

# Misaono računanje kod djece osnovne škole

---

Ikić, Paula

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zadar / Sveučilište u Zadru**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:162:985489>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-06**



**Sveučilište u Zadru**  
Universitas Studiorum  
Jadertina | 1396 | 2002 |

Repository / Repozitorij:

[University of Zadar Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja

Sveučilišni integrirani prijediplomski i diplomski studij

Učiteljski studij



Zadar, 2024.

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja- Odsjek za razrednu nastavu

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

**Paula Ikić**

**Misaono računanje kod učenika osnovne škole**

**Diplomski rad**

**Mentorica: doc. dr. sc. Maja Cindrić**

Zadar, 2024.g.



## Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, Paula Ikić, ovime izjavljujem da je moj diplomski rad pod naslovom Misaono računanje kod učenika osnovne škole rezultat mogega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Ni jedan dio mogega rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mogega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada.

Zadar, 8. studenog 2024.

## SAŽETAK

Misaono računanje predstavlja sposobnost izračunavanja točnih brojevnih odgovora bez uporabe kalkulatora ili pribora za zapisivanje. Ovaj diplomski rad bavi se teorijskom analizom misaonog računanja te isticanjem njegove važnosti u obrazovanju i svakodnevnom životu. Osim toga, rad istražuje vještine misaonog računanja kod djece osnovnoškolske dobi pružajući vrijedan uvid u to posjeduju li ove dvije skupine razvijene sposobnosti i strategije potrebne za mentalno rješavanje zadataka. Kroz analizu njihovih pristupa matematičkim problemima, nastoji se otkriti koliko su djeca sposobni primijeniti misaono računanje bez oslanjanja na vanjske alate, te koliko su vješti u razvoju i primjeni mentalnih strategija za točne i učinkovite izračune. Rezultati su pokazali da ispitanici posjeduju unaprijed usvojene strategije za rješavanje zadataka vezanih uz zbrajanje i oduzimanje. Međutim, kod zadataka koji uključuju množenje i dijeljenje, pojavljuju se poteškoće, što često rezultira netočnim odgovorima.

**KLJUČNE RIJEČI:** matematika, misaono računanje, osnovne računske operacije, učenici, automatizacija

## SUMMARY

### MENTAL CALCULATION AMONG PRIMARY SCHOOL STUDENTS

Mental calculation represents the ability to compute accurate numerical answers without the use of a calculator or writing tools. This thesis focuses on a theoretical analysis of mental calculation, highlighting its importance in education and daily life. Additionally, it investigates the mental calculation skills of primary school children, providing valuable insights into whether these two groups have developed the necessary abilities and strategies for solving tasks mentally. Through an analysis of their approaches to mathematical problems, the study seeks to determine how capable children are of applying mental calculation without relying on external tools, and how proficient they are in developing and using mental strategies for accurate and efficient calculations. The results show that participants have pre-learned strategies for solving addition and subtraction tasks. However, when it comes to multiplication and division, difficulties arise, often leading to incorrect answers.

**KEYWORDS:** mathematics, mental calculation, basic arithmetic operations, students, automation

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	7
2. POČETNA NASTAVA MATEMATIKE .....	8
3. MISAONO RAČUNANJE .....	10
4. PROCES FORMULIRANJA MISAONIH OPERACIJA .....	12
5. MISAONO RAČUNANJE KAO POKRETAČ AUTOMATIZACIJE.....	14
6. UPAMĆIVANJE BROJEVA .....	17
7. VAŽNOST MISAONOG RAČUNANJA ZA RAZVOJ MATEMATIČKIH SPOSOBNOSTI .....	18
8. OSNOVNE RAČUNSKJE OPERACIJE.....	20
9. MISAONO ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BROJEVA .....	22
10. MISAONO MNOŽENJE I DIJELJENJE BROJEVA .....	27
11. DJECA I TEŠKOĆE U UČENJU MATEMATIKE .....	31
12. NAČINI POUČAVANJA MISAONOG RAČUNANJA U REPUBLICI HRVATSKOJ .....	34
12.1. PRVI RAZRED.....	35
12.2. DRUGI RAZRED .....	36
12.3. TREĆI RAZRED .....	37
12.4. ČETVRTI RAZRED.....	38
13. ISTRAŽIVANJE .....	39
14. ZAKLJUČAK.....	66
15. LITERATURA.....	67
16. POPIS SLIKA .....	69
17. PRILOZI .....	70

## 1. UVOD

U obrazovnom sustavu Republike Hrvatske, matematika je jedan od šest obveznih predmeta koji se izučavaju u nižim razredima osnovne škole. Zbog znatnog broja nastavnih sati koji su joj posvećeni, ona zauzima ključno mjesto unutar sustava odgoja i obrazovanja. Osim što razvija temeljne matematičke vještine, ona pridonosi cjelokupnom intelektualnom razvoju djeteta. Peteh (2008) ističe da matematika, od najranije dobi, ima presudan utjecaj na razumijevanje prirodnih i društvenih zakonitosti te oblikuje logičko mišljenje i sposobnost rješavanja problema. Kroz sustavno bavljenje matematičkim pojmovima i zadacima, učenici razvijaju analitičke vještine koje su primjenjive u različitim životnim situacijama.

Osim intelektualnih koristi, matematika doprinosi i razvoju emocionalne inteligencije, kako kroz poticanje znatiželje i interesa, tako i kroz suočavanje s izazovima koje rješavanje problema nosi. Proces istraživanja i traženja rješenja razvija kod djece strpljenje, upornost i sposobnost prihvaćanja neuspjeha kao dijela učenja. Time matematika ne samo da doprinosi akademskom uspjehu, nego i oblikuje širu emocionalnu i socijalnu zrelost, što je ključno za razvoj svakog pojedinca u suvremenom društvu.

Misaono računanje, kao sastavni dio matematike, predstavlja ključnu komponentu matematičkih znanja, a njegovo usvajanje od velike je važnosti za kognitivni razvoj učenika. Iako je pod različitim nazivima i pristupima oduvijek bilo prisutno u školstvu, poseban značaj i formalno priznanje dobilo je 2019. godine, kada se povećala pažnja posvećena njegovoj ulozi u obrazovanju.

Cilj ovog diplomskog rada jest pružiti teorijski pregled spoznaja o misaonom računanju, s posebnim naglaskom na automatizaciju misaonih procesa i značaj misaonog računanja u razvoju kognitivnih sposobnosti učenika. U prvom dijelu rada analizirat će se teorijske osnove misaonog računanja te će se razmotriti poteškoće s kojima se djeca susreću prilikom njegovog usvajanja dok će se u nastavku prikazati rezultati istraživanja o vještinama misaonog računanja kod učenika.



## 2. POČETNA NASTAVA MATEMATIKE

“Matematika je nastavni predmet u kojem se odgoj i obrazovanje ostvaruju matematičkim sadržajima.“ (Markovac, 1992: 16) Matematički sadržaji određuju se i biraju iz ukupnosti matematičke znanosti na temelju kriterija poput dobi učenika te vrste škole. U osnovnoj školi započinje se učiti od prvog razreda, a završava se u osmom razredu. U sustavu općeg osnovnog odgoja i obrazovanja nastava matematike ima jako značajno mjesto i smatra se sastavnim dijelom odgoja i obrazovanja. U svim razredima uči se u obilnom broju nastavnih sati. (Markovac, 1992)

Markovac navodi kako se početna nastava matematike odnosi se na razdoblje od prvog do četvrtog razreda osnovne škole, koje se odlikuje visokim stupnjem metodičkog oblikovanja nastavnih sadržaja. Za razliku od predškolskog razdoblja, ovo razdoblje karakterizira prijelaz na sustavno odgajanje i obrazovanje, gdje se nastavni sadržaji usvajaju namjerno i organizirano, ne uvijek neposrednim dodirima s realnošću. U okviru ove nastave, učenici stječu početnu matematičku pismenost kroz usvajanje četiri osnovne računske operacije u usmenom i pismenom obliku.

U osnovnoj školi nastava matematike je obavezna za sve učenike i služi općem obrazovanju. Učenici se ne pripremaju za specifična zanimanja kroz ove sadržaje, već matematika ima ključnu ulogu u njihovom odgoju i općem obrazovanju. (Markovac, 1992)

Matematika od najranije dobi doprinosi razumijevanju prirodne i društvene sredine. Obogaćuje dječji svijet predodžbi, uvodi ih u međusobne odnose konkretne stvarnosti te ih uči matematičkom jeziku, razvijanju mišljenja i drugih psihičkih funkcija. Sadržaji osnovnih matematičkih pojmova postaju dio intelektualnog odgoja, odnosno kognitivnog razvoja. Kognitivno područje obuhvaća proces razvoja naših umnih sposobnosti, uključujući stjecanje osnovnih znanja, učenje, te razvoj logičkog i apstraktnog mišljenja. To je također proces koji potiče misaone aktivnosti, budi interes i radoznalost, te razvija emocionalnu inteligenciju. Uz to, obuhvaća i zadovoljstvo ili nezadovoljstvo postignutim uspjehom ili suočenjem s neuspjehom. Kognitivni razvoj, stoga, igra ključnu ulogu u oblikovanju naših mentalnih i emocionalnih kapaciteta. (Peteh, 2008)

“Cilj matematičkog odgajanja i obrazovanja uključuje, prema tome, tri sastavna dijela: usvajanje matematičkih sadržaja, razvijanje psihičkih sposobnosti te formiranje pozitivnih svojstava učenikove ličnosti” (Markovac, 1992:18)

Matematika i brojevi su ključni alati koji nam pomažu u strukturiranju svijeta i omogućuju nam život kakav danas živimo. Naša civilizacija je duboko povezana s brojevima i o njima ovisi. Oni nam pružaju sredstva za razumijevanje i upravljanje različitim aspektima života, od tehnologije do ekonomije, čime osiguravaju napredak i stabilnost društva. (Gret, 2012)

Globalni cilj svakog učitelja je prenijeti što više sadržaja iz pojedinog predmeta na svoje učenike. U matematici, uz same sadržaje, učenici trebaju razvijati niz drugih kompetencija koje su ključne za razumijevanje i primjenu matematičkih znanja. Te kompetencije uključuju prikazivanje i komunikaciju matematičkih ideja, povezivanje svih elemenata matematike, logičko mišljenje, argumentiranje, zaključivanje i rješavanje problema. Iako se te kompetencije ne podučavaju izravno, bez njih znanje sadržaja matematike neće biti smisljeno. Podučavanje matematike stoga postaje izazovan i kompleksan zadatak, jer se ove kompetencije moraju razvijati kroz pažljivo odabrane aktivnosti i kvalitetno vođenje učenika kroz nastavni proces. Učenje matematike nije samo usvajanje pojedinih sadržaja, već složen proces koji mnogim učenicima predstavlja izazov. Iz tog razloga, u novije vrijeme, učenje matematike postalo je fokus brojnih istraživanja u odgojno-obrazovnom procesu. Pitanja poput načina na koji osoba uči matematiku, procesa koji se odvijaju u ljudskom mozgu tijekom učenja matematičkih znanja, te identificiranja efikasnijih i manje efikasnih metoda učenja, postala su temelj istraživanja i razvoja mnogih teorija. (Musser, 2008, van de Walle, 2008)

### 3. MISAONO RAČUNANJE

Pojam misaonog računanja oduvijek je bio prisutan u obrazovanju, ali pod različitim imenima. Kroz povijest su se često koristili izrazi poput "računanje na pamet," "računanje iz glave," ili "usmeno računanje," koji su naglašavali važnost mentalnih procesa i intuitivnog razmišljanja u rješavanju problema. Danas se ovaj koncept najčešće naziva "misaono" ili "mentalno računanje," čime se dodatno ističe fokus na kognitivnim sposobnostima učenika.

Nastavni plan i program iz 1946. godine u Narodnoj Republici Hrvatskoj stavljao je naglasak na misaono računanje u osnovnim školama. Učenici su u prva dva razreda učili zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje do 100, isključivo usmeno, a očekivalo se sigurno misaono rješavanje zadataka do kraja drugog razreda. U trećem i četvrtom razredu, učenici su prvo računali misaono s brojevima do 1000, a kasnije i do milijun, prije prelaska na pisano računanje.

Dokument iz 1958. godine smanjuje naglasak na postupno uvođenje računskih radnji i uvodi praksu zapisivanja misaonog zbrajanja i oduzimanja, dok reforma iz 1972. godine, inspirirana američkom "New Math" reformom, fokusira se više na matematičke pojmove nego na računanje, koje u tom dokumentu nije izričito spomenuto.

Kasniji planovi i programi, uključujući onaj iz 2006., zadržavaju općeniti pristup bez jasnih uputa za misaono računanje. Međutim, Kurikulum iz 2019. ponovno uvodi pojam "mentalnog računanja" i propisuje da učenici u drugom razredu trebaju misaono zbrajati i oduzimati brojeve do 100. Ova praksa, koja je dugi niz godina bila poznata kao misaono računanje, konačno je formalizirana, dok za množenje i dijeljenje ostaje naglasak na pisanom računanju.

Prema procesu dolaženja do rezultata, računanje se može grupirati u nekoliko skupina, a to su: misaono računanje, računanje zapisivanjem postupka ili pisano računanje te računanje s pomoću računala. (Musser, 2008, van de Walle, 2008). Reys (1984) misaono računanje definira kao sposobnost izračunavanja točnih brojčanih odgovora bez uporabe kalkulatora ili bilo kakvih pribora za zapisivanje. Konceptualno razumijevanje i osjećaj za brojeve ključni su preduvjeti za precizno misaono računanje. Dok se kod pisanog računanja većina učenika oslanja na jednu određenu metodu za svaku operaciju, koju potom uvježbavaju, misaono računanje zahtjeva drugačiji pristup. Osobe vješte u misaonom računanju koriste raznolike mentalne strategije kako bi došli do točnog rezultata. Oni se oslanjaju na duboko razumijevanje brojeva i operacija te imaju odličan uvid u poznate odnose među brojevima i operacijama. (McIntosh, 2005)

Postizanje fluentnosti u računanju ima važnu ulogu prilikom učenja matematike, jer ne uključuje samo sposobnost računanja, već i integraciju različitih matematičkih elemenata. Razumijevanje matematičkih koncepata bez tečnosti u misaonom i pisanom računanju ometa proces rješavanja problema. S druge strane, samo vježbanje pisanog računanja bez dubljeg razumijevanja matematičkih koncepata i tečnosti u misaonom računu često dovodi do grešaka u računskim operacijama, a učenici nisu u mogućnosti uočiti grešku u procesu rješavanja zadatka. Fluentnost u računanju kod djece tijekom obrazovanja u nižim razredima osnovne škole predstavlja snažni pokazatelj budućeg uspješnog učenja matematike.

Svi učenici trebaju odabrati prikladne metode i alate za izvođenje računskih operacija s cijelim brojevima, uključujući mentalne proračune, procjene, kalkulatore te papir i olovku, prilagođavajući ih kontekstu i prirodi konkretnog izračuna te koristeći odabrane metode ili alate. (Musser, Peterson i Burger, 2008)

U kontekstu misaonog računanja, pojedinci trebaju biti sposobni misaono izvoditi jednostavne izračune. Nadalje, učenici bi trebali misaono računanje smatrati prvim izborom u brojnim situacijama koje zahtjevaju izračun. Strategije misaonog računanja trebaju se sustavno razvijati tijekom obrazovnog procesa, ne ograničavajući se samo na memoriranje osnovnih činjenica. Pojedinci vješti u misaonom računanju obično koriste različite osobne metode prilagođene specifičnim brojevima i situacijama. Stoga je potrebno poticati učenike na razvoj vlastitih metoda misaonog računanja, na eksperimentiranje i usporedbu strategija koje koriste drugi, te na odabir strategija koje odgovaraju njihovim individualnim snagama i specifičnom kontekstu. (Musser, Peterson i Burger, 2008)

#### 4. PROCES FORMULIRANJA MISAONIH OPERACIJA

U ovom poglavlju razmatra se ključni proces formuliranja misaonih operacija u matematičkom obrazovanju, posebno u početnim fazama učenja. Proces koji opisuje kako učenici prelaze od materijalnih i govornih radnjama ka apstraktnim misaonim operacijama je temelj za razumijevanje složenih matematičkih koncepata. Kroz faze materijalnog izvođenja radnje, govornog izvođenja radnje i konačne interiorizacije, učenici postupno usvajaju i razvijaju mentalne modele za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje prirodnih brojeva. Ovaj prijelaz iz konkretnih u apstraktne oblike razmišljanja temelji se na psihološkim principima i zahtjeva pažljivo planiranje nastave.

U početnoj fazi nastave matematike, učenici stječu pojmove zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva. Ove operacije se odvijaju isključivo na misaonom nivou, predstavljajući mentalne modele koje učenici usvajaju kroz dugotrajan spoznajni proces. Kako bi uspješno usvojili ove operacije, potrebno je razviti mentalne radnje, te se stoga njihovo učenje mora temeljiti na psihološkim principima. (Markovac, 1992)

Markovac prema P.J. Galjperina navodi nekoliko etapa prema kojima se izgrađuju misaone radnje, a to su: materijalno izvođenje radnje, govorno izvođenje radnje te prenošenje radnje na misaono područje.

Materijalno izvođenje radnje predstavlja prvi korak u razvoju misaonih operacija poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva. Misaona radnja se temelji na radnjama s konkretnim objektima jer materijalno izvođenje konkretizira sadržaj omogućujući jasnije shvaćanje sadržaja buduće misaone radnje. Ovo povezivanje misaone operacije s fizičkim iskustvom daje smisao novoj radnji i olakšava njeno razumijevanje.

Nakon materijalnog izvođenja radnje slijedi druga etapa, koja se naziva govorno izvođenje radnje i koja je korak bliže misaonoj operaciji. Govorno izvođenje radnje ima vrijednost jer omogućuje misaonu rekonstrukciju materijalne radnje i razvijanje slijeda misli o njoj. Objašnjavanje materijalne radnje riječima pomaže pravilnom razumijevanju tih riječi, koje time dobivaju pravo značenje i postaju temelj za misaoni rad.

