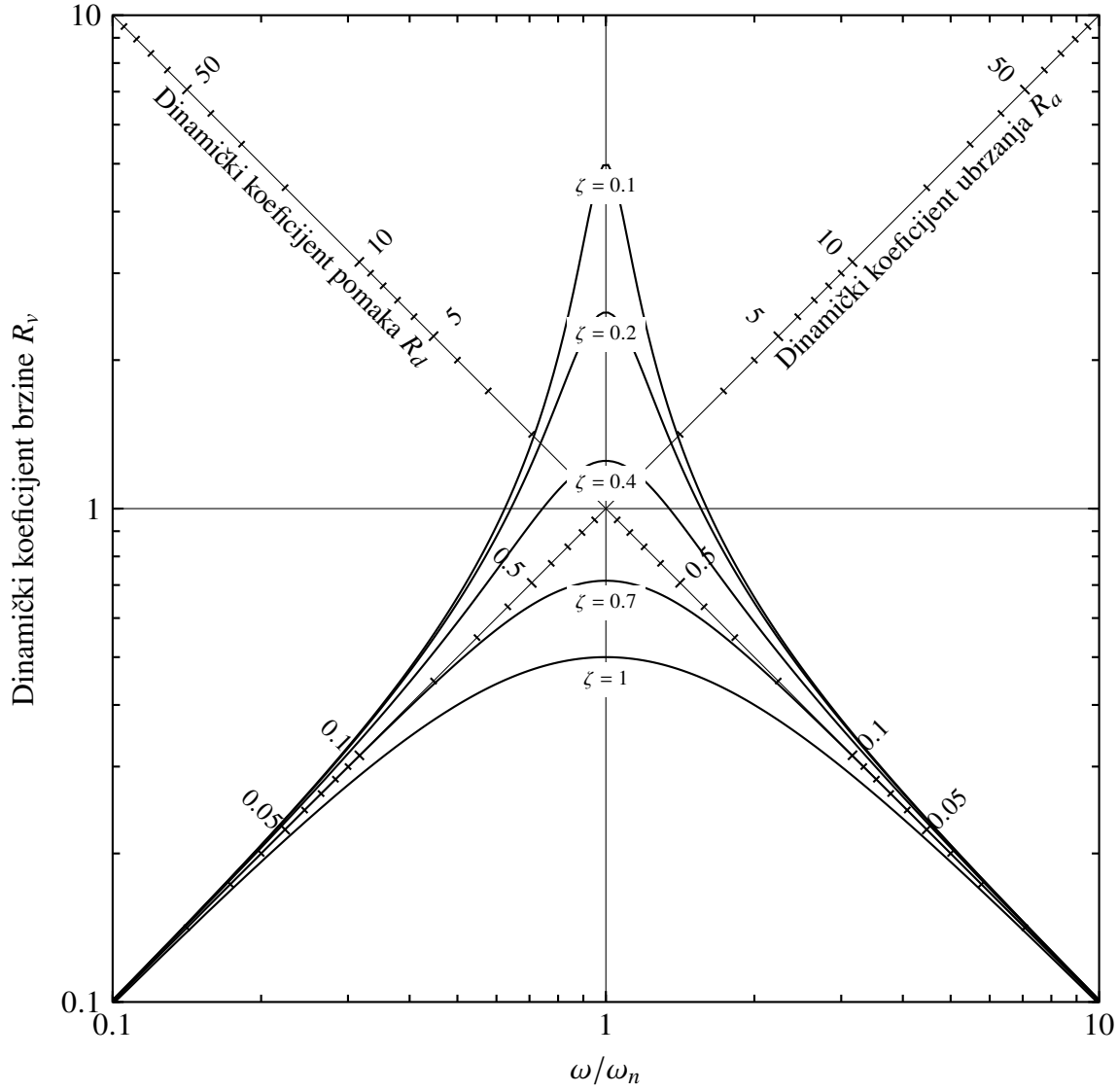
Iz (2.83) i (2.84) slijedi da su dinamički koeficijenti pomaka, brzine i ubrzanja u odnosu. Navedeni odnos je prikazan je slijedećom jednadžbom.

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{2.85}$$

Iz navedene jednadžbe slijedi da je poznavanjem jedne od veličina R_d, R_v ili R_a moguće dobiti preostale dvije. Zbog toga što postoji odnos između dinamičkih koeficijenata pomaka, brzine i ubrzanja opisan jednadžbom (2.85), moguće je sve tri navedene veličine prikazati u jednom grafu.

Takav graf se sastoji od četiri logaritamske skale:

1. horizontalne logaritamske skale koja prikazuje omjer frekvencije pobude i prirodne frekvencije sustava
2. vertikalne logaritamske skale koja prikazuje *dinamički koeficijent brzine* R_d
3. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od +45° koja prikazuje *dinamički koeficijent ubrzanja* R_a
4. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od −45° koja prikazuje *dinamički koeficijent pomaka* R_d



Slika 2.9: Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja u logaritamskom mjerilu

2.5 Rezonancija

Rezonancija je pojava koja se javlja prilikom pobude rezonancijskom frekvencijom (Lazarević, Novak i Uroš 2018.). Rezonancijska frekvencija je ona frekvencija pobude za koju će dinamički koeficijent odziva biti maksimalan (ibid.).

2.5.1 Rezonancija sustava s prigušenjem

Razmatranjem krivulja frekvencijskih funkcija odziva sa slike 2.8, možemo uočiti da jedino maksimumi krivulja R_v padaju na vertikalni pravac $\omega/\omega_n = 1$. Isto tako, vidljivo je da maksimalni R_d pada ulijevo od navedenog pravca a maksimalni R_a udesno. To znači da će se rezonancijske frekvencije dinamičkih faktora (R_d, R_v i R_a) međusobno razlikovati te da će rezonancijske frekvencije dinamičkih faktora R_d i R_a biti različite od prirodne frekvencije sustava.

Rezonancijske frekvencije za pojedini spektar možemo odrediti deriviranjem frekvencijske funkcije odziva po ω/ω_n te izjednačavanjem prve derivacije s nulom (Chopra 2011.).

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2) + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}}$$

Uvodi se supstitucija $x = \omega/\omega_n$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2) + (2\zeta x)^2}}$$

Deriviranjem po x dobijemo:

$$\frac{dR_d}{dx} = -\frac{2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x}{\sqrt{((1-x^2)^2 + (2\zeta x)^2)^3}}$$

Lokalni ekstrem (maksimum) dobijemo izjednačavanjem prve derivacije s nulom, odnosno:

$$-\frac{2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x}{\sqrt{((1-x^2)^2 + (2\zeta x)^2)^3}} = 0$$

Da bi razlomak bio jednak nuli izraz u brojniku mora biti jednak nuli. Izjednačavanjem brojnika s nulom dobijemo slijedeću jednadžbu:

$$2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x = 0 \tag{2.86}$$

Prvo (trivijalno) rješenje je $x = 0$. Daljnim raspisom jednadžbe (2.86), dobijemo slijedeću kvadratnu jednadžbu iz koje se dobije netrivijalno rješenje:

$$x^2 = 1 - 2\zeta^2$$

$$x = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{uz } \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Uvrštavanjem ω/ω_n dobijemo izraz za rezonancijsku frekvenciju pomaka:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{2.87}$$

Analogno tome dobiju se izrazi za rezonancijske frekvencije brzine i ubrzanja.

$$\text{Rezonancijska frekvencija pomaka} \quad \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.88}$$

$$\text{Rezonancijska frekvencija brzine} \quad \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \tag{2.89}$$

$$\text{Rezonancijska frekvencija ubrzanja} \quad \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \tag{2.90}$$

Maksimalni dinamički faktori (dinamički faktori za rezonancijske frekvencije) glase (iz (Chopra 2011.)):

$$\text{Maksimalni dinamički faktor pomaka} \quad R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{2.91}$$

$$\text{Maksimalni dinamički faktor brzine} \quad R_v = \frac{1}{2\zeta} \tag{2.92}$$

$$\text{Maksimalni dinamički faktor ubrzanja} \quad R_a = \frac{1}{2\zeta 1 - \zeta^2} \tag{2.93}$$

Zbog jednostavnosti, karakteristike odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode u rezonanciji, razmotriti ćemo za slučaj $\omega = \omega_n$ uz homogene početne uvjete. Iako se rezonancijska frekvencija pomaka ne podudara s prirodnom frekvencijom sustava, navedene vrijednosti su vrlo bliske za mali ζ (ibid.). Vremenska funkcija pomaka prigušenog sustava prikazana jednadžbom (2.24)

Uz homogene početne uvjete i za $\omega = \omega_n$, koeficijenti $A, B, C,$ i D glase:

$$C = 0 \tag{2.94}$$

$$D = -\frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \tag{2.95}$$

$$A = -D = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \tag{2.96}$$

$$B = -\frac{D\sigma}{\omega_D} - \frac{C\omega}{\omega_D} = \frac{(u_{st})_0}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{2.97}$$

Uvrštavanjem (2.96), (2.97), (2.94) i (2.23) u (2.24) te sređivanjem dobijemo:

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}\left[e^{-\sigma t}\left(\cos(\omega_D t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sin(\omega_D t)\right) - \cos(\omega_n t)\right] \tag{2.98}$$

Iz navedene jednadžbe proizlazi da je amplituda odziva ograničena na vrijednost:[4]

[4]Uočimo da je odziv sustava kontroliran prigušenjem (jednadžba (2.79))

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \tag{2.99}$$

Za malu vrijednost ζ, vrijedi $\omega_n \approx \omega_D$ te je član uz $\sin(\omega_D t)$ približno 0. Stoga jednadžba pod (2.98) postaje:

$$u(t) \simeq \underbrace{\frac{(u_{st})_0}{2\zeta}[(e^{-\sigma t} - 1)}_{\text{Krivulja ovojnice}} \cos(\omega_n t)] \tag{2.100}$$

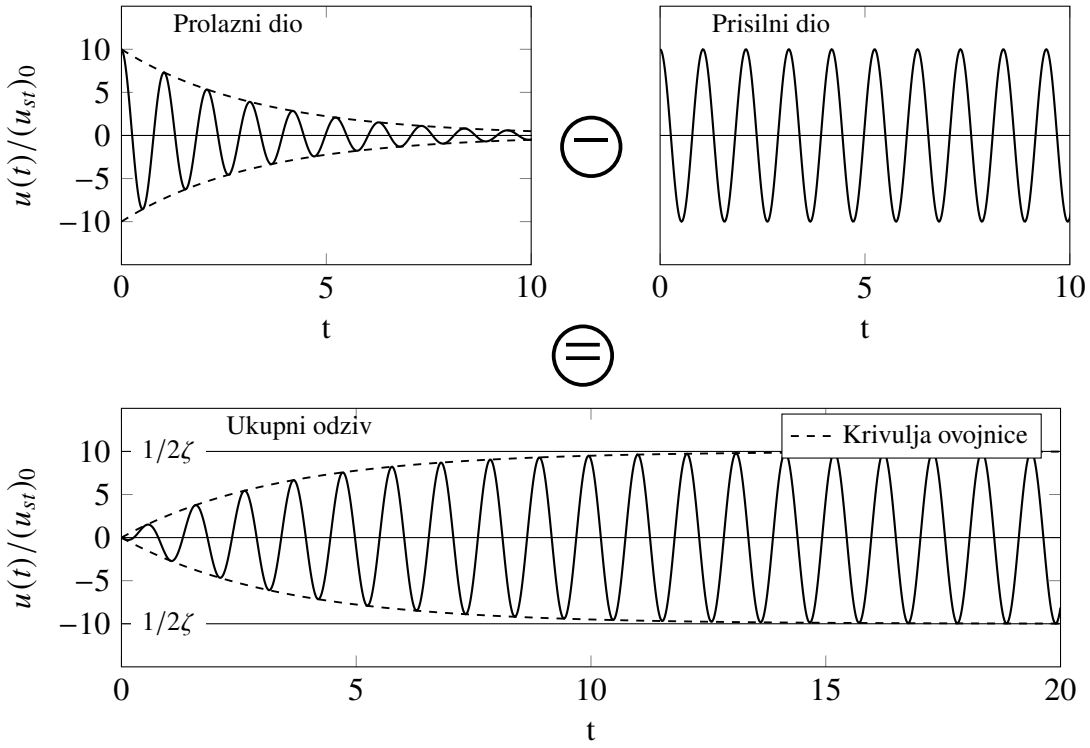
Iz jednadžbe (2.100) može se zaključiti da i za slučaj rezonancije postoji prolazni i prisilni dio odziva, a ukupni odziv je razlika između prolaznog i prisilnog djela. Prolazni dio odziva opisan je jednadžbom

$$e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t)$$

a prisilni:

$$\cos(\omega_n t)$$

Za $t = 0$ prolazni dio je maksimalan te je ukupni odziv jednak nuli. U ovisnosti o vremenu, prolazni dio se smanjuje eksponencijalno prema zakonu $e^{-\sigma t}$. Kako se prolazni dio smanjuje a prisilni ostaje isti $((u_{st})_0/2\zeta)$ tako raste njihova razlika. Rastom razlike dolazi do rasta amplitude odziva, te isčezavanjem prolaznog dijela preostaje samo prisilni te se dostiže maksimalna amplituda koja je jednaka $((u_{st})_0/2\zeta)$. Bitno je za naglasiti da u teoretskom modelu prolazni dio odziva isčezava tek za $t = \infty$, tj. asimptotski se približava nuli, ali u realnosti prolazni dio odziva je zanemariv nakon određenog vremena. Shematski prikaz dostizanja prisilnog stanja prikazan je na slijedećoj slici:



Slika 2.10: Odziv prigušenog sustava na pobudu rezonantnom frekvencijom

O prigušenju u rezonanciji ovise slijedeći parametari odziva:

- brzina dostizanje ustaljenog stanja (maksimalne amplitude) - brzina dostizanja ustaljenog stanja raste s prigušenjem (veće prigušenje → strmija krivulja ovojnice → brže dostizanje ustaljenog stanja).
- vrijednost maksimalne amplitude - obrnuto proporcionalna od vrijednosti prigušenja, definirana izrazom (2.99) (veće prigušenje, manja maksimalna amplituda, vidljivo i u frekvencijskim funkcijama odziva).

Određivanje broja titraja koji je potreban za dostizanje ustaljenog stanja vrši se pomoću funkcije koja opisuje krivulju ovojnice. Pretpostavka je da ekstrem nastupa nakon j titraja (j je prirodni broj), a vrijeme nastupa minimuma je $t = 2\pi j/\omega$.

$$u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right) \approx u_0(e^{-\zeta\omega_n\frac{2\pi j}{\omega_n}} - 1)\cos\left(\omega_n\frac{2\pi j}{\omega_n}\right) \tag{2.101}$$

gdje je:

j	redni broj titraja
$u_0 = (u_{st})_0/2\zeta$	maksimalna amplituda

Kako se radi o ekstremnoj vrijednosti, funkcija kosinus iznosi ±1 pa jednadžba pod (2.101) glasi:

$$u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right) = u_j = \pm u_0(e^{-2\pi\zeta j} - 1) \tag{2.102}$$

Za maksimume jednadžba pod (2.102) postaje

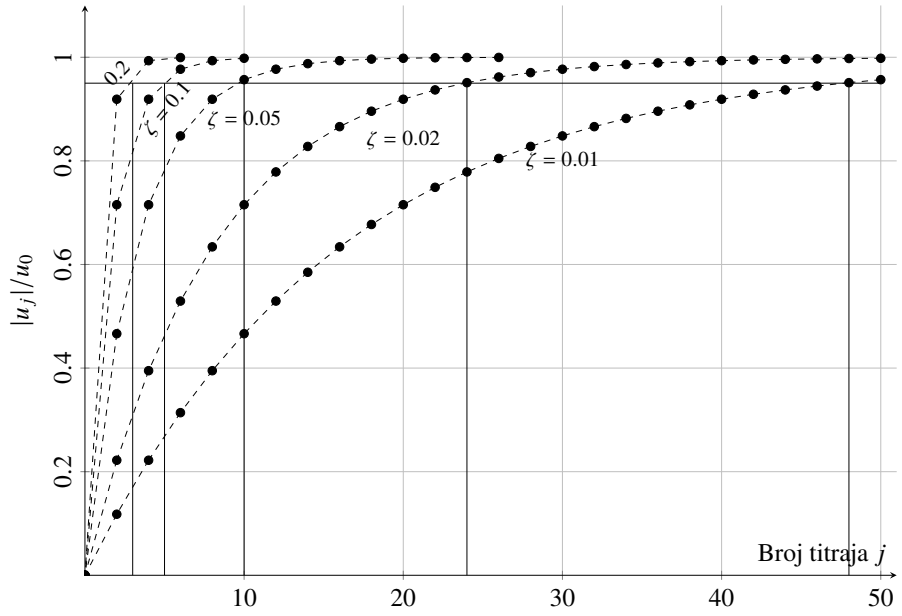
$$|u_j| = -u_0(e^{-2\pi\zeta j} - 1) = u_0(1 - e^{-2\pi\zeta j}) \tag{2.103}$$

Za relativne vrijednosti[5]:

$$u[j] = \frac{|u_j|}{u_0} = 1 - e^{-2j\zeta\pi} \tag{2.104}$$

Izraz ima smisla samo za diskretne vrijednosti argumenta j, odnosno za $j \in \mathbb{N}$.

[5]Postotci od maksimalne amplitude



Slika 2.11: Ovisnost amplitude odziva o broju titraja u rezonanciji

Tablica 2.1: Potreban broj titraja do ustaljenog stanja

ζ	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2
j	48	24	10	5	3

Uočimo da je uz slabije prigušenje potrebno više titraja za dostizanje ustaljenog stanja odnosno maksimalne amplitude. Očitanja vrijednosti sa grafa prikazana su u 2.1.

2.5.2 Rezonancija sustava bez prigušenja

Za sustav bez prigušenja, rezonancijske frekvencije za R_d, R_v i R_a jednake su prirodnoj frekvenciji sustava što se dobije uvrštavanjem $\zeta = 0$ u (2.88) i (2.90).

Primjetimo da je maksimalni dinamički koeficijent R_d (za $\omega/\omega_n = 1$) neograničen, tj $R_d \to \infty$ što se vidi i u jednadžbi (2.76) te na grafu 2.7. U slijedećoj jednadžbi prikazana je vremenska funkcija pomaka sustava za homogene početne uvjete:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \tag{2.105}$$

Uočimo da za $\omega = \omega_n$ navedena jednadžba više ne vrijedi (djeljenje s nulom). Novu jednadžbu možemo odrediti na slijedeći način:

$$\lim_{\omega \to \omega_n} u(t) = \frac{p}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \tag{2.106}$$

Navedeni limes je oblika $\frac{0}{0}$, pa ga je moguće rješiti L'Hopitalovim pravilom (Lazarević, Novak i Uroš 2018.). Deriviranjem funkcije po ω dobijemo:

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \frac{d}{d\omega} u(t) = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{p_0}{k} \frac{1}{-2(\omega/\omega_n)} \left(t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega_n t) \right) \right] \tag{2.107}$$

Uvrštavanjem $\omega = \omega_n$ dobijemo:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} (\omega_n \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t)) \tag{2.108}$$

Iz navedene jednadžbe vidljivo je da usprkos neograničenom dinamičkom faktoru neizmjerno velika amplituda ne nastupa trenutno, već dolazi do njezinog postupnog rasta. Djeljenjem izraza (2.108) statičkim pomakom i uvrštavanjem $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ dobijemo:

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T_n} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n} \right) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T_n} \right) \right) \tag{2.109}$$

gdje je:

T_n period titranja

Iz prethodne jednadžbe slijedi da ekstremi nastupaju svaki poluperiod ($T_n/2$), pri čemu prvo nastupa maksimum a zatim minimum. Vrijeme nastupa ekstrema za određeni redni broj titraja prikazuju slijedeće jednadžbe:

- za maksimum: $t = (i - \frac{1}{2})T_n$
- za minimum: $t = jT_n$

gdje je:

- t vrijeme nastupa ekstrema
- i redni broj titraja

Iznos ekstrema određujemo uvrštavanjem vremena nastupa ekstrema u jednadžbu (2.109) te slijedi:

1. iznos maksimuma za j-ti titraj: $u_j = (u_{st})_0 \pi (j - \frac{1}{2})$
2. iznos minimuma za j-ti titraj: $u_j = -(u_{st})_0 \pi \cdot j$

Prirast maksimuma određujemo razlikom između iznosa maksimuma trenutnog i slijedećeg titraja što prikazuje slijedeća jednadžba:

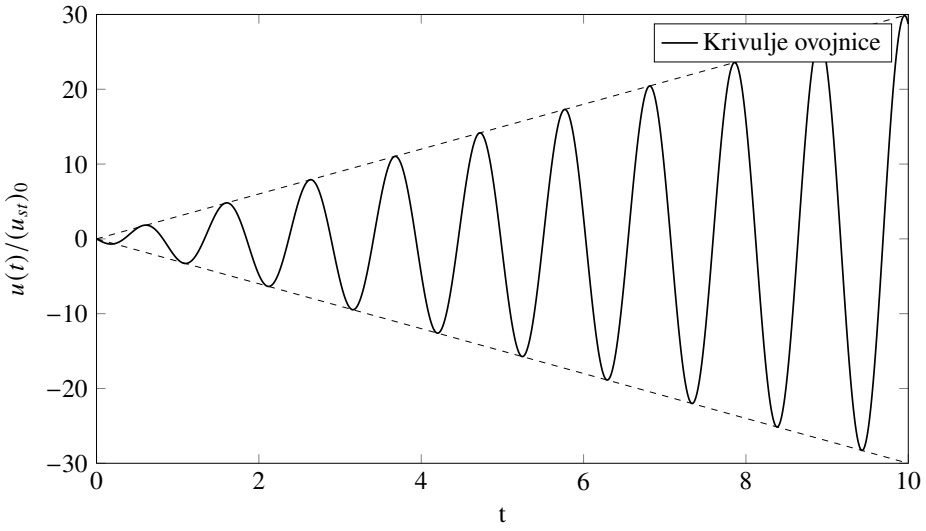
$$\begin{aligned} |u_{j+1}| - |u_j| &= (u_{st})_0 \pi ((j+1) - \frac{1}{2}) - (u_{st})_0 \pi (j - \frac{1}{2}) \\ |u_{j+1}| - |u_j| &= \frac{p_0}{k} \pi \end{aligned} \tag{2.110}$$

Analogno tome određuje se i prirast minimuma koji glasi:

$$\begin{aligned} u_{j+1} - u_j &= -(u_{st})_0 \pi (j+1) - (-(u_{st})_0 \pi j) \\ u_{j+1} - u_j &= -\frac{p_0}{k} \pi \end{aligned} \tag{2.111}$$

Uočimo da su prirasti ekstrema linearni, stoga krivulju ovojnice čine pravaci čiji su koeficjenti smjera prikazani u nastavku:

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \frac{p_0}{k} \omega_n \tag{2.112}$$



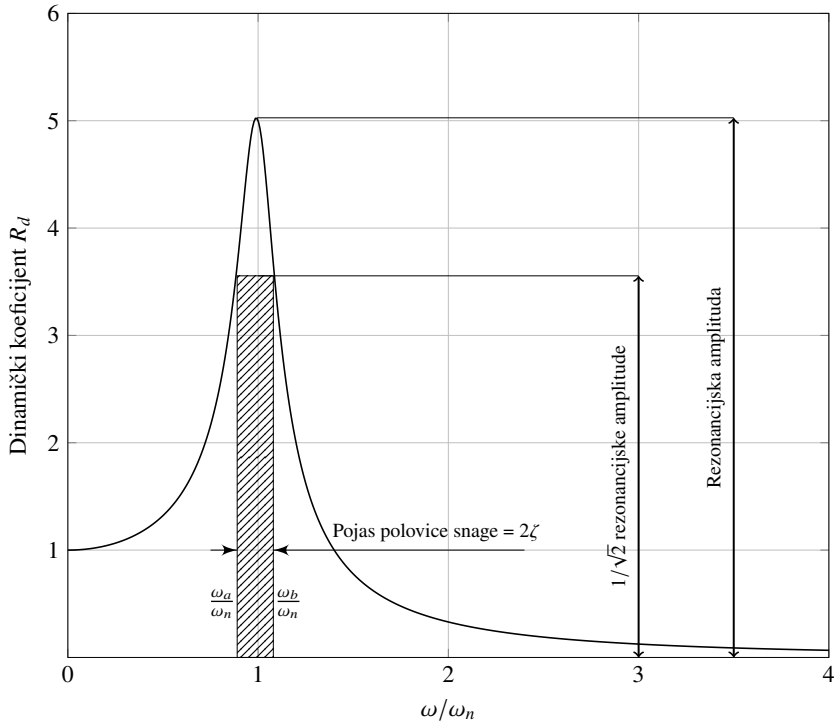
Slika 2.12: Rezonancija neprigusenog sustava

2.5.3 Analiza područja rezonancije

Osim rezonancijske frekvencije potrebno je odrediti i pojas polovice snage (*engl.* half-power bandwidth) vrha frekvencijske funkcije odziva, koji je prikazan na slici 2.13. Pojas polovice snage vrha frekvencijske funkcije odziva bitan je iz dva razloga:

1. osim pobude rezonancijskom frekvencijom, opasne su i pobude frekvencijama iz njezinog okoliša. Navedeni okoliš definiran je pojasom polovice snage.

2. Zbog praktične primjene - pojas polovice snage koristi se u pokusima za određivanje stupnja prigušenja konstrukcija



Slika 2.13: Definicija pojasa polovice snage

Dinamički faktor pomaka R_d za odziv dvostruko manje snage od odziva maksimalnog dinamičkog faktora računa se prema sljedećoj relaciji:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} R_d^{max} \tag{2.113}$$

Sa slike 2.13 je vidljivo da je dinamički faktor R_d iz (2.113) definiran za dvije vrijednosti frekvencije pobude: ω_a i ω_b. Raspisivanjem jednadžbe pod (2.113) dobijemo:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.114}$$

Kvadriranjem (2.114) dobijemo:

$$\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=8\zeta^2(1-\zeta^2) \tag{2.115}$$

Raspisivanjem i grupiranjem po ω/ω_n dobijemo:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4-2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+1-8\zeta^2(1-\zeta^2)=0 \tag{2.116}$$

Izraz (2.116) je kvadratna jednadžba, a njezinim rješavanjem (po ω/ω_n) dobijemo:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=(1-2\zeta^2)\pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.117}$$

Za $\zeta^2\approx 0$ izraz (2.117) postaje:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\approx 1\pm 2\zeta \tag{2.118}$$

Odnosno:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\approx\sqrt{1\pm 2\zeta} \tag{2.119}$$

Jednadžba (2.119), nakon aproksimacije korijena s prva dva člana Taylorovog reda glasi:

$$\frac{\omega}{\omega_n}=1\pm\zeta \tag{2.120}$$

Frekvencije ω_a i ω_b dobiju se iz (2.120):

$$\omega_a=(1-\zeta)\omega_n \tag{2.121}$$

$$\omega_b=(1+\zeta)\omega_n \tag{2.122}$$

$$\tag{2.123}$$

Oduzimanjem $\omega_b-\omega_a$ dobijemo:

$$2\zeta=\frac{\omega_b-\omega_a}{\omega_n} \tag{2.124}$$

Te konačno, dijeljenjem brojnika i nazivnika s 2π:

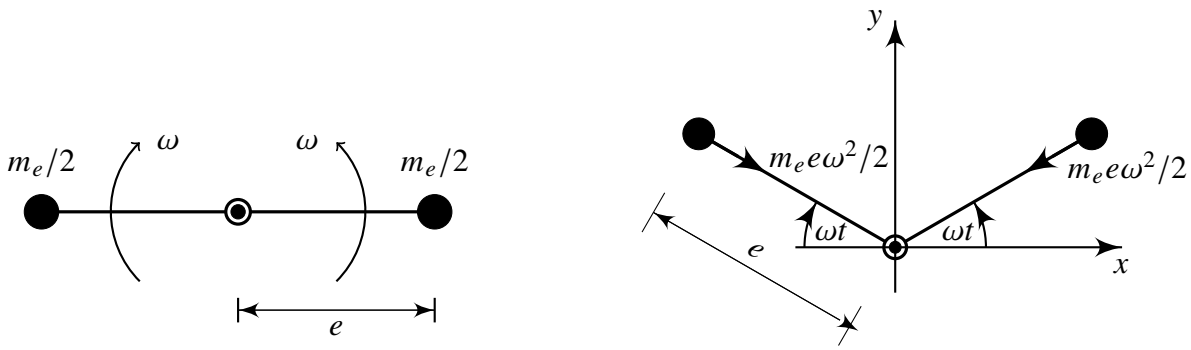
$$\zeta\approx\frac{f_b-f_a}{2f_n} \tag{2.125}$$

gdje je $f=\omega/2\pi$ kružna frekvencija. Jednadžbe pod (2.124) i (2.125) bitne su jer omogućuju određivanje koeficijenta relativnog prigušenja ζ bez potrebe za poznavanjem intenziteta sile pobude (Chopra 2011.).

2.5.4 Praktična primjena matematičkog modela

Definiranjem matematičkog modela prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode, pobuđenog sinusnom silom postavljeni su temelji za eksperimentalno određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije. Stupnanj prigušenja jest veličina od izuzetne praktične važnosti, a nije ga moguće odrediti teoretski iz projektnih parametara, već se mora odrediti eksperimentalno (Lazarević, Novak i Uroš 2018.). Ispitivanje koje će biti razmatrano u ovome radu naziva se *rezonancijski pokus*.