Prenošenje radnje na misaono područje događa se kada se radnja može reproducirati govorom, pretvarajući tako materijalnu radnju u unutrašnju misaonu radnju. Ovaj proces transformacije

vanjske radnje u unutrašnju naziva se interiorizacija. U početnoj fazi ove etape, misaono izvođenje radnje još uvijek se podržava govorom. Međutim, kada se radnja potpuno prebaci na misaono područje, ona se oslobađa materijalnih i verbalnih elemenata te se usklađuje sa sadržajem koji je bio prisutan u materijalnom i govornom izvođenju.

Etape nisu zasebne i izolirane aktivnosti, već se međusobno isprepliću i dopunjuju. Napredak od početne do završne faze uključuje postupnu transformaciju materijalne aktivnosti u misaonu. Kroz ponavljano izvođenje materijalnih i verbalnih radnji apstrahiraju se nebitni elementi, dok se bitni pojmovni odnosi generaliziraju kao sadržaji nove misaone radnje. Za uspješan prijelaz s vanjskih na unutrašnje radnje, odnosno za interiorizaciju, mišljenje se mora osloboditi oslanjanja na materijalno izvođenje radnje kao osnovu mentalne operacije. U suprotnom, formiranje operacija s prirodnim brojevima neće rezultirati ni mentalnim operacijama s brojevima niti materijalnim radnjama na skupovima. U najboljem slučaju, rezultat takvog učenja bit će radnja koja sadrži elemente i materijalnih i mentalnih operacija. (Markovac, 1992)

Fleksibilnost u misaonom računanju ne može se poučavati kao proces vještina ili holistička strategija. Umjesto toga, fleksibilnost se može razviti kroz aktivnosti u kojima učenici otkrivaju različite načine manipuliranja brojevima u mentalnim izračunima, uključujući rastavljanje, kombiniranje, zaokruživanje i prilagodbu. (Threlfall, 2002).

## 5. MISAONO RAČUNANJE KAO POKRETAČ AUTOMATIZACIJE

Ključna uloga u učenju matematike je automatizacija pojedinih radnji koja se odnosi na sposobnost izvođenja radnji brzo, točno i s minimalnim mentalnim i fizičkim naporom, što omogućuje učenicima da efikasno upravljaju osnovnim matematičkim zadacima. Proces automatizacije uključuje dohvaćanje činjenica iz dugoročne memorije pri čemu se koristi smanjenje svijesti o izvođenju radnje i potrebu za minimalnim naporom, dok istovremeno osigurava točnost i brzinu. Razumijevanje kako se ove radnje automatiziraju ključno je za unapređenje učinkovitosti učenika u matematici, jer omogućuje brže i preciznije rješavanje problema. Iako je dril, metoda repetitivnog učenja, često korišten za postizanje automatizacije, važno je primjenjivati ga pažljivo kako bi se osiguralo da ne postane monotono i neproduktivno. Automatizacija tako postaje temelj za naprednije matematičke operacije, poboljšavajući koncentraciju i pamćenje te osnažujući intelektualne kapacitete učenika.

“Automatiziranje se općenito nazivaju one radnje koje se izvode brzo, točno, s malim sudjelovanjem svijesti, te s malim fizičkim i psihičkim naporom. Obilježja su im brzina izvođenja (očituje se u malom utrošku vremena), točnost izvođenja (očituje se u ispravnosti radnje), mala svjesnost izvođenja (svi dijelovi radnje nisu prezentirani u svijesti), te mali napor (izvode se lako i bez umora).” (Markovac, 1992:86)

Među sadržajima koje učenici usvajaju u početnoj nastavi matematike postoje i oni koji moraju biti automatizirani. To uključuje dijelove osnovnih računskih operacija s brojevima do 100, neke operacije s većim brojevima, motoričke radnje poput pisanja matematičkih znakova te crtanje jednostavnih geometrijskih oblika. Automatizacija ovih operacija ključna je za izvođenje drugih radnji s brojevima, koje bi bez toga bile teže, sporije i manje uspješne. Iako se svijest tijekom izvođenja smanjuje, ona ostaje prisutna za otkrivanje i ispravljanje grešaka, što čini automatizirane radnje vrlo korisnima jer omogućuju brzo i učinkovito obavljanje zadataka, štedeći vrijeme i energiju te povećavajući fizički i intelektualni kapacitet učenika. (Markovac, 1992)

U početnoj nastavi matematike, sadržaji koji se trebaju automatizirati, posebno kod računskih operacija s brojevima do 100, uključuju:

1. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE DO 20: Brzo i točno zbrajanje i oduzimanje manjih brojeva do 20 bez potrebe za dodatnim računanjem ili vizualizacijom (npr.  $9 + 5 = 14$ ,  $15 - 7 = 8$ ).
2. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE DESETICA: Poznavanje zbrojeva i razlika između višekratnika desetice do 100 (npr.  $30 + 40 = 70$ ,  $80 - 20 = 60$ ).
3. MNOŽENJE I DIJELJENJE JEDNOSTAVNIH BROJEVA (TABLICA MNOŽENJA): Automatsko poznavanje rezultata množenja i dijeljenja brojeva do 10, s posebnim fokusom na najčešće parove (npr.  $5 \cdot 6 = 30$ ,  $8 \div 4 = 2$ ).
4. DIJELJENJE I MNOŽENJE S BROJEM 10: Razumijevanje efekta množenja i dijeljenja broja s 10 (npr.  $4 \cdot 10 = 40$ ,  $40 \div 10 = 4$ ).
5. DVOSTRUKI BROJEVI I POLOVINE: Prepoznavanje dvostrukih vrijednosti brojeva i njihovih polovica do 100 (npr. dvostruko od 12 je 24, polovica od 80 je 40).

Ovo je jedini element nastave matematike koji zahtijeva primjenu tzv. drila, no s njim treba postupati s velikim oprezom. Dril se odnosi na repetitivne, ne-problemski orijentirane aktivnosti. Ova metoda se može koristiti samo kod djece koja su razvila strategije i razumiju kako doći do rješenja, ali još nisu postigla potrebnu razinu automatizacije znanja. Izuzetno je važno pažljivo procijeniti kada i u kojoj mjeri primjenjivati tehnike učenja koje uključuju dril. Za učinkovitu primjenu drila preporučuje se: pripremiti učenike za samoprocjenu s fokusom na samopoboljšanje, koristiti dril u kratkim vremenskim intervalima, uključiti roditelje i obitelj u proces, učiniti dril aktivnosti zanimljivima, koristiti tehnologiju, te naglašavati važnost brzog prisjećanja činjenica iz dugoročne memorije. (Musser, Peterson i Burger, 2008)

Markovac (1992) objašnjava da je automatizacija računskih operacija moguća jer jednom shvaćen proces možemo reproducirati bez potrebe za ponovnim izvođenjem svih uključenih radnji. Radnje koje osoba automatizirano izvodi često su oslobođene svjesnog značenja. Postoji razlika između mehaničkog ili formalističkog operiranja i automatiziranih radnji. Mehaničko operiranje podrazumijeva izvođenje radnji bez razumijevanja njihovog značenja, dok automatizirane radnje, iako svjesno reducirane, temelje se na prethodnom razumijevanju i svjesnoj kontroli te omogućuju brzo efikasno rješavanje zadatka.



Gret (2012) navodi kako misaono računanje donosi mnoge važne prednosti. Poboljšava koncentraciju, koja je ključna, a često nam nedostaje. Dobra koncentracija ne samo da unapređuje sposobnost razmišljanja i snalaženja u kritičnim trenucima, već također omogućuje brže orijentiranje, bolji uvid u situacije te donošenje logičkih zaključaka i odluka. Osim toga, može značajno poboljšati sposobnost pamćenja, čineći nas učinkovitijima u svakodnevnim zadacima i izazovima.

## 6. UPAMĆIVANJE BROJEVA

Ovo poglavlje govori o važnost upamćivanja brojeva za uspješno misaono računanje. Gret (2012) naglašava da je ključno dobro pamtiti brojeve kako bi cijeli proces bio učinkovit, budući da zaborav međurezultata može onemogućiti rješavanje zadatka. Razlikovat ćemo između tehnika pamćenja brojeva, mehaničkog računanja i kreativnog pristupa, ističući kako svaka od njih različito utječe na mentalne procese.

Gret (2012) navodi kao je za uspješno misaono računanje, važno dobro pamtiti brojeve koje smo izračunali prije konačnog rezultata. Ako se zaborave međurezultati prije nego što se dođe do konačnog, cijeli proces postaje besmislen. Budući da su brojevi apstraktne informacije, mnogima je njihovo pamćenje osobito izazovno. U takvim slučajevima, fotografsko pamćenje bi bilo idealan alat za pomoć. Postoje standardne tehnike za bolje pamćenje brojeva. Kako su mnogi ljudi s vremenom počeli trenirati svoje pamćenje, slično kao što se treniraju sportovi, na tom području razvila se cijela znanost.

Razlikujemo tri vrste računanja napamet, a svaka različito opterećuje mozak: upamćivanje brojeva, mehaničko računanje i kreativno ili konstruktivno računanje. Kod upamćivanja brojeva ne dolazi do računanja, već je potrebno reproducirati naučeni niz brojeva. Ovdje se koriste tehnike pamćenja, a ne računanja. Stoga, radi se o sposobnosti pamćenja koja koristi različite tehnike za memoriranje brojeva, a ne tehnike za računanje.

Drugi način računanja odnosi se na mehaničko računanje. Primjer ovakvog računanja je pisano zbrajanje koje se uči u školi. Ova vrsta računanja često obuhvaća rutinske zadatke koji se izvode automatski, koristeći unaprijed naučene postupke. Mehaničko računanje uključuje ponavljanje postupaka bez potrebe za dubljim razumijevanjem njihovog značenja.

Treća vrsta računanja namijenjena je osobama koje uživaju u pronalaženju novih načina rješavanja problema. Njima je ključno razvijati mudre i kreativne metode računanja. Važno je posjedovati intuiciju za odabir optimalnih matematičkih postupaka koji odgovaraju određenim zadacima. Radije prilagođavaju ili mijenjaju postupke kako bi poboljšali rješenja i postigli bolje rezultate. (Gret, 2012)

## 7. VAŽNOST MISAONOG RAČUNANJA ZA RAZVOJ MATEMATIČKIH SPOSOBNOSTI

U ovom poglavlju razmatra se kako različita misaona svojstva utječu na matematičke sposobnosti, uključujući osjećaj za brojeve, brojenje i apstraktno mišljenje. Ova svojstva čine osnovu za matematičko razmišljanje i ključna su za uspješno savladavanje matematičkih koncepata. Također se analizira kako rano izlaganje matematičkim aktivnostima i uključivanje obitelji mogu unaprijediti razvoj matematičkih vještina kod djece.

Devlin (2008) ističe kako različita misaona svojstva imaju značajan utjecaj na matematičke sposobnosti. Ključna svojstva uključuju osjećaj za brojeve, sposobnost brojenja, računanja, apstraktnog mišljenja, prepoznavanja uzoraka, sposobnost kreiranja i upravljanja uzročno-posljedičnim nizovima činjenica i događaja, logičko razmišljanje o odnosima među objektima te prostornu orijentaciju. Kombinacije ovih sposobnosti čine osnovu za matematičko razmišljanje, za koje mozak zahtijeva određenu razinu energetske potrošnje za svaku od njih.

Ljudi, kao i nekoliko drugih vrsta životinja, imaju prirodnu sposobnost razumijevanja brojeva. Primjećujemo razliku između jedne stvari, dvije stvari i tri stvari bez ikakve obuke; taj osjećaj za broj je urođen. Svaka osoba ima urođen osjećaj za brojenje i osnovnu sposobnost računanja. Sposobnost brojenja i osjećaj za broj ne zahtijevaju apstraktno shvaćanje brojeva - te vještine učimo kroz iskustvo. Sposobnost računanja zahtijeva učenje različitih nizova operacija s brojevima. Ljudski mozak razvija apstraktno razmišljanje paralelno s usvajanjem jezika kojim se služimo svakodnevno. Ograničeno razumijevanje apstraktnih pojmova predstavlja veliku prepreku prilikom rješavanju matematičkih problema. Osjećaj za uzrok i posljedicu razvija se kod mnogih vrsta, uključujući ljude, već u najranijoj dobi. No, sposobnost stvaranja i upravljanja uzročno-posljedičnim nizovima činjenica i događaja jedinstvena je ljudima i javlja se također u djetinjstvu. Sposobnost logičkog razmišljanja, koja je usko povezana s prethodno spomenutim vještinama, temeljna je za matematičko razmišljanje. Ona podrazumijeva stvaranje i praćenje logičkih argumenata korak po korak. Sposobnost razmišljanja o odnosima među objektima nije puno drugačija od promatranja prirodnih odnosa među fizičkim objektima ili među ljudima. Snalaženje u prostoru je ključan element za opstanak vrste, a ta sposobnost je osnovna za razumijevanje geometrije. Također se može primijeniti i na područja koja naizgled nisu povezana s prostorom. Sve ove osobine i njihove kombinacije čine osnovu za matematičko razmišljanje. (Devlin, 2008)

“...naša sposobnost računanja-brojenja objekata i aritmetičke operacije- većinom se temelji na tri sposobnosti: osjećaju za broj, brojenju i računanju” (Devlin, 2008: 29)

Hughes (1986.) navodi kako i četverogodišnjaci mogu uspješno koristiti matematičke simbole "+" i "-" ukoliko razumiju svrhu ili razlog njihove upotrebe.

Značajan dio teškoća u učenju matematike proizlazi iz strukture gradiva koja ne uvažava adekvatno postojeće preduvjete za učenje, razinu intelektualnog razvoja djeteta i njegovo matematičko predznanje. Poučavanje matematike postaje znatno učinkovitije kada se razumije priroda ranih dječjih spoznaja, koje zatim treba koristiti kao temelj za razvoj novih i složenijih matematičkih koncepata. Na primjer, tradicionalni pristup učenju računanja često se snažno protivio korištenju prstiju pri zbrajanju i oduzimanju. No, zapažanja razvojnih psihologa sugeriraju da obzirom na dob mijenjaju pristupi rješavanja matematičkih problema. Početne strategije računanja, poput korištenja prstiju, postupno se napuštaju u korist učinkovitijih metoda, kao što je prizivanje određenih činjenica, primjerice tablica množenja, iz dugoročnog pamćenja. (VlahovićŠtetić i Vizek Vidović, 1998)

Matematika nije samo predmet u školi koji se uči kada djeca krenu u školu. Matematičke vještine kod djece krenu se razvijati i puno prije. Istraživanje i učenje matematike odvija se u različitim okruženjima, uključujući svakodnevne situacije od najranije dobi. Djeca stječu matematičke vještine u svojim ranim obrazovnim okruženjima, kao i na mjestima poput trgovina, igrališta i vlastitih domova. Na primjer, djeca uče o količini kada odrasla osoba broji dvije jabuke koje treba staviti u košaricu. Stoga dnevne routine prepune su prilika za razvoj matematičkih vještina, poticanje vještina u ranoj fazi djetinjstva povezano je s kasnijim školskim uspjehom. Smatraju se pouzdanim prediktorom za postignuća u čitanju i matematici u trećem razredu osnovne škole, a pored toga povezane su s drugim domenama učenja, kao što su jezična, društvena i emocionalni razvoj. Pored učitelja koji poučavaju djecu matematiku, obitelj ima ključnu ulogu u njihovom uspjehu i boljim školskim rezultatima. Kada su roditelji uključeni u matematičke aktivnosti kod kuće i potiču djecu da istražuju matematičke koncepte tijekom svakodnevnih aktivnosti, djeca postižu bolje rezultate. (<https://eclkc.ohs.acf.hhs.gov/sites/default/files/pdf/supporting-math-skills-in-infants-and-toddlers.pdf>)

## 8. OSNOVNE RAČUNSKE OPERACIJE

U skupu prirodnih brojeva rabimo četiri osnovne računske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Gret (2012) zbrajanje navodi kao osnovnu računsku operaciju koju najčešće koristimo u svakodnevnom životu i koju većina ljudi smatra relativno jednostavnom. Međutim, čak i najmanja pogreška može dovesti do pogrešnog rezultata, što zbrajanje čini izazovnim za djecu.

Oduzimanje je osnovna matematička operacija koja prikazuje razliku između dva broja i suprotna je zbrajanju. (<https://www.enciklopedija.hr/clanak/oduzimanje>) Kao i zbrajanje, oduzimanje zahtijeva oprez i koncentraciju. Ključ učenja leži u temeljitom savladavanju gradiva, što se postiže redovitim vježbanjem. (Gret, 2012:51)

Sve što učenici uče o zbrajanju, oduzimanju, množenju i dijeljenju u prvom i drugom razredu osnovne škole spada pod misaono računanje. U trećem razredu uvodi se druga metoda, poznata kao pismeno računanje. Pojam "misaono računanje" sugerira da se računanje obavlja napamet, bez korištenja papira, olovke ili kalkulatora. "Misaonim računanjem nazivljemo postupak kojim se zadani brojevi radi izračunavanja zbroja, razlike, umnoška i količnika na različite načine rastavljaju i sastavljaju. Za taj postupak su karakteristična ova dva obilježja: brojevi kojima se operira rastavljaju se kako bi lakše došlo do rezultata, drugo, djelomične se radnje izvode usmeno, napamet, a djelomični se rezultati zapisuju." (Markovac, 1992: 157)

Način na koji se brojevi rastavljaju i sastavljaju u usmenom računanju nije strogo definiran, što omogućuje učenicima da biraju različite pristupe računanja. Ta fleksibilnost, koja omogućuje različite načine rastavljanja brojeva i dolaska do rezultata, pozitivno utječe na razvoj učenikovog stvaralačkog mišljenja. U misaonom računanju, razmišljanje nije ograničeno algoritmima; misao je pokretna i bogata sadržajem. Upravo je to glavna karakteristika misaonog računanja u početnim fazama učenja matematike.