Ispitivanja se provode *vibracijskim uređajem*. Vibracijski uređaj se sastoji od dvije košare sa utezima na uspravnoj osovini koje rotiraju u suprotnim smjerovima konstantnom kutnom brzinom ω. Osovina je pričvršćena za metalnu ploču koja se kruto povezuje s građevinom (ibid.).



(a) (b)

Slika 2.14: Shematski prikaz vibracijskog uređaja: (a) u inicijalnom položaju; (b) položaj nakon vremena t

Sila pobude građevine jest ukupna centrifugalna sila vibracijskog uređaja, koja je jednaka je sumi centrifugalnih sila pojedinih masa. Horizontalne komponente su jednakog intenziteta ali suprotnog smjera pa se poništavaju, stoga sila pobude je jednaka sumi vertikalnih komponenti, odnosno:

$$p(t) = (m_e e\omega^2)\sin(\omega t) \tag{2.126}$$

Odziv sustava s jednim stupnjem slobode na pobudu vibracijskim uređajem opisan je slijedećom diferencijalnom jednadžbom:

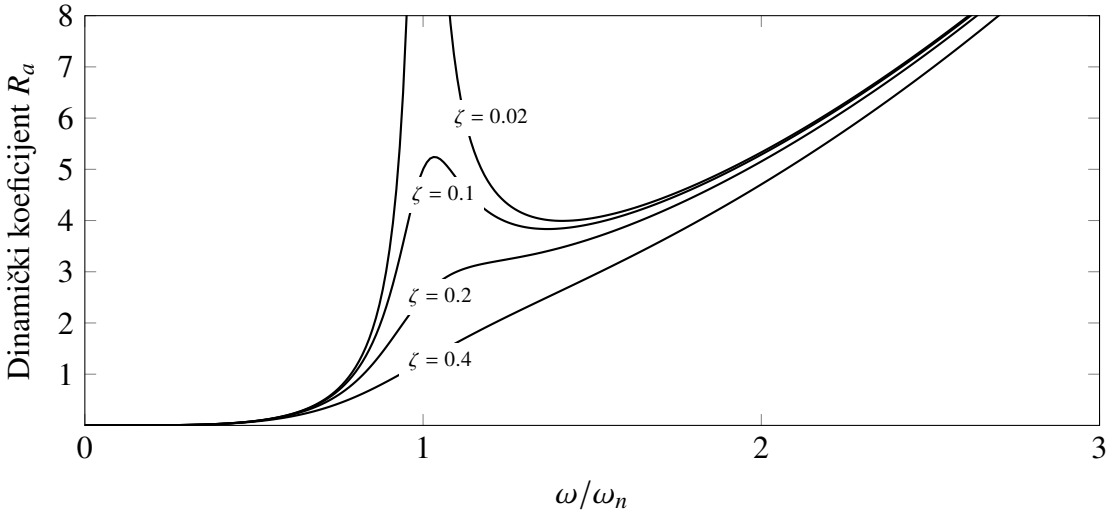
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (m_e e\omega^2)\sin(\omega t) \tag{2.127}$$

Amplituda prisilnog pomaka glasi (iz (2.73)):

$$u_0 = \frac{m_e e}{k}\omega^2 R_d = \frac{m_e e}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{2.128}$$

Amplituda prisilnog ubrzanja (iz (2.84)):

$$\ddot{u}_0 = \frac{m_e e}{m}\omega^2 R_a = \frac{m_e e\omega_n^2}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_a \tag{2.129}$$



Slika 2.15: Amplituda ubrzanja u ovisnosti o omjeru frekvencija

Na grafu sa slike 2.15 vidljivo je da daljnjim porastom frekvencije pobude (iznad prirodne frekvencije) amplituda prisilnog ubrzanja raste. Navedeni rast se događa jer je amplituda pobude proporcionalna s ω^2.

Za određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije vrši se *rezonancijski pokus*, a temelji se na slijedećoj relaciji (iz (2.79))

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}} \tag{2.130}$$

Potrebno je eksperimentalno odrediti amplitudu statičkog pomaka i prirodnu frekvenciju.

Prirodna frekvencija se određuje na slijedeći način:

1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju ω.
2. očitavanje faznog kuta. Ako je fazni kut $\phi = 90°$, tada je prirodna frekvencija ω_n jednaka frekvenciji pobude ω.
3. nakon što isčezne prolazni dio odziva, očitava se amplituda prisilnog ubrzanja

Amplitudu prisilnog pomaka možemo dobiti iz amplitude prisilnog ubrzanja korištenjem slijedeće formule (iz (Lazarević, Novak i Uroš 2018.)):

$$u_0 = \frac{(\ddot{u}_0)_{\omega=\omega_n}}{(\omega^2)_{\omega=\omega_n}} \quad \text{jer je} \quad \ddot{u}(t) = -u_0\omega^2 \sin(\omega t - \phi), \tag{2.131}$$

Da bi bilo moguće odrediti prigušenje sustava prema formuli (2.130) potrebno je odrediti amplitudu statičkog pomaka $(u_{st})_0 = p_{0,max}/k$, gdje je $p_{0,max}$ amplituda pobude u rezonanci. Amplituda statičkog pomaka se **mora** odrediti pokusom, a ne izračunati prema relaciji p_0/k zato što k nije eksperimentalno određen.Vibracijskim uređajem je vrlo teško (ili nemoguće) prouzročiti veliku **statičku** silu pobude. Dva su pristupa rješavanju navedenog problema:

1. Sporim rotiranjem velikih masa - Nije najbolje rješenje jer je sila pobude proporcionalna s kvadratom kutne brzine rotacije utega. Stoga i za velike mase utega amplituda sile pobude je relativno mala.

2. Povlačenjem konstrukcije užetom silom koja je jednaka amplitudi sile pobude vibracijskim uređajem $p_{0,max}$.

Osim rezonancijskim pokusom, prigušenje i prirodnu frekvenciju moguće je odrediti **frekvencijskim krivuljama odziva**. Postupak je slijedeći:

1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju

2. određivanje amplitude **prisilnog** dijela

3. namještanje vibracijskog uređaja na drugu frekvenciju, te ponavljanje postupka

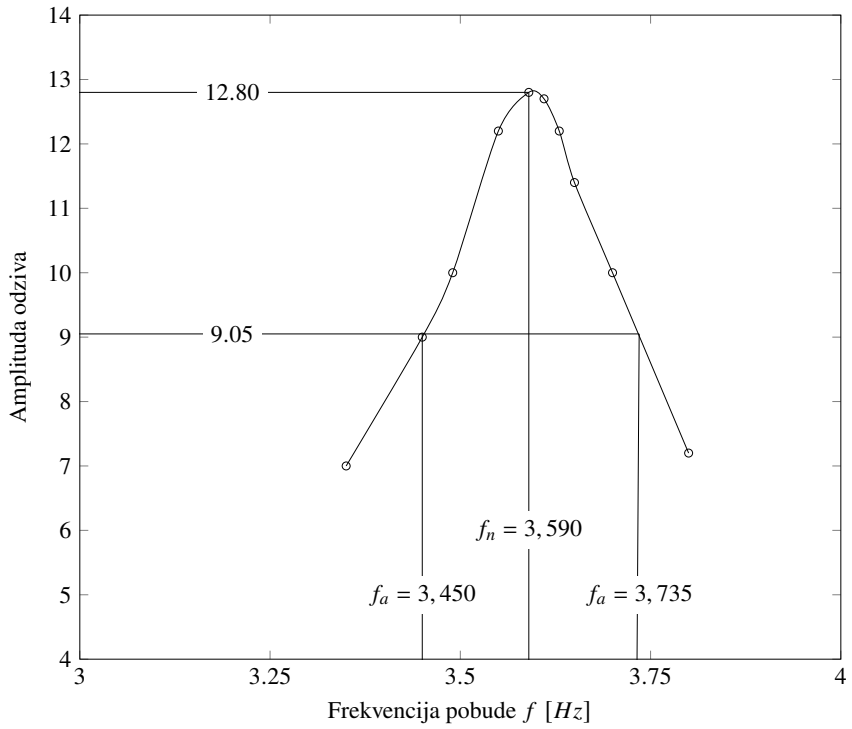
Frekvencijska krivulja odziva iscrtava se iz izmjerenih podataka. Frekvencijske funkcije odziva mogu prikazivati slijedeće ovisnosti:

1. ovisnost amplituda ubrzanja o frekvencijskom omjeru - izravno iz izmjerenih podataka. Bitno je za naglasiti da je navedena krivulja proporcionalna s ω^2.

2. ovisnost dinamičkog faktora ubrzanja o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s ω^2

3. ovisnost dinamičkog faktora pomaka o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s ω^4.

Stupanj prigušenja i prirodna frekvencija može se odrediti iz bilo koje od navedenih krivulja. Prirodna frekvencija jednaka je frekvenciji sile pobude u rezonanci. Stupanj prigušenja određuje se iz *pojasa polovice snage* jednadžbom (2.125), što znači da je potrebno odrediti amplitudu odziva pri rezonanci te frekvencije za koje je amplituda odziva jednaka $r_{res}/\sqrt{2}$.