Učenici obično prolaze kroz tri faze kako bi napredovali u svladavanju osnovnih kombinacija brojeva, uključujući jednoznaменkaste kombinacije zbrajanja i množenja te njihove komplementarne kombinacije oduzimanja i dijeljenja. Prva faza odnosi se na strategiju brojanja, pri čemu se koriste brojanje predmeta ili verbalno brojanje za određivanje odgovora. Druga faza je strategija rasuđivanja ili rezoniranja, što podrazumijeva korištenje unaprijed poznatih

informacija za logičko dolaženje do odgovora. Treća faza je automatizacija, koja se očituje kao brzo, učinkovito i točno dolaženje do odgovora.

(<https://www.kentuckymathematics.org/docs/eerti-BarodyTCM2006.pdf>)

## 9. MISAONO ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BROJEVA

Misaono računanje zahtijeva veću misaonu aktivnost u odnosu na pisano, jer uključuje razne misaone procese poput koncentracije, vizualizacije i logičkog povezivanja. Ova metoda omogućava učenicima da aktivno primjenjuju svoje matematičke vještine, što doprinosi razvoju njihove sposobnosti za rješavanje problema. U ovom poglavlju istražiti će se kako misaono računanje može poboljšati matematičke sposobnosti i kako učitelji mogu podržati učenike u razvijanju vlastitih strategija za uspješno rješavanje matematičkih zadataka.

Misaono računanje, za razliku od pisanog, puno više angažira misaone procese, potičući razmišljanje, pamćenje i pažnju, te zahtijeva visok stupanj koncentracije. Teže je od pisanog računanja jer uključuje veći intelektualni napor kroz različite procese kao što su mišljenje, pažnja, pamćenje i vizualizacija. Pronalaženje misaonog puta do rezultata, kombiniranje brojeva i zamišljanje odnosa među njima, zahtijevaju značajan intelektualni napor. Zadaci u knjigama pomažu učenicima da primjenjuju matematičko znanje u svakodnevnim situacijama. Budući da učenici ponekad ne mogu sami pronaći način za misaono računanje, preporučuje se da učitelj predloži optimalan postupak izračunavanja, ali također potiče učenike da razvijaju svoje vlastite metode. (Markovac, 1992:159)

“Gradivo usmenog zbrajanja i oduzimanja do 1 000 obuhvaća ove sadržaje:

- a) zbrajanje i oduzimanje višekratnika broja 100, npr.  $400+300$ ,  $800-500$
- b) zbrajanje troznamenkastog i jednoznamenkastog brojeva te oduzimanje jednoznamenkastog brojeva od troznamenkastog, npr.  $567+8$ ,  $869-7$
- c) zbrajanje troznamenkastog broja i višekratnika broja 10 te oduzimanje višekratnika broja 10 od troznamenkastog broja,  $638+50$ ,  $735-60$
- d) zbrajanje troznamenkastog i dvoznamenkastog broja te oduzimanje dvoznamenkastog broja od troznamenkastog, npr.  $457+42$ ,  $864-57$
- e) zbrajanje troznamenkastih brojeva i oduzimanje troznamenkastih brojeva, npr.  $357+243$ ,  $867-432$ ” (Markovac, 1992:159,160)

Markovac (1992) navodi da se misaono zbrajanje i oduzimanje troznamenkastih i višeznamenkastih brojeva provodi se na sljedeći način: drugi broj se razlaže na stotice, desetice i jedinice. Prvo se dodaju ili oduzimaju stotice, zatim desetice, a na kraju jedinice. Kada učenici razumiju ovaj postupak, mogu izostaviti zapisivanje pojedinačnih koraka, ali zadržavajući isti tok

misli, misaono razlažu drugi broj i u mislima izvode sve korake. Na primjer, za  $432 + 256$ : prvo dodamo 200 i dobijemo 632, zatim dodamo 50 i dobijemo 682, te na kraju dodamo 6 i dobijemo konačan rezultat 688.

Markovac (1992) napominje da se u višim razredima zadaci rješavaju pisanom metodom, no nije preporučljivo potpuno napustiti misaono računanje. Učitelj bi trebao kombinirati zadatke koje će učenici rješavati i pisanom i usmenom metodom kako bi pozitivno utjecao na razvoj intelektualnih sposobnosti učenika i bolje razumijevanje računskih operacija. Poželjno je isti zadatak riješiti i usmenim i pisanim postupkom te identificirati zajedničke i različite elemente u oba postupka.

(Musser, Peterson i Burger, 2008):

Strategije koje djeca pri automatizaciji zbrajanja brojeva do 20 su:

- Dvostruki brojevi -  $1 + 1 = 2$ ,  $2 + 2 = 4$ ,  $3 + 3 = 6$ , ...
- Dodavanje jedinice - dodavanjem jedinice dobivamo idući broj u nizu brojeva - sljedbenik
- Dodavanje nule - dodavanjem nule zbroj je jednak prvom pribrojniku
- Dodavanje na 10 -  $10 + 1 = 11$ ,  $10 + 2 = 12$ ,  $10 + 3 = 13$ , ....
- Svojstvo komutativnosti -  $4 + 7 = 7 + 4$  (lakše je odbrojavati od 7 za 4 broja nego obrnuto)
- Rastavljanje brojeva i asocijativnost -  $8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13$

(Musser, Peterson i Burger, 2008):

Kod automatizacije oduzimanja brojeva do 20 strategija je manje:

- Oduzimanje nule - ako je umanjitelj nula umanjenik i razlika su jednaki
- Oduzimanje jedinice - oduzimanjem jedinice dobivamo prethodni broj u nizu - prethodnik
- Veza zbrajanja i oduzimanja -  $12 - 7 = 5$  jer je  $5 + 7 = 12$
- Rastavljanje umanjitelja -  $12 - 7 = 12 - 2 - 5 = 10 - 5 = 5$

Najčešće strategije koje se koriste prilikom misaonog računanja su:

- **KOMPATIBILNI BROJEVI**- odnose se na onaj par brojeva čiji se zbroj, razlika, umnožak ili količnik s lakoćom misaono računa. Tako su 84 i 16 kompatibilni brojevi u odnosu na zbrajanje jer je  $84 + 16 = 100$ . Naravno zbroj kompatibilnih brojeva ne mora biti nužno



100, već bilo koji „okrugli“ broj 20, 90, 1000, 200, ... Kod množenja kompatibilni brojevi su npr. 4 i 25, 8 i 125, 2 i 50 itd.

- **KOMPENZACIJA**- ako pri usmenom zbrajanju koristimo kompenzaciju zbroj  $39 + 45$  računamo na sljedeći način:

$$39 + 45 = 40 + 44 = 84$$

Koristeći činjenicu da je lakše zbrojiti  $40 + 44$ , nego  $39 + 45$ . Takav proces preformuliranja zbroja, razlike, umnoška ili količnika u izraz koji se misaono lakše računa naziva se kompenzacija. Tehnike koje koriste kompenzaciju razlikujemo:

- a) Aditivnu kompenzaciju
- b) Metodu stalnosti razlike
- c) Multiplikativnu kompenzaciju

- a) Aditivna kompenzacija- je primjena asocijativnosti, a zorno je prikazana prethodnim primjerom  $39 + 45 = 40 + 44 = 84$ , a radi što boljeg razumijevanja navedimo još jedan primjer :

$$98 + 59 = 98 + (2 + 57) = (98 + 2) + 57 = 100 + 57$$

- b) Metoda stalnosti razlike -je kompenzacija pri oduzimanju, a bazira se na dodavanju istog broja umanjeniku i umanjitelju, da bi se račun pojednostavnio za misaoni račun.

Tako npr.

$$47 - 29 = (47 + 1) - (29 + 1) = 48 - 30 = 18$$

a temelji se na činjenici da je lakše izračunati  $48 - 30$  nego  $47 - 29$ .

- c) Multiplikativna kompenzacija -koristi asocijativnost množenja na sličan način kao i kod zbrajanja tako da je  $48 \cdot 5 = (24 \cdot 2) \cdot 5 = 24 \cdot (2 \cdot 5) = 24 \cdot 10 = 240$

- **METODA S LIJEVA NA DESNO**-ako koristimo metodu s lijeva na desno pri zbrajanju  $342 + 136$  prvo zbrajamo stotice  $300 + 100$ , zatim desetice  $40 + 30$  i na kraju jedinice  $2 + 6$  što daje u konačnici 478. Da bi zbrojili 158 i 279 računamo  $100 + 200 = 300$ , zatim  $300 + 50 + 70 = 420$  i  $420 + 8 + 9 = 437$ . Za isti zbroj može se razmišljati i na sljedeći način:  $158 + 200 = 358$ ,  $358 + 70 = 428$  i  $428 + 9 = 437$ . Na sličan način se i misaono oduzima. Račun množenja  $123 \cdot 3$  misaono izvodimo kao  $300 + 60 + 9 = 369$ , što je jednostavniji oblik. No princip je isti ako množimo  $253 \cdot 4$  kao  $800 + 200 + 12 = 1012$ .

Liebeck (1995) govori o tome kako je važno objasniti djeci da će dobiti isti rezultat bez obzira na način na koji odluče zbrajati ili oduzimati određeni niz brojeva. Korištenje dvaju različitih načina zbrajanja istog niza brojeva odličan je način za provjeru točnosti rezultata, jer se tri broja mogu zbrojiti na različite načine.

Markovac (1992) smatra da će učenje matematike biti uspješnije ako učitelji i učenici u svakodnevnom radu koriste ispravne termine za odgovarajuće matematičke pojmove, te ako se jasno objašnjava značenje tih pojmova. Prvi termin koji učenici usvajaju treba biti na hrvatskom jeziku, a tek nakon toga uvode se međunarodni termini.

Jedan od termina koji učenici usvajaju u matematici je komutativnost zbrajanja, što predstavlja značajno proširenje njihovog znanja o zbrajanju. Ovim sadržajem učenici spoznaju da redosljed pribrojnika ne utječe na vrijednost zbroja. Misaoni proces zamjene mjesta pribrojnika izvodi se iz kvantitativnih odnosa stvarnosti, a proces učenja usklađuje se s psihološkim zakonitostima formiranja mentalnih operacija. Kroz niz takvih radnji, učenici će steći opću spoznaju da zamjena mjesta pribrojnika ne mijenja zbroj. Radnje moraju biti verbalno obrazložene kako bi se razumijevanje komutativnosti zbrajanja uzdiglo na pojmovnu, misaonu razinu. (Markovac, 1992:144)

Primjer:

△ △ △ △ △    ○ ○ ○

$$A+B=C$$

○ ○ ○    △ △ △ △ △

$$B+A=C$$

Asocijativnost zbrajanja jedan je od ključnih pojmova za razumijevanje matematike. Najprirodniji način za upoznavanje s ovim konceptom je rješavanje problema zbrajanja većeg broja pribrojnika, poput  $5+2+3+1+4=$ . Kroz rješavanje takvih zadataka, učenici će otkriti dvije važne činjenice: prvo, da je zbrajanje binarna operacija, što znači da se uvijek odnosi na dva broja, i drugo, da način na koji se pribrojnici grupiraju ne mijenja ukupni zbroj. Kako bi se spriječilo poistovjećivanje asocijativnosti sa komutativnošću, važno je naglasiti da se komutativnost odnosi na redosljed

pribrojnika, dok se asocijativnost odnosi na način njihovog grupiranja. Za asocijativnost zbrajanja potrebna su tri pribrojnika, dok se komutativnost može primijeniti već s dva pribrojnika. Ova razlika je ključna za razumijevanje ovih dvaju svojstava zbrajanja. (Markovac, 1992:146)

“Oduzimanje kao suprotna radnja zbrajanju. Tim terminima označava se veza zbrajanja i oduzimanja koja se zapisuje znakovima:  $a-b=c$  jer  $c+b=a$  što omogućuje da se iz jednakosti npr.  $5+3=8$  prijeđe u jednakost  $8-5=3$ ” (Markovac, 1992:147)

Markovac (1992) govori o tome kako se razvija razumijevanje oduzimanja kao procesa kojim se, iz poznatog zbroja i jednog pribrojnika, dobiva nepoznati pribrojnik. Na primjer, ako je  $a+b=c$ , tada je  $c-b=a$ . U pedagoškom kontekstu, upoznavanje s vezom između ovih operacija iznimno je korisno jer potiče intelektualne sposobnosti učenika i stvara pozitivan emocionalni odnos prema matematici.

“Broj 0 u zbrajanju i oduzimanju. Usvajajući ovo gradivo, učenici će doći do triju spoznaja:

- a) Ako se nula pribroji nekom broju, taj broj se ne mijenja,  $5+0=5$
- b) Ako se nuli pribroji neki broj, taj broj se ne mijenja,  $0+5=5$
- c) Ako se od nekog broja oduzme nula, taj se broj neće promijeniti,  $7-0=7$ ”

(Markovac,1992: 148)

Preporučljivo je potaknuti učenike da primijene opće spoznaje na sve poznate brojeve, čime će znatno proširiti svoje znanje i razviti bolju sposobnost misaonog računanja.

## 10.MISAONO MNOŽENJE I DIJELJENJE BROJEVA

Markovac (1992) kaže da je učenje tablice množenja dug proces za koji je potrebno godinu dana ili više. Cilj misaonog množenja je usvojiti koncept množenja, a može se izvoditi na nekoliko načina.

Markovac (1992) smatra da je skup prirodnih brojeva do 1.000 i iznad 1.000 osnova za daljnje proširivanje učenikova znanja o množenju i dijeljenju brojeva. Ključna pretpostavka za usvajanje ovih sadržaja je automatizirano poznavanje tablice množenja i dijeljenja, kao i razumijevanje određenih svojstava tih operacija. Budući da se sadržaji usvajaju na apstraktnoj razini, glavno sredstvo stjecanja novog znanja je mišljenje temeljeno na relevantnom predznanju, kojemu stoga treba posvetiti odgovarajuću pažnju. Misaono ili usmeno množenje brojeva može se provoditi na različite načine, ali svi imaju zajednički cilj – razumijevanje koncepta množenja. Jedan način takvog rada je uzastopno zbrajanje istog broja, što se može izvoditi misaono bez zapisivanja ili zapisivanjem zbroja istih brojeva. U misaonoj varijanti, zadaci se mogu formulirati, na primjer, kao: "Zbroji broj 5 sedam puta." Također, uzastopno zbrajanje može se zapisivati, a zadatak se tada može formulirati ovako: "Napiši broj 5 kao pribrojnik sedam puta, a zatim izračunaj zbroj." Da bi se prepoznala i razumjela veza između uzastopnog zbrajanja istog broja i množenja, svako takvo zbrajanje treba povezivati s množenjem. Na primjer, zadatak  $5+5+5+5+5+5+5=35$  treba pokazati da je 7 puta 5 jednako 35. Važno je da učenik sam utvrdi da zadatak sadrži 7 pribrojnika, brojeći ih, te da je svaki pribrojnik broj 5. Za bolje razumijevanje množenja prirodnih brojeva, korisno je učenike staviti u poznate situacije u kojima se množenje prirodno javlja.

“Misaono množenje trebalo bi rezultirati razumijevanjem množenja kao zbrajanja istih brojeva, odnosno shvaćanjem činjenice da se zbroj istih brojeva kraće i brže pronalazi množenjem. To je ujedno spoznajna podloga razumijevanju značenja zapisa za množenje brojeva oblika  $a \cdot b = c$ ” (Markovac, 1992 175). Misaono dijeljenje. Da bi se konkretno razdvajanje skupova kao fizička aktivnost pretvorilo u mentalnu radnju, učenike treba postavljati u situacije gdje će konkretne aktivnosti postupno biti zamijenjene misaonim procesima. Jedan oblik misaonog dijeljenja može biti uzastopno oduzimanje istog broja, koje se može izvoditi zapisivanjem, uz pomoć brojevine crte, ili idealno, usmeno, napamet. Uzastopno oduzimanje istog broja treba povezati s realnim situacijama. Prijelaz na dijeljenje brojeva treba motivirati time što omogućuje brže i lakše pronalaženje količnika dvaju brojeva. Obradom gradiva tablice množenja i dijeljenja brojeva

započinje sustavno usvajanje operacija množenja i dijeljenja unutar skupa prirodnih brojeva do 100. Ovaj proces ima dalekosežan značaj, jer stečeno znanje učenici koriste kao temelj za učenje složenijih sadržaja poput množenja i dijeljenja višeznamenkastih brojeva. (Markovac, 1992: 178)

“Dijeljenje nije ništa drugo od obrnutog množenja.” (Gret, 2012: 107) Stoga se sve operacije množenja i dijeljenja mogu međusobno rješavati koristeći jedna drugu. Važno je da učenici osvijeste povezanost između množenja i dijeljenja, jer će im to pomoći da razviju veću vještinu u misaonom računanju. Razumijevanje ove povezanosti omogućava učenicima da lakše prepoznaju obrasce, brže rješavaju zadatke i primjenjuju naučeno znanje na složenije matematičke probleme.

“Obradom tablica množenja i dijeljenja ostvaruju se ovi obrazovni zadaci:

- a) shvatiti i usvojiti sve umnoške jednoznamenkastih brojeva i broj 10 ( tablica množenja pojedinih brojeva)
- b) shvatiti i usvojiti količnike dvoznamenkastih i jednoznamenkastih brojeva npr. 5:5 do 50:5 (tablica dijeljenja pojedinih brojeva)
- c) usvojiti tablice množenja i dijeljenja do razine automatiziranosti
- d) osposobljavati učenika u razumijevanje veza između množenja i dijeljenja, množenja i zbrajanja, te dijeljenja i oduzimanja
- e) osposobljavati učenike u primjeni znanja tablica množenja i dijeljenja u rješavanju odgovarajućih zadataka” (Markovac,1992:180)

(Markovac, 1992) kao glavnu pretpostavku za usvajanje množenja i dijeljenja navodi automatizirano poznavanje tablice množenja i dijeljenja, kao i razumijevanje određenih svojstava tih računskih operacija. Gradivo množenja brojeva dekadskim jedinicama u razrednoj nastavi obuhvaća množenje brojevima 10 i 100, a ponekad i brojem 1 000. Svrha učenja je shvatiti da se to postiže dodavanjem odgovarajućeg broja nula s desne strane broja. Međutim, generalizacija ovog postupka često se pogrešno formulira kao "dodavanje" jedne ili dvije nule broju. Ta formulacija je netočna jer dodavanje nule broju znači pribrojiti nulu, što ne mijenja vrijednost broja. Pravilno je reći da se broj uvećava 10 ili 100 puta pripisivanjem jedne ili dviju nula s desne strane. Da bi se gradivo ispravno razumjelo najprije se objašnjava na duži način, a zatim na kraći način koji se potom koristi u praksi.

Duži način izgleda ovako:

Handwritten mathematical calculations showing the long way of multiplication:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 10 &= (5 \cdot 10) \cdot 10 \\ &= 5 \cdot (10 \cdot 10) \\ &= 5 \cdot 100 \\ &= 500 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 80 \cdot 100 &= (8 \cdot 10) \cdot 100 \\ &= 8 \cdot (10 \cdot 100) \\ &= 8 \cdot 1000 \\ &= 8000 \end{aligned}$$

Slika 1: Duži način množenja

Kraći način izgleda ovako:

Handwritten mathematical calculations showing the short way of multiplication:

$$\begin{aligned} 75 \cdot 10 &= (70 + 5) \cdot 10 \\ &= 70 \cdot 10 + 5 \cdot 10 \\ &= 700 + 50 \\ &= 750 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 67 \cdot 100 &= (60 + 7) \cdot 100 \\ &= 60 \cdot 100 + 7 \cdot 100 \\ &= 6000 + 700 \\ &= 6700 \end{aligned}$$

Slika 2: Kraći način množenja

Postoje najmanje dva razloga za učenje množenja jednoznamenkastih brojeva višekratnicima brojeva 10 i 100. Prvo, to je gotovo svakodnevna potreba za množenjem tih brojeva. Drugo, to priprema učenike za učenje složenijih primjera množenja.

Novo gradivo se uvodi detaljnim zapisivanjem svih djelomičnih koraka uključenih u množenje tih brojeva. Kada učenici jednom shvate postupak, zapisivanje djelomičnih koraka se izostavlja, a bilježi se samo konačni rezultat množenja.

Postupak izgleda ovako:

Handwritten mathematical calculations showing the step-by-step process of multiplication:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 70 &= 9 \cdot (7 \cdot 10) \\ &= (9 \cdot 7) \cdot 10 \\ &= 63 \cdot 10 \\ &= 630 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 5 \cdot 700 &= 5 \cdot (7 \cdot 100) \\ &= (5 \cdot 7) \cdot 100 \\ &= 35 \cdot 100 \\ &= 3500 \end{aligned}$$

Slika 3: Postupak množenja

Prije usvajanja novog gradiva potrebno je osigurati odgovarajuće predznanje. Novo gradivo, poput dijeljenja višekratnika broja 100 brojevima 10 i 100, objašnjava se postupno, počevši s dijeljenjem višekratnika broja 100 brojem 100. “Na primjer,  $500:100=$  dijelit će se suprotnom računskom operacijom, množenjem, tako da se pronade broj kojim treba pomnožiti djelitelj (100) da bi se dobio djeljenik (500), a to je broj 5 pa je  $5 \cdot 100=500$ ” (Markovac, 1992:188)

Dijeljenje višekratnika broja 100 brojem 10 također se objašnjava korištenjem suprotne računске operacije. Na primjer,  $500:10= 50$  jer je  $50 \cdot 10=100$

## 11.DJECA I TEŠKOĆE U UČENJU MATEMATIKE

Učenje matematike može predstavljati značajan izazov za mnogu djecu, posebno za one koji se suočavaju s različitim vrstama teškoća. Ovaj dio rada bavi se specifičnim poteškoćama u učenju matematike, njihovim uzrocima i mogućnostima prevladavanja. Sharma (2001) ističe da teškoće u učenju matematike mogu proizaći iz niza čimbenika, uključujući neurološke disfunkcije, nerazvijene kognitivne vještine, nedostatak osnovne matematičke pripremljenosti, jezične poteškoće, nepravilnosti u procesu podučavanja te strah od matematike. Razumijevanje ovih uzroka ključno je za prilagodbu pristupa poučavanju kako bi se učenicima omogućio uspješniji razvoj matematičkih vještina.

(Sharma, 2001) navodi kako se mnoga djeca suočavaju s općim poteškoćama u učenju. Neka od njih imaju specifične teškoće isključivo u području matematike. Problemi koje dijete može imati prilikom rješavanja matematičkih zadataka često nisu u skladu s njegovim općim intelektualnim sposobnostima.

Postoji nekoliko uzroka teškoća u učenju matematike, među kojima su:

- **NEUROLOŠKE DISFUNKCIJE-** Blaga ili umjerena odstupanja u funkciji mozga ili zakašnjeli razvoj viših kortikalnih funkcija. Ova odstupanja mogu biti uzrokovana sporijim razvojem djeteta, neravnomjernim razvojem ili oštećenjem zdravih dijelova mozga zbog ozljede ili bolesti.
- **NEDOVOLJNI STUPANJ RAZVOJA KOGNITIVNE INTELIGENCIJE I VIŠIH PSIHIČKIH FUNKCIJA-** rješavanje matematičkih problemskih zadataka zahtijeva razvijenu kognitivnu inteligenciju, odnosno sposobnost analize, sinteze, apstrakcije i primjene stečenih znanja i vještina u novim situacijama. Ključnu ulogu igraju razvijenost i specifičnost viših psihičkih funkcija, uključujući različite aspekte memorije, pažnje i percepcije. Kada ove psihičke funkcije nisu dovoljno razvijene, dijete se suočava s velikim poteškoćama u učenju matematike.
- **NERAZVIJENOST TEMELJNIH VJEŠTINA KOJE SU PREDUVJET ZA USVAJANJE MATEMATIKE-** mnoge poteškoće nastaju zbog nedovoljne pripremljenosti djeteta za



učenje matematike u školi. Ako dijete prije polaska u školu nije steklo osnovne vještine, nije spremno za sustavno proučavanje matematike kao školskog predmeta

- **POSTOJANJE POSEBNIH JEZIČNIH TEŠKOĆA I SPECIFIČNIH TEŠKOĆA U ČITANJU I PISANJU-** djeca koja se suočavaju s posebnim jezičnim teškoćama, poteškoćama u čitanju s razumijevanjem i pisanju (poput disleksije i disgrafije), često se susreću i s izazovima u području matematike.
- **NEPRAVILNOST U PROCESU PODUČAVANJA-** Nekompatibilnost između stila podučavanja koji koristi autor udžbenika i nastavnika te stilova učenja djece može ozbiljno utjecati na poteškoće u učenju. Osim toga, pogrešan pristup u podučavanju novih koncepata može dovesti do toga da se dijete pogrešno klasificira kao učenik s teškoćama u učenju, iako uzrok može biti u metodama podučavanja, a ne u djetetu samom.
- **NEDOVOLJNA MATEMATIČKA PRAKSA-** Djetetove teškoće u matematici mogu proizaći iz ograničenog iskustva u tom području. Uzroci mogu biti ponekad očiti, kao što su česta izostajanja s matematičkih satova zbog bolesti. Moguće je da učitelj pogrešno procijeni djetetove matematičke sposobnosti te mu ne omogući priliku za napredovanje.
- **FUNKCIONALNO STANJE DJETETA-** neuspjeh može proizaći i iz djetetovog straha od matematike. Strah se može pojaviti nakon određenog neugodnog iskustva ili postupno rasti kada dijete prestane pratiti objašnjenja učitelja te se osjeća izgubljeno. Dijete percipira matematiku kao vrlo tešku i neugodnu temu te je izbjegava kad god je moguće.

Teškoće u učenju matematike negativno utječu na misaono računanje jer ono zahtijeva kombinaciju više kognitivnih vještina, uključujući razumijevanje brojeva, memoriju, koncentraciju i brzo izvođenje osnovnih operacija. Djeca s neurološkim disfunkcijama ili nedovoljno razvijenim kognitivnim sposobnostima teško prate misaone procese potrebne za točno i brzo računanje. Nedostatak temeljnih matematičkih vještina, poput zbrajanja i oduzimanja do 100, otežava primjenu naprednijih strategija jer se djeca moraju dodatno truditi za osnovne račune.

Poteškoće u čitanju i pisanju otežavaju razumijevanje matematičkih zadataka i prepoznavanje brojeva, što unosi dodatnu nesigurnost i usporava misaone procese. Osim toga, nepravilnosti u načinu podučavanja, poput nedostatka prilagođenih metoda, mogu smanjiti motivaciju i povećati strah od matematike, što negativno utječe na djetetovu volju za vježbanjem i usvajanjem misaonih strategija. Manjak matematičke prakse dovodi do slabijeg automatizma u osnovnim operacijama, što znači da djeca moraju uložiti više mentalnog napora u svaki korak, umjesto da se fokusiraju na rješavanje zadatka u cjelini. Na kraju, djeca koja razviju strah ili osjećaj nesigurnosti prema matematici često izbjegavaju suočavanje s matematičkim zadacima. Taj strah može uzrokovati mentalne blokade, otežati fokus i smanjiti samopouzdanje, što dodatno otežava sposobnost za misaono računanje. Sve ove poteškoće zajedno utječu na djetetovu učinkovitost, točnost i brzinu u misaonom računanju, a time i na njihov cjelokupni uspjeh u matematici.

Sve ove poteškoće zajedno otežavaju razvijanje fluentnosti i preciznosti potrebne za uspješno misaono računanje, a bez odgovarajuće podrške djeca često osjećaju frustraciju i dodatno izbjegavaju matematičke zadatke.

“Učenje postaje zanimljivo kada se primjećuje povećanje vlastitog znanja” (Knoblauch, 2001)

Izuzetno je važno da učitelj prepozna poteškoće s kojima se učenik suočava tijekom školovanja te da mu prilagodi i, po potrebi, promijeni pristup kako bi olakšao daljnje učenje. Učeniku je potrebno osigurati djelotvoran motiv za učenje, jer porastom motivacije raste i predanost u učenju. Osim toga, poticanje i motiviranje učenika kroz individualizirani pristup može značajno doprinijeti razvoju njihove želje za učenjem i postizanju boljih akademskih rezultata. Aktivno uključivanje učenika u proces učenja, uz istovremeno pružanje podrške i razumijevanja, ključni su faktori za poticanje njihovog interesa i napretka u obrazovanju.

## 12.NAČINI POUČAVANJA MISAONOG RAČUNANJA U REPUBLICI HRVATSKOJ

Misaoni račun, poznat i kao mentalni račun, uveden je u hrvatske škole s Nacionalnim kurikulumom za matematiku 2019. godine. Iako je u obrazovnoj praksi još uvijek često poznat pod nazivom "usmeni račun", ovaj pojam označava važnu komponentu suvremenog matematičkog obrazovanja. Uvođenje misaonog računa ima za cilj osposobiti učenike za brzo i točno izvođenje matematičkih operacija bez korištenja papira, olovke ili kalkulatora, razvijajući pritom njihovu logičku i analitičku sposobnost. Ovo poglavlje istražuje načine poučavanja misaonog računa u Republici Hrvatskoj, analizirajući primjere iz nastavne prakse te prilagodbe kurikuluma koje omogućuju učinkovitije učenje i primjenu ove vještine u svakodnevnim situacijama.

Pojam "misaoni račun" (mentalni račun) uveden je u hrvatske škole tek 2019. godine s uvođenjem Nacionalnog kurikuluma za matematiku. U nastavnoj praksi, ovaj koncept se još uvijek često naziva "usmeni račun", što proizlazi iz povijesnog konteksta u kojem se usmenim propitivanjem nastojala postići fluentnost u računanju. Odgoj i obrazovanje u osnovnim školama ostvaruju se temelju nacionalnog kurikuluma, nastavnog plana i programa te školskog kurikuluma. Nacionalnim kurikulumom utvrđuju se nastavni predmeti, a donosi ga ministar.

“Nacionalni okvirni kurikulum predstavlja osnovne sastavnice predškolskoga, općega obveznoga i srednjoškolskoga odgoja i obrazovanja, uključujući odgoj i obrazovanje za djecu s posebnim odgojnoobrazovnim potrebama. Nacionalni okvirni kurikulum temeljni je dokument u kojemu su prikazane sastavnice: vrijednosti, ciljevi, načela, sadržaj i opći ciljevi odgojno-obrazovnih područja, vrjednovanje učeničkih postignuća te vrjednovanje i samovrjednovanje ostvarivanja nacionalnoga kurikuluma.” ([http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni\\_okvirni\\_kurikulum.pdf](http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf))

Ovaj dokument predstavlja temelj za kreiranje nastavnog plana prilagođenog učenicima, razradu strukture predmeta unutar odgojno-obrazovnog područja te određivanje predmeta i modula jezgrenog i diferenciranog kurikuluma (izbornih predmeta i modula), kao i oblikovanje školskog kurikuluma. Nacionalni okvirni kurikulum služi kao osnovu za izradu predmetnih kurikuluma i drugih kurikulumskih dokumenata, uključujući smjernice za primjenu kurikuluma, priručnike za nastavnike i roditelje, standarde za izradu udžbenika i nastavnih materijala, te standarde i kriterije za vrednovanje kvalitete učeničkih postignuća i rada škola. Važno je napomenuti da Nacionalni

okvirni kurikulum podržava planiranje i organizaciju rada škola, uključujući izradu školskog kurikuluma. ([http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni\\_okvirni\\_kurikulum.pdf](http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf))

Kurikulum nastavnog predmeta matematike usmjeren je na razvoj vrijednosti i kompetencija učenika, čime učiteljima i učenicima nameće značajnu odgovornost za provedbu njegovih načela. (MZO, 2019)

„Domene predmeta Matematika su brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje te podaci. statistika i vjerojatnost“ ([https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html))

Domene matematičkog obrazovanja postupno se razvijaju i nadograđuju kroz cijeli sustav učenja i poučavanja matematike. Udio svake domene prilagođen je razvojnim mogućnostima učenika i potrebi sustavne izgradnje cjelovitoga matematičkog obrazovanja. U ranijim godinama učenja, veći naglasak stavlja se na domene koje obuhvaćaju pojmove poput brojeva i oblika, dok se u kasnijim godinama veća pažnja posvećuje složenijim matematičkim konceptima, poput funkcija i vjerojatnosti. Za svaku domenu, na razini pojedine godine učenja i poučavanja, definirani su odgojno-obrazovni ishodi koji predstavljaju jasne i nedvosmislene iskaze očekivanja od učenika. Cjelovit pristup usvajanju koncepata iz svih domena omogućuje stjecanje matematičkih znanja i vještina te razvoj matematičkih kompetencija. Ove kompetencije uključuju prikazivanje i komuniciranje matematičkim jezikom, logičko razmišljanje, argumentiranje i zaključivanje, matematičko modeliranje te rješavanje problema. Važno je istaknuti da odabir odgovarajućih strategija poučavanja i kreativnih metoda izvedbe nastavnog procesa može značajno utjecati na razinu usvojenosti znanja, kao i na stjecanje vještina i formiranje stavova. U svim matematičkim domenama nastoji se povezati sadržaj s realnim situacijama, čime se naglašava svakodnevna primjena matematike i njezina ključna uloga u razvoju društva. ([https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html))

### 12.1. PRVI RAZRED

U Republici Hrvatskoj poučavanje zbrajanja i oduzimanja započinje u prvom razredu osnovne škole. Ove matematičke operacije poučavaju se koristeći konkretne materijale i primjere iz neposredne okoline, pri čemu se zbrajanje povezuje s pojmom "više", a oduzimanje s pojmom "manje". Nakon uvođenja pristupa temeljenog na skupovima, zbrajanje i oduzimanje se također poučavaju metodom brojenja, koja se ilustrira s pomoću brojevne crte. Automatizaciju zbrajanja i

oduzimanja do 20 nužno je poticati, jer ona predstavlja temelj za misaono i pisano računanje s većim brojevima. Učenici trebaju biti upoznati s nazivima za članove računskih operacija. Tijekom početne nastave matematike učenici se susreću s oba termina, "računska radnja" i "računska operacija", no postupno se teži ujednačenoj uporabi izraza "računska operacija". Svojstvo komutativnosti učenici uočavaju na konkretnim primjerima, kao i zbrajanje triju pribrojnika, pri čemu se ne koriste zagradama, već se redosljedom zbrajanja ističe svojstvo asocijativnosti (različitim združivanjima pribrojnika zbroj ostaje isti). Na primjer, u izrazu  $5 + 1 + 5$ , lakše je združiti  $5 + 5$  i zatim pribrojiti 1. Primjer četiri jednakosti uključuje:  $3 + 7 = 10$ ,  $7 + 3 = 10$ ,  $10 - 3 = 7$ ,  $10 - 7 = 3$ . Učenici pritom ne koriste termine komutativnost i asocijativnost.