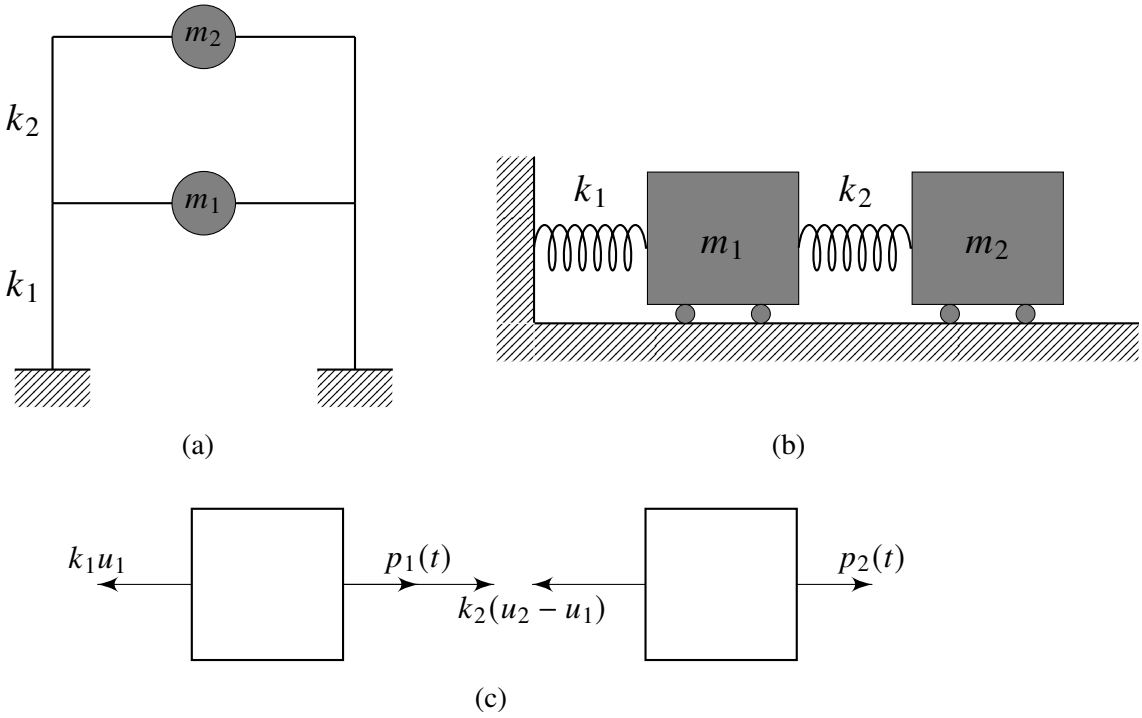
Slika 2.16: Frekvencijska funkcija odziva konstruirana pomoću mjerenih podataka

3 Sustavi s više stupnjeva slobode

3.1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija

Jedan od modela sustava s više stupnjeva slobode su N etažni posmični okviri. Takvi sustavi se sastoje od N koncentriranih masa, što znači da je potrebno odrediti N različitih pomaka. Drugim riječima, jednadžba gibanja takvog sustava biti će zadana kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Sustav s više stupnjeva slobode, koji će biti razmatran u ovom radu, je dvoetažni posmični okvir bez prigušenja prikazan na sljedećoj slici, a osnovni pojmovi biti će objašnjeni pomoću slobodnih oscilacija navedenog modela.



Slika 3.1: Idealizirani sustav s dva stupnja slobode: (a) dvoetažni posmični okvir; (b) ekvivalentni model; (c) prikaz sila

Sustavi sa slike imaju dva dinamička stupnja slobode jer su moguće dvije translacije masa, pa jednadžbu gibanja opisuje sustav od dvije diferencijelne jednadžbe drugog reda.

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = 0 \\ m_1\ddot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Zapisano u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Odnosno

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{0\} \tag{3.3}$$

Iz (3.1) i (3.2) vidi se da je sustav diferencijalnih jednadžbi povezan preko krutosti odnosno matrice krutosti. Opći oblik rješenja sustava je slijedeći:

$$\{u(t)\} = \{\psi\}q(t) \tag{3.4}$$

Vektor ψ nije ovisan o vremenu pa ga u nekom smislu možemo smatrati konstantom integracije (Dawkins 2018.), a funkcija $q(t)$ je jednostavna harmonijska funkcija[1] slijedećeg oblika:

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{3.5}$$

Druga derivacija (3.5) jest:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2(\underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{q(t)}) = -\omega^2 q(t) \tag{3.6}$$

Stoga, druga derivacija od (3.4) glasi:

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 q(t)\{\psi\} \tag{3.7}$$

Uvrštavanjem (3.4) i (3.7) u (3.3) dobijemo:

$$(\{\psi\}\mathbf{k} - \omega^2\{\psi\}\mathbf{m})q(t) = \{0\} \tag{3.8}$$

Prvo trivijalno rješenje je za $q(t) = 0$ što implicira da je $u(t) = 0$ (sustav miruje). Netrivijalno rješenje se dobije izjednačavanjem zagrade s nulom:

$$\mathbf{k}\{\psi\} = \omega^2\mathbf{m}\{\psi\} \tag{3.9}$$

Izraz (3.9) predstavlja realni problem vlastitih vrijednosti odnosno matrični problem vlastitih vrijednosti. Potrebno je odrediti dvije nepoznanice:

1. vlastite vektore ψ
2. vlastite vrijednosti ω^2

Prebacivanjem nepoznanica na jednu stranu dobijemo homogeni sustav:

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\{\psi\} = \{0\} \tag{3.10}$$

koji u općem slučaju predstavlja sustav od N algebarskih jednadžbi s N nepoznanica. Trivijalno rješenje sustava je za $\{\psi\} = 0$, a netrivijalno se određuje raspisom determinante matrice $\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}$. Raspisom determinante navedene matrice, dobije se polinom N-tog stupnja kojeg nazivamo *karakterističnim polinomom*. Nultočke polinoma predstavljaju vlastite vrijednosti ω^2, odnosno kvadrirane prirodne frekvencije. Da bi nultočke polinoma bile realne pozitivne vrijednosti, matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ moraju biti simetrične i pozitivno definitne (Lazarević, Novak i Uroš 2018.). Uvijeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu su slijedeći:

[1] Uočimo da je harmonijska funkcija $q(t)$ rješenje za jedan stupanj slobode

1. za matricu **k** - broj i raspored ležajeva u ispravnoj mreži mora biti takav da se spriječe pomaci krutog tijela (Lazarević, Novak i Uroš 2018.).

2. za matricu **m** - moraju se ukloniti stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Uklanjanje stupnjeva slobode bez mase, vrši se statičkom kondenzacijom (ibid.).

Vlastiti vektori ψ se određuju uvrštavanjem vrijednosti ω^2 u matricu $\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m}$, stoga je očito da vektori ψ nisu jednoznačni jer i njihovi višektratnici zadovoljavaju jednadžbu (3.10). Vektori ψ nazivaju se *oblicima titranja (osciliranja) sustava*, a definiraju oblik titranja sustava na frekvenciji ω. Prvi vlastiti vektor ψ_1, naziva se temeljnim (osnovnim) oblikom osciliranja, a frekvencija ω_1 na kojoj sustav titra navedenim oblikom naziva se *vlastitom frekvencijom temeljnog oblika*.

Ako su sve prirodne frekvencije različite od nule i međusobno različite, tada su svi vlastiti vektori linearno nezavisni. Skup od n linearno nezavisnih vektora čini bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora, pa je ukupno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi linearna kombinacija svih pojedinačnih rješenja.

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\psi\}_n q_n \tag{3.11}$$

Pri čemu je q_n:

$$q_n = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \tag{3.12}$$

Raspisivanjem (3.11) dobivamo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = q_1(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{N,1} \end{Bmatrix} + q_2(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \vdots \\ \psi_{N,2} \end{Bmatrix} + \cdots + q_N(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{2,N} \\ \vdots \\ \psi_{N,N} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1(t)\psi_{1,1} + q_2(t)\psi_{1,2} + q_N(t)\psi_{1,N} \\ q_1(t)\psi_{2,1} + q_2(t)\psi_{2,2} + q_N(t)\psi_{2,N} \\ \vdots \\ q_1(t)\psi_{N,1} + q_2(t)\psi_{N,2} + q_N(t)\psi_{N,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1_N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \cdots & \psi_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}}_{\{q\}}$$

Matricu $\mathbf{\Psi}$ nazivamo modalna matrica, a komponente vektora q nazivaju se modalne koordinate. Opće rješenje pod (3.11) sada možemo zapisati matrično kao:

$$\{u(t)\} = \mathbf{\Psi}\{q\} \tag{3.13}$$

Osim modalne matrice postoji i spektralna matrica (NxN) koja se sastoji od N svojstvenih vrijednosti ω^2 na glavnoj dijagonali.

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Za slučaj sustava s dva stupnja slobode, definiranog sustavom diferencijalnih jednadžbi pod (3.2), prirodne frekvencije ω_1^2 i ω_2^2 dobivene su rješavanjem kvadratne jednadžbe karakterističnog polinoma za ω^2. Vlastite vektore možemo zapisati kao:

$$\{\psi\}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\{\psi\}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

Ukupno rješenje sustava jest linearna kombinacija slijedećih vektora:

$$\begin{cases} \{u_1\}(t) = \{\psi\}_1 q_1(t) = \{\psi\}_1 (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) \\ \{u_2\}(t) = \{\psi\}_2 q_2(t) = \{\psi\}_2 (A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \end{cases} \tag{3.16}$$

Stoga, ukupno opće rješenje glasi:

$$\{u\}(t) = \{u_1\}(t) + \{u_2\}(t) \tag{3.17}$$

Općenitiji zapis jednadžbe pod (3.17) glasi:

$$\{u\}(t) = \sum_{n=1}^{N} \{\psi\}_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \tag{3.18}$$

Bitno je za napomenuti da vlastiti vektor ψ ne određuje maksimalne iznose ordinata već samo njihov relativni odnos, tj. oblik titranja. Da bismo dobili amplitude A_n i B_n, potrebno je uzeti u obzir početne uvjete:

$$\{u\}(0) = \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_N(0) \end{Bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \{\dot{u}\}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{u}_N(0) \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Za slučaj slobodnog titranja, konstante A_n i B_n glase:

$$A_n = q_n(0) \tag{3.20}$$

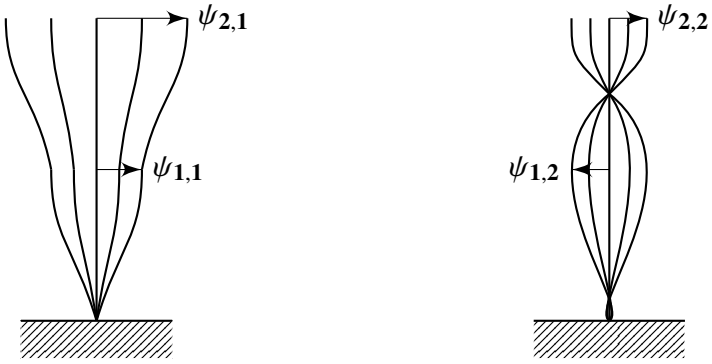
$$B_n = \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \tag{3.21}$$

pri čemu je:

$$q_n(0) = \frac{\{\psi\}_n^T \mathbf{m}\{u\}(0)}{\{\psi\}_n^T \mathbf{m}\{\psi\}_n}$$

$$\dot{q}_n(0) = \frac{\{\psi\}_n^T \mathbf{m}\{\dot{u}\}(0)}{\{\psi\}_n^T \mathbf{m}\{\psi\}_n}$$

Shematski prikaz oblika titranja sustava s dva stupnja slobode prikazan je na slijedećoj slici.



(a) Prvi vlastiti oblik titranja (b) Drugi vlastiti oblik titranja

Slika 3.2: Shematski prikaz vlastitih oblika titranja sustava s dva stupnja slobode

3.2 Ortogonalnost vlastitih vektora

Kao što je već pokazano, oblike osciliranja definiraju vlastiti vektori. Dva vektora su međusobno ortogonalna (okomita) ukoliko je njihov skalarni produkt jednak nuli. Razmotrimo li r-ti i n-ti vlastiti vektor sustava, dobijemo slijedeći sustav jednadžbi (iz (3.3)):

$$\begin{cases} (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_r = \{0\} \\ (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = \{0\} \end{cases} \tag{3.22}$$

Donju jednadžbu pomnožimo s $\{\psi\}_r^T$. U gornjoj jednadžbi prvo transponiramo $\{\psi\}_r$ te ju pomnožimo s $\{\psi\}_n$. Sustav jednadžbi (3.22) postaje:

$$\begin{cases} \{\psi\}_r^T (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \\ \{\psi\}_r^T (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

Oduzimanjem gornje i donje jednadžbe dobijemo:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0 \tag{3.24}$$

Za $\omega_n \neq \omega_r$ vrijedi:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0 \tag{3.25}$$

Uvrštavanjem $\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0$ u bilo koju od jednadžbi iz (3.23) dobijemo:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{k}\{\psi\}_n = 0 \tag{3.26}$$

Jednadžbe pod (3.25) i (3.26) govore da su vlastiti vektori m-ortogonalni i k-ortogonalni. Odnosno, kažemo da su vlastiti vektori međusobno ortogonalni s obzirom na matricu mase ili matricu krutosti.

Poslijedica ortogonalnosti su slijedeće dijagonalne pravokutne matrice:

$$\text{Modalna krutost} \quad \mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Psi} \tag{3.27}$$

$$\text{Modalna masa} \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Psi} \tag{3.28}$$

Članovi na dijagonali računaju se prema slijedećim formulama:

$$\text{Za modalnu krutost} \quad K_{n,n} = \{\psi\}_n^T k \{\psi\}_n \tag{3.29}$$

$$\text{Za modalnu masu} \quad M_{n,n} = \{\psi\}_n^T m \{\psi\}_n \tag{3.30}$$

Između elemenata matrica vrijedi slijedeći odnos:

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \tag{3.31}$$

U matričnoj formi:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} \tag{3.32}$$

3.3 Normiranje vlastitih vektora

Vlastiti vektori nisu jednoznačni jer su jednako predstavljeni vektorima dobivenim rješenjem problema vlastitih vrijednosti i njihovim višekratnicima. Drugim riječima, vlastiti vektor predstavljen je familijom kolinearnih vektora jer vrijedi slijedeća jednakost (He i Z. 2001.)(iz (3.9))

$$\mathbf{k}(a\{\psi\}_n) = \omega_n^2(a\{\psi\}_n)\mathbf{m}$$

$$a\mathbf{k}\{\psi\}_n = a\omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

$$\mathbf{k}\{\psi\}_n = \omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

Množenje vlastitog vektora skalarom, s ciljem postizanja željenog oblika vlastitog vektora, naziva se normiranje. Primjerice, željeni oblik vlastitog vektora:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

množenjem vektora s $4/3$ dobijemo:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Od posebnog značaja je normiranje modalne mase na jediničnu vrijednost. Kako je $\{\psi\}_n^T\mathbf{m}\{\psi\}_n = \mathbf{M}_{n,n}$, vlastiti vektor $\{\psi\}_n$ potrebno je množiti sa $(M_{n,n})^{-1/2}$, odnosno:

$$\{\psi\}_n^N = \frac{1}{\sqrt{M_{n,n}}}\{\psi\}_n \tag{3.33}$$

Gdje je $\{\psi\}_n^N$ normirani n-ti vlastiti vektor. Jednadžba (3.33) zapisana u matričnoj formi glasi:

$$\mathbf{\Psi}_n^N = \mathbf{\Psi}\,\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.34}$$

Normiranje na jediničnu vrijednost jest u biti:

$$M_{n,n} = \left(\{\psi\}_n^N\right)^T \mathbf{m}\{\psi\}_n^N = 1 \tag{3.35}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{m}\mathbf{\Psi}^N = \mathrm{I} \tag{3.36}$$

Gdje je I jedinična matrica. Iz (3.29) slijedi:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{K}\mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2 \underbrace{\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{M}\mathbf{\Psi}^N}_{\mathrm{I}}$$

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{K}\mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2$$

3.4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom

Kao što je pokazano u poglavlju 3.1, jednadžba gibanja sustava s N stupnjeva slobode zadana je kao sustav od N diferencijalnih jednadži drugog reda. U slučaju pobude harmonijskom silom, navedeni sustav će se sastojati od N nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje će biti povezane preko matrice krutosti i/ili matrice mase.

Općenito, rješenje jedne proizvoljne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika $\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = f(t)$ jest suma komplementarnog rješenja y_c i partikularnog rješenja Y_p, pri čemu su α, β i γ konstantni koeficijenti.

$$y(t) = y_c(t) + U_p(t) \tag{3.37}$$

Komplementarno rješenje dobijemo izjednačavanjem diferencijalne jednadžbe s nulom odnosno:

$$\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = 0 \tag{3.38}$$

Primjetimo da je komplementarno rješenje (rješenje jednadžbe (3.38)) zapravo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, a jednako je i za slobodne oscilacije i za prisilne oscilacije. Kod prisilnih oscilacija, komplementarno rješenje predstavlja *prolazni* dio odziva te je dato u (3.11). Potrebno je još odrediti partikularno rješenje, koje kod prisilnih oscilacija predstavlja *prisilni* dio odziva. Partikularno rješenje moguće je pronaći koristeći se metodom neodređenih koeficijenata.

Zadana je jednadžba gibanja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slici 3.1

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{3.39}$$

Odnosno:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + k\{u\} = \{p_n\} \sin(\omega t) \tag{3.40}$$

Gdje je $\{p_n\}$ vektor amplituda harmonijskih sila. Odziv sustava biti će harmonijski, jednake frekvencije, pa partikularno rješenje možemo pretpostaviti:

$$\{u_p(t)\} = \{U_n\} \sin(\omega t) \tag{3.41}$$

Gdje je $\{U_n\}$ vektor koeficijenata. Druga derivacija (3.41) glasi:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2\{U_n\} \sin(\omega t) \tag{3.42}$$

Uvrštavanjem (3.41) i (3.42) u (3.40) dobijemo:

$$-\omega^2\{U_n\}\mathbf{m} \sin(\omega t) + \{U_n\}\mathbf{k} \sin(\omega t) = \{p\} \sin(\omega t) \tag{3.43}$$

Nakon sređivanja, jednadžba (3.43) poprima oblik:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{U_n\} = \{p\} \tag{3.44}$$

Množenjem jednadžbe (3.44) s $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}$ dobijemo:

$$\{U_n\} = [\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}\{p_n\}$$

$$\{U_n\} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} adj[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{p_n\}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

Komponente vektora $\{U_n\}$ glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{3.46}$$

$$U_2 = \frac{p_0k_2}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{3.47}$$

Za $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$ i $k_2 = k$ vektori glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k - m\omega^2)}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{3.48}$$