## 12.2. DRUGI RAZRED

U drugom razredu osnovne škole, zbrajanje i oduzimanje brojeva do 100 temelji se na automatizaciji operacija unutar skupa brojeva do 20, kao i na razumijevanju međusobne povezanosti zbrajanja i oduzimanja. Zbrajanje i oduzimanje se postupno uvode, počevši s primjerima koji ne zahtijevaju prelazak preko desetice, a tek nakon toga prelazi se na primjere koji uključuju prelazak preko desetice. Nakon procjene individualnog načina računanja učenika, moguće je prijeći s detaljnog zapisivanja svih koraka u postupku na kraći zapis. Bitno je da učenici razviju sposobnost misaonog zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100, kao i razumijevanja izraza "uvećaj za" i "umanji za", te da budu u stanju odrediti broj koji je za određeni iznos veći ili manji od nekog drugog broja. Procjena rezultata igra ključnu ulogu u razvoju logičkog mišljenja i predstavlja preduvjet za primjenu zbrajanja i oduzimanja u praktičnim situacijama, kao što su situacije tijekom kupovine. Važno je poticati učenike na procjenjivanje rezultata na svim razinama, pri čemu se postavljaju razumna očekivanja za postizanje najviše razine razumijevanja. Učenicima koji imaju teškoće u računanju može se pružiti pomoć putem tablice brojeva do 100, što omogućuje učenicima vizualno odrediti brojeve koji su za deset veći ili manji od zadanog broja, kao i prethodnika i sljedbenika. U takvim slučajevima, važno je poticati učenike s teškoćama da postupno smanjuju ovisnost o tablici brojeva, koristeći je samo prema potrebi i u mjeri u kojoj je potrebno.

U drugom razredu osnovne škole, uz zbrajanje i oduzimanje, započinje i podučavanje tablice množenja i dijeljenja. Važno je učenicima postupno i na vizualno raznolike načine približiti

množenje kao uzastopno zbrajanje identičnih čimbenika te dijeljenje kao uzastopno oduzimanje istih brojeva od zadatog broja. Učenike je nužno podučiti partitivnom dijeljenju (npr.,  $28 : 4 = (20 + 8) : 4 = 20 : 4 + 8 : 4 = \dots$ ) kako bi lakše usvajali postupak dijeljenja i istovremeno razumjeli matematičke zakonitosti. Primjena svojstva komutativnosti i veze između množenja i dijeljenja koristi se kao podrška ovom procesu računanja. Učenici se podučavaju kako odrediti broj koji je višestruko veći ili manji od zadanog, identificirati višekratnike (trokratnik, četverokratnik...) brojeva iz tablice množenja te se snalaziti unutar tablice. Potrebno je temeljito razumijevanje razlike između pojma uvećaj za (zbrajanje) i uvećaj nekoliko puta (množenje), kao i umanji za (oduzimanje) i umanji nekoliko puta (dijeljenje). Učenici će također naučiti pravila o množenju i dijeljenju s brojem 10, prepoznati parne i neparne brojeve te odrediti polovinu, trećinu, četvrtinu itd. nekog broja. Posebna pažnja posvećuje se ulozi brojeva 1 i 0 u operacijama množenja i dijeljenja. Upoznat će se s nazivima članova računskih operacija, uključujući čimbenike i umnožak te djeljenik, djelitelj i količnik u dijeljenju. Učenici se potiču da koriste termin faktori zbog njegove važnosti u kasnijem obrazovanju. U drugom razredu očekuje se da učenici razumiju koncepte množenja i dijeljenja, postupno usvoje tablicu množenja te primjene te operacije u odgovarajućim situacijama. Naglasak je na automatizaciji tablice množenja. Na temelju prethodnog znanja o vezi zbrajanja i oduzimanja, učenici će uočiti povezanost množenja i dijeljenja te rješavati slične jednadžbe poput  $3 \cdot 7 = 21$ ,  $7 \cdot 3 = 21$ ,  $21 : 3 = 7$ ,  $21 : 7 = 3$ .

### 12.3. TREĆI RAZRED

U trećem razredu osnovne škole, učenje zbrajanja i oduzimanja brojeva do 1 000 temelji se na prethodno stečenom znanju i automatizaciji zbrajanja i oduzimanja unutar skupova brojeva do 20 i 100, uz naglasak na razumijevanju veze između tih operacija. Kako bi se potaknulo razvijanje misaonih sposobnosti, važno je sustavno poticati učenike na procjenu rezultata, provjeru rješenja te razvijanje vještine misaonog računanja. U tom procesu učenici se potiču na rastavljanje brojeva na zbroj desetica i jedinica ili na korištenje djelomičnih rezultata prema potrebi. Kada su uvjeti povoljni, moguće je prakticirati misaono zbrajanje i oduzimanje kroz upotrebu edukativnih računalnih igara i sličnih metoda. Bitno je koristiti različite scenarije i zadatke koji zahtijevaju primjenu zbrajanja i oduzimanja. Nakon što učenici temeljito svladaju postupak zbrajanja i

oduzimanja rastavljanjem, prelazi se na uvođenje pisanih postupaka zbrajanja i oduzimanja. Ovi se postupci uvode postupno kroz korištenje brojevni kartica, tablica decimalnih vrijednosti i preciznog matematičkog zapisa. Iako u trećem razredu učenici usvajaju brojevni niz do 10 000, fokus računanja ostaje na brojevima do 1 000.

#### 12.4. ČETVRTI RAZRED

U četvrtom razredu, učenici se upućuju na primjenu četiriju računskih operacija i njihove međuodnose u rješavanju problemskih situacija. Naglasak je na pravilnoj primjeni računskih operacija u zadacima koji uključuju više operacija, uz izbjegavanje upotrebe velikih brojeva kako bi se fokusiralo na redosljed izvođenja računskih operacija. Preporučljivo je razviti naviku procjene rezultata prije samog računanja te istovremeno naglasiti važnost provjere rezultata kroz međuodnose računskih operacija. Odabir primjera zadataka koji uključuju upotrebu zagrada, a čija prisutnost mijenja rezultat, koristan je za učenje. Na primjer, u zadatku kao što je  $543 - (423 + 28)$ , korištenje zagrada značajno utječe na konačni rezultat u usporedbi s verzijom zadatka bez zagrada. Učenici također rješavaju zadatke koji uključuju određivanje trećina, četvrtina, petina i desetina nekog broja. Izraze kao što su dvije trećine, četiri petine i slično potrebno je interpretirati verbalno i vizualno na različite načine, primjenjujući konkretne primjere, crteže i slične metode. Također, učenici se bave računskim izazovima u raznim formatima zadataka, uključujući brojeve, tekstualne i problemske zadatke. ([MAT kurikulum 1\\_71.pdf \(skolazazivot.hr\)](#))

## 13. ISTRAŽIVANJE

### **Uzorak istraživanja**

U istraživanju je sudjelovalo 38 učenika 4., 5., i 6. razreda osnovne škole, od kojih je 15 učenika četvrtog razreda, 15 učenika petog razreda te 8 učenika šestog razreda.

### **Mjerni instrument**

Podaci su prikupljeni putem zadataka osmišljenih isključivo za potrebe ovog diplomskog rada. Zadaci su bili objektivnog tipa odnosno ispitanicima je na PowerPoint prezentaciji prikazano 12 zadataka prilagođenih svim uzrastima. Zadaci su obuhvaćali zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva te operacije množenja i dijeljenja istih. Od ispitanika se očekivalo da misaono izračunaju zadatke i zapišu rezultate na papir.

### **Postupak istraživanja**

Istraživanje je provedeno u lipnju 2024. godine, tijekom tri dana. Prvi dan bio je posvećen dogovorima o posjetima razredima, upoznavanju s ravnateljem, učenicima i učiteljima te podjeli suglasnosti za roditelje. Drugi dan istraživanje je provedeno u školi s učenicima 5. i 6. razreda i trajalo je jedan školski sat. Sudjelovali su samo učenici čiji su roditelji potpisali suglasnost. Treći dan istraživanje je provedeno s učenicima 4. razreda.

### **Cilj istraživanja**

Ispitati uspješnost učenika u misaonom računanju s prirodnim brojevima

### **Analiza i obrada podataka**

Odabrala sam ove zadatke u svrhu istraživanja kako bi se analizirale misaone strategije koje učenici primjenjuju prilikom rješavanja matematičkih problema i točnost riješenih zadataka. Kroz zadatke koji uključuju zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, želim istražiti kako učenici pristupaju različitim vrstama operacija, te koliko su razvijene sposobnosti misaonog računanja. Ovi zadaci omogućuju uvid upotrebi njihovih strategija, poput primjene pravila prioriteta operacija, posuđivanja i prijenosa, te kako ove vještine utječu na njihov ukupni uspjeh u rješavanju složenijih matematičkih problema.



### **1.zadatak $98 + 59 =$**

Ovaj zadatak postavljen je kao prvi zadatak jer je jedan od jednostavnijih zadataka koji služi kao poticaj na daljnje rješavanje. Zadatak uključuje zbrajanje dvoznamenkastih brojeva koji zahtijevaju prelazak preko desetice. Ovo je element koji potiče učenike da koriste strategije misaonog računanja, poput rastavljanja brojeva ili zaokruživanja, kako bi lakše došli do rješenja. Zadatak pruža priliku za primjenu različitih strategija poput rastavljanja brojeva (npr.  $98 + 59 = (100 - 2) + 59 = 100 + 57 = 157$ ) ili zaokruživanja (npr. zaokruživanje 98 na 100 i oduzimanje 2 na kraju). Ove metode omogućuju učenicima da shvate koncept zbrajanja na intuitivan način. Korištenje dvoznamenkastih brojeva omogućuje procjenu kako učenici barataju osnovnim matematičkim operacijama kada su suočeni s problemima koji uključuju više koraka i zahtijevaju dodatno razmišljanje. Ovo je korisno za procjenu sposobnosti učenika u misaonoj manipulaciji brojevima.

Točan rezultat ovog zadatka je 157.

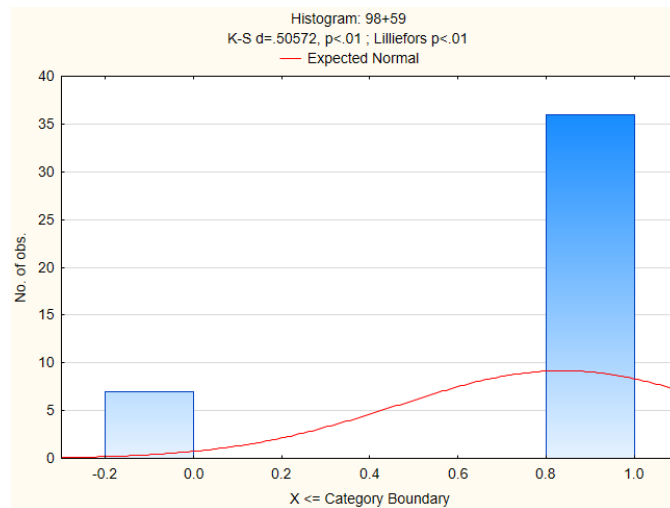
#### **NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:**

Metoda s lijeva na desno:  $98 + 50 + 9 = 148 + 9 = 157$

Rastavljanje brojeva: Učenici mogu rastaviti brojeve na desetice i jedinice, npr. 98 se može predstaviti kao  $90 + 8$ , a 59 kao  $50 + 9$ . Zatim se zasebno zbrajaju desetice i jedinice ( $90 + 50 = 140$ ,  $8 + 9 = 17$ ) i konačno zbroje dobivene rezultate ( $140 + 17 = 157$ ).

Zaokruživanje i prilagođavanje: Učenici mogu zaokružiti 98 na 100 kako bi pojednostavili računanje ( $100 + 59 = 159$ ), a zatim oduzeti 2 ( $159 - 2 = 157$ ) kako bi dobili točan rezultat. Ovo učenje potiče mentalnu fleksibilnost i procjenu rezultata.

Kombinacija strategija: Učenici mogu kombinirati gore navedene metode ili razviti vlastite strategije za rješavanje zadatka, čime se potiče kreativno razmišljanje i personalizirani pristup učenju matematike.



Histogram 1: Distribucija podataka varijable 98+59

Statistički podaci pokazuju kako su sudionici riješili zadatak "98 + 59". U istraživanju je sudjelovalo 43 osobe. Od tih sudionika, 83.7% je točno odgovorilo na zadatak, dok je nekoliko sudionika imalo netočan odgovor. Standardna devijacija iznosi 0.37, što znači da su odgovori većine sudionika bili vrlo slični, odnosno da je većina njih točno riješila zadatak. Ovo pokazuje da je zadatak "98 + 59" bio uglavnom točno riješen od strane ispitanika.

## 2. zadatak $91 + 108 =$

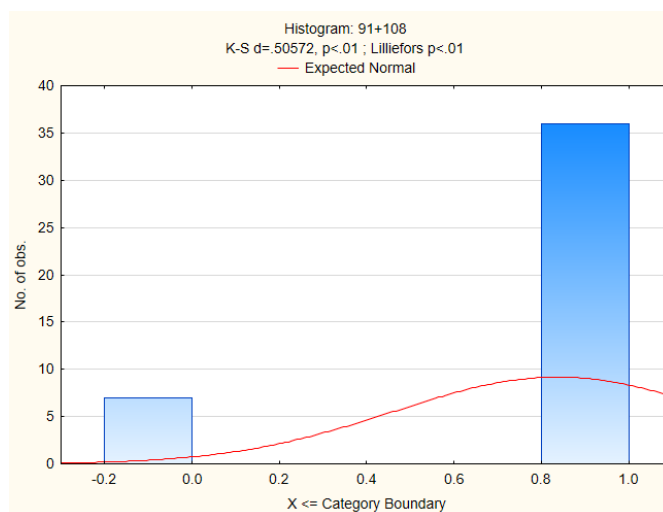
Ovaj zadatak uključuje zbrajanje dvoznamenkastog i troznamenkastog broja, što zahtijeva naprednije misaone strategije u odnosu na jednostavnije zadatke. Uključuje prijelaz preko stotice, što dodatno testira učenikovu sposobnost da misaono manipulira brojevima te omogućuje učenicima da koriste različite pristupe, poput rastavljanja, zaokruživanja ili kombiniranja metoda, što pomaže u razvijanju fleksibilnosti i vještine misaonog računanja.

### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

**Rastavljanje brojeva:** Učenici mogu rastaviti brojeve na komponente koje je lakše zbrajati. Na primjer, 91 se može rastaviti na  $90 + 1$ , a 108 na  $100 + 8$ . Tada se zbrajaju komponente: prvo desetice i stotice ( $90 + 100 = 190$ ), zatim jedinice ( $1 + 8 = 9$ ). Konačni rezultat je  $190 + 9 = 199$ .

**Zaokruživanje i prilagođavanje:** Učenici mogu zaokružiti 91 na 100 radi lakšeg zbrajanja ( $100 + 108 = 208$ ), a zatim oduzeti 9 da bi se prilagodili početnoj vrijednosti ( $208 - 9 = 199$ ). Ova strategija potiče razvoj osjećaja za brojeve i vještinu procjene.

**Kombinacija strategija:** Učenici također mogu koristiti kombinaciju gore navedenih metoda, ovisno o njihovim individualnim preferencijama i razini razumijevanja, što pomaže u prilagodbi procesa računanja njihovim potrebama.



Histogram 2: Distribucija podataka varijable 91+108

Statistički podaci prikazuju rezultate sudionika na zadatku "91 + 108". U ovom istraživanju sudjelovalo je 43 osobe. Prosječna točnost odgovora iznosi 83.7%, što znači da je većina sudionika točno riješila zadatak. Standardna devijacija je 0.37, što ukazuje na to da su odgovori većine sudionika bili slični, s malim odstupanjem od prosjeka.

Ovi podaci sugeriraju da je većina ispitanika uspješno riješila zadatak "91 + 108".

### 3. zadatak $(8 \cdot 7) \cdot 25 =$

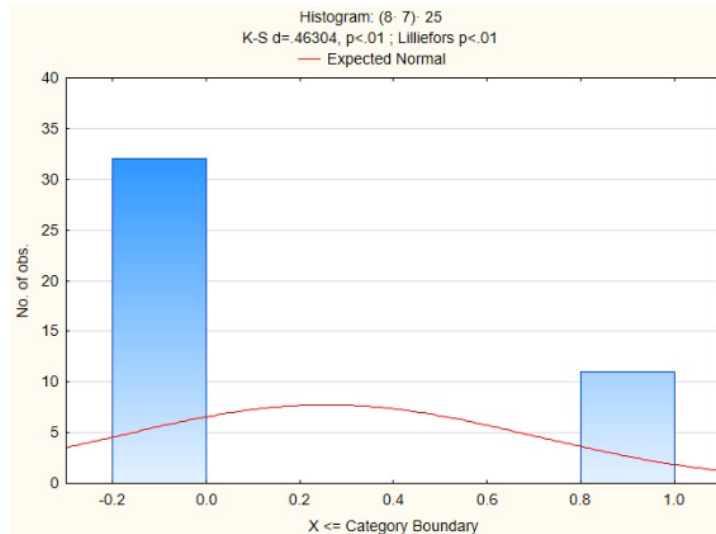
Ovim zadatkom usavršavaju se vještine množenja većih brojeva i uče kako pravilno redati operacije. Zadatak uključuje operaciju množenja s upotrebom zagrada, što pruža priliku za primjenu pravila prioriteta operacija. Učenici prvo rješavaju izraz unutar zagrada  $(8 \cdot 7)$ , a zatim rezultat množe s 25, što pomaže u pravilnom razumijevanju redoslijeda operacija. Međutim rješavanjem zadatka  $(8 \cdot 7) \cdot 25$  učenici mogu razviti različite strategije za rješavanje matematičkih problema. Na primjer, mogu koristiti asocijativnost (grupiranje) i komutativnost.

Zadatak  $(8 \cdot 7) \cdot 25$  je odabran zbog svoje umjerene složenosti. Iako zadatak nije pretjerano težak, uključuje nekoliko koraka u rješavanju, što učenicima pruža izazov, ali istovremeno ostaje unutar njihovih mogućnosti. Ovaj zadatak nudi priliku za različite pristupe množenja, poput  $(8 \cdot 25) \cdot 7$  ili  $8 \cdot (7 \cdot 25)$ .

#### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Prvo se rješava izraz unutar zagrada, prema pravilima prioriteta operacija. To znači da prvo računamo  $8 \cdot 7$  odnosno računanje unutar zagrada  $\rightarrow 8 \cdot 7 = 56$  Nakon što smo dobili rezultat 56, množi se s 25  $\rightarrow 56 \cdot 25 = 1400$

Učenici mogu koristiti alternativne strategije kako bi lakše riješili zadatak. Umjesto da prvo pomnože  $8 \cdot 7$ , mogu prvo izračunati  $8 \cdot 25$  jer je množenje komutativno:  $8 \cdot 25 = 200$ . Zatim taj rezultat pomnože sa 7  $\rightarrow 7 \cdot 200 = 1400$



Histogram 3: Distribucija podataka varijable  $(8 \cdot 7) \cdot 25$

Statistički podaci prikazuju rezultate sudionika na zadatku " $(8 \cdot 7) \cdot 25$ ". U ovom istraživanju sudjelovalo je 43 osobe. Prosječna točnost odgovora iznosi 25.6%, što znači da je manji broj sudionika točno riješio zadatak. Standardna devijacija iznosi 0.44, što ukazuje na relativno veće odstupanje u rezultatima sudionika.

Analiza rezultata upućuje na to da su ispitanici imali znatno veće poteškoće s rješavanjem zadatka " $(8 \cdot 7) \cdot 25$ ". Prosječna točnost na ovom zadatku bila je znatno niža u usporedbi s prethodnima, što sugerira da su ispitanici imali problema s prepoznavanjem i iskorištavanjem veze između brojeva 25 i 8 ( $25 \cdot 8 = 200$ ), koja bi mogla pojednostavniti računanje.

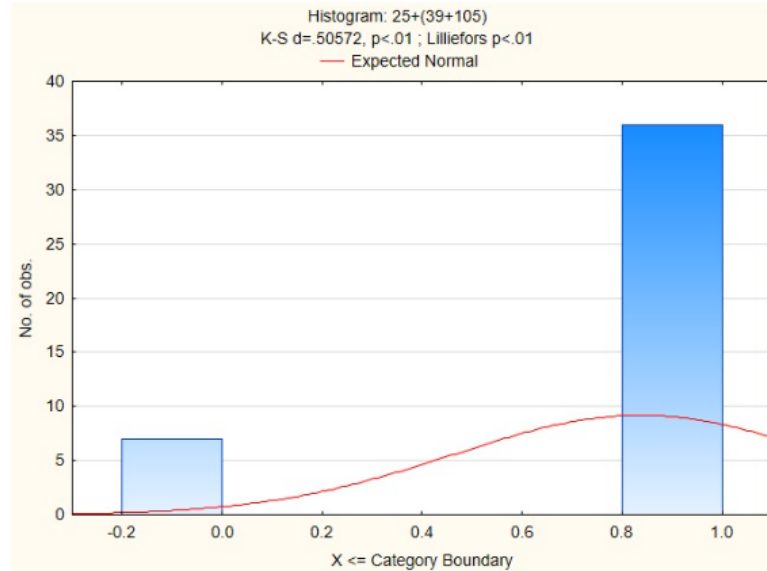
#### 4. zadatak $25 + (39 + 105) =$

Ovaj zadatak omogućuje provjeru i vježbanje osnovnih operacija zbrajanja. Uključuje upotrebu zagrada, što omogućuje učenicima da primijene pravilo prioriteta operacija. Cilj ovog zadatka je upotreba svojstava zbrajanja u kojem je poželjno da učenici uoče mogućnost zbrajanja  $105 + 25$  odnosno da u ovom zadatku primijene svojstvo asocijativnosti. Iako je zadatak jednostavan, uključuje višeznamenaste brojeve, što zahtijeva određenu koncentraciju i preciznost.

#### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Učenici ovaj zadatak mogu riješiti takoš da prvo zbroje  $105 + 25 = 130$  te 130 zbroje s brojem 39 što dovodi do rezultata 169.

Primjena pravila zagrada što znači da prema pravilima prioriteta operacija, prvo treba izračunati izraz unutar zagrada, što znači da se prvo zbrajaju brojevi  $39 + 105 = 144$ . Nakon toga slijedi zbrajanje s 25 jer nakon što smo izračunali izraz unutar zagrada, dobiveni rezultat 144 zbraja se s brojem 25  $\rightarrow 25 + 144 = 169$



Histogram 4: Distribucija podataka varijable 25+(39+105)

Deskriptivna statistika prikazuje rezultate ispitanika na zadatku "91 + 108". Od ukupno 43 ispitanika, prosječan postotak točnih odgovora iznosi 83,72%. To znači da su ispitanici u prosjeku točno riješili više od 83% zadatka, što ukazuje na relativno visoku uspješnost.

Neki ispitanici imali poteškoća s ovim zadatkom, dok su drugi bili vrlo uspješni. Standardna devijacija iznosi 0,373544, što ukazuje na određenu raznolikost u rezultatima. Veća standardna devijacija znači da postoji širi raspon rezultata, odnosno veća heterogenost među ispitanicima.

Na temelju ovih podataka možemo zaključiti da je većina ispitanika uspješno riješila zadatak, s obzirom na visoki prosjek točnih odgovora. Međutim, postojale su određene razlike u rezultatima, što sugerira da su neki ispitanici imali bolju vještinu misaonog računanja, dok su drugi pokazali slabije rezultate.



## 5. zadatak $1710 \div 10 =$

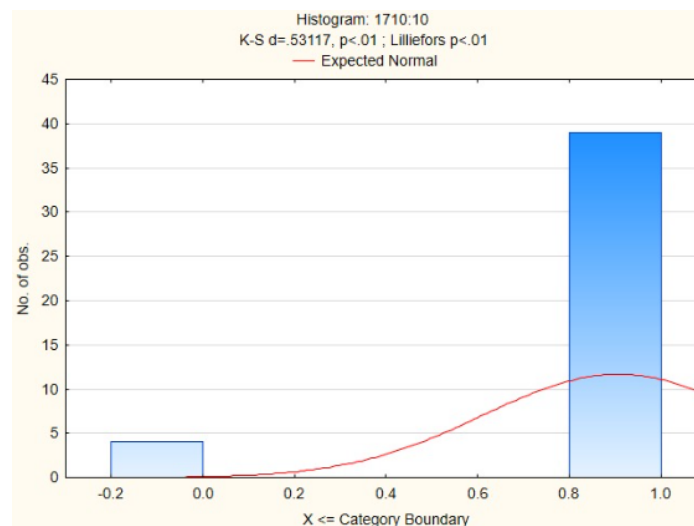
Zadatak  $1710 \div 10$  omogućuje učenicima vježbanje dijeljenja, što je jedna od ključnih matematičkih operacija. Cilj zadatka je provjeriti koliko su učenici vješti primijeniti osnovne strategije dijeljenja i razumjeti koncept dijeljenja višeznamenkastih brojeva s višekratnicima desetice. Ovaj zadatak pomaže učenicima da steknu sigurnost i vještinu u dijeljenju višeznamenkastih brojeva te primjenu naučenih pravila dijeljenja brojeva.

NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Prepoznavanje jednostavnosti dijeljenja: Budući da dijelimo broj koji završava nulom možemo jednostavno "odrezati" jednu nulu s kraja broja. Ovaj princip temelji se na pravilu da kada dijelimo broj s 10, broj se smanjuje za jedan red veličine.

Izvođenje dijeljenja  $\rightarrow 1710 \div 10 = 171$

Alternativna strategija: Učenici mogu zamisliti zadatak kao postupno dijeljenje. Prvo mogu podijeliti  $1700 \div 10 = 170$ , a zatim  $10 \div 10 = 1$ . Zbrojeći rezultate dobiju  $\rightarrow 170 + 1 = 171$



*Histogram 5: Distribucija podataka varijable 1710:10*

Deskriptivna statistika prikazuje rezultate ispitanika na zadanom testu. Od ukupno 43 ispitanika, prosječan postotak točnih odgovora iznosi 90,69%. To znači da su ispitanici u prosjeku riješili gotovo 91% zadataka točno. Većina ispitanika je postigla znatno bolje rezultate.

Standardna devijacija od 0,293903 ukazuje na to da su rezultati nešto manje raspršeni u usporedbi s prethodnim primjerom. To znači da su se rezultati ispitanika manje razlikovali jedni od drugih.

Na temelju ovih podataka možemo zaključiti da su ispitanici u cjelini vrlo uspješno riješili zadatak, s prosječnim rezultatom koji se približava 100%. Manja standardna devijacija ukazuje na to da su ispitanici imali sličnije razine znanja ili vještina potrebnih za rješavanje ovog zadatka.

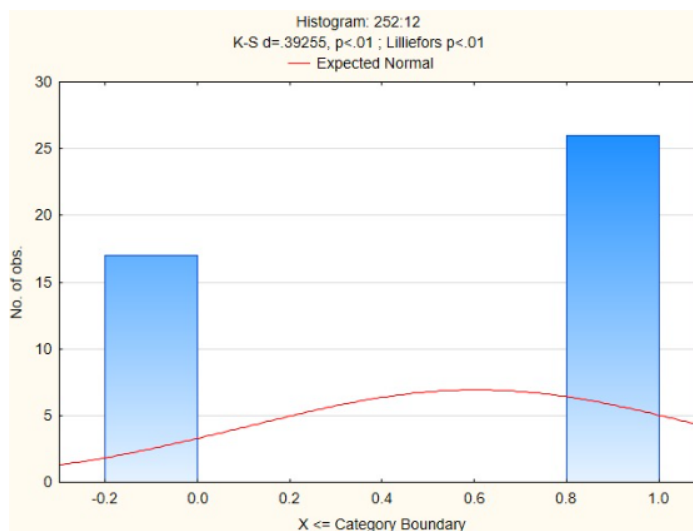
## 6. zadatak $252 : 12 =$

Kroz ovaj zadatak, učenici imaju priliku primijeniti koncept djeljivosti brojeva. Broj 252 se može ravnomjerno podijeliti s 12, što učenicima omogućuje da istraže svojstva brojeva i kako se dijele na jednake dijelove. Rješavanje ovog zadatka zahtijeva primjenu osnovnih aritmetičkih vještina, uključujući misaono računanje i dijeljenje bez ostatka. Zadatak  $252 \div 12$  odabran je zbog svoje umjerene složenosti međutim lako može doći do pogrešnog rezultata jer učenici tijekom računanja zamišljaju pisano dijeljenje.

### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Učenici mogu pokušati direktno podijeliti 252 s 12  $\rightarrow 252 \div 12 = 21$

Alternativna strategija: Za učenike koji žele pojednostaviti postupak, mogu razložiti broj 252 na manje dijelove. Na primjer, mogu prvo podijeliti  $240 \div 12 = 20$  i zatim  $12 \div 12 = 1$ . Zbrojeći rezultate dobiju  $20 + 1 = 21$



*Histogram 6: Distribucija podataka varijable 252:12*

Prosječan rezultat ispitanika na ovom zadatku je 60,46%. To znači da su ispitanici u prosjeku riješili nešto više od polovice zadataka točno.

Postoje značajne razlike u znanju ili vještinama među ispitanicima. Dok su neki ispitanici postigli maksimalan broj bodova, drugi nisu uspjeli riješiti niti jedan zadatak točno.

Standardna devijacija od 0,494712 je relativno visoka, što potvrđuje veliku raznolikost u rezultatima. To znači da se rezultati ispitanika znatno razlikuju jedni od drugih, odnosno da postoji velika heterogenost u skupini ispitanika.

Na temelju ovih rezultata možemo zaključiti da je zadatak predstavljen varijablom "252 : 12" bio relativno težak za ispitanike. Iako je prosječan rezultat iznad 50%, što ukazuje na određenu razinu uspješnosti, velika varijabilnost u rezultatima sugerira da su samo neki ispitanici uspjeli u potpunosti savladati potrebne vještine ili znanja. Postoji mogućnost da je došlo do većeg broja pogrešnih odgovora zbog zamišljanja pisanog računa.

**7.zadatak:  $(4 \cdot 13) \cdot 25 =$**

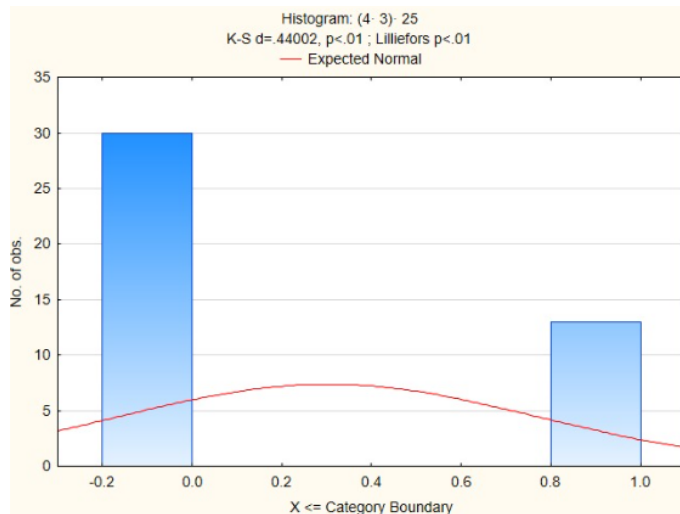
Kroz ovaj zadatak, učenici mogu primijeniti pravila prioriteta operacija (zagrada, eksponenti, dijeljenje, množenje, zbrajanje, oduzimanje). Moraju prvo riješiti izraze unutar zagrada, a zatim izvršiti množenje, što pomaže u razumijevanju kako pravilno redati operacije. Kroz korištenje distributivnosti množenja i drugih metoda, učenici mogu naučiti kako pristupiti i riješiti zadatke s više koraka. Iako zadatak  $(4 \cdot 13) \cdot 25$  nije pretjerano složen ipak uključuje primjenu osnovnih pravila množenja i prioriteta operacija. Ovaj zadatak pruža priliku za primjenu distributivnosti množenja. Učenici mogu koristiti distributivni zakon za olakšavanje rješavanja izraza, na primjer, razlomiti zadatak na jednostavnije dijelove kao što su  $(4 \cdot 25) \cdot 13$  ili  $(13 \cdot 25) \cdot 4$ .

NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Metoda misaonog rješavanja zadatka  $(4 \cdot 13) \cdot 25$  temelji se na pravilnom redosljedju izvođenja operacija i korištenju strategija za jednostavnije množenje.

Primjena pravila zagrada odnosi se na to da se prvo se rješava izraz unutar zagrada, prema matematičkom pravilu prioriteta. To znači da se prvo izvodi računanje unutar zgrade  $\rightarrow 4 \cdot 13 = 52$  Zatim se prelazi na množenje s 25. Dobiveni rezultat 52 zatim se množi s 25  $\rightarrow 52 \cdot 25 = 1300$

Alternativna strategija: Učenici mogu primijeniti različite strategije kako bi olakšali računanje. Na primjer, mogu prvo pomnožiti  $4 \cdot 25 = 100$ , a zatim taj rezultat pomnožiti s 13  $\rightarrow 100 \cdot 13 = 1300$



*Histogram 7: Distribucija podataka varijable (4·13)·25*

Prosječan rezultat ispitanika na ovom zadatku je 30,23%. To znači da su ispitanici u prosjeku riješili nešto manje od trećine zadataka točno.

Raspon rezultata je prilično širok što nam ukazuje na to da postoje značajne razlike u znanju ili vještinama među ispitanicima. Dok su neki ispitanici postigli maksimalan broj bodova, drugi nisu uspjeli riješiti niti jedan zadatak točno.

Standardna devijacija od 0,464701 je relativno visoka, što potvrđuje veliku raznolikost u rezultatima. To znači da se rezultati ispitanika znatno razlikuju jedni od drugih, odnosno da postoji velika heterogenost u skupini ispitanika.

Na temelju ovih rezultata možemo zaključiti da je zadatak predstavljen varijablom "(4 ·13) · 25 " bio prilično zahtjevan za ispitanike. Iako je prosječan rezultat iznad 25% velika varijabilnost u rezultatima sugerira da su samo neki ispitanici uspjeli u potpunosti savladati potrebne vještine ili znanja.

Sposobnost prepoznavanja numeričkih veza utjecala je na uspješnost rješavanja zadataka. Iako su ispitanici uspješno primijenili strategiju prepoznavanja veze pri množenju 4 s 25, manji broj ih je uspio iskoristiti istu strategiju u zadatku s brojem 8, što je negativno utjecalo na njihove rezultate.

### 8. zadatak $21 \cdot 17 - 13 \cdot 21 =$

Zadatak  $21 \cdot 17 - 13 \cdot 21$  omogućuje vježbanje dviju ključnih matematičkih operacija: množenja i oduzimanja. Za točno rješavanje zadatka potrebno je razumijevanje distributivnosti i zajedničkog faktora, odnosno uočavanje zajedničkog faktora (broj 21) u oba člana izraza. Ovo je prilika za prikazivanje i primjenu distributivnog zakona u matematici, gdje se izraz može pojednostaviti pomoću faktorizacije:  $21 \cdot (17 - 13)$

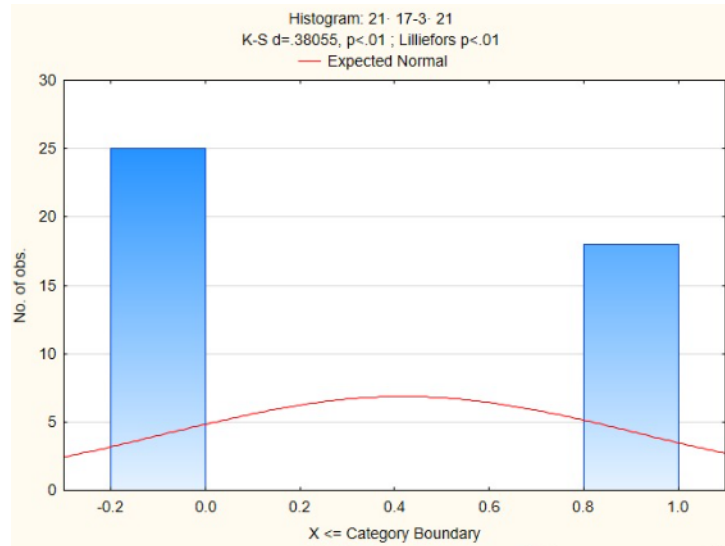
Metoda misaonog rješavanja zadatka  $21 \cdot 17 - 13 \cdot 21$  temelji se na pravilnoj primjeni operacija množenja i oduzimanja te prepoznavanju zajedničkog faktora.

#### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Potrebno je znati primijeniti prioritete operacija što znači da se prema pravilima matematike, prvo treba izvesti množenje, a zatim oduzimanje. Računanje množenja izvodi se na način da prvo računamo  $21 \cdot 17 = 357$  zatim računamo  $13 \cdot 21 = 273$ . Slijedeći korak je oduzimanje rezultata:

$$357 - 273 = 84$$

Alternativna strategija: Učenici mogu primijetiti da se broj 21 pojavljuje u oba dijela zadatka, pa mogu prvo izdvojiti zajednički faktor:  $21 \cdot (17 - 13) = 21 \cdot 4 = 84$



*Histogram 8: Distribucija podataka varijable 21.17-13.21*

Prosječan rezultat ispitanika na zadatku "21 · 17 - 13 · 21" iznosi 41,86%. Ovaj rezultat sugerira da su ispitanici imali poteškoća s ovim zadatkom, budući da je manje od polovice zadataka točno riješeno. Rezultat ukazuje na to da zadatak nije bio lako savladiv za većinu ispitanika, ali nisu svi ispitanici imali jednake poteškoće jer postoji varijabilnost u rezultatima. Postojanje značajnih razlika u znanju i vještinama među ispitanicima.

Standardna devijacija od 0,499169 ukazuje na relativno veliku varijabilnost rezultata. To znači da se rezultati ispitanika znatno razlikuju, odnosno da postoji velika heterogenost u ovoj skupini.

Na temelju ovih podataka možemo zaključiti da je zadatak "21 · 17 - 13 · 21" bio srednje zahtjevan za ispitanike. Iako su neki postigli maksimalan rezultat, značajan dio ispitanika imao je poteškoća u rješavanju ovog zadatka.



### 9. zadatak $152 - 87 =$

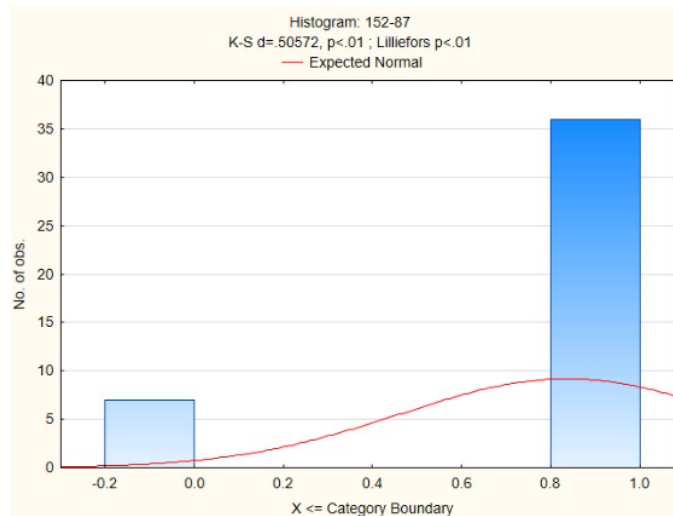
Ovaj zadatak može uključivati razumijevanje pojma "posuđivanja" u oduzimanju odnosno "prelaska" prilikom oduzimanja, kada se gornji broj u nekoj koloni ne može izravno oduzeti od donjeg broja. Zadatak omogućuje primjenu metode postupnog oduzimanja, gdje učenici rješavaju izraz korak po korak, od desnih znamenki prema lijevima. Ovo im pomaže da bolje razumiju i pravilno primjenjuju pravila oduzimanja.

#### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Metoda misaonog rješavanja zadatka  $152-87$  temelji se na osnovnoj operaciji oduzimanja većih brojeva.

Izvođenje oduzimanja odnosno prvo izravno oduzimamo broj 87 od 152  $\rightarrow 152-87=65$

Učenici mogu koristiti metodu razlaganja brojeva za lakše oduzimanje. Na primjer, prvo oduzmu 87 od 150, a zatim dodaju 2, jer je  $152 = 150 + 2 \rightarrow 150 - 87 = 63$  i  $63 + 2 = 65$



*Histogram 9: Distribucija podataka varijable 152-87*

Rezultati ispitanika na zadatku označenom kao "152-87" otkrivaju da je prosječna uspješnost bila 83,72%, što znači da su ispitanici u prosjeku točno riješili više od 80% zadatka. Ovaj rezultat sugerira da su ispitanici općenito bili uspješni u rješavanju zadatka, jer su postigli visok postotak točnih odgovora.

Neki su ispitanici u potpunosti točno riješili zadatak, dok drugi nisu uspjeli postići niti jedan točan rezultat. Ovaj raspon ukazuje na prisutnost određene razlike u razini znanja ili vještina među ispitanicima, iako je generalna razina uspješnosti ostala visoka.

Standardna devijacija iznosi 0,373544, što pokazuje umjerenu varijabilnost rezultata. To znači da su rezultati relativno raspršeni oko srednje vrijednosti. Dakle, iako su neki ispitanici imali različite rezultate, većina je bila prilično blizu prosječnom postignuću. Ova standardna devijacija upućuje na to da, unatoč nekim razlikama među ispitanicima, razina znanja ili vještina potrebnih za rješavanje zadatka nije bila previše heterogena.

Na temelju ovih podataka možemo zaključiti da je zadatak bio razumljiv većini ispitanika i da su ga uspješno riješili, unatoč nekim pojedinačnim razlikama u postignućima.

### 10.zadatak $24 \cdot (6 : 2) =$

Ovaj zadatak uključuje zagrade, što učenike potiče na primjenu pravila prioriteta operacija. Učenici moraju pažljivo pratiti redoslijed operacija i primijeniti svoje znanje kako bi došli do točnog rješenja. Zadatak  $24 \cdot (6 : 2)$  odabran je kako bi učenici vježbali primjenu osnovnih pravila matematike, uključujući pravilnu primjenu zagrada i redoslijeda operacija. Zadatak je jednostavan, ali istovremeno zahtijeva pažnju i razumijevanje osnovnih koncepata. Jasan je i pregledan, što omogućuje pravilnu primjenu pravila matematike bez dodatnih komplikacija

#### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

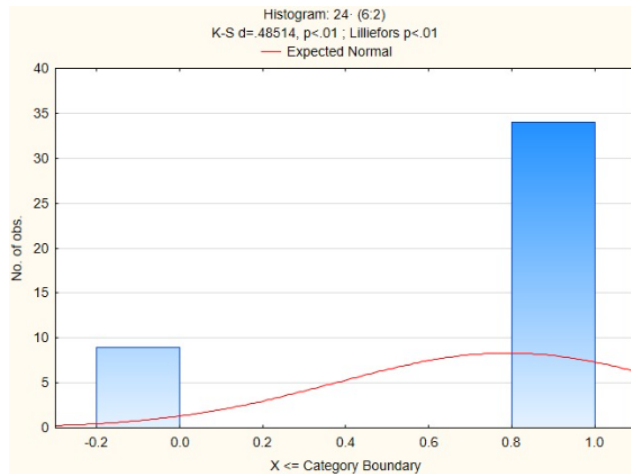
Zadatak  $24 \cdot (6 \div 2)$  može se riješiti na više načina, a svaki način pruža učenicima priliku za razvoj misaonih strategija i fleksibilnosti u rješavanju problema.

Prema pravilima prioriteta operacija, prvo izračunavamo izraz unutar zagrada  $\rightarrow 6 : 2 = 3$ , a zatim množenje  $\rightarrow 24 \cdot 3 = 72$ . Ovo je najjednostavniji i najbrži način rješavanja, gdje slijedimo redoslijed operacija.

Može se riješiti postupnim množenjem i dijeljenjem tako da se prvo pomnoži cijeli broj izvan zagrada s brojem unutar zagrada, a zatim podijeliti rezultat. Primjer  $24 \cdot 6 = 144$ , a nakon toga, rezultat se dijeli s 2  $\rightarrow 144 \div 2 = 72$

Jedan od načina je razlaganje broja 24. Broj 24 možemo razložiti na faktore, npr.  $24 = 12 \cdot 2$ , pa postupak možemo izvesti ovako  $\rightarrow (12 \cdot 2) \cdot (6 \div 2)$ . Prvo rješavamo unutar zagrada  $\rightarrow 6 : 2 = 3$ . Zatim se izraz svodi na  $\rightarrow 12 \cdot 2 \cdot 3$ . Prvo pomnožimo  $12 \cdot 3 = 36$  pa  $36 \cdot 2 = 72$

Sljedeća strategija jest mentalna u kojoj se odmah može prepoznati veza između dijeljenja i množenja, pa mogu zadatak postaviti kao  $\rightarrow 24 \cdot (6 : 2) = (24 \cdot 6) : 2$ . Prvo se izračuna  $24 \cdot 6 = 144$ , zatim podijele  $144 \div 2 = 72$



Histogram 10: Distribucija podataka varijable 24·(6:2)

Prosječna uspješnost: Prosječni postotak točnih odgovora na ovom zadatku je 79,07%. To znači da su ispitanici, u prosjeku, riješili gotovo 80% zadataka točno. Ovaj rezultat ukazuje na relativno visoku razinu razumijevanja osnovnih matematičkih operacija unutar ispitane skupine.

Iako je prosječna uspješnost visoka, rezultati se značajno razlikuju među ispitanicima Standardna devijacija od 0,411625 je relativno niska, što ukazuje na manju raznolikost u rezultatima u usporedbi s nekim prethodnim zadacima. To znači da su se rezultati ispitanika manje razlikovali jedni od drugih, odnosno da je postojao veći stupanj homogenosti u skupini ispitanika.

Visok prosjek i relativno niska standardna devijacija sugeriraju da je većina ispitanika uspješno riješila predloženi matematički zadatak.

Na temelju dostupnih podataka, možemo zaključiti da su ispitanici u prosjeku pokazali dobro razumijevanje jednostavnih matematičkih operacija predstavljenih zadatkom "24 · ( 6 : 2 )".

## 11. zadatak 273 – 139 =

Zadatak 273 – 139 omogućuje učenicima vježbanje osnovne operacije oduzimanja, što je temeljna vještina u matematici. Ovaj zadatak može uključivati koncept "posuđivanja" ili "prelaska" prilikom oduzimanja, osobito kada se moraju oduzimati znamenke gdje je donja znamenka veća od gornje. Ovo je važan korak u razumijevanju složenijih matematičkih operacija i izgradnji solidnog matematičkog temelja.

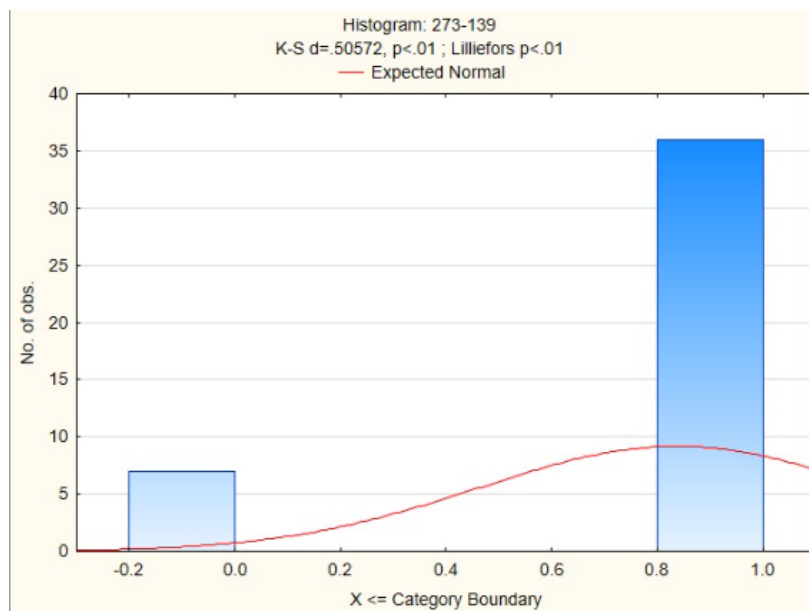
### NEKE OD METODA RJEŠAVANJA ZADATKA:

Zadatak 273 - 139 može se riješiti i misaono na nekoliko načina, a to su: Razlaganje brojeva u glavi odnosno razložiti brojeve u dijelove koje je lakše misaono oduzeti .

Razmišljamo o broju 273 kao  $270 + 3$ , a o broju 139 kao  $130 + 9$ . Zatim prvo oduzmemo  $270 - 130 = 140$ . Nakon toga, oduzimamo  $3 - 9$ , što je  $-6$ . Na kraju zbrojimo rezultat:  $140 - 6 = 134$ .

Jedna od metoda je zaokruživanje brojeva u glavi. Učenici mogu misaono zaokružiti brojeve kako bi se lakše snalazili. Umjesto da odmah oduzimaju 139 od 273, mogu zaokružiti 139 na 140 jer je to bliži okrugli broj. Prvo oduzmemo  $273 - 140 = 133$ . Budući da smo oduzeli 1 više nego što treba, dodajemo ga natrag:  $133 + 1 = 134$ . Ova metoda zaokruživanja brojeva pomaže učenicima da brže dođu do rješenja koristeći okrugle brojeve.

Rješavanje u dva koraka pa u takvoj metodi učenici misaono razdvoje oduzimanje u dva jednostavnija koraka. Prvo oduzmu 100 od 273, što daje 173. Zatim oduzmu preostalih 39 od 173, što daje 134.



Histogram 11: Distribucija podataka varijable 273-139

Statistički podaci prikazuju rezultate sudionika na zadatku "273 - 139". U istraživanju je sudjelovalo 43 osobe. Prosječna točnost odgovora iznosi 83.7%, što znači da je većina sudionika točno riješila zadatak. Standardna devijacija iznosi 0.37, što pokazuje da su odgovori sudionika imali umjerena odstupanja od prosjeka.

Ovi podaci sugeriraju da je većina ispitanika uspješno riješila zadatak "273 - 139", uz određene varijacije u točnosti.

## 12.zadatak $24 + 33 =$

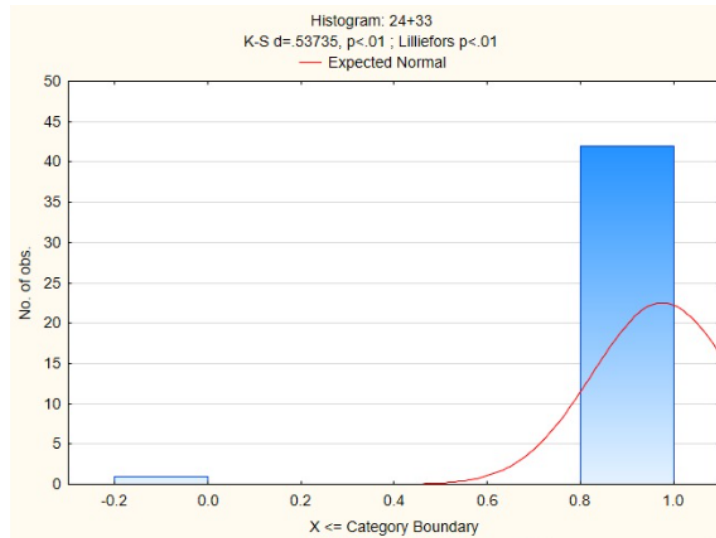
Zadatak  $24 + 33$  omogućuje učenicima vježbanje osnovne operacije zbrajanja, koja je ključna za matematičko obrazovanje. Zadatak je odabran zbog svoje jednostavnosti i jasnoće, što omogućuje učenicima da se usmjere na osnovnu operaciju zbrajanja bez dodatnih komplikacija. Ovaj zadatak omogućuje primjenu osnovnih pravila zbrajanja, uključujući prebacivanje u novu desetice.

Zadatak  $24 + 33$  može se riješiti na nekoliko različitih načina, a svaki način može pomoći učenicima da razviju vještine misaonog računanja i strategije za brzo zbrajanje.

Izravno zbrajanje koje je najjednostavniji i najbrži način je izravno zbrajanje brojeva:  $24 + 33 = 57$

Zatim razlaganje brojeva. Brojevi se mogu razložiti na desetice i jedinice kako bi se zbrajanje olakšalo. Na primjer:  $24 = 20 + 4$  i  $33 = 30 + 3$ . Zbrajamo desetice:  $20 + 30 = 50$  pa zbrajamo jedinice:  $4 + 3 = 7$  i na kraju, desetice i jedinice se zbrajaju zajedno:  $50 + 7 = 57$

Zadatak se može riješiti i korištenjem kompenzacije što znači da učenici mogu zaokružiti jedan broj na najbližu deseticu kako bi si olakšali računanje. Na primjer, 24 mogu zamisliti kao 25 (dodaju 1), a kasnije taj 1 oduzmu:  $25 + 33 = 58$ . Zatim oduzimamo 1 koji smo dodali na početku:  $58 - 1 = 57$



Histogram 12: Distribucija podataka varijable 24+33

Statistički podaci prikazuju rezultate sudionika na zadatku "24 + 33". U ovom istraživanju sudjelovalo je 43 osobe. Prosječna točnost odgovora iznosi 97.7%, što znači da je gotovo sva većina sudionika točno riješila zadatak. Standardna devijacija iznosi 0.15, što pokazuje da su odgovori sudionika bili vrlo slični, s minimalnim odstupanjem od prosjeka.

Ovi podaci upućuju na to da je većina ispitanika uspješno riješila zadatak "24 + 33".



## **RASPRAVA:**

Cilj ovog istraživanja bilo je utvrditi uspješnost učenika u misaonom računanju s prirodnim brojevima. Na temelju dobivenih rezultata može se zaključiti da su ispitanici uspješno riješili osam od ukupno dvanaest zadataka (66,67%), dok su niži rezultati zabilježeni kod preostalih četiriju zadataka.

Kod prva dva zadatka koji obuhvaćaju zbrajanje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva ispitanici su uglavnom točno riješili zadatke.