$$U_2 = \frac{p_0k}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{3.49}$$

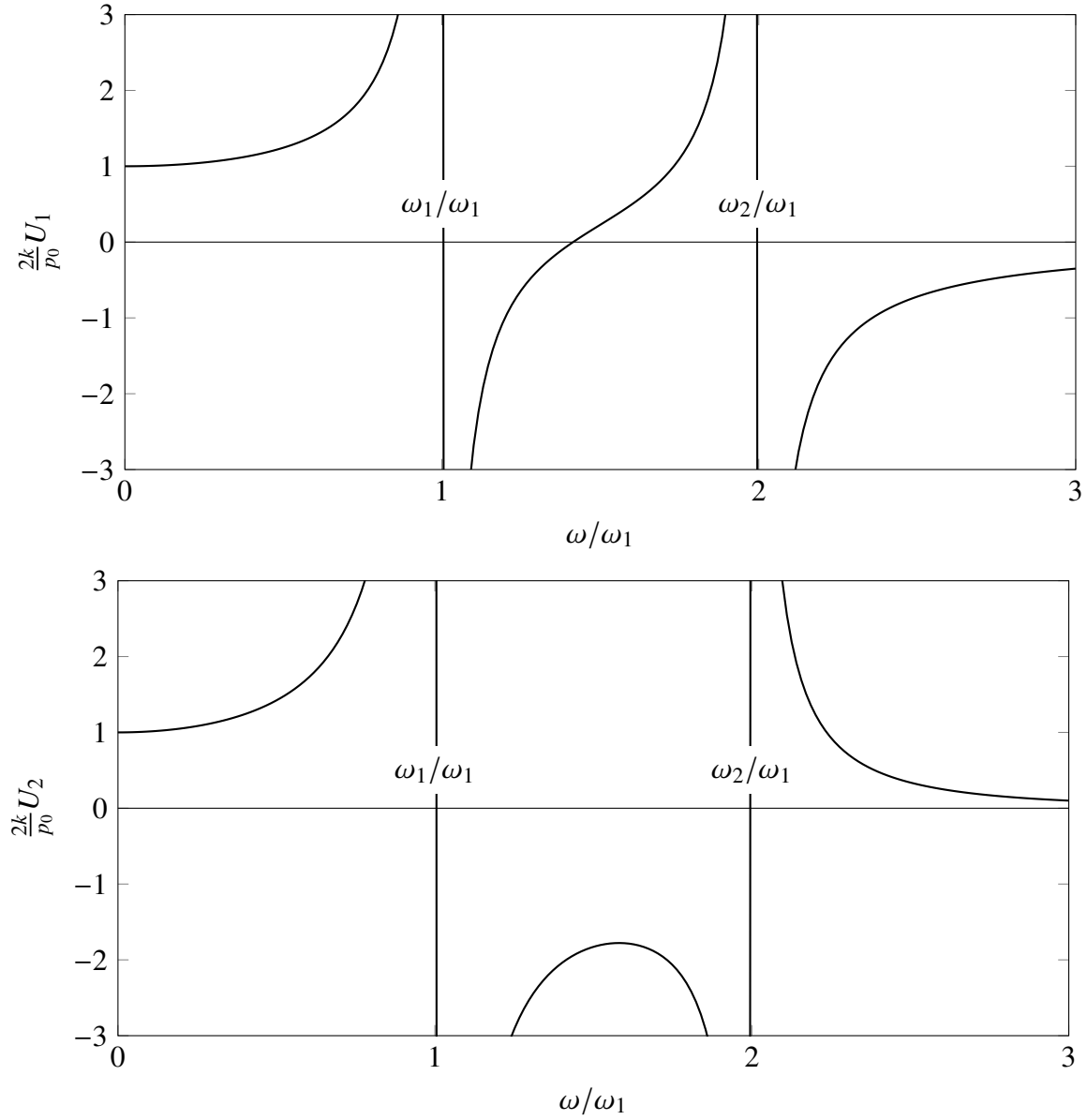
Uz $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ i $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ te dijeljenjem (3.48) i (3.49) s $p_0/2k$ dobijemo vektor dinamičkog koeficijenta pomaka (bez dimenzija), koji ovisi o omjerima frekvencija ω/ω_1 te ω/ω_2. Vektor je prikazan u nastavku

$$\frac{2k}{p_0}\{U\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \tag{3.50}$$

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \frac{2k}{p_0}\{U\}\sin(\omega t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{3.51}$$

Komponente vektora $\{U\}$ možemo iscrtati kao graf funkcije dinamičkog faktora $U_1/p_0/2k$ i $U_2/p_0/2k$ u ovisnosti o frekvencijskom omjeru ω/ω_1.



Slika 3.3: Grafički prikaz vektora U po komponentama U_1 i U_2

Grafovi sa slike 3.3 ukazuju na postojanje dviju rezonancijskih frekvencija: ω_1 i ω_2, pri čemu je dinamički faktor neomeđen.

3.5 Modalna analiza

Modalna analiza je postupak određivanja osnovnih dinamičkih parametara linearnog sustava s ciljem definiranja matematičkog modela ponašanja sustava pod utjecajem dinamičkih sila. Modalna analiza temelji se na *principu superpozicije*, odnosno na činjenici da se ukupni odziv sustava može zapisati kao linearna kombinacija odziva pojedinih oblika titranja.

Razmotrimo jednadžbu gibanja sustava s više stupnjeva slobode pobuđenog proizvoljnom silom:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p(t)\} \tag{3.52}$$

Klasično rješenje jednadžbe gibanja (3.52) prikazano je u poglavlju 3.4 na primjeru sustava s dva stupnja slobode pobuđenog harmonijskom silom. Za sustave s više od dva stupnja slobode ili za složenije sile pobude, rješavanje jednadžbe gibanja na klasični način može biti izuzetno teško ili nemoguće. U takvim slučajevima, jednadžba gibanja se rješava postupcima modalne analize.

Iz poglavlja 3.1 znamo da je rješenje jednadžbe gibanja slobodnog titranja sustava s više stupnjeva slobode linearna kombinacija odziva svih pojedinih oblika titranja odnosno:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{N} \psi_r q_r(t) \tag{3.53}$$

Uvrštavanjem (3.53) u (3.52) dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = p(t) \tag{3.54}$$

Množenjem jednadžbe (3.54) s ψ_n^T dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = \psi_n^T p(t) \tag{3.55}$$

Zbog svojstva ortogonalnosti, iščezavaju svi članovi sumacija osim n-tog člana, pa preostaje:

$$\psi_n^T \, \mathbf{m} \, \psi_n \, \ddot{q}_n(t) \; + \; \psi_n^T \, \mathbf{k} \, \psi_n \, q_r(t) = \psi_n^T \, p(t) \tag{3.56}$$

Koristeći relacije iz (3.30) i (3.29) jednadžba (3.56) poprima slijedeći oblik:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \tag{3.57}$$

Gdje su M_n, K_n i P_n poopćena masa, krutost i opterećenje n-tog modalnog oblika.

Postupkom, prikazanim u jednadžbama (3.53), (3.54), (3.55), (3.56), jednadžbu gibanja sustava predstavljenu sustavom diferencijalnih jednadžbi sveli smo na skup međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi. Drugim riječima, sustav od N stupnjeva slobode razložen

je na N međusobno neovisnih podsustava s jednim stupnjem slobode (princip superpozicije), pri čemu n-ti podsustav prikazuje odziv sustava u n-tom modu. Podsustave nazivamo *poopćeni sustav za n-ti oblik titranja*. "Jednadžba gibanja" poopćenog sustava za n-ti oblik titranja predstavljena je diferencijalnom jednadžbom (3.57) čije rješenje predstavlja modalnu koordinatu n-tog oblika titranja $q_n(t)$.

Odziv n-tog oblika titranja je:

$$\{u_n(t)\} = \{\psi\}_n q_n(t) \tag{3.58}$$

Da bismo odredili ukupni odziv sustava s N-stupnjeva slobode, potrebno je riješiti N modalnih jednadžbi, oblika definiranog pod (3.57). Matrični zapis sustava modalnih jednadžbi prikazan je u nastavku.

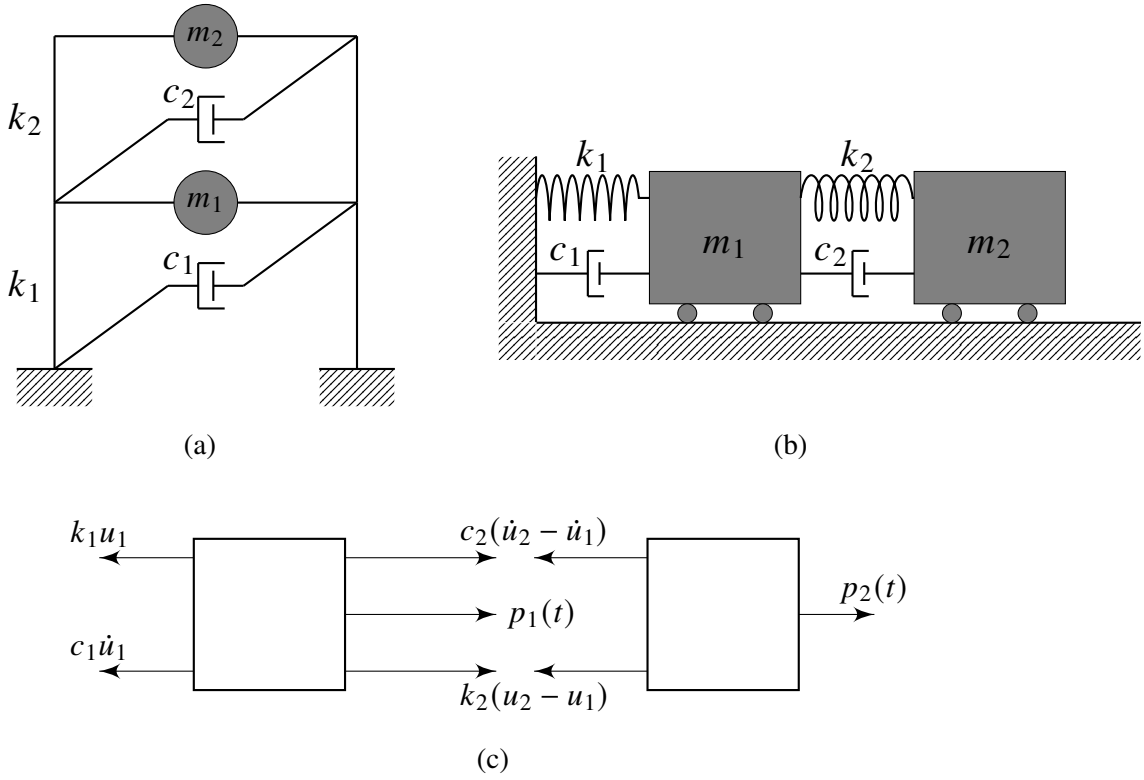
$$\mathbf{M}\{\ddot{q}\} + \mathbf{K}\{q\} = \{P(t)\} \tag{3.59}$$

Gdje je $\mathbf{M}$ matrica modalnih masa, $\mathbf{K}$ matrica modalnih krutosti, $\{P(t)\}$ vektor poopćenih opterećenja. Iz (3.28) i (3.27) znamo da su matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ dijagonalne što znači da je (3.59) sustav međusobno neovisnih jednadžbi. Rješenjem navedenog sustava, dobijemo funkcije modalnih koordinata za sve oblike titranja sustava, a ukupni odziv definiran je linearnom kombinacijom (princip superpozicije) odziva svakog pojedinog oblika titranja. Odziv pojedinog oblika osciliranje definiran je (3.58), a ukupni odziv je:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{u_n(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\psi\}_n q_n(t) \tag{3.60}$$

3.6 Prigušenje u sustavu s više stupnjeva slobode

Model prigušenog sustava s više stupnjeva slobode prikazan je na slijedećoj slici.



Slika 3.4: Idealizirani sustav s dva stupnja slobode i prigušenjem: (a) dvoetažni posmični okvir s prigušenjem; (b) ekvivalentni prigušeni model; (c) prikaz sila;

Jednadžba gibanja sa slike 3.4 glasi:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + \dot{u}_1(c_1 + c_2) - c_2\dot{u}_2 + u_1(k_1 + k_2) - k_2u_2 = p_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + k_2u_2 - k_2u_1 = p_2(t) \end{cases} \tag{3.61}$$

Sustav (3.61) možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \tag{3.62}$$

Kompaktniji zapis jednadžbe pod (3.62) prikazan je u nastavku:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{c}\{\dot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p\} \tag{3.63}$$

Uvodi se $u = \mathbf{\Psi}\{q\}$ te jednadzba (3.63) poprima slijedeći oblik:

$$\mathbf{m\Psi}\{\ddot{q}\} + \mathbf{c\Psi}\{\dot{q}\} + \mathbf{k\Psi}\{q\} = \{p(t)\} \tag{3.64}$$

Množenjem s $\mathbf{\Psi}^T$ dobijemo:

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{m}\mathbf{\Psi}\{\ddot{q}\} + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{c}\mathbf{\Psi}\{\dot{q}\} + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{k}\mathbf{\Psi}\{q\} = \mathbf{\Psi}^T\{p(t)\} \tag{3.65}$$

Iz poglavlja 3.3 poznato je da vrijedi:

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{m}\mathbf{\Psi}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{k}\mathbf{\Psi}$$

Gdje su matrice **M** i **K** dijagonalne matrice modalne mase odnosno krutosti. Osim matrica **M** i **K** uvodi se i matrica **C** koju nazivamo matricom modalnog prigušenja, pa je jednadžbu (3.65) moguće zapisati na slijedeći način:

$$\mathbf{M}\{\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\dot{q}\} + \mathbf{K}\{q\} = \{P\} \tag{3.66}$$

Gdje je $\{P\}$ vektor modalnog opterećenja. Matrica modalnog prigušenja **C** može i ne mora biti dijagonalna pa je potrebno razmotriti dva različita slučaja.

1. Ukoliko je matrica **C** dijagonalna, jednadžba (3.66) predstavlja skup međusobno neovisnih jednadžbi pa je na takvome sustavu primjenjiva klasična modalna analiza. Takav oblik prigušenja naziva se *klasični oblik prigušenja*.

2. Ukoliko matrica **C** nije dijagonalna, jednadžba (3.66) predstavlja sustav međusobno povezanih diferencijalnih jednadžbi, te na takav sustav nije primjenjiva klasična modalna analiza. Takav oblik prigušenja naziva se *općim oblikom prigušenja*.

Matrica modalnog prigušenja zadana je slijedećim izrazom:

$$C = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{c}\mathbf{\Psi} \tag{3.67}$$

Za sustav s dva stupnja slobode, matrica **C** glasi:

$$\begin{bmatrix} I & II \\ III & IV \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Gdje je:

$$I = \psi_{1,1}^2 c_1 + \psi_{1,1}^2 c_2 + \psi_{2,1} c_2 \psi_{1,1} + \psi_{2,1}^2 c_2 - \psi_{1,1} c_2 \psi_{2,1}$$

$$II = \psi_{1,1} c_1 \psi_{1,2} + \psi_{1,1} c_2 \psi_{1,2} - \psi_{2,1} c_2 \psi_{1,2} + \psi_{2,1} c_2 \psi_{2,2} - \psi_{1,1} c_2 \psi_{2,2}$$

$$III = \psi_{1,1} c_1 \psi_{1,2} + \psi_{1,1} c_2 \psi_{1,2} - \psi_{2,1} c_2 \psi_{1,2} + \psi_{2,1} c_2 \psi_{2,2} - \psi_{1,1} c_2 \psi_{2,2}$$

$$IV = \psi_{1,2}^2 c_1 + \psi_{1,2}^2 c_2 i - \psi_{2,2} c_2 \psi_{1,2} + \psi_{2,2}^2 c_2 - \psi_{1,2} c_2 \psi_{2,2}$$

Matrica **C** biti će dijagonalna ukoliko su elementi iznad i ispod glavne dijagonale jednaki nuli, što znači da je potrebno riješiti slijedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} II = 0 \\ III = 0 \end{cases} \tag{3.69}$$

Zbog toga što je matrica **C** simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu (u ovom slučaju), preostaje jedna jednadžba s dvije nepoznanice c_1 i c_2, odnosno:

$$\psi_{1,1}c_1\psi_{1,2} + \psi_{1,1}c_2\psi_{1,2} - \psi_{2,1}c_2\psi_{1,2} + \psi_{2,1}c_2\psi 2,2 - \psi_{1,1}c_2\psi_{2,2} = 0 \tag{3.70}$$

Navedena jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja slijedećeg oblika:

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\psi_{1,2}\psi_{1,1} - \psi_{2,2}\psi_{1,1} + \psi_{2,2}\psi_{2,1} - \psi_{1,2}\psi_{2,1}}{\psi_{1,2}\psi_{1,1}} \tag{3.71}$$

Rješenja jednadžbe (3.70) predstavljaju svaki c_1 i c_2, čiji je međusobni omjer jednak razlomku s desne strane izraza (3.71). Iz jednadžbi (3.70) i (3.71) slijedi da će matrica **C** biti dijagonalna samo ako omjer koeficijenata prigušenja c_1/c_2 zadovoljava jednakost pod (3.71). U protivnom, matrica **C** nije dijagonalna a u sustavu vlada opći oblik prigušenja. Omjer prigušenja nazivamo *razdiobom prigušenja u sustavu*. Zaključno, oblik matrice **C** ovisi o razdiobi prigušenja u sustavu.

Bitno je za napomenuti da u slučaju općeg prigušenja, oblici titranja sustava su različiti od oblika titranja neprigušenog sustava, a iz jednadžbe pod (3.62) dobije se kompleksni problem vlastitih vrijednosti čija rješenja su kompleksni vlastiti vektori ψ i kompleksne vlastite vrijednosti ω. Zbog svoje dugotrajnosti i matematičke složenosti, navedeni slučaj neće biti razmatran u ovome radu.

Dakle, jednadžbu (3.66) moguće je riješiti ukoliko je sustav prigušen klasičnim oblikom prigušenja (matrica **C** je dijagonalna), pri čemu je postupak analogan postupku iz poglavlja 3.5. Modalna jednadžba n-tog oblika titranja glasi:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_nq = P_n(t) \tag{3.72}$$

Gdje je M_n, C_n, K_n i P_n modalna masa, modalno prigušenje, modalna krutost i modalno opterećenje n-tog oblika titranja. Dijeljenjem jednadžbe (3.72) s modalnom masom M_n dobijemo:

$$\ddot{q}_n + 2\omega_n\zeta_n\ddot{q}_n + \omega_n^2q = \frac{P_n}{M_n} \tag{3.73}$$

Gdje je ζ_n relativni faktor prigušenja n-tog oblika titranja a ω_n prirodna frekvencija n-tog oblika titranja. Forma rješenja diferencijalne jednadžbe (3.73) prikazana je pod (3.74) a predstavlja odziv n-tog oblika titranja sustava s više stupnjeva slobode.

$$u_n = \psi_nq_n(t) \tag{3.74}$$

Ukupni odziv dobijemo superpozicijom odziva svih modalnih oblika, odnosno:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n q_n(t) \tag{3.75}$$

4 Zaljučak

Razvojem računala i računalne tehnologije otvara se prostor za razvitak dinamike konstrukcija. Za razumijevanje osnovnih teoretskih principa i pojmova dinamike konstrukcija potrebno je kvalitetno poznavanje najjednostavnijeg sustava, tj. sustava s jednim stupnjem slobode. Osim didaktičke svrhe, sustav s jednim stupnjem slobode može poslužiti i kao model za razvitak eksperimentalnih metoda kao što je rezonancijski pokus.

U inženjerskoj praksi vrlo često se susreću sustavi s više stupnjeva slobode koji mogu biti izrazito složeni. U graditeljstvu sustav s više stupnjeva slobode pojavljuje se kod visokih građevina, primjerice nebodera. Visoke građevine posebno su osjetljive na horizontalna dinamička opterećenja, poput vjetara i potresa. Poznavanjem dinamičkih parametara konstrukcije, moguće je efekte dinamičkog opterećenja svesti na minimum odnosno učinkovito dimenzionirati konstrukciju na dinamičko opterećenje. Primjerice, dinamički parametri konstrukcije mogu se iskoristiti za projektiranje posebnih prigušivača koji se zatim ugrađuju na pogodna mjesta u konstrukciju. Dinamički parametri konstrukcija najšešće se određuju modalnom analizom.

U rudarstvu postupci modalne analize primjenjivi su na analizu odziva konzole rotornog bagera, u separacijskim postrojenjima na analizu vibracijskih sita i sl.

Osim u graditeljstvu i rudarstvu, postupci modalne analize koriste se u brojnim tehničkim i znanstvenim disciplinama, kao što su strojarstvo, zrakoplovno inženjerstvo, autoindustrija i sl.

Jedna od meni osobno interesantnijih primjena modalne analize je u akustici. U akustici, modalna analiza se može koristiti za određivanje projektnih parametara zvučnika te za otkrivanje „malih tajni velikih majstora”, na primjer zašto Stradivarijeva violina zvuči bolje od prosječnih.

5 Popis literature

BABIĆ H., 1996. *Signali i sustavi*. Zagreb: Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

CHOPRA A.K. 2011. *Dynamics of structures: Theory and Application to Earthquake Engineering*. 4. izdanje, New Jersey: Presence Hall.

DAWKINS P., 2018. *Differential equations*. Beaumont: Lamar University Texas.

HE J., FU Z., 2001. *Modal Analysis*. Oxford: Butterworth-Heinmann.

KOŠĆAK J. TURKALJ G. 2012. *Modalna analiza modela konstrukcije i ispitivanje utjecaja njihala i spremnika s vodom kao prigušivača*. Zagreb: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

LAZAREVIĆ D., ŠAVOR NOVAK M., UROŠ M. 2018. *Dinamika konstrukcija s uvodom u potresno inženjerstvo*. Zagreb: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.