Međutim već treći zadatak kod nekih ispitanika stvorio je problem. Točno ga je riješilo svega 25,6% ispitanika, a ostali odgovori bili su raznoliki. Zadatak uključuje množenje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva  $(8 \cdot 7) \cdot 25$  u kojemu ispitanici nisu uspjeli prepoznati svojstvo asocijativnosti nego su vjerojatno prvo rješavali zgrade pa onda taj rezultat množili s 25. Osim toga nisu prepoznali vezu između brojeva 8 i 25 što. Još jedna moguća greška je krivo pomnoženi brojevi.

Četvrti zadatak kao i prva dva odnose se na zbrajanje brojeva, a ispitanici su u imali uspješne rezultate. Postoji mogućnost da su ovom zadatku prepoznali svojstvo asocijativnosti.

Peti zadatak odnosi se na dijeljenje četiroznamenkastog broja s deseticom i u su rezultati bili uspješni.

Sljedeća tri zadatka bila su riješena lošije u odnosu na ostale zadatke a odnose se na množenje i dijeljenje.

Kod šestog zadatka  $252 : 12$  točne odgovore je imalo nešto više od polovice ispitanika dok su ostali imali raznolike odgovore. Mogući problem kod rješavanja ovog zadatka su nedovoljna automatizacija računskih operacija, pad koncentracije jer je ovaj zadatak u sredini, zamišljanje pisanog oblika računa i zanemarivanje ostatka.

Sedmi zadatak je također točno odgovorilo malo ispitanika, svega 3,23%, a ostali ispitanici imali su raznolike odgovore. Ovaj zadatak može imati iste probleme kao i treći zadatak.

Osmi zadatak ima 41,86% točnih odgovora i ostale rezultate s raznolikim odgovorima. Ispitanici vjerojatno nisu pravilno primijenili redoslijed operacija, nisu uočili da se zadatak može riješiti svojstvom distributivnosti ili su imali greške u osnovnom množenju.

Rezultati istraživanja pokazuju da je 66.67% zadataka točno riješeno, što sugerira zadovoljavajuću, ali nedovoljno visoku razinu točnosti. Ispitanici su uspješno riješili osam od dvanaest zadataka, s najboljim rezultatima kod zadataka vezanih za zbrajanje. Međutim, poteškoće su se javile kod zadataka koji uključuju množenje i dijeljenje, osobito u prepoznavanju svojstava kao što su asocijativnost i redoslijed operacija. Ovo sugerira potrebu za dodatnim vježbama i podrškom u razvoju temeljnih matematičkih vještina kako bi se poboljšala točnost i učinkovitost u rješavanju složenijih misaonih zadataka. Ovakvi rezultati ukazuju na to da ispitanici imaju dobru sposobnost misaonog računanja, ali da postoji prostor za daljnje usavršavanje ove vještine. Osim toga, istraživanje je pokazalo da je učenicima u prosjeku trebalo oko 10 minuta za rješavanje svih zadataka.

## 14.ZAKLJUČAK

Matematika je ključni predmet u općem obrazovanju, koji doprinosi razumijevanju prirodne i društvene sredine od najranije dobi. Automatizacija osnovnih matematičkih operacija, poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva, ima presudnu ulogu u procesu učenja jer omogućuje učenicima stjecanje temeljnih misaonih vještina. U tom kontekstu, od izuzetne je važnosti da učenici razviju vlastite strategije za rješavanje matematičkih zadataka, čime potiču dublje razumijevanje i dugoročno uspješno svladavanje matematike. Ukoliko učenici ne savladaju osnovne matematičke vještine u ranom obrazovnom periodu, postoji velika vjerojatnost da će se suočiti s poteškoćama u kasnijem školovanju prilikom usvajanja novih sadržaja. Stoga je ključno da se u tom razdoblju učenicima pruži podrška u razvijanju temeljnih operacija i strategija za rješavanje zadataka, kako bi se osigurala njihova uspješnost u budućim fazama obrazovanja.

Rezultati ovog istraživanja pokazuju da su ispitanici imali solidnu, zadovoljavajuću, ali nedovoljno visoku razinu točnosti i preciznosti odgovora. Rezultati sugeriraju potrebu za dodatnim vježbanjem temeljnih matematičkih vještina kako bi se poboljšala točnost u složenijim misaonim zadacima posebice onih u kojima je postavljeno više operacija od jednom.

## 15. LITERATURA

1. Baroody, A.J. (2006). 'Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them'. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), str. 22-31. Dostupno na: <https://www.kentuckymathematics.org/docs/eerti-BaroodyTCM2006.pdf>
2. Devlin, K. (2008). *Matematički gen: Zašto ga svi imaju, ali ga većina ne rabi*. Zagreb: Algoritam.
3. Hrvatska enciklopedija. Dostupno na: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/oduzimanje>
4. Hughes, M. (1986). *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics*. 1. izd. Oxford: Basil Blackwell. Dostupno na: [https://archive.org/details/childrennumberdi00hugh\\_0](https://archive.org/details/childrennumberdi00hugh_0)
5. Knoblauch, J. (2001). *Učenje ne mora biti mučenje: 33 provjerene strategije za umni rad*. 2. izdanje. Zagreb: STEPress.
6. Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Zagreb: Educa.
7. Markovac, J. (1992). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
8. McIntosh, A. (2005). *Mental Computation: A strategies approach, Module 4 Two-digit whole numbers*. University of Tasmania. Dostupno na: <https://amsi.org.au>
9. Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2019). *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije: Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*. Zagreb: Ministarstvo znanosti i obrazovanja. Dostupno na: [https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT\\_kurikulum\\_1\\_71.pdf](https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf)
10. Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019. *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*. *Narodne novine*, 7/2019, str. 285. Dostupno na: [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)
11. Mittring, G. (2012). *Računati kao svjetski prvak: Matematički i vježbe pamćenja za svaki dan*. Zagreb: Mozak knjiga.

12. Musser, G. L., & Burger, W. F. (1988). Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach. New York : London, Macmillan.
13. Peteh, M. (2008). Matematika i igra za predškolce. 2. izmijenjeno izdanje. Zagreb: Alinea.
14. Reys, R. E. (1984). Mental Computation and estimation: Past, present and future. Elementary School Journal, 84, 546-557. Dostupno na:  
<https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/461383?journalCode=esj>
15. Sharma, M. (2001). Matematika bez suza. Lekenik: Ostvarenje.
16. Threlfall, J.E. (2002). Antimicrobial Drug Resistance in Salmonella: Problems and Perspectives in Food- and Water-Borne Infections. FEMS Microbiology Reviews, 26(2), str. 141-148. Dostupno na: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1574-6976.2002.tb00606.x>
17. Vlahović-Štetić, V., & Vizek-Vidović, V. (1998). Kladam se da možeš...: psihološki aspekti početnog poučavanja matematike. Zagreb: Korak po korak.
18. <https://eclkc.ohs.acf.hhs.gov/sites/default/files/pdf/supporting-math-skills-in-infants-and-toddlers.pdf>
19. <https://element.hr/wp-content/uploads/2020/06/unutra-12326.pdf>
20. [http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni\\_okvirni\\_kurikulum.pdf](http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf)

## 16. POPIS SLIKA

Slika 1: Duži način množenja .....	29
Slika 2: Kraći način množenja .....	29
Slika 3: Postupak množenja .....	29

# 17.PRILOZI



SVEUČILIŠTE  
U ZADRU  
UNIVERSITY  
OF ZADAR

ODJEL ZA IZOBRAZBU  
UČITELJA I ODGOJITELJA  
DEPARTMENT OF TEACHER AND  
PRESCHOOL TEACHER EDUCATION  
Ulica dr. Franje Tuškovića 21  
23000 Zadar, Hrvatska / Croatia

t: +385 53 345 943, 311 140  
f: +385 53 311 540  
URL: <http://www.unizd.hr>  
E-MAIL: [strucni.odjel@unizd.hr](mailto:strucni.odjel@unizd.hr)

Poštovani roditelji!

Za potrebe diplomskog rada studentice Paule Ikić studija integriranog preddiplomskog i diplomskog učiteljskog studija Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja, Sveučilišta u Zadru, provodimo istraživanje na temu „Misaono računanje kod učenika osnovne škole i odraslih ...“. Cilj ovog istraživanja je utvrditi strategije misaonog računanja kod djece školske dobi i starijih osoba.

Sukladno Etičkom kodeksu struke podaci dobiveni u ovom istraživanju bit će strogo povjerljivi i čuvani. Svi izvještaji nastali na temelju ovog istraživanja koristit će rezultate koji govore o grupi djece ove dobi općenito (nigdje se neće navoditi rezultati pojedinačnog sudionika). Dozvola za ispitivanje dobili smo od ravnatelja škole, a u skladu s Etičkim kodeksom struke, prije ispitivanja željeli smo Vas kao roditelje obavijestiti o istraživanju i zatražiti Vašu suglasnost.

Također, Vašoj djeci ćemo pobliže objasniti svrhu ispitivanja, odgovoriti na njihova pitanja, te ih zamoliti i za njihov pristanak za sudjelovanje u istraživanju. Nakon toga, ispitivanje će se obaviti samo na onim učenicima koji su pristali sudjelovati.

Aktivnosti predviđene planom istraživanja odobrilo je Stručno vijeće Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja Sveučilišta u Zadru. Ukoliko imate ikakva pitanja možete kontaktirati mentoricu. (doc. dr. sc. Maja Cindrić, email: [mcindric@unizd.hr](mailto:mcindric@unizd.hr)).

## SUGLASNOST

Suglasan sam da moje dijete MAGDALENA VUJASIN G.A.  
(prezime i ime, razred)

sudjeluje u istraživanju, uz pridržavanje Etičkog kodeksa i uz zaštitu tajnosti podataka (molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

Ana Vujasin  
(potpis roditelja)

DA  NE

ZADAR, 11. 6. 2024. (mjesto i datum)



SVEUČILIŠTE  
U ZADRU  
UNIVERSITY  
OF ZADAR

ODJEL ZA IZOBRAZBU  
UČITELJA I ODGOJITELJA  
DEPARTMENT OF TEACHER AND  
PRESCHOOL TEACHER EDUCATION  
Ulica dr. Franje Tuđmana 24 /  
51000 Zadar, Hrvatska / Croatia

t: +385 23 545 045, 511 540  
f: +385 23 511 540  
www: <http://www.unizd.hr>  
e-mail: [strosni.ode@unizd.hr](mailto:strosni.ode@unizd.hr)

Poštovani roditelji!

Za potrebe diplomskog rada studentice Paule Ikić studija integriranog preddiplomskog i diplomskog učiteljskog studija Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja, Sveučilišta u Zadru, provodimo istraživanje na temu „Misaono računanje kod učenika osnovne škole i odraslih ...“ Cilj ovog istraživanja je utvrditi strategije misaonog računanja kod djece školske dobi i starijih osoba.

Sukladno Etičkom kodeksu struke podaci dobiveni u ovom istraživanju bit će strogo povjerljivi i čuvani. Svi izvještaji nastali na temelju ovog istraživanja koristit će rezultate koji govore o grupi djece ove dobi općenito (nigdje se neće navoditi rezultati pojedinačnog sudionika). Dozvolu za ispitivanje dobili smo od ravnatelja škole, a u skladu s Etičkim kodeksom struke, prije ispitivanja željeli smo Vas kao roditelje obavijestiti o istraživanju i zatražiti Vašu suglasnost.

Također, Vašoj djeci ćemo pobliže objasniti svrhu ispitivanja, odgovoriti na njihova pitanja, te ih zamoliti i za njihov pristanak za sudjelovanje u istraživanju. Nakon toga, ispitivanje će se obaviti samo na onim učenicima koji su pristali sudjelovati.

Aktivnosti predviđene planom istraživanja odobrilo je Stručno vijeće Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja Sveučilišta u Zadru. Ukoliko imate ikakva pitanja možete kontaktirati mentoricu. (doc. dr. sc. Maja Cindrić, email: [mcindric@unizd.hr](mailto:mcindric@unizd.hr)).

#### SUGLASNOST

Suglasan sam da moje dijete PETRA LONČAR  
(prezime i ime, razred)

sudjeluje u istraživanju, uz pridržavanje Etičkog kodeksa i uz zaštitu tajnosti podataka (molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

K. Lončar  DA  NE  
(potpis roditelja)

Zadar, 11.06.2024. (mjesto i datum)





SVEUČILIŠTE  
U ZADRU  
UNIVERSITY  
OF ZADAR

ODJEL ZA IZOBRAZBU  
UČITELJA I ODGOJITELJA  
DEPARTMENT OF TEACHER AND  
PRESCHOOL TEACHER EDUCATION  
Ulica dr. Franje Tuđmana 241  
23000 Zadar, Hrvatska / Croatia

t: +385 23 345 043, 311 540  
f: +385 23 311 540  
URL: <http://www.unizd.hr>  
E-MAIL: [strucni.odjel@unizd.hr](mailto:strucni.odjel@unizd.hr)

Poštovani roditelji!

Za potrebe diplomskog rada studentice Paule Ikić studija integriranog preddiplomskog i diplomskog učiteljskog studija Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja, Sveučilišta u Zadru, provodimo istraživanje na temu „Misaono računanje kod učenika osnovne škole i odraslih ...“ Cilj ovog istraživanja je utvrditi strategije misaonog računanja kod djece školske dobi i starijih osoba.

Sukladno Etičkom kodeksu struke podaci dobiveni u ovom istraživanju bit će strogo povjerljivi i čuvani. Svi izvještaji nastali na temelju ovog istraživanja koristit će rezultate koji govore o grupi djece ove dobi općenito (nigdje se neće navoditi rezultati pojedinačnog sudionika). Dozvolu za ispitivanje dobili smo od ravnatelja škole, a u skladu s Etičkim kodeksom struke, prije ispitivanja željeli smo Vas kao roditelje obavijestiti o istraživanju i zatražiti Vašu suglasnost.

Također, Vašoj djeci ćemo pobliže objasniti svrhu ispitivanja, odgovoriti na njihova pitanja, te ih zamoliti i za njihov pristanak za sudjelovanje u istraživanju. Nakon toga, ispitivanje će se obaviti samo na onim učenicima koji su pristali sudjelovati.

Aktivnosti predviđene planom istraživanja odobrilo je Stručno vijeće Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja Sveučilišta u Zadru. Ukoliko imate ikakva pitanja možete kontaktirati mentoricu. (doc. dr. sc. Maja Cindrić, email: [mcindric@unizd.hr](mailto:mcindric@unizd.hr)).

#### SUGLASNOST

Suglasan sam da moje dijete BRAJIĆIĆ IVIĆ  
(prezime i ime, razred)

sudjeluje u istraživanju, uz pridržavanje Etičkog kodeksa i uz zaštitu tajnosti podataka (molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

M. Og. (DA) NE  
(potpis roditelja)

M. OG. 2024 (mjesto i datum)



SVEUČILIŠTE  
U ZADRU  
UNIVERSITY  
OF ZADAR

ODJEL ZA IZOBRAZBU  
UČITELJA I ODGOJITELJA  
DEPARTMENT OF TEACHER AND  
PRESCHOOL TEACHER EDUCATION  
Ulica dr. Franje Tuđmana 241  
23000 Zadar, Hrvatska i Croatia

t: +385 23 345 043, 311 540  
f: +385 23 311 540  
URL: <http://www.unizd.hr>  
E-MAIL: [strucni.odjel@unizd.hr](mailto:strucni.odjel@unizd.hr)

Poštovani roditelji!

Za potrebe diplomskog rada studentice Paule Ikić studija integriranog preddiplomskog i diplomskog učiteljskog studija Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja, Sveučilišta u Zadru, provodimo istraživanje na temu „Misaono računanje kod učenika osnovne škole i odraslih ...“ Cilj ovog istraživanja je utvrditi strategije misaonog računanja kod djece školske dobi i starijih osoba.

Sukladno Etičkom kodeksu struke podaci dobiveni u ovom istraživanju bit će strogo povjerljivi i čuvani. Svi izvještaji nastali na temelju ovog istraživanja koristit će rezultate koji govore o grupi djece ove dobi općenito (nigdje se neće navoditi rezultati pojedinačnog sudionika). Dozvolu za ispitivanje dobili smo od ravnateljice škole, a u skladu s Etičkim kodeksom struke, prije ispitivanja željeli smo Vas kao roditelje obavijestiti o istraživanju i zatražiti Vašu suglasnost.

Takoder, Vašoj djeci ćemo pobliže objasniti svrhu ispitivanja, odgovoriti na njihova pitanja, te ih zamoliti i za njihov pristanak za sudjelovanje u istraživanju. Nakon toga, ispitivanje će se obaviti samo na onim učenicima koji su pristali sudjelovati.

Aktivnosti predviđene planom istraživanja odobrilo je Stručno vijeće Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja Sveučilišta u Zadru. Ukoliko imate ikakva pitanja možete kontaktirati mentoricu. (doc. dr. sc. Maja Cindrić, email: [mcindric@unizd.hr](mailto:mcindric@unizd.hr)).

#### SUGLASNOST

Suglasan sam da moje dijete MAGDALENA VUJASIN 6.a  
(prezime i ime, razred)

sudjeluje u istraživanju, uz pridržavanje Etičkog kodeksa i uz zaštitu tajnosti podataka (molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

Ana Vujasin  
(potpis roditelja)

DA  NE

ZADAR, 11. 6. 2024. (mjesto i datum)



1

**1.  $98+59 =$**

2

**2.  $91 + 108 =$**

3

**3.  $(8 \cdot 7) \cdot 25 =$**

4

**4.  $25+(39+105)=$**

5

**5.  $1710:10=$**

6

**6.  $252:12 =$**

7

**7.  $(4 \cdot 13) \cdot 25=$**

8

**8.  $21 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 21=$**

9

**9.  $152-87 =$**

10

**10.  $24 \cdot (6:2) =$**

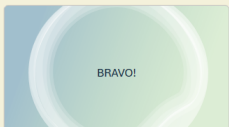
11

**11.  $273-139 =$**

12

**12.  $24+33=$**

13



14

\*